Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
Государственное Учреждение ДНР
Институт прикладной математики и механики (ИПММ)

На правах рукописи

Данилюк Даниил Анатольевич

УДК 531.38

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Специальность: 01.02.01– Теоретическая механика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Экземпляр диссертации идентичен
по содержанию с другими экземплярами,
которые были представлены
в диссертационный совет
Ученый секретарь диссертационного
совета Д 01.013.01
Ю.Б. Коносевич
Ю. Кон

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
профессор, академик НАНУ
Ковалев А.М.

Донецк – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации исследованы свойства параметров Родрига–Гамильтона в задачах линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в решениях уравнений Эйлера–Пуассона (Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса и др.) и для прецессионных движений твердого тела.

Актуальность темы исследования.

Математическое моделирование движений объектов небесной механики и техники (небесных тел, спутниковых систем, роботов, манипуляторов и др.) в случае, когда их деформациями можно пренебречь основано на модели абсолютно твердого тела. Это обстоятельство вызвало развитие в аналитической механике важного раздела – динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Степень разработанности темы исследований.

Динамика твердого тела, имеющего неподвижную точку, сформирована Ж. Даламбером, Л. Эйлером, Ж. Лагранжем, Л. Пуансо, С. Пуассоном, Г. Дарбу и другими. Значительный вклад в эту область аналитической механики внесли Ж. Лиувилль, Е. Гюссон, А. Пуанкаре, В. Гесс, К. Якоби, С.В. Ковалевская, Н.Е. Жуковский, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, С.А. Чаплыгин, Н. Ковалевский, Д.Н. Горячев (обзор полученных ими результатов дан в книгах [17, 30, 32]).

Развитие динамики твердого тела особенно интенсивно происходило в двух направлениях – создание аналитических методов интегрирования уравнений и поиск новых форм уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой; разработка геометрических методов кинематического истолкования движения.

Л. Пуансо представил движение тяжелого твердого тела посредством качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной горизонтальной (перпендикулярной вектору момента количества движения тела) плоскости. Он сформулировал общую теорему о том, что произвольное движение тела, отличное от равномерного вращения, представимо в виде качения без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Д. Сильвестр представлял движение тела качением без скольжения центральной поверхности второго порядка по одной из ее касательных плоскостей, остающейся неподвижной.

И. Мак–Кулах доказал следующее свойство движения свободного гиростата: гирационный эллипсоид тела, соответствующий точке опоры, проходит во все время движения через неподвижную точку в пространстве, лежащую на неизменном главном моменте количества движения.

Большой вклад в разработку методов истолкования внесли К. Якоби, В. Гесс и другие. Истолкование движения тела не всегда основывается на теореме Пуансо. Например, Н.Е. Жуковский при рассмотрении геометрических свойств свободного гиростата использовал свойства движения некоторого конуса по неподвижной плоскости в пространстве. Геометрическими исследованиями в динамике твердого тела занимались Ж. Дарбу, С.А. Чаплыгин.

В практических задачах определения ориентации объектов техники большую роль играет применение параметров Родрига–Гамильтона. Это связано с тем, что в отличие от углов Эйлера они не вырождаются при любом положении тела.

Параметры Родрига–Гамильтона использовались В.В. Козловым при выводе функции Гамильтона, А.А. Илюхиным, А.М. Ковалевым и автором диссертации при исследовании нормальных колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия.

Данная диссертация посвящена изучению колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, анализу зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и для прецессий твердого тела относительно вертикали.

Связь с научными планами, темами.

Исследования проводились в соответствии со следующими темами:

«Математические методы исследования задач устойчивости и управления динамических систем и их применение в динамике систем твердых тел». Срок выполнения – 2001–2005 гг. (Шифр темы 1.1.4.4; № темы по плану института 4.

Государственный регистрационный номер 0101U001094. Выполнялось по Постановлению Бюро Отделения математики НАН Украины от 06.12.2000 г., пр. №9; руководитель темы – член-корр. НАН Украины А.М. Ковалев);

«Управление пространственным движением механических систем с учетом существенной анизотропии, рассеяния энергии, неоднородного силового поля». Срок выполнения – 2002–2004 гг. (Шифр темы 1.1.4. Государственный регистрационный номер 0102U004563. Руководитель темы – член-корр. НАН Украины А.М. Ковалев);

«Управление и устойчивость гибридных систем и современные проблемы робототехники». Срок выполнения – 2006–2010 гг. (Номер темы по перспективному тематическому плану – III–5–06. Государственный регистрационный номер 0106U000044. Выполнялось по Постановлению Бюро Отделения математики НАН Украины от 27.10.2005 г., пр. №11; руководитель темы – член-корр. НАН Украины А.М. Ковалев);

«Разработка конструктивных методов теории управления и устойчивости с применением к задачам машиностроения». Срок выполнения – 2011–2015 гг. (Номер темы по перспективному тематическому плану – III–5–11. Государственный регистрационный номер 0111U000483. Выполнялось по Постановлению Бюро Отделения математики НАН Украины от 29.04.2010 г., пр. №5; руководитель темы – академик НАН Украины А.М. Ковалев).

Цель и задачи исследования.

Объектом исследования является задача о свойствах движения тяжелого твердого тела.

Предмет исследования – параметры Родрига–Гамильтона в изучении движения тяжелого твердого тела.

Цель исследования – анализ на основе применения параметров Родрига–Гамильтона нормальных линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела, получение зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и в решениях, которые описывают прецессионные движения.

Задачи исследования состоят в следующем:

1. Построение функции Гамильтона для случая, когда параметры Родрига–Гамильтона являются обобщенными координатами;

2. Исследование решений уравнений в вариациях для случая колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия;

3. Вывод формул, которые характеризуют разложения функции Гамильтона в задаче изучения нелинейных колебаний тяжелого твердого тела;

4. Нахождение зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и анализ их свойств;

5. Исследование свойств параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Метод исследования.

В диссертации используется метод инвариантных соотношений обыкновенных дифференциальных уравнений, аппарат интегрирования гамильтоновых уравнений на основе построения различных разложений функции Гамильтона, структура функциональных уравнений, задающих прецессионные движения тела и частные решения уравнений Эйлера–Пуассона.

Научная новизна полученных результатов:

1. Исследование линейных колебаний тяжелого твердого тела с использованием параметров Родрига–Гамильтона. Получение решений уравнений в вариациях и изучение их свойств.

2. Получение свойств нелинейных нормальных колебаний тяжелого твердого тела на основе проведенных в диссертации нормализации выражений для разложения функции Гамильтона.

3. Изучение свойств найденных в диссертации функциональных зависимостей параметров Родрига–Гамильтона для частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Определение структуры инвариантных соотношений для рассмотренных решений, записанные в параметрах Родрига–Гамильтона.

4. Нахождение параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений тяжелого твердого тела. Описание инвариантных соотношений в данных параметрах.

5. Исследование свойств параметров Родрига–Гамильтона для прецессионно-изоконических движений тела. Представление для данных движений инвариантных соотношений, содержащих только параметры Родрига–Гамильтона.

Содержание диссертации.

Два первых раздела диссертации посвящены соответственно обзору литературы по теме диссертации и изложению качественных методов исследования задач динамики (методу инвариантных соотношений, методу Пуансо кинематического истолкования движения, методу представления решения уравнений движения) и применению различных кинематических параметров (углов Эйлера, параметров Родрига–Гамильтона).

В третьем разделе рассмотрены линейные колебания тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия. Найдены решения уравнений в вариациях и выполнен анализ их аналитических свойств.

Четвертый раздел посвящен исследованию нелинейных колебаний тяжелого твердого тела. Выведена функция Гамильтона и рассмотрены преобразования членов этой функции в окрестности нижнего положения равновесия к нормальной форме. Дан анализ решений уравнений Гамильтона в случае нелинейных колебаний с точностью до членов четвертого порядка.

В пятом разделе исследованы частные решения уравнений Эйлера–Пуассона, Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса, Гриоли. Найдены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона в указанных решениях и определен вид инвариантных соотношений, содержащих только данные параметры.

Шестой раздел посвящен анализу свойств параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (маятниковые движений, регулярных прецессий, полурегулярных прецессий двух типов, прецессий общего вида и прецессионно-изоконических движений различных типов). Найдены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для данных движений и определена структура инвариантных соотношений на данные параметры для прецессионных движений.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы в Институте механики, в Институте математики (г. Киев), в научных и учебных учреждениях России (МАИ, МГУ, ИПМ), в Донецком государственном университете, в Национальном университете (г. Киев).

Личный вклад соискателя в совместных работах. Результаты по теме диссертации опубликованы в 6 научных статьях. Статьи [40, 41, 42] написаны соискателем без соавторства. В статьях [59, 60] А.М. Ковалеву принадлежит постановка задачи и анализ результатов, соискателю принадлежат исследования линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела. В статье [58] А.М. Ковалеву принадлежит постановка задачи, Г.В. Горру – анализ и классификация прецессионных движений, соискателю принадлежит результат по нахождению параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений.

Апробация. Результаты диссертации представлялись:

– на XI Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» (г. Донецк, 8–12 июня 2011г.) [43];

– на VIII Международной конференции «Системный анализ и управление» (г. Евпатория, 29 июня – 6 июля 2003г.) [44];

– на X Международной конференции «Системный анализ и управление» (г. Евпатория, 3–10 июля 2005г.) [45];

– на семинаре кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого университета (руководитель профессор Г.В. Горр);

– на семинаре отделов прикладной механики и технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в статьях [40–42, 58–60], тезисах докладов [43–45, 62].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физ.–мат. наук, профессору, академику НАН Украины, А.М. Ковалеву.

РАЗДЕЛ 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Исследование движения многих технических объектов (роботов, манипуляторов, ракет и других систем) базируется на моделях абсолютно твердого тела, гиростата и системы связанных твердых тел. Поэтому начатое в восемнадцатом веке Ж. Даламбером [142] и Л. Эйлером [146, 147] изучение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой актуально до настоящего времени. Это обстоятельство подчеркивают и монографии [5, 17, 30, 73, 113, 119, 129, 158], и обзорные статьи [2, 70–72, 86, 123], посвященные анализу полученных в динамике твердого тела результатов и перспективам развития новых методов исследования сложных механических систем.

С математической точки зрения уравнения движения тяжелого твердого тела (уравнения Эйлера–Пуансо) имеют свойства, которые обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши на бесконечном промежутке времени. Однако конструктивное представление такого решения возможно только в виде рядов А. Пуанкаре [49, 87], которые, хотя и могут быть построены для любых значений параметров уравнений Эйлера–Пуассона, но недостаточно удобны для практического применения (сходятся при весьма большом числе слагаемых). Поэтому изучение уравнений Эйлера–Пуассона проходило в других направлениях.

Так как уравнения движения тяжелого твердого тела имеют шестой порядок и допускают три первых интеграла, то наличие дополнительного интеграла позволяет применить в задаче интегрирования этих уравнений теории Р. Лиувилля [1, 161], К. Якоби [155, 156]. Работы Л. Эйлера [146, 147], С.В. Ковалевской [63] и других посвящены нахождению указанного интеграла. Оказалось, что дополнительный интеграл уравнений Эйлера–Пуассона в случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской имеет алгебраическую структуру. Данное свойство при поиске новых интегралов было использовано Е. Гюссоном [152, 153], П. Бургатти [139], Р. Лиувиллем [161], А. Пуанкаре [87]. Е. Гюссон доказал две теоремы: в первой теореме при рассмотрении рационального первого интеграла уравнений Эйлера–Пуассона показано его существование только для динамически симметричных тел; во второй теореме доказано, что если первый интеграл является полиномом по основным переменным, то он существует только в решениях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Р. Лиувилль [162] рассмотрел случай, когда среди главных моментов инерции имеются равные. Он получил следующий результат: дополнительный первый интеграл должен иметь вид однородного многочлена.

А. Пуанкаре [87] изучал существование алгебраических интегралов в более общем предположении, чем Е. Гюссон [152, 153].

Следует подчеркнуть, что С.В. Ковалевская [63] нашла свой случай интегрируемости при решении задачи существования однозначных решений Эйлера–Пуассона (результаты С.В. Ковалевской обсуждены в [2, 5, 17, 86]).

А.М. Ляпунов [77] дополнил результат С.В. Ковалевской [63]. Он рассмотрел случай, когда однозначные функции, определяющие решения, имеют особые точки, отличные от полюсов (например, существенно особые точки).

Поскольку вопрос о существовании алгебраических интегралов был изучен в полной мере, то В.В. Козлов [64] рассмотрел более общую задачу – задачу о существовании для уравнений Эйлера–Пуассона аналитических первых интегралов. Он показал, что дополнительных интегралов такого вида не существует.

В работах [1, 2, 5, 48] обсуждены аналитические методы доказательства неинтегрируемости систем, близких к интегрируемым, а так же проведено сравнение аналитических результатов с данными численного моделирования поведения траекторий в ряде классических и современных задач динамики твердого тела. Наблюдаемое расщепление сепаратрис приводит к отсутствию дополнительных первых интегралов и возникновению стохастических слоев, внутри которых имеется локальная неустойчивость траекторий. Это позволило сделать заключение о наличии детерминированного хаоса в динамике твердого тела.

Следующим актуальным направлением изучения динамики тяжелого твердого тела является направление, которое состоит в построении частных решений Эйлера–Пуассона. Большой вклад в данную проблему внесли О. Штауде [168], В. Гесс [151], Д. Гриоли [149], С.А. Чаплыгин [133, 135], Д.Н. Горячев [38, 39], Д.К. Бобылев [4], В.А. Стеклов [106, 107], Н. Ковалевский [159], А.И. Докшевич [46]. В монографии [17] выполнен анализ решений В. Гесса, Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина, которые зависят от четырех произвольных постоянных и приведены следующие частные решения, зависящие от меньшего числа произвольных постоянных:

– стационарные решения (О. Штауде [168]);

– решение Д.К. Бобылева–В.А. Стеклова [4, 106];

– решение В.А. Стеклова [107];

– решение Н. Ковалевского [159];

– решение Д.Н. Горячева [38];

– решение С.А. Чаплыгина [135];

– решение Д. Гриоли [149];

– решение А.И. Докшевича (по условиям Гесса) [46];

– второе решение А.И. Докшевича [46];

– решение Б.И. Коносевича–Е.В. Поздняковича [67].

Наличие такого количества частных решений позволило применить широкий спектр геометрических методов исследования свойств движения [17, 30, 31, 119].

Л. Пуансо [165] не только дал наглядную картину движения свободного твердого тела, представив его посредством качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной горизонтальной (перпендикулярной вектору момента количества движения тела) плоскости, но и сформулировал общую теорему. Она позволяет произвольное движение тела, отличное от равномерного вращения, представить в виде качения без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Д. Сильвестр исследовал задачу о представлении движения тела качением без скольжения центральной поверхности второго порядка по одной из её касательных плоскостей, остающейся неподвижной. М. Мак–Кулах дал следующее представление о свойствах движения свободного гиростата: гирационный эллипсоид тела, соответствующий точке опоры, проходит во все время движения через определенную точку в пространстве, лежащую на неизменном во времени главном моменте количества движения. Большой вклад в разработку методов истолкования внесли К. Якоби, В. Гесс и другие (см. обзорную монографию [31]).

Следует отметить, что истолкование движения тела не всегда основывается на теореме Пуансо. Например, Н.Е. Жуковский [47] при рассмотрении геометрических свойств свободного гиростата использовал свойства движения некоторого конуса по неподвижной плоскости в пространстве.

Геометрическими исследованиями в динамике твердого тела занимались Ж. Дарбу [143, 144], С.А. Чаплыгин [134] и многие другие ученые.

В монографиях [17, 30, 31, 119, 129] отмечается, что теорема Л. Пуансо получила широкое применение после того, как П.В. Харламов вывел новые уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости [117]. К настоящему времени накоплена значительная информация о свойствах движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [17, 30, 31].

Актуальность построения частных решений уравнений Эйлера–Пуассона отмечена и Р. Кляйном, и А. Зоммерфельдом [158]. Она связана не только с тем, что, благодаря применению теоремы Пуансо к истолкованию движения тела появилась возможность классификации движений тела единым методом, но и с перспективой исследовать окрестности частных решений. Если применить теорию возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений и первый метод Ляпунова [78], то можно установить глобальные свойства интегрального многообразия уравнений Эйлера–Пуассона. Такая задача рассматривалась в работах [7–11, 18, 19, 23, 27, 29, 34, 65, 79–83, 164]; обзор результатов изложен в [11, 17].

Следующим направлением в динамике твердого тела является разработка новых форм уравнений движения и редукция исходных уравнений к системе меньшего порядка. Начало таким исследованиям положили В. Гесс, А.Д. Билимович, Н. Ковалевский, С.А. Чаплыгин (см. обзоры [17, 31]). Как показала история применения результатов указанными авторами, уравнения В. Гесса и А.Д. Билимовича не получили широкого применения, а уравнения Н. Ковалевского и С.А. Чаплыгина носят частный характер, так как получены при определенных ограничениях на параметры уравнений Эйлера–Пуассона.

П.В. Харламов [119] применил новый способ понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона. Он основан на использовании специальной системы координат, которая введена так, что одна из координатных осей содержит центр тяжести тела. С её помощью уравнения Эйлера–Пуассона (и их обобщения – уравнения задачи о движении тяжелого гиростата) приведены к системе двух уравнений первого порядка, которая имеет нелинейную структуру. Эта форма дифференциальных уравнений носит название первой формы уравнений П.В. Харламова [119]. Вторая форма уравнений П.В. Харламова имеет второй порядок относительно компонент кинетического момента. Она получена путем исключения компонент единичного вектора вертикали из интегралов и одного из динамических уравнений с последующей подстановкой найденных значений в уравнения Пуассона. Частными случаями этих уравнений являются уравнения Н. Ковалевского [159] и С.А. Чаплыгина [31].

Особенно большое значение уравнения П.В. Харламова [119] имеют для случая гиростата, так как они позволили не только получить новые уравнения движения, но и найти новые решения этих уравнений.

Определение гиростата, которое предложил П.В. Харламов [120], отличается от ранее рассматриваемых определений [73, 95, 148] тем, что носимое тело не обязательно должно иметь геометрическую и физическую симметрии.

Новые формы уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой получили Е.И. Харламова [125–127], Х.М. Яхья [137] и А.И. Докшевич [46], а новые уравнения в обобщенных задачах опубликованы в [112, 113].

В проблеме построения новых решений уравнений динамики твердого тела большое значение имеет метод инвариантных соотношений (ИС).

А. Пуанкаре [87] рассматривал систему ИС. Т. Леви–Чивита [74] дал определение одного ИС и получил дифференциальное уравнение на функцию, задающую ИС. П.В. Харламов [121] рассмотрел более общий вариант ИС, чем Т. Леви–Чивита и сформулировал теорему о том, что ИС можно определить на основании равенства нулю соотношений, полученных в результате вычисления производных от ИС в силу уравнений.

А.М. Ковалев, Г.В. Горр, В.Н. Неспирный [57] исследовали ИС неавтономных дифференциальных уравнений. Они получили необходимые и достаточные условия существования ИС. Таким образом метод ИС позволяет исследовать условия существования у уравнений Эйлера–Пуассона решения, для которого можно записать аналитический вид ИС.

Сказанное выше дает возможность на основе метода ИС построить решение с заданными свойствами движения тела и с помощью теории возмущений изучить интегральное многообразие в окрестности данного решения. Кроме этого, на основе теоремы Пуансо можно исследовать свойства движения тела и провести классификацию движений в зависимости от значений параметров уравнений движения.

Например, А.М. Ковалев [55] с помощью метода ИС, предложенного Т. Леви–Чивитой [74], доказал теорему о существовании первого интеграла в случае, когда функции, задающие ИС, удовлетворяют уравнениям Т. Леви–Чивиты специального вида. Кроме того, он [55] исследовал существование первого интеграла уравнений Эйлера–Пуассона при условиях Гесса и нашел его линейную часть.

Г.В. Горр, Е.К. Щетинина [37] рассмотрели интегрирование уравнений динамики твердого тела на ИС класса Т. Леви–Чивиты. Они доказали два утверждения: первое утверждение состоит в том, что если n дифференциальных уравнений динамики допускают $n-3$ первых интегралов и одно ИС, то при выполнении одного условия они интегрируемы в квадратурах; второе утверждение состоит в том, что если n дифференциальных уравнений допускают $n-4$ первых интегралов и два ИС, то при условии равенства нулю следа определенной матрицы они также интегрируемы в квадратурах.

Задачу об интегрировании уравнений динамики на ИС изучал и С.А. Чаплыгин [136]. Он предполагал, что уравнения движения допускают определенное количество ИС (по терминологии С.А. Чаплыгина – частных интегралов) и некоторое количество первых интегралов (в совокупности число первых интегралов и ИС равно $n-2$), то при выполнении одного условия уравнения движения интегрируемы по Якоби.

А.В. Мазнев [32] дополнил результат С.А. Чаплыгина, указав другие условия существования интегрируемости уравнений динамики на ИС класса С.А. Чаплыгина (для них дифференциальные уравнения имеют более общий вид, чем для ИС класса Т. Леви–Чивиты).

В динамике тяжелого твердого тела получены и типы уравнений, к которым применение метода ИС затруднительно. К таким уравнениям относится интегро-дифференциальное уравнение Е.И. Харламовой [127, 129]. Однако, как показано в [127, 129], оно эффективно при построении решений задачи о движении гиростата. Отметим, что все частные решения задачи о движении тяжелого гиростата проанализированы в монографии Г.В. Горра и А.М. Ковалева [30].

Поскольку уравнения динамики тяжелого твердого тела неинтегрируемы в квадратурах [64] для общего распределения масс, то их решения имеют сложное поведение, изучение которого составляет предмет новой области исследований, называемой детерминированным хаосом. Систематические эффекты неинтегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона обсуждались в работах В.В. Козлова [64] и С.Л. Зиглина [48].

Важное значение работ В.В. Козлова состоит в том, что в них поставлен вопрос о качественном анализе интегрируемых динамических систем, и на примере волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина сделаны общие выводы о поведении линии узлов и угла собственного вращения. Последние результаты были получены с помощью применения теоремы Лиувилля–Арнольда [1, 2] и теоремы Вейля.

Программа интенсивного топологического изучения интегральных многообразий механических систем с симметрией была предложена С. Смейлом. В соответствии с этой программой (ее развернутое изложение имеется в [109]) изучение фазовых траекторий исходной системы сводится, во-первых, к описанию бифуркационных диаграмм первых интегралов и, во-вторых, к исследованию поведения динамической системы на каждой отдельной поверхности уровней первых интегралов. Идеи Смейла нашли успешное применение во многих классических и современных задачах механики. В задаче Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки интегральные многообразия и их топологические бифуркации изучали А. Якоб [154] и Я.В. Татаринов [109, 110].

Эти важные результаты были отмечены в монографиях [2, 109, 154]. Однако общая проблема классификации возможных интегральных многообразий оказалась более сложной, чем это предполагалось ранее.

В работах И.Н. Гашененко [12, 14, 20, 21] предложен метод, позволяющий полностью описать бифуркации интегральных многообразий в случае, когда центр масс тела принадлежит главной плоскости инерции. Проанализировано трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм и изучено пятипараметрическое семейство интегральных многообразий. В результате исследования получено 46 типов невырожденных бифуркационных диаграмм и обнаружено гладкое интегральное многообразие, не имеющее аналогов ни в одном из случаев, изученных ранее.

Таким образом, топологические методы в динамике твердого тела [1, 109, 110, 154] применены и в Донецкой школе механики (М.П. Харламов [113], И.Н. Гашененко [12, 14, 20, 21]).

Стационарные решения О. Штауде [168] важны при исследовании устойчивости равномерных вращений тела. Такие движения находят широкое применение в технике. Поэтому основные исследования стационарных решений относились к проблеме их устойчивости. В задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой устойчивость равномерных вращений изучали В.В. Румянцев [92–94], В.Н. Рубановский [89], А.М. Ковалев и А.Я. Савченко [61], А.П. Маркеев [80–83], О.В. Холостова [130] и другие.

Равномерные вращения гиростата под действием силы тяжести изучали П.В. Харламов [119], А.М. Ковалев [50], А.Я. Савченко [96, 98, 98], В.В. Румянцев [93, 94] и многие другие ученые (см. обзорную монографию [130]).

Благодаря систематическому исследованию свойств движения твердого тела с неподвижной точкой к настоящему времени получена информация, позволившая провести классификацию движений в динамике твердого тела. Отметим некоторые классы движений [30–32]: колебательные и вращательные движения тела относительно горизонтальной оси; прецессионные движения (движения, при которых постоянен угол между двумя прямыми, фиксированными соответственно в теле и в пространстве) различных типов [33]; изоконические движения [28] (движения, при которых подвижный и неподвижный годографы симметричны относительно касательной к ним плоскости, проходящей через неподвижную точку); асимптотические к покою движения [17]; асимптотические движения, для которых подвижный и неподвижный годографы являются спиралями [53]; прецессионно-изоконические движения [33]; асимптотически-маятниковые движения [10, 17, 81–83] и многие другие движения.

Важность результатов, полученных в динамике одного твердого тела состоит в том, что они позволили установить обобщения как в задачах о движении тела в полях сложной структуры, так и в задачах о движении системы связанных твердых тел [30, 99, 120].

Полученные П.В. Харламовым [120] уравнения движения системы связанных твердых тел были использованы А.Я. Савченко [97] и его учениками [99]. В результате этих исследований было развито новое направление в динамике систем связанных твердых тел, которое имеет не только теоретический интерес, но и находит широкое применение в прикладных задачах.

В монографиях [5, 17, 30, 119] показано, что в динамике твердого тела особую роль играют параметры и переменные, которые используются в анализе аналитических и геометрических свойств движения механических систем. Например, наиболее компактную форму уравнения Эйлера–Пуассона имеют в переменных: компонентах вектора угловой скорости и единичного вектора, указывающего направление силы тяжести. Углы Эйлера наиболее употребляемы для определения положения тела в пространстве [32, 33, 149, 158] и мало используются для записи уравнений движения.

В монографиях [32, 33] показано, что углы Эйлера эффективны при использовании прецессионных движений тела. Существуют и некоторые модификации этих переменных, например – углы Крылова [75]. С помощью углов Эйлера открыты новые классы движений. Поскольку эти переменные в ряде случаев (например, при исследовании устойчивости равномерных движений тела относительно вертикали) имеют особенности, то актуально применение других переменных, использование которых не приводит к указанным выше особенностям. К таким переменным относятся параметры Родрига–Гамильтона [75]. В настоящее время аппарат параметров Родрига–Гамильтона нашел эффективное применение в кинематических задачах ориентации объектов современной техники [6, 68, 111]. В отличие от углов Эйлера и их модификаций они не вырождаются при любом положении тела.

В.В. Козлов [66] использовал параметры Родрига–Гамильтона при исследовании движений твердого тела с помощью функции Гамильтона.

В статьях [54, 59, 60] эти параметры применены в задаче исследования колебаний твердого тела, имеющего неподвижную точку, в поле силы тяжести.

Книга [68] посвящена применению параметров Родрига–Гамильтона в аналитической механике. В ней получены следующие результаты: выведены уравнения Эйлера–Пуассона в параметрах Родрига–Гамильтона; указано применение их в прикладной теории гироскопии; рассмотрены быстрые вращения вблизи вертикали гироскопов Лагранжа и Ковалевской.

В статьях [54, 59] уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой выводятся в специальной системе координат и показано, что такие уравнения удобны в исследовании колебаний тела относительно равновесия тела, когда центр масс тела находится ниже точки опоры.

Несмотря на то, что при рассмотрении уравнений движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона порядок системы увеличивается на единицу, использование параметров Родрига–Гамильтона во многих задачах динамики представляется актуальным. Это касается не только задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, но и задачи о движении твердого тела в полях сложной структуры. К ним относятся наиболее изученные в динамике гиростата с неподвижной точкой задачи: задача о движении тела в центральном ньютоновском поле сил [128]; задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задача о движении твердого тела в идеальной и несжимаемой жидкости [88, 90, 104, 105, 114, 115, 124, 131, 132, 140, 141, 145, 157, 169, 170]. Особенность последних двух задач заключается в том, что уравнения, которыми они описываются, математически изоморфны (то есть существует линейное преобразование, с помощью которого уравнения движения тела в жидкости можно привести к уравнениям движения тела в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского поля сил, магнитного и электрического полей). Данную аналогию доказали для частных случаев В.А. Стеклов [105] и П.В. Харламов [116], а для общего случая – Х.М. Яхья [169, 170].

Обобщенную задачу о движении гиростата изучали Г. Кирхгоф [157], А. Клебш [140, 141], В.А. Стеклов [104, 105], А.М. Ляпунов[76], В.Н. Рубановский [88, 90] и другие. Результаты, полученные в обобщенных задачах, изложены в монографиях [30–33]. Следует отметить, что уравнения в этих задачах не являются простым преобразованием правых частей уравнений классической задачи к более общему виду, а являются результатом математического моделирования движения гиростата реальных механических систем. При этом для обобщенных задач появляются новые математические эффекты (например, уравнения класса Кирхгофа–Пуассона имеют шесть общих случаев интегрируемости, а классические уравнения Эйлера–Пуассона имеют только три общих случая интегрируемости). Применение параметров Родрига–Гамильтона в исследовании движения гиростата в полях сложной структуры также дает возможность получить новые свойства. Частично они рассмотрены в данной диссертации.

РАЗДЕЛ 2
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

2.1. Первая форма уравнений Эйлера–Пуассона

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Уравнения движения запишем в векторном виде [119]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = \left(A_{ij}\right)$ – тензор инерции, построенный в неподвижной точке; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор: $\mathbf{e} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|}$, где O – неподвижная точка, C – центр тяжести тела; $s = mg|\overline{OC}|$ (m – масса тела, g – ускорение свободного падения); точка над переменными обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (2.1) имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{2.2}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ – неподвижную систему координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\nu}$, через $Oxyz$ – подвижную систему координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1{}', \mathbf{i}_2{}', \mathbf{i}_3{}'$.

Уравнения (2.1) обобщаются на случай движения гиростата. Если через $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ обозначить гиростатический момент, то уравнения движения и первые интегралы гиростата можно представить так:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.3}$$

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{2.4}$$

Запишем (2.3), (2.4) в скалярном виде

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \tilde{\lambda}_2\omega_3 - \tilde{\lambda}_3\omega_2 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \tilde{\lambda}_3\omega_1 - \tilde{\lambda}_1\omega_3 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3), \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \tilde{\lambda}_1\omega_2 - \tilde{\lambda}_2\omega_1 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \quad (2.6)$$

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) = 2E, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (2.7)$$

$$\left(A_1\omega_1 + \tilde{\lambda}_1\right)\nu_1 + \left(A_2\omega_2 + \tilde{\lambda}_2\right)\nu_2 + \left(A_3\omega_3 + \tilde{\lambda}_3\right)\nu_3 = k. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.5) – (2.8) использовались при построении частных решений в замкнутом виде. В них через A_1, A_2, A_3 обозначены главные моменты инерции тела [17, 30–33, 119].

2.2. Вторая форма уравнений Эйлера–Пуассона

Данная форма применялась в работах [34, 59, 60] и связана с рассмотрением кинематических параметров Родрига–Гамильтона (свойства этих параметров будут рассмотрены ниже). Следуя [59, 60] в качестве неподвижной системы координат с центром в неподвижной точке выберем такую, чтобы проекции ν_i' вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения $\nu_i' = -e_i$ $(i = \overline{1,3})$. По таблице направляющих косинусов [75] находим

$$\begin{aligned} \nu_1 &= e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_0^2 - \lambda_1^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3), \\ \nu_2 &= 2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \\ \nu_3 &= -2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметры Родрига–Гамильтона. На основе формул (2.9) запишем уравнения Эйлера–Пуассона (2.1) в переменных ω_i $(i = \overline{1,3})$ и $\lambda_j (j = \overline{0,3})$

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - 2s[\lambda_0\lambda_1 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_1 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)], \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - 2s[\lambda_0\lambda_2 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_2 + \lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)], \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - 2s[\lambda_0\lambda_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_3 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения (2.10), (2.11) имеют первые интегралы

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) = 2E, \tag{2.12}$$

$$A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k, \tag{2.13}$$

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \tag{2.14}$$

где ν_i $(i = \overline{1,3})$ выражаются соотношениями (2.9).

Уравнения (2.1) допускают три общих случая интегрируемости:

1. Случай Эйлера: $s = 0$ [146, 147];

2. Случай Лагранжа: $e_2 = 0, e_3 = 0, A_2 = A_3$ [73];

3. Случай Ковалевской: $e_2 = 0, e_3 = 0, A_1 = A_2 = 2A_3$ [63];

Для них применима общая теорема Якоби. Сформируем её в следующем виде. Пусть задана система дифференциальных уравнений [17]

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n), \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0\right), \tag{2.15}$$

где $i = \overline{1,n}, X_i(x_1, \dots, x_n)$ непрерывно-дифференцируемые определенное число раз функции. Тогда, если система (2.15) имеет $n-2$ первых интеграла $\phi_j(x_1, \dots, x_n) = c_j$ $(j = 1, n-2)$, то она допускает дополнительный первый интеграл и интегрируема в квадратурах [1, 2, 5]. В обзорных монографиях [5, 17, 30] подробно изложены результаты, полученные при интегрировании уравнений (2.1) не только в этих общих случаях, но и в случаях, когда количество произвольных постоянных в решениях меньше пяти. Перечислим частные случаи интегрируемости уравнений (2.1): решение В. Гесса [151], решение Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина [39, 133], стационарное решение О. Штауде [168], решение физического маятника [84], решение Д.К. Бобылева–В.А. Стеклова [4, 106], решение В.А. Стеклова [107], решение Д.Н. Горячева [38], решение Н. Ковалевского [159], решение С.А. Чаплыгина [135], решение Д. Гриоли [149], решение А.И. Докшевича при условиях Гесса [46], второе решение А.И. Докшевича [46], решение Б.И. Коносевича – Е.В. Поздняковича [67] (подробные свойства этих решений обсуждены в [5, 17, 30, 31, 119, 129]).

2.3. Об общем решении уравнений Эйлера–Пуассона

Согласно теореме Якоби для интегрирования уравнений (2.1) в квадратурах [155, 156] необходимо найти дополнительный первый интеграл. Выше указаны три случая существования первого интеграла, отличного от классических.

Укажем результат, отмеченный в монографиях [17, 49], который характеризуется тем, что общее решение уравнений Эйлера–Пуассона выражается в виде рядов по вспомогательной переменной.

Утверждение [49]. *Любое вещественное решение системы (2.1) можно представить в виде рядов*

$$\begin{gathered}\omega_1(t)=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\psi^k\,,\quad \omega_2(t)=q_0+\sum_{k=1}^{\infty}q_k\psi^k\,,\quad \omega_3(t)=r_0+\sum_{k=1}^{\infty}r_k\psi^k\\ \nu_1(t)=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}x_k\psi^k\,,\quad \nu_2(t)=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}y_k\psi^k\,,\quad \nu_3(t)=z_0+\sum_{k=1}^{\infty}z_k\psi^k\end{gathered}\tag{2.16}$$

где $\psi(t)=\left(e^{\lambda t}-1\right)\left(e^{\lambda t}+1\right)^{-1}$, $\lambda=\frac{\pi}{2h}$, $h>0$ – *некоторая постоянная. Ряды (2.16) сходятся при* $t\in(-\infty,\infty)$.

В книге В.И. Зубова [49] приведены рекуррентные формулы для постоянных, которые входят в формулы (2.16). В [17, 30, 31] отмечено, что ряды (2.16) не получили широкого применения в построении частных решений уравнений (2.1).

2.4. Метод инвариантных соотношений

Поскольку нахождение дополнительных первых интегралов уравнений (2.1) затруднительно (Е. Гюссон [152, 153], П. Бургатти [139], А. Пуанкаре [87] доказали несуществование дополнительного первого алгебраического интеграла, В.В. Козлов [64] доказал несуществование дополнительного аналитического интеграла), а ряды (2.16) медленно сходятся (для более полного представления о свойствах решения (2.16) необходимо весьма большое число слагаемых), то для нахождения частных решений необходимо привлекать метод инвариантных соотношений [74, 87, 121]. А. Пуанкаре рассмотрел случай системы инвариантных соотношений (ИС). П.В. Харламов [121] исследовал систему (2.15) и соотношение (предполагая, что условие в круглых скобках формул (2.15) отсутствует)

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0. \tag{2.17}$$

Соотношение (2.17) он назвал инвариантным соотношением (ИС), если не пусто многообразие, определяемое (2.17) и системой уравнений

$$\begin{gathered} L_x\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} X_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0\,, \\ L_x\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ L_x\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = 0. \\ \dots \end{gathered} \tag{2.18}$$

П.В. Харламов показал, что, если инвариантное многообразие (2.17), (2.18) не пусто, то оно определяется первыми членами последовательности (2.18). Определение П.В. Харламова обобщает определение Т. Леви–Чивиты, сформулированное им в виде [74]: соотношение (2.17) называется ИС по отношению к системе (2.15), если из условия $\varphi\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big) = 0$ следует при $t > t_0$ равенство $\varphi\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = 0$. Для ИС (2.17) имеет место уравнение

$$\frac{d\varphi(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \varphi(x_1, \dots, x_n)\lambda(x_1, \dots, x_n). \tag{2.19}$$

При получении (2.19) Т. Леви–Чивита предполагал аналитичность производной $\frac{d\varphi}{dt}$ относительно переменной $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Уравнение (2.19) А.М. Ковалев использовал в теории вложения инвариантных многообразий в интегральное многообразие системы (2.15). В частности, он доказал утверждение [55]: если для уравнений (2.15) известны k инвариантных соотношений $V_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ $\big(i = \overline{1, k}\big)$, для которых в уравнениях

$$\frac{dV_i}{dt} = \lambda_i V_i \tag{2.20}$$

функции $\lambda_i(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют условию $\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_k\lambda_k = 0$, где α_i – некоторые действительные числа, то уравнения (2.15) допускают первый интеграл $V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} \dots V_k^{\alpha_k} = \text{const}$.

Интегрирование уравнений (2.15) при условиях

$$\frac{\partial X_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n})$$

на инвариантных соотношениях $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ при условии, что уравнения (2.15) допускают первые интегралы $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = c_k$, где c_k – произвольные постоянные, рассмотрели Г.В. Горр, Е.К. Щетинина [37]. В частности, они получили достаточные условия интегрирования уравнений (2.15), которые допускают $n - 3$ первых интеграла и одно ИС класса Т. Леви–Чивиты, или $n - 4$ первых интеграла и два ИС того же класса.

Особый интерес ИС представляют для получения новых интегралов уравнений (2.1).

Теорема [55]. *Уравнения Эйлера–Пуассона при условиях Гесса имеют дополнительный интеграл вида $I = xV$, где V есть решение уравнения $L_f V = bzV$. Частным случаем этого интеграла являются интегралы Эйлера и Лагранжа, а также решения Гесса и Докшевича.*

Обобщение теории ИС для неавтономных систем

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \tag{2.21}$$

рассмотрели А.М. Ковалев, Г.В. Горр, В.Н. Неспирный [57]. Они применяли несколько другое определение ИС, чем П.В. Харламов. В [57] доказаны необходимые и достаточные условия существования у системы (2.21) ИС

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = 0. \tag{2.22}$$

По аналогии с [121] была рассмотрена цепочка производных от (2.22) в силу (2.21) и доказана теорема о том, что, если в построенной указанным способом системе уравнений существуют k независимых функций, то независимыми будут и первые k функций последовательности [30].

Метод ИС может быть применен не только к уравнениям Эйлера–Пуассона, но и к уравнениям, которые получены в результате редукции (2.1) к системе дифференциальных уравнений меньшего порядка. Такие системы изучены в монографиях [17, 30–32].

Следовательно с помощью метода ИС можно получить вектор функции

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}'_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}'_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}'_3,\\ \boldsymbol{\nu}(t) = \nu_1(t)\mathbf{i}'_1 + \nu_2(t)\mathbf{i}'_2 + \nu_3(t)\mathbf{i}'_3,\end{gathered} \tag{2.23}$$

которые описывают некоторое решение уравнений (2.1).

2.5. Углы Эйлера. Прецессии твердого тела с неподвижной точкой

Введем в рассмотрение углы Эйлера [30, 75]. Обозначим: θ – угол нутации (между векторами $\mathbf{i}'_3$ и $\mathbf{i}_3$), φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии. Тогда вектор угловой скорости тела может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{i}'_3 + \dot{\psi}\mathbf{i}_3 + \dot{\theta}\mathbf{n}, \tag{2.24}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный по линии узлов. В скалярном виде из (2.24) следует

$$\omega_1(t) = \quad \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\,, \quad \omega_2(t) = \quad \dot{\psi}\sin\theta\, cos\,\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\,, \tag{2.25}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \tag{2.26}$$

Тогда компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ в подвижной системе координат таковы

$$\nu_1(t) = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad \nu_2(t) = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad \nu_3 = \cos\theta\,. \tag{2.27}$$

Если известны функции (2.23), то углы Эйлера можно определить из равенств [26]

$$\theta(t) = \arcsin(\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_3)\,, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_1}{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_2}, \tag{2.28}$$

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{i}'_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}'_3)}{(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}'_3)^2}\,d\tau. \tag{2.29}$$

Функции (2.28), (2.29) позволяют определить положение тела в любой момент времени. Они особенно эффективны при рассмотрении прецессионных, изоконических движений [28, 30, 31].

Движение тела называется прецессией относительно вектора $\mathbf{\nu}$, если в течение времени постояннен угол θ между векторами $\mathbf{i}_3'$ и $\mathbf{i}_3$, фиксированными соответственно в теле и в пространстве. Поскольку $\theta = \mathrm{const}$ (пусть $\theta = \theta_0$), то из (2.24) следует, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{i}_3'$ и $\mathbf{\nu}$ (учитываем, что $\mathbf{i}_3' = \mathbf{\nu}$):

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{i}_3' + \dot{\psi}\mathbf{\nu}. \qquad (2.30)$$

Прецессионное движение характеризуется инвариантным соотношением, которое следует из второго уравнения (2.1) при подстановке в него (2.30)

$$\dot{\mathbf{\nu}} = \dot{\varphi}(\mathbf{\nu} \times \mathbf{i}_3'). \qquad (2.31)$$

Действительно, если умножим обе части (2.31) скалярно на вектор $\mathbf{i}_3'$, то получим

$$\mathbf{\nu} \cdot \mathbf{i}_3' = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0). \qquad (2.32)$$

В монографии [33] показано, что на инвариантных соотношениях (2.32) и $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ уравнение (2.31) интегрируются. Так как подвижную систему можно выбрать, положив $\mathbf{i}_3' = (0{,}0, 1)$, то значения ν_i имеют вид [33]

$$\nu_1 = a_0{}'\sin\varphi\,, \quad \nu_2 = a_0{}'\cos\varphi\,, \quad \nu_3 = a_0, \qquad (2.33)$$

где $a_0' = \sin\theta_0$. Прецессионные движения подразделяются на четыре основных типа:

1. $\dot{\varphi} = n,\ \ \dot{\psi} = m$ (n и m – постоянные) – регулярные прецессии;

2. $\dot{\varphi} \neq n,\ \ \dot{\psi} = m$ (m – постоянная) – полурегулярные прецессии первого типа;

3. $\dot{\varphi} = n,\ \ \dot{\psi} \neq m$ (n – постоянная) – полурегулярные прецессии второго типа;

4. $\dot{\varphi} \neq n,\ \ \dot{\psi} \neq m$ (n и m – постоянные) – прецессии общего типа;

В динамике твердого тела существуют и более частные типы прецессий. Они связаны, например, со свойством изоконичности движения. Это свойство состоит в том, что подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны относительно касательной к ним плоскости, проходящей через неподвижную точку. Для изоконических движений имеет место ИС [28].

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = 0, \tag{2.34}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – единичный вектор, неизменный по отношению к телу. Если в равенство (2.34) подставить значение (2.30), то получим уравнение

$$\dot{\varphi}(a_0 - \mathbf{c}) + \dot{\psi}(1 - \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}) = 0. \tag{2.35}$$

В книге [33] на основе (2.35) показано, что для регулярных прецессионно-изоконических движений выполняются равенства

$$\mathbf{c} = \mathbf{i}_3', \;\; n = m, \tag{2.36}$$

то есть в силу (2.36)

$$\omega_1 = na_0' \sin\varphi\,, \quad \omega_2 = na_0' \cos\varphi \quad \omega_3 = n(1 + a_0). \tag{2.37}$$

Полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа характеризуются уравнениями

$$\dot{\psi} = m, \quad \dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \cos\varphi), \tag{2.38}$$

где

$$b_0 = \frac{a_0 c_3 - 1}{a_0 - c_3}, \quad c_0 = \frac{a_0' c_1}{a_0 - c_3}, \quad c_2 = 0. \tag{2.39}$$

Если движение тела является прецессионно-изоконическим движением второго типа, то в силу $\dot{\varphi} = n$ и (2.35) имеют место соотношения

$$\dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt}, \quad \psi = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{nt}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\dfrac{nt}{2}}. \tag{2.40}$$

В (2.40) параметры b_0 и c_0 выражаются по формулам (2.39).

Приведем результаты анализа прецессионно-изоконических движений общего вида [33]. Из (2.35) вытекают два случая

1. $\mathbf{c} = \mathbf{i}_3', \quad \psi = \varphi,$ (2.41)

2. $\mathbf{c} \neq \mathbf{i}_3', \quad \psi = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi}.$ (2.42)

Компоненты вектора угловой скорости во всех вариантах определим из (2.30)

$$\omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi\,, \quad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi\,, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}. \tag{2.43}$$

Здесь величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ задаются либо системой (2.38), либо системой (2.40), либо системой (2.41), либо системой (2.42).

В книге [33] показано, что в классической задаче о движении твердого тела имеют место и другие типы прецессий – например прецессия, для которой $\dot{\varphi}\dot{\psi} = \mathrm{const}$ (прецессия А.И. Докшевича [25, 463]), а для обобщенных задач прецессии более разнообразны ($\dot{\varphi}/\dot{\psi} = \mathrm{const}, \dot{\varphi} = \alpha_0\dot{\psi} + \beta_0, \dot{\varphi}^2 = a_0^*\sin\varphi + b_0^*$ и другие).

Замечание. Рассмотрим класс изоконических движений тела с неподвижной точкой. Следуя [28], углы Эйлера введем так, чтобы угол нутации совпадал с углом между вектором $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Неподвижную систему координат, как и ранее, свяжем с вектором $\boldsymbol{\nu}$ (вектором, относительно которого угловая скорость равна $\dot{\psi}\boldsymbol{\nu}$). Новые углы Эйлера обозначим так $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$. По аналогии с (2.25) имеем

$$\begin{gathered}
\omega_1(t) = \quad \dot{\psi}_1\sin\theta_1\sin\varphi_1 + \dot{\theta}_1\cos\varphi_1\,,\\
\omega_2(t) = \quad \dot{\psi}_1\sin\theta_1\cos\varphi_1 - \dot{\theta}_1\sin\varphi_1\,,\\
\omega_3 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1\cos\theta_1\,,\\
\nu_1(t) = \sin\theta_1\sin\varphi_1\,, \quad \nu_2(t) = \sin\theta_1\cos\varphi_1\,, \quad \nu_3(t) = \cos\theta_1\,.
\end{gathered} \tag{2.44}$$

Если в (2.34) учесть, что систему координат можно выбрать так, что $\bar{c} = (0,0,1)$, а компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ν_1, ν_2, ν_3 выражаются по формулам (2.44), то для изоконических движений получим условие

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\varphi}_1, \tag{2.45}$$

которое может быть принято за условие изоконичности движения тела с неподвижной точкой при наличии (2.44).

2.6. Истолкование движения тела с помощью теоремы Пуансо

Согласно теореме Пуансо [165] любое движение тела (отличное от равномерного вращения) может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Если уравнения (2.1) проинтегрированы, то есть найдены зависимости (2.23), то подвижный годограф определяется первым равенством из (2.23). Неподвижный годограф определяется уравнениями П.В. Харламова [118]. Они записаны в неподвижной цилиндрической системе координат и имеют вид

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t), \tag{2.46}$$

$$\omega_\zeta(t) = \omega_1(t)\nu_1(t) + \omega_2(t)\nu_2(t) + \omega_3(t)\nu_3(t), \tag{2.47}$$

$$\omega_\rho^2(t) = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \tag{2.48}$$

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} \begin{vmatrix} \dot\omega_1(\tau) & \dot\omega_2(\tau) & \dot\omega_3(\tau) \\ \nu_1(\tau) & \nu_2(\tau) & \nu_3(\tau) \\ \omega_1(\tau) & \omega_2(\tau) & \omega_3(\tau) \end{vmatrix} d\tau. \tag{2.49}$$

В книгах [17, 30–32, 119, 129] приведены все результаты по кинематическому истолкованию движения тела с неподвижной точкой в решениях уравнений (2.1).

Интерес представляют формулы для угла α, полученные Г.В.Горром [26]

$$\alpha(t) = \psi(t) - \delta\,\mathrm{arctg}\frac{\dot\varphi(t)\sin\theta(t)}{\dot\theta(t)}, \tag{2.50}$$

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau)\times\mathbf{i}_3')\cdot(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\mathbf{i}_3')d\tau}{(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\mathbf{i}_3')^2} + \delta\,\mathrm{arctg}\frac{\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}_3')}{\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)\cdot\mathbf{i}_3'}. \tag{2.51}$$

В формулах (2.50), (2.51) $\delta = 0$, если угол между векторами $\mathbf{i}_3'$ и $\boldsymbol{\nu}$ постояннен (т.е. $\dot\theta = 0$) и $\delta = 1$, если этот угол зависит от времени. Из этого факта следует, что для прецессионных движений $\big(\dot\theta = 0\big)$ угол α совпадает с углом прецессии ψ при соответствующем выборе начального значения угла α (или угла ψ).

Замечание. Для того, чтобы определить положение подвижного базиса $\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'$ в неподвижном пространстве для каждого решения (2.23) необходимо по формулам (2.28), (2.29) найти углы Эйлера, а затем воспользоваться матрицей ориентации (её описание дано ниже)

$$\tilde A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

При использовании (2.52) необходимо задавать начальное положение базиса $\mathbf{i}'_1$, $\mathbf{i}'_2$, $\mathbf{i}'_3$ относительно $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Если решать задачу ориентации тела с помощью метода Пуансо, то после построения годографа угловой скорости следует подвижный аксоид угловой скорости поместить в неподвижное пространство так, чтобы он касался неподвижного аксоида.

2.7. Параметры Родрига–Гамильтона

Известно, что аппарат параметров Родрига–Гамильтона имеет эффективное применение в задачах ориентации различного рода объектов управления движением, инерциальной навигации и других [6, 68, 111]. В отличие от углов Эйлера указанные параметры не вырождаются при любом положении тела в связи с тем, что они не содержат тригонометрических функций. Эффективность их применения в данной диссертации показана в задачах исследования колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Рассмотрим конечный поворот тела S, имеющего неподвижную точку O, на некоторый угол χ относительно оси OL, пространственная ориентация которой задана единичным вектором $\mathbf{b}$. Пусть до поворота положение какой-либо точки $M \in S$ определено радиус-вектором $\overline{OM} = \mathbf{r}$, а после поворота положение её определяется вектором $\overline{OM'} = \mathbf{r}'$. Вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ называется вектором перемещения. Его значение выражается по формуле Родрига [68, 75]

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2}\mathbf{u} \times \left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{r}\right), \tag{2.53}$$

где

$$\mathbf{u} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2} \cdot \mathbf{b}. \tag{2.54}$$

Вектор (2.54) называется вектором конечного поворота тела. Он направлен по вектору $\mathbf{b}$ и по модулю равен $2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}$ (χ – угол поворота). Вектор $\overline{OM'}$ найдем на основе формулы

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{p}. \tag{2.55}$$

Следуя [68], положим

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}'_1 \cos\alpha + \mathbf{i}'_2 \cos\beta + \mathbf{i}'_3 \cos\gamma. \tag{2.56}$$

В (2.56) векторы $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ – являются базисом в теле; α, β, γ – углы, образуемые вектором конечного поворота с осями Ox, Oy, Oz. Пусть вектор (2.54) имеет вид

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i}'_1 + u_y \mathbf{i}'_2 + u_z \mathbf{i}'_3. \tag{2.57}$$

Тогда из (2.54), (2.57) имеем

$$u_x = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\cos\alpha, \quad u_y = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\cos\beta, \quad u_z = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\cos\gamma. \tag{2.58}$$

Обозначим через $\mathbf{i}^*_1$, $\mathbf{i}^*_2$, $\mathbf{i}^*_3$ – орты связанной с телом S системы $Oxyz$, занявшей в результате поворота положение, обозначенное через $Ox^*y^*z^*$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^*_1 &= \mathbf{i}'_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2} \mathbf{u} \times \left(\mathbf{i}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{i}'_1\right), \\
\mathbf{i}^*_2 &= \mathbf{i}'_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2} \mathbf{u} \times \left(\mathbf{i}'_2 + \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{i}'_2\right), \\
\mathbf{i}^*_3 &= \mathbf{i}'_3 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2} \mathbf{u} \times \left(\mathbf{i}'_3 + \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{i}'_3\right).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Из формул (2.57), (2.59) следует

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}'_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}^*_1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}'_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}^*_2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}'_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}^*_3, \tag{2.60}$$

То есть проекции вектора конечного поворота на одноименные оси трехгранников $Oxyz$ и $Ox^*y^*z^*$ равны между собой.

Вместо u_1, u_2, u_3 введем величины λ_k $(k = \overline{1,3})$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_x, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_y, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_z. \tag{2.61}$$

Величину λ_0 подчиним условию [69, 75]

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{2.62}$$

На основании формул (2.58), (2.61), (2.62) для параметров λ_i $(i = \overline{0,3})$ найдем значения

$$\lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2},\quad \lambda_1 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\alpha,\quad \lambda_2 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\beta\quad \lambda_3 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\gamma. \qquad (2.63)$$

Величины (2.63) называются параметрами Родрига–Гамильтона.

Известно, что сложение конечных поворотов не обладает свойством коммутативности.

Для параметров Родрига–Гамильтона вводятся [69, 75] комплексные функции

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3,\quad \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1,\quad \gamma = \lambda_2 + i\lambda_1,\quad \delta = \lambda_0 - i\lambda_3, \qquad (2.64)$$

где $i = \sqrt{-1}$, которые называются параметрами Кейли–Кляйна. Условие (2.62) в параметрах (2.64) запишется так

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Рассмотрим связь параметров Родрига–Гамильтона с углами Эйлера. Расположим в неподвижной точке O тела S вершины двух ортогональных трехгранников: неподвижного $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ и подвижного $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$. Зафиксируем два положения тела: начальное, в котором оси Ox, Oy, Oz совпадают с $O\xi, O\eta, O\zeta$ и конечное, когда трехгранник $Oxyz$ после совершившего поворота тела не совпадает с $O\xi\eta\zeta$. Обозначим через a_{jk} – направляющие косинусы углов между осями Ox, Oy, Oz и $O\xi, O\eta, O\zeta$. Величины a_{jk} связаны шестью условиями ортогональности

$$a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + a_{3j}a_{3k} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1,2,3\,),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Матрица (2.52) называется матрицей поворота, реализующей перевод трехгранника, связанного с телом из начального положения в конечное. Как видно из формулы (2.24) этот перевод осуществляется посредством трех последовательных поворотов на углы Эйлера ψ, θ, φ. Первый поворот происходит вокруг вектора $\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\nu}$ на угол прецессии ψ $(0 \le \psi \le 2\pi)$. Второй поворот осуществляется на угол θ вокруг вектора $\bar{n}$, который лежит на оси, являющейся линией пересечения плоскостей Oxy и $O\xi\eta$ (линией узлов). При этом угол $\theta \in [0, \pi]$. Третий поворот производится вокруг вектора $\mathbf{i}_3'$ на угол φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Матрица $\tilde{A}$ записана в (2.52).

Известно, что параметры Кэли–Клейна (2.64) выражаются через углы Эйлера по формулам [68, 75]

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\psi+\varphi)}{2}}, \quad \beta = i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}},$$
$$\delta = \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{-i(\psi+\varphi)}{2}}, \quad \gamma = i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{-i(\psi-\varphi)}{2}}. \tag{2.65}$$

На основе (2.64), (2.65) нетрудно установить выражения параметров Родрига–Гамильтона через ψ, θ, φ

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}. \tag{2.66}$$

Если параметры (2.66) будут известны в зависимости от времени, то матрица ориентации (2.52) может быть найдена по формуле

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Когда известны параметры Родрига–Гамильтона, то углы Эйлера можно определить из формул [68]

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3}, \quad \cos\theta = \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2. \tag{2.68}$$

Компоненты вектора угловой скорости тела выражаются через углы Эйлера по формулам (2.25), (2.26), а компоненты вектора $\mathbf{v}$ – по формулам (2.27). Формулы (2.28), (2.29) позволяют определить углы Эйлера через компоненты векторов (2.23). Если заданы только компоненты ω_1, ω_2, ω_3, то справедливы соотношения

$$\dot{\psi} = (\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\, cosec\,\theta,$$
$$\dot{\theta} = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi, \tag{2.69}$$
$$\dot{\varphi} = \omega_3 - \operatorname{ctg}\theta\cdot(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi).$$

Из (2.69), при условии, что известны функции $\omega_i(t)$, невозможно однозначно определить величины ψ, φ, θ, т.е. положение тела в пространстве. При таком подходе приходим к задаче Дарбу: найти положение тела по заданной угловой скорости движения тела. В своих исследованиях Дарбу [143, 144] использовал уравнения для параметров Кэли–Клейна

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i\omega_3}{2}\alpha + \frac{i}{2}(\omega_1 - i\omega_2)\beta, \quad \dot{\beta} = -\frac{i\omega_3}{2}\beta + \frac{i}{2}(\omega_1 + i\omega_2)\alpha, \\ \dot{\gamma} &= \frac{i\omega_3}{2}\gamma + \frac{i}{2}(\omega_1 - i\omega_2)\delta, \quad \dot{\delta} = -\frac{i\omega_3}{2}\delta + \frac{i}{2}(\omega_1 + i\omega_2)\gamma. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Система (2.70) распадается на две независимые системы уравнений первого порядка одинаковой структуры, вследствие чего можно рассматривать систему вида

$$\dot{x} = \frac{i\omega_3}{2}x + \frac{i}{2}(\omega_1 - i\omega_2)y, \quad \dot{y} = \frac{i\omega_3}{2}y + \frac{i}{2}(\omega_1 + i\omega_2)x. \tag{2.71}$$

Систему (2.71) можно привести к уравнению второго порядка относительно одной неизвестной (например, x)

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \mu x = 0, \tag{2.72}$$

где k и μ являются функциями величин $\omega_i\ (i = \overline{1,3})$ и их производных. Подстановкой $\dot{x}/x = z$ уравнение (2.72) приводится к уравнению Рикатти

$$\dot{z} = -z^2 + kz - \mu. \tag{2.73}$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что для получения общего решения уравнения (2.73) необходимо знать одно частное решение этого уравнения. Поэтому в общем случае уравнение (2.73) не интегрируется в квадратурах. Отсюда следует, что при интегрировании уравнений динамики твердого тела с неподвижной точкой целесообразно обращаться к уравнениям (2.10), (2.11), поскольку найденные функции $\lambda_i(t)\ (i = \overline{0,3})$ позволяют определить матрицу ориентации (2.67) и тем самым решить и задачу ориентации тела.

Если использовать численные алгоритмы, то задачу ориентации можно решить путем интегрирования дифференциальных уравнений (2.69).

Запишем формулы (2.25) – (2.27) в параметрах Родрига–Гамильтона

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ \omega_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ \omega_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2) \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \qquad (2.75)$$

Если подставить (2.75) в скалярные уравнения, которые вытекают из (2.1), то получим систему уравнений движения тяжелого твердого тела, предложенную [69]. При этом динамическими уравнениями являются уравнения

$$\begin{gathered}
A_1\dot{\omega_1} = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s[e_2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)],\\
A_2\dot{\omega_2} = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + s[2e_3(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) - e_1(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)],\\
A_3\dot{\omega_3} = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + 2s[e_1(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) - e_2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)],
\end{gathered} \qquad (2.76)$$

а кинематическими уравнениями – уравнения (2.11).

В книге [68] путем подстановки выражений (2.74) в уравнения (2.76) получены уравнения второго порядка на параметры Родрига–Гамильтона. Однако они не нашли широкого применения в построении нетривиальных решений.

2.8. Различные подходы в выборе подвижной и неподвижной систем координат

2.8.1. О типах подвижной системы координат

К первому типу подвижной системы координат отнесем главную систему координат. В ней матрица A имеет вид: $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, а компоненты вектора **e** таковы e_1, e_2, e_3. Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой можно получить из (2.5), положив $\lambda_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$. Они наиболее употребляемы при анализе решений Ж. Лагранжа и С.В. Ковалевской, В.А. Стеклова, Н. Ковалевского и других (см. обзор [17]).

Условия на распределения масс, принятые в решениях Д. Гриоли [149], В. Гесса [151] в главной системе координат имеют определенные недостатки, так как они содержат кроме главных моментов инерции и компоненты вектора **e** (связь условий Гриоли и Гесса в главной системе координат с другими условиями рассмотрена в [32]).

Ко второму типу подвижной системы координат отнесем специальную систему координат, введенную П.В. Харламовым [119].

В этой системе координат целесообразно вместо компонент вектора угловой скорости ввести компоненты вектора момента количества движения $\mathbf{x} = A \cdot \boldsymbol{\omega}$. Тогда $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$, где a – гирационный тензор Мак–Куллаха [163]. Направим по вектору $\mathbf{e}$ первую ось подвижной системы координат: $\mathbf{e} = (1,0,0)$ и положим [119]

$$a = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu, \nu_1, \nu_2), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2). \tag{2.77}$$

Тогда, в силу (2.77) уравнения (2.1) таковы

$$\begin{gathered} \dot{x} = (a_2 z + b_2 x)(y + \lambda_1) - (a_1 y + b_1 x)(z + \lambda_2), \\ \dot{y} = (ax + b_1 y + b_2 z)(z + \lambda_2) - (a_2 z + b_2 x)(x + \lambda) - s\nu_2, \\ \dot{z} = -(ax + b_1 y + b_2 z)(y + \lambda_2) + (a_1 y + b_1 x)(z + \lambda) + s\nu_1, \end{gathered} \tag{2.78}$$

$$\begin{gathered} \dot{\nu} = (a_2 z + b_2 x)\nu_1 - (a_1 y + b_1 x)\nu_2, \\ \dot{\nu}_1 = (ax + b_1 y + b_2 z)\nu_2 - (a_2 z + b_2 x)\nu, \\ \dot{\nu}_2 = -(ax + b_1 y + b_2 z)\nu_1 + (a_1 y + b_1 x)\nu. \end{gathered} \tag{2.79}$$

Уравнения (2.78), (2.79) имеют интегралы

$$\begin{gathered} (x + \lambda)\nu + (y + \lambda_1)\nu_1 + (z + \lambda_2)\nu_2 = k, \quad \nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1, \\ ax^2 + a_1 y^2 + a_2 \mathrm{z}^2 + 2(b_1 y + b_2 z)x - 2s\nu = 2E. \end{gathered} \tag{2.80}$$

Условия Гесса при указанном способе введения подвижной системы координат имеют вид (полагаем $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

$$b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = a_*. \tag{2.81}$$

При выполнении (2.81) из (2.78) следует

$$\dot{x} = -b_1 x z. \tag{2.82}$$

Инвариантное соотношение Гесса в специальной системе координат в силу (2.82) таково

$$x = 0. \tag{2.83}$$

Оно будет изучено ниже (в разделе 5).

Третий тип подвижной системе координат удобен для анализа прецессионных движений (2.30), (2.32). Для этих движений одна из подвижных осей направляется по вектору, который образует постоянный угол с вертикалью.

Это позволяет достаточно просто записать общее решение уравнения Пуассона (см. формулы (2.33)).

Четвертый тип подвижной системы координат целесообразно использовать при рассмотрении изоконических движений, которые характеризуются ИС (2.34). Для анализа условий существования таких движений ранее полагалось, что $\mathbf{c} = (0,0,1)$, то есть подвижная система координат связывается с вектором $\mathbf{c}$.

Очевидно, что приведенными выше типами подвижной системы координат не могут исчерпываться все возможные типы, так как выбор этой системы зависит от постановки задачи, выбора переменных задачи и от вида уравнений движения.

2.8.2. Типы неподвижной системы координат

К первому типу отнесем систему координат, одна ось которой направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$, определяющему силу тяжести $gm\boldsymbol{\nu}$. При этом подвижная система может быть выбрана одним из указанных в 2.8.1 способом. Это означает, что углы Эйлера будут выбраны так, что вектор скорости прецессии будет иметь значение $\dot{\psi}\boldsymbol{\nu}$, а углом нутации будет угол между векторами $\mathbf{i'}_3$ и $\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\nu}$.

Второй тип неподвижной системы координат целесообразно ввести при рассмотрении прецессии либо относительно горизонтальной оси, которая характеризуется единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$ $(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0)$, либо относительно наклонной оси с единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}_*$ $(\boldsymbol{\gamma}_* \neq \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\gamma}_* \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0)$.

К третьему типу неподвижной системы координат отнесем систему координат, для которой компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ равны $-e_i$ $(i = \overline{1,3})$. Для этой системы проекции ν_i $(i = \overline{1,3})$ на главные оси тела будут иметь значения (2.9). В этом случае уравнения движения тела в переменных ω_i $(i = \overline{1,3})$ и λ_i $(i = \overline{0,3})$ будем принимать в виде (2.10), (2.11).

2.9. Уравнения движения гиростата в обобщенной задаче

Рассмотрим движение гиростата S (системы $S_0, S_1, \ldots, S_n$) с неподвижной точкой O в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского поля сил, электрического и магнитных полей. Обозначим через $\mathbf{\nu}$ – единичный вектор оси, которая содержит неподвижную точку O и центры ньютоновского и кулоновского притяжений. Предполагаем [120, 169, 170], что тела S_i $(i = \overline{1,n})$ закреплены на теле S_0 осями l_i и не несут электрических зарядов и магнитных диполей. Тело S_0 (тело-носитель) намагничено и несет положительные и отрицательные заряды. В осях l_i силы трения отсутствует, а тела S_i имеют симметричную форму. Потенциальные силы характеризуются ньютоновским притяжением масс; кулоновской силой, действующей на наэлектризованное тело-носитель; магнитным воздействием магнитное поля на намагниченный гиростат. Гироскопические силы обусловлены силой Лоренца, которая действует на электрические заряды со стороны магнитного поля.

Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в векторном виде [30, 32, 169, 170]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}^*) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \qquad (2.84)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \qquad (2.85)$$

В уравнениях (2.84), (2.85) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $\mathrm{A} = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы, которые характеризуют соответственно гироскопические и потенциальные силы.

Уравнения (2.84), (2.85) имеют первые интегралы

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \\ (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E,\end{gathered} \qquad (2.86)$$

где k и E – произвольные постоянные.

В постановке (2.84) – (2.86) обобщенная задача рассмотрена в работах Х.М. Яхьи [169, 170], Г.В. Горра и его учеников [27, 29, 34, 36, 112].

Рассмотрим связь уравнений (2.84) – (2.86) с уравнениями движения тела в идеальной несжимаемой жидкости в постановке Г. Кирхгофа [157], А. Клебша [140, 141], В.А. Стеклова [103, 104], С.А. Чаплыгина [131, 132] и П.В. Харламова[114–116]. Обозначим через T – кинетическую энергию системы “тело + жидкость” [116]

$$2T = (a^*\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) + (b\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) + 2(\mathbf{P} \cdot c\mathbf{R}), \tag{2.87}$$

здесь a^*, b – положительно-определенные симметричные матрицы третьего порядка; c – матрица третьего порядка (в общем случае не обладающая свойством симметричности); $\mathbf{R}$ – импульсивная сила; $\mathbf{P}$ – импульсивная пара. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}^*$ – угловую скорость тела, $\mathbf{u}$ – скорость начальной точки. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}^* = \overline{\mathrm{grad}}_{\mathbf{P}}\, T = a^*\mathbf{P} + c\mathbf{R}, \quad \mathbf{u} = \overline{\mathrm{grad}}_{\mathbf{R}}\, T = b\mathbf{R} + c^T\mathbf{P}. \tag{2.88}$$

Следуя [116], запишем уравнения движения тела в жидкости

$$\dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{P} + \boldsymbol{\lambda}_*) \times \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R} - \mathbf{u} \times \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^*. \tag{2.89}$$

где векторы $\boldsymbol{\omega}^*$ и $\mathbf{u}$ определены соотношениями (2.88); $\boldsymbol{\lambda}_*, \boldsymbol{\mu}$ – постоянные векторы. Уравнения (2.89) имеют первые интегралы

$$T - 2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}) = 2E, \quad (\mathbf{P} + \boldsymbol{\lambda}_*) \cdot \mathbf{R} = k, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R_0^2. \tag{2.90}$$

Выполним в уравнениях (2.89) и интегралах (2.90) следующую замену параметров и переменных

$$\begin{gathered} a^* = A^{-1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_* = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{s}}{R_0}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{R} = R_0\boldsymbol{\nu}, \\ \mathbf{P} = A \cdot \boldsymbol{\omega} - R_0 A \cdot c\boldsymbol{\nu}. \end{gathered} \tag{2.91}$$

Тогда, как доказано Х.М. Яхьей [169, 170], уравнения (2.89) с интегралами (2.90) преобразуются к уравнениям (2.84), (2.85) с интегралами (2.86), в которых

$$B = R_0(c^T \cdot A + A \cdot c - Sp(A \cdot c)\delta), \quad C = R_0^2(b - c^T \cdot A \cdot c), \tag{2.92}$$

где δ – единичная матрица третьего порядка, $\mathrm{Sp}(A \cdot c)$ – след матрицы $A \cdot c$.

Если заданы уравнения (2.84), (2.85), то матрицу A можно взять в виде $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$. Тогда $a^* = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3}\right)$, В случае симметрической матрицы c (в качестве начальной точки выбрана центральная точка) из (2.92) получим

$$c = \frac{1}{R_0}\begin{pmatrix} \frac{B_{22}+B_{33}}{2A_1} & \frac{B_{12}}{A_1+A_2} & \frac{B_{13}}{A_1+A_3} \\ \frac{B_{12}}{A_1+A_2} & \frac{B_{33}+B_{11}}{2A_2} & \frac{B_{23}}{A_2+A_3} \\ \frac{B_{13}}{A_1+A_3} & \frac{B_{23}}{A_2+A_3} & \frac{B_{11}+B_{22}}{2A_3} \end{pmatrix},$$

а матрица b примет вид $b = \frac{1}{R_0^2}C + c \cdot A \cdot c$.

Таким образом, любое решение уравнений (2.84), (2.85) с помощью формул (2.91) может быть перенесено в задачу, которая описывается уравнениями (2.89). Например, это относится: к решениям, которые характеризуются одним, двумя, тремя инвариантными соотношениями; к решениям, описывающими прецессионные движения ($\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = a_0$) и т.д.

Отметим общие случаи интегрируемости уравнений (2.84), (2.85). Они имеют место только при условиях, что матрицы A, B, C обладают диагональной структурой

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3), \tag{2.93}$$

Уравнения (2.84), (2.85) и интегралы (2.86) запишем в скалярном виде

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \\ +\tilde{\lambda}_2\omega_3 - \tilde{\lambda}_3\omega_2 + B_3\nu_3\omega_2 - B_2\nu_2\omega_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \\ +\tilde{\lambda}_3\omega_1 - \tilde{\lambda}_1\omega_3 + B_1\nu_1\omega_3 - B_3\nu_3\omega_1 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 +, \\ +\tilde{\lambda}_1\omega_2 - \tilde{\lambda}_2\omega_1 + B_2\nu_2\omega_1 - B_1\nu_1\omega_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2; \end{gathered} \tag{2.94}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{2.95}$$

$$\begin{gathered} \left(A_1\omega_1 + \tilde{\lambda}_1\right)\nu_1 + \left(A_2\omega_2 + \tilde{\lambda}_2\right)\nu_2 + \left(A_3\omega_3 + \tilde{\lambda}_3\right)\nu_3 - \\ -\frac{1}{2}(B_1\nu_1 + B_2\nu_2 + B_3\nu_3) = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) + \\ +C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E. \end{gathered} \tag{2.96}$$

Если в (2.94) – (2.96) воспользоваться выражениями (2.75), то получим систему уравнений в переменных ω_i $(i=\overline{1,3})$, λ_j $(j=\overline{0,3})$. При этом вместо (2.95) следует рассматривать уравнения (2.11).

Перечислим общие случаи интегрируемости уравнений (2.94), (2.95), которые характеризуются либо линейными, либо квадратичными дополнительными первыми интегралами.

1. Случай Г. Кирхгофа [157] – П.В. Харламова [115].

Он характеризуется условиями

$$A_2=A_3,\quad s_2=s_3=0,\quad B_2=B_3,\quad C_2=C_3. \tag{2.97}$$

Полагая в уравнениях (2.94), (2.95) условия (2.97), получим первый интеграл

$$A_1\omega_1+B_2\nu_1=c, \tag{2.98}$$

где c – произвольная постоянная. Соотношение (2.98) при $B_2=0$ переходит в интеграл Лагранжа классической задачи $\left(B_i=0,\ C_i=0,\ \tilde{\lambda}_j=0\right)$.

2. Предельный случай Клебша [140].

Пусть в (2.84) $\mathbf{s}=0$, $\boldsymbol{\lambda}=0$, $A_1=A_2=A_3$, $B_1=B_2=B_3$. Тогда имеем предельный случай А.Клебша, который характеризуется дополнительным интегралом

$$\begin{gathered}A_1[C_1(\omega_1+n\nu_1)^2+C_2(\omega_2+n\nu_2)^2+C_3(\omega_3+n\nu_3)^2]-\\-(C_2C_3\nu_1^2+C_3C_1\nu_2^2+C_1C_2\nu_3^2)=c.\end{gathered} \tag{2.99}$$

В (2.99) c – произвольная постоянная, n – фиксированная постоянная.

3. Случай Клебша [141].

Он характеризуется условиями

$$\mathbf{s}=0,\quad \boldsymbol{\lambda}=0,\quad B=n(\mathrm{Sp}(A)\delta-2A),\quad C=(\beta-n^2)A, \tag{2.100}$$

где n и β – параметры, Sp(A) – след матрицы A, δ – единичная матрица. В силу (2.100) из (2.84), (2.85) следует интеграл Клебша

$$(A\boldsymbol{\omega}+nA\boldsymbol{\nu})^2+\beta A_1A_2A_3(A^{-1}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=c, \tag{2.101}$$

здесь c – произвольная постоянная. Отметим, что А.Клебш получил интеграл вида (2.101) для уравнений (2.89).

4. Случай В.А. Стеклова [107] (обобщен П.В. Харламовым [116] и В.Н. Рубановским [88, 90]).

Пусть параметры уравнений (2.84), (2.85) удовлетворяют условиям

$$\mathbf{s} = n\boldsymbol{\lambda}, \quad B = n(\mathrm{Sp}(A)\delta - 2A) - xA^{-1}, \quad C = -n^2 A - nxA^{-1},$$

где n, x – параметры. Тогда они допускают интеграл

$$(A\boldsymbol{\omega} + nA\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\lambda})^2 + 2x(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}) = c, \tag{2.102}$$

где c – произвольная постоянная. Интеграл (2.102) вначале был найден для уравнений (2.89).

5. Случай А.М. Ляпунова [76] (обобщен П.В. Харламовым [115, 116] и В.Н. Рубановским [90]).

Он получен при условиях

$$A_1 = A_2 = A_3, \quad \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad C_1 = -\frac{B_2 B_3}{B_1}, \quad C_2 = -\frac{B_3 B_1}{B_2}, \quad C_3 = -\frac{B_1 B_2}{B_3}$$

и имеет квадратичный порядок по основным переменным

$$\begin{gathered}(B_2 + B_3)\left(\omega_1 - \frac{B_1 \nu_1}{A_1} + \frac{s_1}{B_2 + B_3}\right)^2 + \\ +(B_3 + B_1)\left(\omega_2 - \frac{B_2 \nu_2}{A_2} + \frac{s_2}{B_3 + B_1}\right)^2 + \\ +(B_1 + B_2)\left(\omega_3 - \frac{B_3 \nu_3}{A_3} + \frac{s_3}{B_1 + B_2}\right)^2 = e,\end{gathered} \tag{2.103}$$

где c – произвольная постоянная. Вывод интегралов (2.99), (2.101), (2.102), (2.103) указан в монографии [32].

2.10. Выводы

В данном разделе рассмотрены методы исследования динамики тяжелого твердого тела. Приведены первая и вторая форма уравнений движения, указан вид решений Эйлера–Пуассона в рядах Пуанкаре, изложен метод инвариантных соотношений для автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, рассмотрены прецессионные движения тела. На основе теоремы Пуансо и уравнений П.В. Харламова дан анализ метода годографов кинематического истолкования движения тела, приведены основные сведения из теории конечного поворота тела и значения параметров Родрига–Гамильтона через углы Эйлера, объяснены различные подходы в выборе подвижной и неподвижной систем координат. Описана обобщенная задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, в которой также могут быть введены параметры Родрига–Гамильтона.

РАЗДЕЛ 3
ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА

В данном разделе получена новая форма уравнений движения твердого тела в поле силы тяжести, когда в качестве основных переменных приняты параметры Родрига–Гамильтона и вектор угловой скорости. Рассмотрены нормальные колебания тела около нижнего положения равновесия и установлена их связь с движениями физического маятника и равномерными вращениями.

3.1. Введение

Кинематические параметры Родрига–Гамильтона обладают рядом замечательных свойств, к которым можно отнести отсутствие особенностей в области определения, сохранение алгебраической структуры уравнений движения, наглядность геометрического представления движения на основе вектора конечного поворота. В теоретических исследованиях по динамике твердого тела их использование остается ограниченным. Систематическое изучение задач динамики твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона начато в работах [68, 69], где была получена система уравнений второго порядка, с помощью которой рассмотрены свойства равномерных вращений и частные решения. Укажем так же на работы [56, 66], в которых получены функции Гамильтона для твердого тела и гиростата. Необходимо отметить, что препятствием к распространению параметров Родрига–Гамильтона является сложность уравнений движения. Упрощение уравнений движения являлось одной из целей настоящей работы. Ее удалось достичь, благодаря специальному введению неподвижной системы координат. С помощью полученных уравнений рассмотрены нормальные колебания тела около нижнего положения равновесия и установлена их связь с движением физического маятника и равномерными вращениями. Изучено расположение осей нормальных колебаний в теле в зависимости от значений моментов инерции и положения центра масс.

3.2. Исходные уравнения. Нахождение уравнений для линейных колебаний

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. В качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через $A_1,\ A_2,\ A_3$ главные моменты инерции; $\omega_i,\ \nu_i,\ e_i\ (i = 1,2,3)$ – проекции на подвижные оси вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, s – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы, следуя разделу 2, выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν_i' вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения: $\nu_i' = -e_i \quad (i = 1,2,3)$. Выпишем формулы (2.9)

$$\begin{gathered}
\nu_1 = e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3),\\
\nu_2 = 2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3),\\
\nu_3 = -2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Для описания движения твердого тела выберем в качестве фазовых координат параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ и компоненты угловой скорости $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$, связанные с величинами $\dot\lambda_0,\ \dot\lambda_1,\ \dot\lambda_2,\ \dot\lambda_3$ формулами (2.74)

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_0 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3),\\
\omega_2 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1),\\
\omega_3 &= 2\big(\lambda_0\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_0 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2\big).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В качестве полной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение тяжелого твердого тела примем на основании (3.1), (3.2) уравнения

$$
\begin{gathered}
A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \\
-2s[\lambda_0\lambda_1 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_1 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)] \\
A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - \\
-2s[\lambda_0\lambda_2 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_2 + \lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)], \\
A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - \\
-2s[\lambda_0\lambda_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_3 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)];
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3, \\
2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3, \\
2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \\
2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Уравнения (3.3), (3.4) описывают движение твердого тела в переменных $\omega_i\ (i = \overline{1{,}3})$ и в параметрах Родрига–Гамильтона, их правые части являются однородными квадратичными формами основных переменных. Эти уравнения допускают три интеграла: энергии, момента и геометрический

$$
\begin{gathered}
A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 + 4s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2] = h, \\
A_1\omega_1[e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)] + \\
+A_2\omega_2[2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)] + \\
+A_3\omega_3[-2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2)] = k, \\
\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Приведем выражение для потенциальной энергии, которая потребуется при изучении нормальных колебаний

$$
\Pi = 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2]. \tag{3.6}
$$

Найдем особые точки уравнений движения, приравняв нулю правые части уравнений (3.3), (3.4). Кинематические уравнения (3.4) удовлетворяются единственным решением $\boldsymbol{\omega} = 0$. Динамические уравнения (3.3) приводят к уравнению, которое запишем в векторном виде

$$
\lambda_0\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e} - \lambda_0\mathbf{e}) = 0, \tag{3.7}
$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Отдельно рассмотрим два случая, когда векторы $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e}$ линейно зависимы и линейно независимы. В первом случае получаем $\boldsymbol{\lambda} = \alpha\mathbf{e}$. Воспользуемся имеющимся произволом при выборе неподвижной системы координат и поворотом вокруг вектора $\mathbf{e}$ совместим неподвижные оси с главными осями инерции твердого тела. Тогда $\chi = 0$ и

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_0 = 1. \tag{3.8}$$

Во втором случае из уравнений, вытекающих из (3.7), имеем $\lambda_0 = 0$, $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Из формулы (2.54) находим

$$\chi = \pi, \quad \mathbf{l} \perp \mathbf{e}. \tag{3.9}$$

Таким образом, особыми точками уравнений (3.3), (3.4) являются положения равновесия, для которых выполняются соотношения (3.8), (3.9). Формулы (3.8) определяют нижнее положение равновесия, а формулы (3.9) – верхнее.

Изучим линейные нормальные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия. В качестве обобщенных координат выберем $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, а параметр λ_0 определим из равенства (2.62). Сохраняя за возмущенными значениями параметров те же обозначения, получаем, что потенциальная энергия возмущенного движения определяется формулой (3.6), а для кинетической энергии с учетом формул (3.2), (3.5) с точностью до квадратичных членов находим

$$T = 2(A_1\dot{\lambda}_1{}^2 + A_2\dot{\lambda}_2{}^2 + A_3\dot{\lambda}_3{}^2). \tag{3.10}$$

Нормальные координаты соответствуют базису $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, в котором квадратичные формы (3.6), (3.10) имеют канонический вид. Приведение этих форм к каноническому виду выполним в два этапа. На первом этапе введем переменные $x_i = \sqrt{2A_i}\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$. Тогда формы (3.6), (3.10) примут вид

$$T = \dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2 + \dot{x}_3{}^2, \tag{3.11}$$

$$\Pi = s\left[\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} - \left(\frac{x_1 e_1}{\sqrt{A_1}} + \frac{x_2 e_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{x_3 e_3}{\sqrt{A_3}}\right)\right]^2. \tag{3.12}$$

На втором этапе с помощью преобразования поворота $x = Py$ приведем форму (3.12) к каноническому виду. При этом форма (3.11) не изменится. Переменные $y_1,\ y_2,\ y_3$ определяют нормальные координаты. В них формы (3.11), (3.12) принимают вид

$$T = \dot{y}_1{}^2 + \dot{y}_2{}^2 + \dot{y}_3{}^2, \tag{3.13}$$

$$\Pi = \mu_0 y_1^2 + \mu_1 y_2^2 + \mu_2 y_3^2, \tag{3.14}$$

а уравнения движения

$$\ddot{y}_i + \mu_{i-1} y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.15}$$

определяют нормальные колебания.

Величины μ_i $(i = 0, 1, 2)$ являются корнями характеристического уравнения $det(A - \mu E) = 0$, где A – матрица квадратичной формы (3.12), а столбцы матрицы P являются собственными векторами $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ матрицы A, соответствующими корням μ_0, μ_1, μ_2. Для матрицы A имеем выражение

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{s(e_2^2 + e_3^2)}{A_1} & -\dfrac{se_1e_2}{\sqrt{A_1A_2}} & -\dfrac{se_1e_3}{\sqrt{A_1A_3}} \\ -\dfrac{se_1e_2}{\sqrt{A_1A_2}} & \dfrac{s(e_3^2 + e_1^2)}{A_2} & -\dfrac{se_2e_3}{\sqrt{A_2A_3}} \\ -\dfrac{se_1e_3}{\sqrt{A_1A_3}} & -\dfrac{se_2e_3}{\sqrt{A_2A_3}} & \dfrac{s(e_1^2 + e_2^2)}{A_3} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Вычисляя характеристическое уравнение для матрицы (3.16), находим, что $\mu_0 = 0$, а корни μ_1, μ_2 удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered} A_1A_2A_3\mu^2 - s[A_1A_2(e_1^2 + e_2^2) + A_2A_3(e_2^2 + e_3^2) + A_3A_1(e_3^2 + e_1^2)]\mu + \\ +s^2(A_1e_1^2 + A_2e_2^2 + A_3e_3^2) = 0. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Решая уравнение (17), получаем выражения для корней μ_1, μ_2

$$\mu_{1,2} = \frac{s[A_1A_2(e_1^2 + e_2^2) + A_2A_3(e_2^2 + e_3^2) + A_3A_1(e_3^2 + e_1^2)] \pm D}{2A_1A_2A_3}, \tag{3.18}$$

где

$$\begin{gathered} D^2 = s^2[A_1^2A_2^2(e_1^2 + e_2^2)^2 + A_2^2A_3^2(e_2^2 + e_3^2)^2 + A_3^2A_1^2(e_3^2 + e_1^2)^2 + \\ +2A_1A_2^2A_3(e_1^2e_3^2 - e_2^2) + 2A_2A_3^2A_1(e_2^2e_1^2 - e_3^2) + 2A_3A_1^2A_2(e_3^2e_2^2 - e_1^2)]. \end{gathered}$$

Для нахождения базисных векторов $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ нормальных колебаний необходимо решить систему уравнений $(A - \mu_i E)\mathbf{h_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. При ее решении будем различать три случая расположения центра масс:

1. Центр масс не лежит в главной плоскости: $e_1e_2e_3 \neq 0$;
2. Центр масс лежит на главной оси: $e_1 = 1, \quad e_2 = e_3 = 0 \quad (123)$;
3. Центр масс лежит в главной плоскости: $e_1 = 0 \quad (123)$.

В первом случае, при дополнительном предположении $A_1 \neq A_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, для проекций базисных векторов на оси $Ox_1x_2x_3$ получаем выражения

$$\begin{gathered} h_{01} = \alpha_0 e_1 \sqrt{A_1}, \quad h_{02} = \alpha_0 e_2 \sqrt{A_2}, \quad h_{03} = \alpha_0 e_3 \sqrt{A_3}, \\ \alpha_0^{-2} = A_1 e_1^2 + A_2 e_2^2 + A_3 e_3^2, \end{gathered} \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered} h_{i1} = \alpha_i e_1 e_3 (1 - \mu_i A_2) \sqrt{A_1}, \quad h_{i2} = \alpha_i e_2 e_3 (1 - \mu_i A_1) \sqrt{A_2}, \\ h_{i3} = \alpha_i [A_1 e_1^2 (\mu_i A_2 - 1) + A_2 e_2^2 (\mu_i A_1 - 1)] / \sqrt{A_3}, \\ \alpha_i^{-2} = e_1^2 e_3^2 (1 - \mu_i A_2)^2 A_1 + e_2^2 e_3^2 (1 - \mu_i A_1)^2 A_2 + \\ + [A_1 e_1^2 (\mu_i A_2 - 1) + A_2 e_2^2 (\mu_i A_1 - 1)]^2 / A_3, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.20}$$

По формулам перехода $x_i = \sqrt{2A_i}\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$ от исходных переменных λ_i к переменным x_i получаем, что вектор **e** имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ проекции $e_{x1} = \sqrt{2A_1}e_1, \quad e_{x2} = \sqrt{2A_2}e_2, \quad e_{x3} = \sqrt{2A_3}e_3$. На основании формул (3.19) это означает, что вектор $\mathbf{h_0}$ коллинеарен вектору e и в неподвижном пространстве направлен вертикально вниз. В силу уравнений (3.15) для $\mu_0 = 0$ имеем $\dot{y}_0 = C_0 = \text{const}$, что по формулам (3.2) дает $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. Таким образом, нормальное колебание, соответствующее $\mu_0 = 0$, является равномерным вращением вокруг вертикали. На основании уравнений (3.15) нормальные колебания, соответствующие значениям μ_1, μ_2, происходят в неподвижном пространстве вокруг векторов $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$. Сформулируем полученный результат в форме утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $e_1e_2e_3 \neq 0$, $A_1 \neq A_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда линейными нормальными колебаниями твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига–Гамильтона являются равномерное вращение вокруг вектора, расположенного в неподвижном пространстве вертикально вниз, и колебания вокруг двух осей, положение которых в теле и в неподвижном пространстве, в системе $Ox_1x_2x_3$, определяется формулами (3.20).*

Для случая произвольного положения центра масс $(e_1e_2e_3 \neq 0)$ известно, что равномерное вращение вокруг оси несущей центр масс, возможно лишь с нулевой скоростью. При этом одна из ветвей S_0 кривой Штауде [168], определяющей положение вектора угловой скорости равномерного вращения в теле, проходит через начало координат. Отсюда заключаем, что прямая равномерных вращений, определяемая вектором **e** в линейном случае, деформируется в нелинейном случае (для полных уравнений (3.3),(3.4)) в кривую Штауде S_0. Что соответствует двум оставшимся линейным нормальным колебаниям в нелинейном случае неизвестно, поскольку в рассматриваемом случае $(e_1 e_2 e_3 \neq 0)$ других решений уравнений (3.3), (3.4), кроме равномерных вращений пока не обнаружено.

3.3. Центр масс принадлежит главной оси

Ситуация существенно упрощается, когда центр масс тела находится на главной оси, пусть $e_1 = 1, e_2 = e_3 = 0$. Тогда главные оси инерции являются главными осями квадратичных форм (3.6), (3.10) и, соответственно, осями нормальных колебаний. Вокруг оси, несущей центр масс, тело совершает вращение, а вокруг двух других осей – колебания. Эти движения описываются следующими решениями линеаризованной системы:

$$
\begin{aligned}
&\mu_0 = 0: \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_{10} = const,\\
&\qquad\qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 = \omega_{10} t + \lambda_{10};\\
&\mu_1 = \frac{1}{A_2}: \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{A_2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20}\right),\\
&\qquad\qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_2 = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20}\right);\\
&\mu_2 = \frac{1}{A_3}: \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{A_3}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}\right),\\
&\qquad\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}\right).
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Отметим, что решения (3.21) являются также и решениями нелинейной системы, и, тем самым, определяют нелинейные нормальные колебания, которым соответствуют равномерные вращения и движения физического маятника. Сформулируем полученный результат в следующей форме.

Утверждение 2. *Пусть центр масс тела находится на главной оси инерции. Тогда главные оси являются осями линейных и нелинейных нормальных колебаний твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига–Гамильтона. Колебаниям относительно оси, несущей центр масс, соответствуют равномерные вращения тела вокруг вертикали, а колебаниям относительно двух других главных осей инерции соответствуют движения физического маятника. Хотя решения (3.21) описывают нормальные колебания, однако координаты λ_1, λ_2, λ_3 не являются нормальными координатами нелинейной системы и для них принцип суперпозиции не имеет места.*

3.4. Центр масс лежит в главной плоскости

Пусть центр масс находится в главной плоскости $(e_3 = 0)$. Тогда выражения для частот и базисных векторов нормальных колебаний упрощаются

$$\begin{gathered}
\mu_0 = 0\colon \quad h_{01} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{02} = \alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{03} = 0, \\
\alpha_0^{-2} = A_1 e_1^2 + A_2 e_2^2; \\
\mu_1 = \frac{1}{A_3}\colon \quad h_{11} = 0, \quad h_{12} = 0, \quad h_{13} = 1; \\
\mu_2 = \frac{A_1 e_1^2 + A_2 e_2^2}{A_1 A_2}\colon \quad h_{21} = -\alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{22} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{23} = 0.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, находим, что, как и ранее, вектор $\mathbf{h_0}$ совпадает с вектором $\mathbf{e}$, вектор $\mathbf{h_1}$ направлен по третьей главной оси, а вектор $\mathbf{h_2}$ имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ координаты

$$\begin{gathered}
h_{2x1} = -\beta_0 e_2 A_2, \quad h_{2x2} = \beta_0 e_1 A_1, \quad h_{2x3} = 0, \\
\beta_0^{-2} = A_1^2 e_1^2 + A_2^2 e_2^2.
\end{gathered} \tag{3.23}$$

Утверждение 3. *Для твердого тела, центр масс которого расположен в главной плоскости, линейные нормальные колебания представляют собой равномерное вращение вокруг вектора* $\boldsymbol{e}$*, расположенного вертикально вниз в неподвижном пространстве, и два колебания вокруг осей с единичными векторами* $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2}$*, одна из которых является главной осью эллипсоида инерции, ортогональной вектору* $\boldsymbol{e}$*. Нормальное колебание вокруг главной оси* *соответствует решению физического маятника уравнений Эйлера–Пуассона и, следовательно, сохраняется и в нелинейном случае.*

Замечание. Таким образом в настоящем пункте линейные нормальные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия изучены достаточно детально. Установлена их связь с нелинейными нормальными колебаниями за исключением трех случаев колебаний вокруг неглавных осей. При сохранении нормальных колебаний в нелинейном случае полученные координаты не являются нормальными и разделения движений не происходит. Как дальнейшее развитие этого исследования предполагается рассмотреть следующие задачи: изучение нелинейных нормальных колебаний методом нормальных форм; построение решений нелинейных уравнений Эйлера–Пуассона, соответствующих линейным нормальным колебаниям вокруг неглавных осей; анализ изменения движений Эйлера–Пуансо при смещении центра масс из неподвижной точки вдоль главной оси, в главной плоскости, в произвольном направлении.

3.5. Уравнения движения в специальной системе координат

В данном случае для описания движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в поле силы тяжести в качестве подвижной системы координат примем специальную систему координат [119]. Обозначим через $x,\ y,\ z;\ \omega_i,\ \nu_i,\ e_i\ \ (i = 1{,}2{,}3)$ – проекции на эти оси векторов кинетического момента, угловой скорости, единичного вектора вертикали, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, $a,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ – компоненты гирационного тензора, s – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы, следуя [56], выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν'_i вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения: $\nu'_i = -e_i\ \ (i = 1, 2, 3)$. По таблице направляющих косинусов [75] с учетом

$e_1 = 1,\ \ e_2 = e_3 = 0$ находим выражения для ν_i через параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ (см. формулы (2.9)):

$$\begin{gathered}\nu_1 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2,\\ \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1),\\ \nu_3 = -2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1).\end{gathered} \tag{3.24}$$

Для компонент угловой скорости ω_i имеем выражения [119]

$$\omega_1 = ax + b_1y + b_2z, \quad \omega_2 = a_1y + b_1x, \quad \omega_3 = a_2z + b_2x. \tag{3.25}$$

Дифференциальные уравнения движения получим, подставив формулы (3.24), (3.25) в динамические уравнения Харламова [119]

$$\begin{gathered}\dot{x} = y(a_2z + b_2x) - z(a_1y + b_1x),\\ \dot{y} = z(ax + b_1y + b_2z) - x(a_2z + b_2x) - 2s(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3),\\ \dot{z} = -y(ax + b_1y + b_2z) + x(a_1y + b_1x) - 2s(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2),\end{gathered} \tag{3.26}$$

и кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона [75]

$$\begin{aligned}2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_2(a_1y + b_1x) - \lambda_3(a_2z + b_2x),\\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0(ax + b_1y + b_2z) + \lambda_2(a_2z + b_2x) - \lambda_3(a_1y + b_1x),\\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0(a_1y + b_1x) + \lambda_3(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_1(a_2z + b_2x),\\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0(a_2z + b_2x) + \lambda_1(a_1y + b_1x) - \lambda_2(ax + b_1y + b_2z).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Уравнения (3.26), (3.27) допускают три интеграла: энергии, постоянства кинетического момента и геометрический:

$$\begin{gathered}ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x + 2s(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) = h,\\ x(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) + 2y(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) - 2z(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) = k,\\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Уравнения (3.26), (3.27) и интегралы (3.28) описывают движение твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона в специальных осях.

3.6. Функция Гамильтона

Найдем функцию Гамильтона в обобщенных координатах. В качестве обобщенных координат примем параметры $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, а параметр λ_0 определим из равенства

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Запишем выражение для функции Гамильтона $H = T + \Pi$, где

$$T = \frac{1}{2}(A_{11}\omega_1^2 + A_{22}\omega_2^2 + A_{33}\omega_3^2) + A_{12}\omega_1\omega_2 + A_{23}\omega_2\omega_3 + A_{13}\omega_1\omega_3, \qquad (3.29)$$
$$\Pi = s(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2).$$

Здесь A_{ij} – компоненты тензора инерции тела в неподвижной точке относительно произвольных, фиксированных в теле осей. Величины ω_i выражаются формулами (2.74)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3\big), \\ \omega_2 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1\big), \\ \omega_3 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2\big). \end{aligned} \qquad (3.30)$$

Исключим из (3.30) $\dot{\lambda}_i,\ i = 1, 2, 3$ с помощью равенств

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^{3} \big(A_{j1}\omega_1 + A_{j2}\omega_2 + A_{j3}\omega_3\big)\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\lambda}_i} + \big(-2\lambda_j\big)\frac{\dot{\lambda}_0}{\dot{\lambda}_i}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

Заменим выражения в скобках соответствующими компонентами кинетического момента $x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\omega_j,\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{\dot{\lambda}_0}[x_1(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) + x_2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + x_3(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)], \\ p_2 &= \frac{2}{\dot{\lambda}_0}[x_1(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + x_2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) + x_3(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)], \\ p_3 &= \frac{2}{\dot{\lambda}_0}[x_1(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + x_2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) + x_3(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)]. \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Разрешая соотношения (3.31) относительно $x_1,\ x_2,\ x_3$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \lambda_0 p_1 - \lambda_3 p_2 + \lambda_2 p_3, \\ 2x_2 &= \lambda_3 p_1 + \lambda_0 p_2 - \lambda_1 p_3, \\ 2x_3 &= -\lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2 + \lambda_0 p_3 \end{aligned}$$

и подставляя найденные значения в выражение кинетической энергии в специальной системе координат

$$T = \frac{1}{2}(a x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2) + 2(b_1 x_2 + b_2 x_3)x_1, \qquad (3.32)$$

получаем выражение для функций Гамильтона

$$
\begin{gathered}
H=\frac{1}{8}[a(\lambda_0p_1-\lambda_3p_2+\lambda_2p_3)^2+\\
+a_1(\lambda_3p_1+\lambda_0p_2-\lambda_1p_3)^2+a_2(-\lambda_2p_1+\lambda_1p_2+\lambda_0p_3)^2]+\\
+\frac{1}{4}[b_1(\lambda_3p_1+\lambda_0p_2-\lambda_1p_3)+b_2(-\lambda_2p_1+\lambda_1p_2+\lambda_0p_3)]\times\\
\times(\lambda_0p_1-\lambda_3p_2+\lambda_2p_3)+2\Gamma(\lambda_2^2+\lambda_3^2).
\end{gathered}
\tag{3.33}
$$

Выражение (3.33) представляет собой функцию Гамильтона в обобщенных координатах.

3.7. Разложение функции Гамильтона

Как показано в работе [56], нижнему положению равновесия соответствуют нулевые значения λ_i, ω_i $(i=1,2,3)$ и, как следует из формул (3.31), нулевые значения импульсов p_i $(i=1,2,3)$ и x_i $(i=1,2,3)$. Поэтому функция (3.33) описывает возмущенное движение твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия. Для получения разложения функции Гамильтона воспользуемся формулами

$$
\lambda_0^2=1-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2,
$$

$$
\lambda_0=(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)-\frac{1}{8}(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)-\cdots.
$$

Разлагая функцию (3.33) с точностью до членов четвертого порядка, получаем:

$$
\begin{gathered}
H=H_2+H_3+H_4,\\
H_2=\frac{1}{8}(ap_1^2+a_1p_2^2+a_2p_3^2)+\frac{1}{4}(b_1p_1p_2+b_2p_1p_3)+2\Gamma(\lambda_2^2+\lambda_3^2),\\
H_3=\frac{1}{4}[\lambda_1p_2p_3(a_1-a_2)+\lambda_2p_1p_3(a_2-a)+\lambda_3p_1p_2(a-a_1)+\\
+\lambda_1p_1(b_1p_3-b_2p_2)+\lambda_2(b_2p_1^2-b_2p_3^2-b_1p_2p_3)+\\
+\lambda_3(-b_1p_1^2+b_1p_2^2+b_2p_2p_3)],\\
H_4=-\frac{1}{8}[\lambda_1^2(ap_1^2+(a_1-a_2)(p_2^2-p_3^2)+p_1(b_1p_2+b_2p_3))+\\
+\lambda_2^2(a_1p_2^2+(a-a_2)(p_1^2-p_3^2)+p_1(3b_2p_3+b_1p_2))-\\
-\lambda_3^2(a_2p_3^2+(a-a_1)(p_1^2-p_2^2)+p_1(3b_1p_2+b_2p_3))+\\
+2\lambda_2\lambda_3(ap_2p_3-p_1(b_2p_2+b_1p_3))+\\
+2\lambda_1(p_1(a_2\lambda_2p_2-a_1\lambda_3p_3)+(\lambda_2p_3-\lambda_3p_2)(b_1p_3-b_2p_2))].
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

Таким образом, получено разложение функции Гамильтона (3.34) в обобщенных координатах в окрестности нижнего положения равновесия.

3.8. Линейные колебания

Изучим линейные колебания твердого тела в специальной системе координат около нижнего положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергии возмущенного движения определяются формулами (3.6), (3.29). Приведем уравнения движения (3.26), (3.27) к каноническому виду с помощью преобразования $x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3,\ \lambda_0 = 1 + x_4,\ \lambda_1 = x_5,\ \lambda_2 = x_6,\ \lambda_3 = x_7$. Матрица квадратичной формы описывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = -2sx_6, \quad \dot{x}_3 = -2sx_7, \\ 2\dot{x}_4 = 0, \quad 2\dot{x}_5 = ax_1 + b_1x_2 + b_2x_3, \\ 2\dot{x}_6 = a_1x_2 + b_1x_1, \quad 2\dot{x}_7 = a_2x_3 + b_2x_1. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Для нахождения собственных значений матрицы A необходимо решить систему уравнений $|A - \mu_i E|h_i = 0,\ (i = 1,2,3)$. Характеристическое уравнение имеет вид $\mu^3(\mu^2 + a_1s)(\mu^2 + a_2s) = 0$, решая которое, получаем собственные значения матрицы A линейной системы (3.35). Обозначим корни этого уравнения через $\mu_{0,1,2} = 0,\ \mu_{3,4} = \pm i\sqrt{a_1s},\ \mu_{5,6} = \pm i\sqrt{a_2s}.$ Приведенным корням соответствует следующее решение системы (3.35):

$$\begin{gathered} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2\cos\sqrt{a_1s}t + C_3\sin\sqrt{a_1s}t - \frac{b_1C_1}{a_1}, \\ x_3 = C_4\cos\sqrt{a_2s}t + C_5\sin\sqrt{a_2s}t - \frac{b_2C_1}{a_2}, \\ x_4 = C_6, \\ x_5 = \frac{b_1}{2\sqrt{a_1\Gamma}}\left(C_2\sin\sqrt{a_1s}t - C_3\cos\sqrt{a_1s}t\right) + \\ + \frac{b_2}{2\sqrt{a_2\Gamma}}\left(C_4\sin\sqrt{a_2s}t - C_5\cos\sqrt{a_2s}t\right) + \left(a - \frac{b_1^2}{a_1} - \frac{b_2^2}{a_2}\right)C_1t + C_7, \end{gathered} \tag{3.36}$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{\Gamma}}\left(C_2\sin\sqrt{a_1 s}t - C_3\cos\sqrt{a_1 s}t\right),$$
$$x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{\Gamma}}\left(C_4\sin\sqrt{a_2\Gamma}t - C_5\cos\sqrt{a_2\Gamma}t\right), \qquad (3.36)$$
$$C_i = const, i = \overline{1{,}7}.$$

Общее решение системы (3.35) имеет вид (3.36) и описывает малые колебания тела около положения равновесия.

3.9. Выводы

В разделе рассмотрены линейные колебания твердого тела с неподвижной точкой. Записаны уравнения движения твердого тела в параметрах Р.–Г. в специальных осях. Получена функция Гамильтона в обобщенных координатах и дано ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия.

РАЗДЕЛ 4
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА

Получена функция Гамильтона для уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, когда в качестве обобщенных координат приняты три из четырех параметров Родрига–Гамильтона, и построено ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. В случае, когда центр масс тела принадлежит главной оси, с помощью преобразования Биркгофа получено нелинейное приближение нормальных колебаний с точностью до членов четвертого порядка.

4.1. Введение

Движение тяжелого твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия привлекает внимание исследователей потому, что оно, наряду с равномерными вращениями, дает также представление о движении тела при произвольном распределении масс. Основными методами исследования являются методы теории колебаний и асимптотические методы. Нелинейным колебаниям твердого тела около устойчивого положения равновесия в общих предположениях посвящена работа [102], в которой использован метод последовательных приближений и указана схема их получения. Рассмотрены резонансы и вопросы сходимости предложенного варианта последовательных приближений. Методом нормальных форм изучены колебания около нижнего положения равновесия приведенной системы, соответствующей функции Гамильтона твердого тела с неподвижной точкой, в которой положено $p_\psi = 0$ (p_ψ – циклический импульс). Построенное решение с точностью до членов четвертого порядка описывает условно-периодические движения приведенной системы, которые всюду плотно заполняют некоторую окрестность положения равновесия.

В разделе 3 для исследования нормальных колебаний предложено использовать параметры Родрига–Гамильтона. Благодаря специальному введению неподвижной системы координат получено простое выражение потенциальной энергии, что позволило установить связь нормальных колебаний с движениями физического маятника и равномерными вращениями. Изучено расположение осей нормальных колебаний в теле в зависимости от значений моментов инерции и положения центра масс. Результаты данного раздела опубликованы в [60]. Здесь получена функция Гамильтона, когда в качестве обобщенных координат приняты три из четырех параметров Родрига–Гамильтона, и построено ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. В случае, когда центр масс тела принадлежит главной оси, с помощью преобразования Биркгофа построено нелинейное приближение нормальных колебаний с точностью до членов четвертого порядка. Отметим, что в рассматриваемом случае для линейной системы имеется двойной нулевой корень с непростыми элементарными делителями.

4.2. Функция Гамильтона

Изучим нелинейные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия. В качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3$ главные моменты инерции; $\omega_i,\ \nu_i,\ e_i\quad (i = 1, 2, 3)$ − проекции на подвижные оси вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, s − произведение веса тела и расстояния до центра масс. Следуя работе [56], в качестве неподвижной системы выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке, совпадающую в начальный момент с главными осями твердого тела, т.е. $\nu'_i = -e_i$, где ν'_i – проекции вектора $\boldsymbol{\nu}$ на неподвижные оси. Для описания движения твердого тела выберем параметры Родрига–Гамильтона

$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. В качестве обобщенных координат примем $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, а параметр λ_0 определим из равенства

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{4.1}$$

Для потенциальной энергии воспользуемся выражением (3.6)

$$\Pi = 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2]. \tag{4.2}$$

Для кинетической энергии воспользуемся стандартным представлением

$$2T = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2, \tag{4.3}$$

где величины ω_i выражаются следующими формулами (2.74):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_0 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3),\\ \omega_2 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1),\\ \omega_3 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_0 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2).\end{aligned}$$

Выражение для функции Гамильтона получим из формулы $H = T + \Pi$, в которую вместо величин ω_i надо подставить их выражения через обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.4}$$

При этом во всех формулах величины $\lambda_0,\ \dot\lambda_0$ следует выражать через $\lambda_i,\ \dot\lambda_i$ ($i = 1,2,3$) с помощью равенства (4.1) и следующего из него уравнения

$$\lambda_0\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_1 + \lambda_2\dot\lambda_2 + \lambda_3\dot\lambda_3 = 0.$$

С помощью формул (4.4) получаем следующие выражения для импульсов:

$$\begin{aligned}\lambda_0 p_1 &= 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)A_1\omega_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0)A_2\omega_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_0)A_3\omega_3,\\ \lambda_0 p_2 &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_0)A_1\omega_1 + 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2)A_2\omega_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_0)A_3\omega_3,\\ \lambda_0 p_3 &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_0)A_1\omega_1 + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_0)A_2\omega_2 + 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)A_3\omega_3.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Решая уравнения (4.5), находим зависимость угловых скоростей от импульсов

$$\begin{aligned}2A_1\omega_1 &= \lambda_0 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3,\\ 2A_2\omega_2 &= \lambda_0 p_2 + \lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1,\\ 2A_3\omega_3 &= \lambda_0 p_3 + \lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

С использованием формул (4.2), (4.3), (4.6) получаем следующее выражение

$$H = \frac{1}{8}[\frac{1}{A_1}(\lambda_0 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3)^2 + \frac{1}{A_2}(\lambda_0 p_2 + \lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1)^2 +$$
$$+\frac{1}{A_3}(\lambda_0 p_3 + \lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)^2] + 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2]. \qquad (4.7)$$

Таким образом получена функция Гамильтона (4.7), когда в качестве обобщенных координат приняты три из четырех параметров Р.–Г.

4.3. Разложение функции Гамильтона

Как показано в работе [56], нижнему положению равновесия соответствуют нулевые значения λ_i, ω_i $(i = 1,2,3)$ и, как следует из формул (4.5), нулевые значения импульсов p_i $(i = 1,2,3)$. Поэтому функция (4.7) описывает возмущенное движение твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия. Для построения разложения функции Гамильтона воспользуемся формулами

$$\lambda_0^2 = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2,$$
$$\lambda_0 = (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \frac{1}{8}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \cdots.$$

Тогда функция Гамильтона (4.7) имеет вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + H_\infty, \qquad (4.8)$$

$$H_2 = \frac{1}{8}(\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \frac{p_3^2}{A_3}) + 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2],$$

$$H_3 = \frac{1}{4}[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3) + \frac{p_2}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1) + \frac{p_3}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)],$$

$$H_4 = \frac{1}{8}[\frac{1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3)^2 + \frac{1}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1)^2 + \frac{1}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)^2 -$$
$$-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \frac{p_3^2}{A_3})],$$

$$H_\infty = \frac{1}{4}[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3) + \frac{p_2}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1) + \frac{p_3}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)] \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,5}^{k}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^k.$$

Отметим, что гамильтониан (4.8) упрощается, когда центр масс лежит на главной оси: $e_1 = 1, e_2 = e_3 = 0$. В гамильтониане (4.8) изменяется только квадратичная часть

$$H_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{p_1^2}{A_1}+\frac{p_2^2}{A_2}+\frac{p_3^2}{A_3}\right)+2s(\lambda_2^2+\lambda_3^2). \tag{4.9}$$

Именно этот случай и является предметом дальнейшего исследования.

Замена

$$\begin{gathered} Q_1 = 2\sqrt{A_1}\ \lambda_1, \quad Q_2 = 2\sqrt[4]{sA_2}\lambda_2, \quad Q_3 = 2\sqrt[4]{sA_3}\ \lambda_3, \\ P_1 = \frac{p_1}{2\sqrt{sA_1}}, \quad P_2 = \frac{p_2}{2\sqrt[4]{sA_2}}, \quad P_3 = \frac{p_3}{2\sqrt[4]{sA_3}} \end{gathered} \tag{4.10}$$

приводит квадратичную форму (4.9) к нормальному виду

$$H_2 = \frac{1}{2}[P_1^2 + n_2(P_2^2+Q_2^2) + n_3(P_3^2+Q_3^2)], \tag{4.11}$$

где $n_2 = \sqrt{s/A_2}$, $n_3 = \sqrt{s/A_3}$.

Для дальнейшего упрощения функции (4.8) с помощью преобразования Биркгофа удобно ввести комплексные переменные

$$x_1 = Q_1, \quad y_1 = 2iP_1, \quad x_k = Q_k - iP_k, \quad y_k = Q_k + iP_k, \quad k = 2,3. \tag{4.12}$$

В новых переменных функция Гамильтона принимает вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots \quad , \tag{4.13}$$

$$H_2 = i\left(-\frac{y_1^2}{4} + n_2x_2y_2 + n_3x_3y_3\right),$$

$$H_3 = \frac{i}{8n_1\sqrt{sn_2n_3}}[2n_1^2(n_3^2-n_2^2)x_1(y_2-x_2)(y_3-x_3)+$$

$$+n_2(n_1^2-n_3^2)y_1(x_2+y_2)(y_3-x_3)+n_3(n_2^2-n_1^2)y_1(x_3+y_3)(y_2-x_2)],$$

$$H_4 = \frac{i}{2^6 s n_1^2 n_2 n_3}[-4n_1^4(n_2+n_3)x_1^2(n_2^2(y_3-x_3)^2+n_3^2(y_2-x_2)^2)-$$
$$-n_2n_3y_1^2(n_2(n_1^2+n_3^2)(x_2+y_2)^2+n_3(n_1^2+n_2^2)(x_3+y_3)^2)+$$
$$+2n_1^2n_2n_3x_1y_1(n_2^2(y_3^2-x_3^2)+n_3^2(y_2^2-x_2^2)-2n_1^2x_1y_1)+$$
$$+2n_1^4n_2n_3(y_2^2-x_2^2)(y_3^2-x_3^2)-$$
$$-n_1^2n_2^2(x_2+y_2)^2((n_1^2+n_3^2)(y_3-x_3)^2+n_2n_3(y_2-x_2)^2)$$
$$-n_1^2n_3^2(x_3+y_3)^2((n_1^2+n_2^2)(y_2-x_2)^2+n_2n_3(y_3-x_3)^2)],$$

здесь $n_1 = \sqrt{s/A_1}$.

Полученное разложение функции Гамильтона (4.13) позволяет преобразовать ее к нормальной форме с помощью преобразования Биркгофа.

4.4. Преобразование формы H_3

Преобразование функции Гамильтона (4.13) к нормальной форме в членах третьего и четвертого порядков будем проводить в два этапа. На первом этапе укажем каноническое преобразование переменных $x_k,\ y_k \to u_k,\ v_k$, при котором функция Гамильтона $\widetilde{H}(u,v)$ не содержит членов третьего порядка кроме резонансных. Соответствующее преобразование Биркгофа задается производящей функцией

$$S_3 = \sum_{|\alpha|=3} S_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} v_3^{\beta_3} \qquad (4.14)$$

и имеет вид

$$u_k = x_k + \frac{\partial S_3}{\partial v_k}, \qquad y_k = v_k + \frac{\partial S_3}{\partial x_k}. \qquad (4.15)$$

Здесь $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0,\ |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3$.

Для проведения вычислений с функцией H с точностью до членов четвертого порядка запишем преобразование (4.15) с точностью до членов третьего порядка

$$x_k = u_k - \frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_k} + \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_i \partial v_k}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_i} + \frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial v_i \partial v_k}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_i}),$$
$$y_k = v_k + \frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_k \partial u_i}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_i} + \frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_k \partial v_i}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_i}). \qquad (4.16)$$

Переходя к новым переменным по формулам (4.16) и находя коэффициенты формы (4.14) из условия $\widetilde{H}_3(u,v) = 0$, получаем следующее выражение для преобразованной функции Гамильтона

$$\widetilde{H}(u,v) = H_2(u,v) + \widetilde{H}_3(u,v) + \widetilde{H}_4(u,v) + \cdots,$$

где

$$\widetilde{H}_3(u,v) = iu_1(h_{300000}u_1^2 + h_{110010}u_2v_2 + h_{101001}u_3v_3). \qquad (4.17)$$

Здесь $h_{\alpha\beta}$ совпадают с коэффициентами формы $\widetilde{H}_3(u,v)$, определяемыми формулами (4.13). Подставляя эти значения в формулу (4.17), находим, что в рассматриваемом случае $\widetilde{H}_3(u,v) \equiv 0$. Полное выражение формы $\widetilde{H}_4(u,v)$ не выписываем. В следующем пункте будут приведены коэффициенты преобразованной формы $\widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w)$ после очередного этапа.

4.5. Нормализация формы $\widetilde{H}_4$

Для нормализации формы $\widetilde{H}_4$ преобразование Биркгофа $u,v \to z,w$ задаем в форме

$$u_k = z_k - \frac{\partial S_4(z,w)}{\partial w_k}, \qquad v_k = w_k + \frac{\partial S_4(z,w)}{\partial z_k}. \qquad (4.18)$$

Нормализованная функция Гамильтона имеет вид

$$\widetilde{\widetilde{H}}(z,w) = H_2(z,w) + \widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) + \cdots ,$$

где

$$\widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) = h_{400000}z_1^4 + h_{210010}z_1^2 z_2 w_2 + h_{201001}z_1^2 z_3 w_3 +$$
$$+h_{020020}z_2^2 w_2^2 + h_{002002}z_3^2 w_3^2 + h_{011011}z_2 w_2 z_3 w_3.$$

Выполняя преобразования (4.16), (4.18), находим, что в рассматриваемом случае $h_{400000} = 0$, $h_{020020} = 0$, $h_{002002} = 0$. Для оставшихся коэффициентов получаем следующие выражения

$$\begin{aligned}
h_{210010} &= 2i\alpha = -\frac{1}{64 s n_2 n_3} n_1^2 (n_2^2 + n_3^2)(2n_2 + n_3),\\
h_{201001} &= 2i\beta = -\frac{1}{64 s n_2 n_3} n_1^2 (n_2^2 + n_3^2)(2n_3 + n_2),\\
h_{011011} &= 2i\gamma = \frac{1}{256 s n_2 n_3} \left(n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) - 16 n_2^2 n_3^2\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получены коэффициенты преобразованной формы $\tilde{\tilde{H}}_4(z, w)$.

4.6. Нелинейные нормальные колебания

Возвращаясь к действительным переменным q_i, p_i $(i = 1, 2, 3)$, аналогично формулам (4.12), и делая дополнительное преобразование

$$q_1 = q, \qquad p_1 = p, \qquad q_j = \sqrt{2r_j}\ \sin\varphi_j, \qquad p_j = \sqrt{2r_j}\ \cos\varphi_j, \qquad j = 2, 3, \tag{4.19}$$

для функции Гамильтона с точностью до членов четвертого порядка получаем выражение

$$H = \frac{p^2}{2} + n_2 r_2 + n_3 r_3 + q^2(\alpha r_2 + \beta r_3) + \gamma r_2 r_3.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = -2q(\alpha r_2 + \beta r_3),\\
&\dot{\varphi}_2 = n_2 + \alpha q^2 + \gamma r_3, \qquad \dot{r}_2 = 0,\\
&\dot{\varphi}_3 = n_3 + \beta q^2 + \gamma r_2, \qquad \dot{r}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Уравнения (4.20) допускают интегралы $r_2 = r_{20} = \mathrm{const}$, $r_3 = r_{30} = \mathrm{const}$. С их помощью первые два уравнения (4.20) преобразуются к системе двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = -2(\alpha r_{20} + \beta r_{30})q. \tag{4.21}$$

Обозначим $\mu = \sqrt{2|\alpha r_{20} + \beta r_{30}|}$. В зависимости от знака величины $(\alpha r_{20} + \beta r_{30})$ решение системы (4.20) имеет различный вид.

4.6.1. $\alpha r_{20} + \beta r_{30} > 0$.

Решение системы (4.20) таково

$$q = 2c_1 \sin(\mu t + c_2), \quad p = \mu c_1 \cos(\mu t + c_2),$$
$$\varphi_2 = (n_2 + \gamma r_{30} + 2\alpha c_1^2)t - \alpha c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{20}, \quad r_2 = r_{20},$$
$$\varphi_3 = (n_3 + \gamma r_{20} + 2\beta c_1^2)t - \beta c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{30}, \quad r_3 = r_{30}.$$

4.6.2. $\alpha r_{20} + \beta r_{30} < 0$.

Решение системы (4.20) таково

$$q = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}, \quad p = \mu(c_1 e^{\mu t} - c_2 e^{-\mu t}),$$
$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_2 + \gamma r_{30} + 2\alpha c_1 c_2)t + \varphi_{20}, \quad r_2 = r_{20},$$
$$\varphi_3 = \frac{\beta}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_3 + \gamma r_{20} + 2\beta c_1 c_2)t + \varphi_{30}, \quad r_3 = r_{30}.$$

В соответствии с формулами (4.19) получаем описание нелинейных нормальных колебаний в переменных $q_i,\ p_i \quad (i = 1, 2, 3)$. Из полученных формул заключаем, что колебания приобрели довольно сложный характер и существенно отличаются для случаев 4.6.1, 4.6.2. В случае 4.6.1 движение сохранило некоторую периодичность, а в случае 4.6.2, благодаря наличию экспоненциальных членов, движение стало неустойчивым.

4.7. Выводы

В разделе рассмотрены нелинейные колебания тяжелого твердого тела с неподвижной точкой около нижнего положения равновесия. Дан вывод функции Гамильтона для описания рассматриваемых движений. На ее основе приведены значения H_2, H_3 и H_4 для разложения функции Гамильтона, что позволило получить дифференциальные уравнения на члены четвертого порядка. Интегрирование редуцированных уравнений позволило получить явные зависимости новых переменных от времени.

РАЗДЕЛ 5
ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В динамике твердого тела для изучения свойств движения применяются различные методы и параметры (метод инвариантных соотношений (ИС), углы Эйлера, параметры Родрига–Гамильтона (Р.–Г.) и другие). На их базе получена значительная информация о движении твердого тела под действием силы тяжести и под действием потенциальных и гироскопических сил.

Данный раздел посвящен исследованию параметров Р.–Г. в решениях уравнений динамики.

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения твердого тела под действием силы тяжести (см. раздел 2)

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{5.1}$$

Здесь обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ − единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = (A_{ij})$ − тензор инерции; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ − единичный вектор $\frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|}$, где O − неподвижная точка, C − центр тяжести тела; $s = mg|\overline{OC}|$, где m − масса тела, g − ускорение свободного падения.

Уравнения (5.1) имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{5.2}$$

где E и k − произвольные постоянные.

Наряду с (5.1), (5.2) будем рассматривать и уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + s \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{5.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{5.4}$$

где B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$ – вектор гиростатического момента. Первые интегралы уравнений (5.3), (5.4) таковы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\ \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1,$$
$$\left(A\boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k. \qquad (5.5)$$

Следуя разделу 2 введем углы Эйлера θ, φ, ψ таким образом, что $\theta = \angle(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nu})$, $\dot{\varphi}$ − скорость собственного вращения вокруг вектора $\mathbf{e}$, $\dot{\psi}$ – скорость прецессии вокруг вектора $\boldsymbol{\nu}$. Тогда

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta; \qquad (5.6)$$

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \qquad (5.7)$$

Если известно решение уравнений (5.1) (либо решений уравнений (5.3), (5.4))

$$\omega_i = \omega_i(t), \quad \nu_i = \nu_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \qquad (5.8)$$

то углы Эйлера можно определить из (5.6), (5.7)

$$\theta = \arccos\nu_3, \quad \varphi = \arg\operatorname{tg}\frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \psi = \int_{t_0}^{t}\frac{\omega_1(t)\nu_1(t) + \omega_2(t)\nu_2(t)}{\nu_1^2(t) + \nu_2^2(t)}dt. \qquad (5.9)$$

Параметры Р.–Г. выражаются через переменные θ, φ, ψ следующим образом [75]:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}. \qquad (5.10)$$

Они удовлетворяют соотношению

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \qquad (5.11)$$

Если известны параметры Р.–Г., то углы Эйлера определим из формул

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}, \qquad (5.12)$$

а ν_i из равенств

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \qquad (5.13)$$

Для записи уравнений (5.1) в параметрах Р.–Г. необходимо в эти уравнения подставить значения (5.13). Например, в главной подвижной системе координат уравнения Эйлера–Пуассона принимают вид (см. (2.10), (2.11))

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s[e_2(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)],\\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + s[2e_3(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) - e_1(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)],\\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + 2s[e_1(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3) - e_2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)]; \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -(\omega_1\lambda_1+\omega_2\lambda_2+\omega_3\lambda_3),\\ 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0+\omega_3\lambda_2-\omega_2\lambda_3,\\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0+\omega_1\lambda_3-\omega_3\lambda_1,\\ 2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0+\omega_2\lambda_1-\omega_1\lambda_2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Уравнения (5.14) с помощью формул (2.74)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_1-\lambda_1\dot{\lambda}_0+\lambda_3\dot{\lambda}_2-\lambda_2\dot{\lambda}_3\big),\\ \omega_2 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_2-\lambda_2\dot{\lambda}_0+\lambda_1\dot{\lambda}_3-\lambda_3\dot{\lambda}_1\big),\\ \omega_3 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_3-\lambda_3\dot{\lambda}_0+\lambda_2\dot{\lambda}_1-\lambda_1\dot{\lambda}_2\big) \end{aligned} \tag{5.16}$$

можно привести к системе трех дифференциальных уравнений на параметры $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ [69]. Интегралы (5.2) преобразуются очевидным образом на основе (5.13).

5.2. Решение Бобылева–Стеклова

Пусть в уравнениях (5.1) $\mathbf{e} = (1,0,0)$, $A = \mathrm{diag}(2A_2, A_2, A_3)$, а в интегралах (5.2) значения постоянных таковы:

$$2E = A_1\chi^2 + H, \quad k = \frac{2A_2H}{s},$$

где $\chi,\ H$ − параметры. Тогда уравнения (5.1) допускают решение [119] (поскольку формулы (5.6), (5.13) для параметров Р.–Г. записаны в другой системе координат по сравнению с рассматриваемым решением, то для новых переменных используем “~”)

$$\tilde{\omega}_1 = \chi, \qquad \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} = -\frac{1}{A_2}\sqrt{f(\tilde{\omega}_2)}, \qquad \tilde{\omega}_3 = 0,$$
$$\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_2}{2}\tilde{\omega}_2^2 + H\right), \qquad \tilde{\nu}_2 = -\frac{\chi A_2}{s}\tilde{\omega}_2, \qquad \tilde{\nu}_3 = \frac{1}{s}\sqrt{f(\tilde{\omega}_2)}, \tag{5.17}$$

где

$$f(\tilde{\omega}_2) = -\frac{A_2^2}{4}\tilde{\omega}_2^4 - A_2(\chi^2 A_2 + H)\tilde{\omega}_2^2 + s^2 - H^2. \tag{5.18}$$

Из формул (5.17) следует, что подвижный годограф вектора угловой скорости − отрезок прямой.

Опуская знак “~”, представим решение (5.17), (5.18) в эллиптических функциях времени, используя систему координат, в которой записаны соотношения (5.6) – (5.9):

$$\nu_1 = -\frac{\chi A_2}{s}\tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\big(\tilde{\lambda}_0 t\big),$$
$$\nu_2 = \sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}\big(\tilde{\lambda}_0 t\big)\,\mathrm{sn}\big(\tilde{\lambda}_0 t\big),$$
$$\nu_3 = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2\big(\tilde{\lambda}_0 t\big),$$
$$\omega_1 = \tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\big(\tilde{\lambda}_0 t\big), \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \chi, \tag{5.19}$$

где

$$\nu_1^{(1)} = \frac{H}{s}, \quad \nu_1^{(2,3)} = \frac{1}{s}\left(-\chi^2 A_2 \pm \sqrt{\chi^4 A_2^2 + 2\chi^2 A_2 H + s^2}\right),$$
$$\tilde{\lambda}_0 = \sqrt{s\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/A_2}, \quad -s < H < s, \tag{5.20}$$

а переменная ν_3 изменяется в промежутке $\left[\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}\right]$, где эти значения указаны в формулах (5.20). Эллиптические функции (5.19) имеют модуль

$$k_1 = \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)/\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right). \tag{5.21}$$

Для нахождения параметров Р.–Г. в решении Бобылева–Стеклова воспользуемся соотношениями (5.9) и (5.19)

$$\cos\theta(t) = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2\big(\tilde{\lambda}_0 t\big), \tag{5.22}$$

$$\operatorname{tg}\varphi(t)=\frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)}=-\frac{\chi A_2\tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\operatorname{cn}(\tilde{\lambda}_0 t)}{s\sqrt{\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}\right)/\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)}\operatorname{dn}(\tilde{\lambda}_0 t)\operatorname{sn}(\tilde{\lambda}_0 t)},\tag{5.23}$$

$$\psi(t)=-\frac{s}{A_2}\int_0^t\frac{d\tau}{1+\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)\operatorname{ctg}^2\varphi(\tau)}.\tag{5.24}$$

Зависимость параметров λ_i $(i=\overline{0,3})$ от времени найдем из соотношений (5.10) с учетом формул (5.22), (5.23). Обозначим

$$h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\frac{\nu_1^{(2)}-\lambda_0^2-\lambda_3^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}}.\tag{5.25}$$

С помощью (5.25) из равенств (5.22), (5.23) определим ИС на параметры Р.–Г. для случая Бобылева–Стеклова:

$$\begin{gathered}s^2\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)^2\times\\ \times\left(1-k_*h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right)=\\ =2\chi^2A_2^2\tilde{\lambda}_0^2\left(1-h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right)(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)^2,\end{gathered}\tag{5.26}$$

где k_* − сопряженный к k_1 модуль эллиптических функций. Итак ИС (5.26) является многочленом по параметрам Р.–Г. восьмого порядка.

Формула (5.24) представляет интерес, поскольку из неё следует достаточно наглядное представление скорости прецессии от угла собственного вращения тела

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{s}{A_2}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)\operatorname{ctg}^2\varphi(\tau)\right]}.$$

ИС для компонент вектора угловой скорости в силу (5.17) имеет линейный характер.

5.3. Решение Лагранжа (сферический случай)

Рассмотрим тяжелое твердое тело, эллипсоид инерции которого является сферой: $A_3=A_2=A_1$. Выбором системы координат можно принять $s_2=s_1=0$. Тогда из (5.1), (5.2) имеем:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{s}{A_1}\nu_2, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{s}{A_1}\nu_1, \quad \dot{\omega}_3 = 0; \tag{5.27}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{5.28}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 2(s\nu_3 + E)/A_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1; \tag{5.29}$$

$$\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3 = k/A_1. \tag{5.30}$$

Изучим изоконические движения сферического гироскопа [24, 28]. Для этих движений подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны относительно касательной плоскости к аксоидам. При этом необходимым и достаточным условием является ИС (2.34)

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}), \tag{5.31}$$

где $\mathbf{c}$ − единичный вектор, неизменно связанный с телом. Положим $\mathbf{c} = (0,0,1)$ [28]. Тогда из (5.31) следует

$$\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3(\nu_3 - 1) = 0. \tag{5.32}$$

Уравнения (5.27), (5.28) и интегралы (5.29), (5.30) описывают движение гироскопа Лагранжа для случая сферического распределения масс. Из третьего уравнения системы (5.27) получим $\omega_3 = c^*$, где c^* − произвольная постоянная. Потребуем, чтобы (5.32) было следствием (5.30). Тогда для ω_3 имеем следующее значение

$$\omega_3 = k/A_1. \tag{5.33}$$

В [17] показано, что, если компоненты угловой скорости заданы в виде (5.6), то (5.32) выполняется при условии, когда в соотношениях (5.6) $\psi = \varphi$. Сравнивая (5.6) и (5.33), получим

$$\dot{\varphi} = k/A_1(1 + \cos\theta). \tag{5.34}$$

Для нахождения уравнения на функцию $\theta(t)$ воспользуемся первым уравнением из (5.29) и соотношениями (5.6)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{a_2\cos^2\theta + a_1\cos\theta + a_0}{1 + \cos\theta}}, \tag{5.35}$$

где $a_2 = 2s/A_1, \quad a_1 = 2(s + E)/A_1, \quad a_0 = 2(EA_1 - k^2)/A_1^2.$

При преобразовании решения уравнения (5.35) к эллиптическим функциям запишем его в виде

$$\dot{\nu}_3 = \sqrt{(1-\nu_3)(a_2\nu_3^2 + a_1\nu_3 + a_0)}. \qquad (5.36)$$

Без ограничения общности считаем $s > 0$. Тогда переменная ν_3 изменяется в промежутке

$$\nu_3^{(1)} \leq \nu_3 \leq 1, \quad \nu_3^{(1)} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0\, a_2}}{a_2}. \qquad (5.37)$$

Из уравнения (5.36) в силу (5.34) получим

$$\nu_3 = 1 - \left(1 - \nu_3^{(1)}\right)\operatorname{sn}^2(gt), \qquad (5.38)$$

где $\operatorname{sn}(gt)$ − эллиптическая функция с модулем k_2 и параметром g, имеющими следующие значения

$$k_2 = \frac{1-\nu_3^{(1)}}{1-\nu_3^{(2)}}, \quad \nu_3^{(2)} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0\, a_2}}{a_2}, \quad g = \sqrt{\frac{s(1-\nu_3^{(2)})}{2A_1}}. \qquad (5.39)$$

Таким образом, на основании (5.38) и равенства $\nu_3 = \cos\theta$ можно записать

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\nu_3^{(1)} - 1\right)\operatorname{sn}^2(gt), \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(2 - \left(1-\nu_3^{(1)}\right)\operatorname{sn}^2(gt)\right). \qquad (5.40)$$

Функцию $\varphi(t)$ определим из (5.34) в силу (5.38)

$$\varphi(t) = \frac{k}{A}\int_0^t \frac{dt}{2 - \left(1-\nu_3^{(1)}\right)\operatorname{sn}^2(gt)}. \qquad (5.41)$$

В случае изоконических движений сферического гироскопа для параметров Р.–Г. из (5.10) получим

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}, \\ \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \end{gathered} \qquad (5.42)$$

где функции $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, находятся из (5.40), а функция $\varphi(t)$ из (5.41), в которых необходимо учесть равенства (5.39). Таким образом для рассматриваемых движений найдены зависимости параметров Р.–Г. от времени − соотношения (5.42). Из них следует, что одно ИС имеет линейный вид. Другое ИС для уравнений (5.14) тоже линейное, но оно линейно по отношению к компоненте ω_3. Следовательно, в случае сферического гиростата для этих уравнений имеем два линейных ИС по отношению к переменным задачи.

5.4. Решение Гесса

В качестве неподвижной системы, следуя [56], выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν_i' вектора ν на эти оси имели значения $\nu_i' = -e_i,\ i = 1, 2, 3$, т.е. $\nu_1' = -1,\ \nu_2' = \nu_3' = 0$. Ее положение задается по таблице направляющих косинусов углов между неподвижной и специальной системами координат [119] через углы Эйлера ψ, θ, φ [75]. Фазовые переменные $\nu_i,\ \omega_i$ принимают следующие выражения в специальной системе координат:

$$\begin{gathered} \nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \nu_3 = \cos\varphi\sin\theta; \\ \omega_1 = ax + b_1 y + b_2 z, \quad \omega_2 = a_1 y + b_1 x, \quad \omega_3 = a_2 z + b_2 x. \end{gathered} \tag{5.43}$$

Для введенных по Лурье [75] параметров Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ с помощью соответствующей им таблицы косинусов имеем (см. раздел 2)

$$\nu_1 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,\ \nu_2 = 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \nu_3 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3). \tag{5.44}$$

Дифференциальные уравнения движения получим, подставив формулы (5.44), (5.45) в динамические уравнения Харламова (3.26) [119]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(a_2 z + b_2 x) - z(a_1 y + b_1 x), \\ \dot{y} &= z(ax + b_1 y + b_2 z) - x(a_2 z + b_2 x) - 2s(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \\ \dot{z} &= -y(ax + b_1 y + b_2 z) + x(a_1 y + b_1 x) + 2s(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \end{aligned} \tag{5.45}$$

где s – произведение веса тела на расстояние между центром масс и неподвижной точкой, и в кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона (3.27) [75]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1(ax + b_1 y + b_2 z) - \lambda_2(a_1 y + b_1 x) - \lambda_3(a_2 z + b_2 x), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0(ax + b_1 y + b_2 z) + \lambda_2(a_2 z + b_2 x) - \lambda_3(a_1 y + b_1 x), \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0(a_1 y + b_1 x) + \lambda_3(ax + b_1 y + b_2 z) - \lambda_1(a_2 z + b_2 x), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0(a_2 z + b_2 x) + \lambda_1(a_1 y + b_1 x) - \lambda_2(ax + b_1 y + b_2 z). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Уравнения (5.45), (5.46) допускают три первых интеграла – энергии, площадей и геометрический (3.28):

$$ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x - 2s(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 2E,$$
$$x(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + 2z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = k,$$
$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Гироскоп Гесса характеризуется следующими равенствами:

$$a_1 = a_2 = a_*, \quad b_2 = 0. \tag{5.47}$$

Это значит, что центр масс гироскопа лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида.

При условиях (5.47) из первого уравнения системы (5.45) следует инвариантное соотношение

$$x = 0. \tag{5.48}$$

При $b_1 = 0$, приходим к случаю Лагранжа, поэтому в дальнейшем считаем $b_1 \neq 0$. Пусть $b_1 > 0$. Введем безразмерные переменные

$$y = \sqrt{\frac{s}{b_1}}y', \quad z = \sqrt{\frac{s}{b_1}}z', \quad \omega_i = a_*\sqrt{\frac{s}{b_1}}\omega'_i, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{sb_1}} \tag{5.49}$$

и параметры

$$c = \frac{2b_1}{a_*}, \quad h = \frac{E}{s}, \quad k' = 2k\sqrt{\frac{b_1}{s}}.$$

В силу (5.49) уравнения (5.45), (5.46) примут следующий вид (для сокращения записи штрихи у безразмерных величин опускаем):

$$\begin{gathered}
\dot{y} = yz - 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \quad \dot{z} = -y^2 + 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3),\\
c\dot{\lambda}_0 = -\left(\frac{c}{2}\lambda_1 + \lambda_2\right)y - \lambda_3 z, \quad c\dot{\lambda}_1 = (\frac{c}{2}\lambda_0 - \lambda_3)y + \lambda_2 z,\\
c\dot{\lambda}_2 = \left(\lambda_0 + \frac{c}{2}\lambda_3\right)y - \lambda_1 z, \quad c\dot{\lambda}_3 = \left(\lambda_1 - \frac{c}{2}\lambda_2\right)y + \lambda_0 z,\\
y^2 + z^2 - c(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = ch,\\
2y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + 2z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = k, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,
\end{gathered} \tag{5.50}$$

а компоненты вектора угловой скорости равны

$$\omega_1 = \frac{c}{2}y, \quad \omega_2 = y, \quad \omega_3 = z.$$

В переменных

$$y = \rho\cos\varphi\,, \quad z = \rho\sin\varphi\,, \tag{5.51}$$

и компонентах ν_1, ν_2, ν_3 решение В. Гесса изучал А.М. Ковалев [51, 52]. Он получил следующие формулы

$$\begin{gathered}
\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{\rho}\sqrt{f(\rho)}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{k - \rho^3\cos\varphi}{\rho^2}, \\
f(\rho) = \rho^2\left[1 - \left(\frac{\rho^2}{c} - h\right)^2\right] - k^2, \\
\nu_1 = \frac{\rho^2}{c} - h, \quad \nu_2 = \frac{1}{\rho}\left(k\cos\varphi \pm \sqrt{f(\rho)}\sin\varphi\right), \\
\nu_3 = \frac{1}{\rho}\left(k\sin\varphi \mp \sqrt{f(\rho)}\cos\varphi\right),
\end{gathered} \tag{5.52}$$

где параметр c изменяется в промежутке $(0,2]$.

Особый интерес представляет случай $k = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (5.52) следует

$$\rho = \sqrt{c(h + \cos\theta)}, \quad \theta = \frac{2}{c}\left[\ln\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right| + n\right], \tag{5.53}$$

где n – постоянная интегрирования. То есть известны и компоненты вектора ω в неподвижной цилиндрической системе координат $\alpha,\ \rho,\ \varphi$, зависящие от λ_i.

Находим величины $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, входящие в уравнения (5.50). Так как при $k = 0$ из (2.29), (5.51) и равенств для $\omega_2,\ \omega_3$ имеем

$$\begin{gathered}
\dot\psi = \frac{2}{c\sin\theta}(\omega_2\sin\varphi + \omega_3\cos\varphi) = \\
= \frac{2[y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)]}{c(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)} = 0,
\end{gathered}$$

то выбором системы координат можно положить $\psi = \frac{\pi}{2}$. Тогда получаем соотношения для проекций вектора угловой скорости на оси, связанные с телом:

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \frac{c}{2}\dot\varphi, \quad \omega_2 = \frac{c}{2}\dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_3 = -\frac{c}{2}\dot\theta\sin\varphi, \\
\frac{c^2}{4}\dot\theta^2 = \omega_2^2 + \omega_3^2 = (y^2 + z^2).
\end{gathered} \tag{5.54}$$

Его проекции на неподвижные оси равны $\Omega_1 = \frac{c}{2}\dot{\varphi}\cos\theta$, $\Omega_2 = \frac{c}{2}\dot{\varphi}\sin\theta$, $\Omega_3 = \frac{c}{2}\dot{\theta}$. Отсюда находим

$$\frac{c}{2}\dot{\varphi} = \omega_1, \quad \frac{c}{2}\dot{\theta} = \Omega_3, \quad \dot{\theta}^2 = c(h + \cos\theta), \quad \dot{\varphi} - \frac{c}{2}\dot{\theta}\cos\varphi = 0. \qquad (5.55)$$

В итоге справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \omega_1^2, \quad \Omega_3^2 = \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad \omega_1 - \frac{c}{2}\omega_2 = 0, \\ \Omega_3^2 = c\left(h + \frac{\Omega_1}{\omega_1}\right). \end{gathered} \qquad (5.56)$$

Так же при $\psi = \frac{\pi}{2}$ получим из таблиц косинусов соотношения, выражающие углы Эйлера θ, φ через параметры Родрига–Гамильтона:

$$\begin{aligned} &\sin\theta = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \qquad &&\cos\theta = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \\ &\sin\varphi = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_0^2 - \lambda_2^2, \quad &&\cos\varphi = 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) \end{aligned} \qquad (5.57)$$

и равенство

$$\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3 = 0. \qquad (5.58)$$

Известны следующие уравнения для параметров Родрига–Гамильтона в подвижной и неподвижной систем координат [75]:

$$\begin{aligned} &c\dot{\lambda}_0 = -(\omega_2\lambda_1 + \omega_3\lambda_2 + \omega_1\lambda_3), \quad &&c\dot{\lambda}_0 = -(\Omega_2\lambda_1 + \Omega_3\lambda_2 + \Omega_1\lambda_3), \\ &c\dot{\lambda}_1 = \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_2 - \omega_3\lambda_3, &&c\dot{\lambda}_1 = \Omega_2\lambda_0 + \Omega_3\lambda_3 - \Omega_1\lambda_2, \\ &c\dot{\lambda}_2 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_3 - \omega_1\lambda_1, &&c\dot{\lambda}_2 = \Omega_3\lambda_0 + \Omega_2\lambda_2 - \Omega_2\lambda_3, \\ &c\dot{\lambda}_3 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_1 - \omega_2\lambda_2, &&c\dot{\lambda}_3 = \Omega_1\lambda_0 + \Omega_1\lambda_1 - \Omega_3\lambda_1. \end{aligned} \qquad (5.60)$$

Отсюда находим геометрический интеграл

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \qquad (5.61)$$

Далее из [75] с учетом (5.55) имеем

$$\dot{\varphi} = 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2\big), \dot{\theta} = 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_3\big) \qquad (5.62)$$

и, следовательно, в силу (5.58) получаем два уравнения

$$\dot{\varphi} = 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right)^{\cdot}, \quad \dot{\theta} = 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{\cdot}, \qquad (5.63)$$

которые, с учетом (5.57), вместе с уравнением $\dot{\varphi} - \frac{c}{2}\dot{\theta}\cos\varphi = 0$, интегрируются и имеют решение:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|\right\} = 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{2}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_0} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (5.64)$$

Продифференцировав обе части равенства $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_0}$, в силу (5.55) находим эллиптическую квадратуру для $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$:

$$\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{\cdot}\right]^2 = \frac{c}{4}\left(1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0^2}\right)\left[2 + (h-1)\left(1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0^2}\right)\right]. \qquad (5.65)$$

Для $\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$ имеем аналогичное уравнение

$$[(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)^{\cdot}]^2 = c(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)(1 - \lambda_0^2 - \lambda_3^2)[h - 1 + 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)].$$

Таким образом задача свелась к интегрированию дифференциального уравнению (5.65), которое имеет решение, выражаемое в эллиптических функциях времени. Воспользуемся результатами и обозначениями работы [22], тогда в случае $h \in (-1,1)$ получаем

$$\begin{gathered}
\tilde{\lambda}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{dn}\tau, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\kappa\operatorname{sn}\tau, \\
\tilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\kappa\operatorname{sn}\tau, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{dn}\tau, \\
\sigma = c(\varepsilon\arccos\operatorname{dn}\tau - \theta_0), \qquad \kappa = \sqrt{(h+1)/2}, \\
\varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{sn}\tau), \qquad \tau = t - t_0.
\end{gathered} \qquad (5.66)$$

Здесь $\operatorname{sn}\tau$, $\operatorname{dn}\tau$ – эллиптические функции с модулем κ ($|\kappa| < 1$). Период функций (5.66) не зависит от параметров $c \in (0,2]$ и $\theta_0 \in [0, \infty)$.

В случае $h > 1$ получаем

$$\begin{gathered}
\tilde{\lambda}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{cn}\tau, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{sn}\tau, \\
\tilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{sn}\tau, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ cn\tau, \\
\sigma = c(\arccos\operatorname{cn}\tau - \theta_0), \qquad \kappa = \sqrt{2/(h+1)}, \\
\tau = \kappa^{-1}(t - t_0), \qquad \varepsilon = \pm 1.
\end{gathered} \qquad (5.67)$$

Пусть $h = 1$, тогда движение твердого тела в окрестности неустойчивого положения равновесия описывается соотношениями:

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{ch}^{-1}\tau\,, \qquad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{th}\tau\,,$$
$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{th}\tau\,, \qquad \tilde{\lambda}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{ch}^{-1}\tau\,, \tag{5.68}$$
$$\sigma = c(2\operatorname{arctg}\{e^{\tau}\} - \theta_0), \quad \tau = t - t_0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Формулы (5.66) – (5.68) имеют место при условии, что $k = 0$.

5.5. Выводы

Изучены свойства параметров Родрига–Гамильтона в следующих частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона: в решениях Бобылева–Стеклова, Лагранжа (сферический случай), В. Гесса. Получены зависимости от времени, найдены инвариантные соотношения в этих решениях, содержащих параметры Р.–Г. Например, в решении Бобылева–Стеклова ИС является алгебраическим соотношением восьмого порядка, в случае изоконических движений сферического гироскопа ИС на параметры Р.–Г. линейно, в решении В. Гесса при постоянной интеграла площадей равной нулю ИС имеет структуру многочлена второго порядка.

РАЗДЕЛ 6
СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Прецессионные движения в динамике твердого тела представляют собой один из наиболее наглядных и распространенных классов движений [17, 25, 33]. Они исследованы только при помощи углов Эйлера. Поэтому представляет большой интерес применение параметров Родрига–Гамильтона в задаче об изучении свойств прецессий. В данном разделе определены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для случаев регулярных прецессий, полурегулярных прецессий первого и второго типов и некоторых классов прецессий общего вида.

6.1. Основные соотношения

Запишем основные формулы, которые были введены в разделе 2 для описания геометрического смысла параметров Р.–Г.

Вектор конечного поворота (2.54)

$$\mathbf{u} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\cdot\mathbf{b}, \tag{6.1}$$

позволяет перевести тело S из начального положения в любое конечное положение. В формуле (6.1) обозначения таковы: χ – угол поворота, вектор $\mathbf{b}$ определен равенством

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}'_1\cos\alpha + \mathbf{i}'_2\cos\beta + \mathbf{i}'_3\cos\gamma. \tag{6.2}$$

Векторы $\mathbf{i}'_j$ в (6.2) – единичные векторы подвижной системы координат. Геометрический смысл $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ очевиден. Как отмечено в разделе 2, параметры Родрига–Гамильтона введены так

$$\lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2},\quad \lambda_1 = \cos\alpha\sin\frac{\chi}{2},\quad \lambda_2 = \cos\beta\sin\frac{\chi}{2}\quad \lambda_3 = \cos\gamma\sin\frac{\chi}{2}. \tag{6.3}$$

В разделах 3, 4 они применялись в исследовании колебаний твердого тела с неподвижной точкой, в разделе 5 параметры Р.–Г. вычислены для некоторых частных решений Эйлера–Пуассона. Запишем их через углы Эйлера

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости тела с неподвижной точкой, $\mathbf{v}(t)$ – вектор, указывающий направление силы тяжести. Как правило, уравнения движения тела с неподвижной точкой можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{6.5}$$

Вектор-функция $\mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ из (6.5) может иметь вид, указанный в (5.1), (5.3). В подвижном базисе векторы $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ таковы

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i}_1' + \omega_2\mathbf{i}_2' + \omega_3\mathbf{i}_3', \quad \mathbf{v} = \nu_1\mathbf{i}_1' + \nu_2\mathbf{i}_2' + \nu_3\mathbf{i}_3', \tag{6.6}$$

где $\omega_i = \omega_i(t)$, $\nu_i = \nu_i(t)$ выражаются через углы Эйлера ψ, φ, θ следующим образом

$$\begin{gathered}\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\\ \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta,\\ \nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta.\end{gathered} \tag{6.7}$$

В дальнейшем будут использоваться формулы (см. формулы (2.68))

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}. \tag{6.8}$$

Очевидно, что параметры $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{6.9}$$

После подстановки выражений (6.7) в уравнения (6.5) получаем уравнения на переменные $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$. Если удается проинтегрировать полученные уравнения, то есть – найти указанные функции, то подставив их в равенства (6.4), устанавливаем зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Отметим связь величин ν_i, ω_i и параметров $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$:

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_0), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2); \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3),\\ \omega_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1),\\ \omega_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Формулы (6.10), (6.11) используются в том случае, когда известны зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно переменных ω_i, λ_i необходимо подставить выражения (6.10) в уравнения (6.5). Тогда система уравнений (6.5) примет вид (первое уравнение представим в векторном виде)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F}\big(\boldsymbol{\omega}, \Lambda_i(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\big); \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}2\dot{\lambda}_0 &= -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3), \quad 2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,\\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \qquad 2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.\end{aligned} \tag{6.13}$$

В (6.12) вектор функция $\mathbf{F}$ зависит от координат вектора $\boldsymbol{\omega}$ и параметров λ_i. Уравнение (6.12) в настоящей работе конкретизировать не будем, поскольку целью раздела являются исследования кинематических свойств движения тела, имеющего неподвижную точку. С различными динамическими моделями твердого тела или гиростата можно ознакомится в публикациях [17, 28, 30–33].

В данном разделе рассмотрены прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой – движения при которых постоянен угол между двумя осями l_1 и l_2, содержащими неподвижную точку O и неизменными соответственно в теле (ось l_1) и в пространстве (ось l_2). Обозначая этот угол через θ_0 [33], из формул (6.4) имеем

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\ \lambda_2 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Из соотношений (6.14) вытекают два инвариантных соотношения для прецессий

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{6.15}$$

Свойство (6.15) характерно для всех классов прецессионных движений [30, 32, 33].

6.2. Описание прецессионных движений

Пусть ось l_1 с единичным вектором $\mathbf{a}$ и с началом в неподвижной точке неизменна по отношению к телу и составляет постоянный угол θ_0 с осью l_2, которая неподвижна в пространстве. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ − вектор, принадлежащий оси l_2. Для прецессий выполняются следующие кинематические уравнения [33]:

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{6.16}$$

где

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_0 = \cos\chi_0. \tag{6.17}$$

Класс прецессий твердого тела, имеющего неподвижную точку, характеризуется инвариантными соотношениями [33]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma} \quad (a_0 = \cos\angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma})). \tag{6.18}$$

Если подвижную систему координат связать с вектором $\mathbf{a}$, то есть третью ось её направить по вектору $\mathbf{a} = (0,0,1)$, то имеют место соотношения

$$\gamma_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \gamma_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \gamma_3 = a_0. \tag{6.19}$$

Они удовлетворяют кинематическому уравнению для вектора $\boldsymbol{\gamma}$ из (6.16) и соотношению $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ из (6.17). Для вектора $\boldsymbol{\nu}$ в [33] получено следующее разложение

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b_0' \sin\psi)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\mathbf{a}\sin\psi - b_0'(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})\cos\psi, \tag{6.20}$$

где $b_0' = \frac{\sin\chi_0}{\sin\theta_0}$.

Когда вектор $\boldsymbol{\nu}$ имеет вид (6.20), а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ − (6.19), то кинематическое уравнение для $\boldsymbol{\nu}$ из (6.16) становится тождеством.

При рассмотрении прецессий относительно наклонной оси параметры Р.–Г. можно найти по аналогии с (6.4), (6.8). То есть в дальнейшем полагаем, что параметры Р.–Г. удовлетворяют (6.14), где углы θ_0, ψ, φ − углы Эйлера, введенные с помощью неподвижной системы координат, которая связана с вектором $\boldsymbol{\gamma}$ (но не с вектором $\mathbf{v}$). То есть при использовании соотношений (6.14) следует иметь ввиду, что параметры Р.–Г. могут быть введены двумя способами: первый способ основан на углах Эйлера, которые связаны с вектором $\mathbf{v}$, во втором способе используются углы Эйлера, которые вводятся при исследовании прецессий относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

Пример 1. Решение Д. Гриоли. Пусть в уравнениях (5.1) $\mathbf{e} = (0,0,1)$, компоненты тензора A удовлетворяют равенствам

$$A_{23} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} \neq 0, \quad A_{22} = A_{11}, \tag{6.21}$$

параметр s имеет значение

$$s = m^2\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}. \tag{6.22}$$

Тогда при выполнении (6.21), (6.22) уравнения (2.1) допускают решение Д. Гриоли [149], которое запишем в обозначениях [33]

$$\omega_1 = m\sin mt\,, \quad \omega_2 = m\cos mt\,, \quad \omega_3 = m, \tag{6.23}$$

$$\begin{gathered} \nu_1 = \cos\chi_0 \sin mt - \sin\chi_0 \cos^2 mt\,,\ \nu_2 = \cos\chi_0 \cos mt + \sin\chi_0 \sin 2mt\,/2, \\ \nu_3 = -\sin\chi_0 \sin mt \quad (\operatorname{tg}\chi_0 = A_{13}/A_{33}), \end{gathered} \tag{6.24}$$

характеризующееся регулярной прецессией тела относительно наклонной оси (угол между этой осью и вектором $\boldsymbol{\gamma}$ приведен выше, а угол $\theta_0 = \pi/2$).

Указанное свойство можно доказать следующим образом. На основании решения (6.23), (6.24) получим, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ с компонентами в подвижном пространстве

$$\gamma_1 = \sin mt\,, \quad \gamma_2 = \cos mt\,, \quad \gamma_3 = 0 \tag{6.25}$$

не изменяет своего положения в неподвижном пространстве, то есть $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}$. В процессе движения выполняется инвариантное соотношение $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$, то есть вектор $\mathbf{e}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\gamma}$ ($\theta_0 = \pi/2$). Угловая скорость тела в силу соотношений (6.23), (6.25) в векторном виде такова:

$$\boldsymbol{\omega} = m(\mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}). \tag{6.26}$$

Из формулы (6.26) следует, что в (6.14), (6.18) $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = m$. Выберем неподвижную систему так, что $\varphi = \psi = mt$ (t – время). Подставив $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi = \psi = mt$ в соотношения (6.14), имеем

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos mt\,, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin mt\,. \tag{6.27}$$

Из (6.27) следует, что имеют место два линейных и одно квадратичное ИС на параметры Р.–Г. Для получения зависимостей компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ от параметров Р.–Г. подставим $\cos mt$, $\sin mt$ из (6.27) в (6.24):

$$\begin{gathered}\nu_1 = \sqrt{2}\big(\lambda_3\cos\chi_0 - \sqrt{2}\lambda_0^2\sin\chi_0\big), \quad \nu_2 = \sqrt{2}\lambda_0\big(\cos\chi_0 + \sqrt{2}\lambda_3\sin\chi_0\big), \\ \nu_3 = -\sqrt{2}\sin\chi_0\,\lambda_3,\end{gathered} \tag{6.28}$$

при этом компоненты ω_i из (6.23) выражаются через параметры Р.–Г. следующим образом:

$$\omega_1 = \sqrt{2}m\lambda_3, \quad \omega_2 = \sqrt{2}m\lambda_0, \quad \omega_3 = m. \tag{6.29}$$

Соотношения (6.28), (6.29) являются решением уравнений (5.1), если в них учесть условия (6.21), (6.22).

Замечание. Интерес представляют условия существования решения (6.23), (6.24) для уравнений (5.3), (5.4). Запишем их так [32, 33]:

$$\begin{gathered}A_{12} = A_{23} = 0, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0, \\ \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad B_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(C_{33} - C_{11}), \\ B_{13}\cos\chi_0 = m(A_{22} - A_{11}), \\ (1 - a_0)(B_{33} - B_{11})\cos\chi_0 + 2a_0B_{11}\sin\chi_0 - 2(2a_0mA_{13} + \lambda_1) = 0, \\ (a_0 + 1)m^2A_{11} + [a_0(C_{11} - C_{33})\sin\chi_0 + s_3] = 0, \\ (a_0 + 1)(B_{33} - B_{11})\sin\chi_0\cos\chi_0 + a_0B_{13}\cos^2\chi_0 - 2\tilde{\lambda}_3\cos\chi_0 + \\ +2mA_{13}m\sin\chi_0 + m[a_0(A_{11} + A_{22}) - 2(a_0 + 1)A_{33}]\cos\chi_0 = 0, \\ (1 - a_0)(C_{11} - C_{33})\sin 2\chi_0 - m[(a_0 + 1)B_{11} + (1 - a_0)B_{33}]\cos\chi_0 \\ +2(1 - a_0)mB_{13}\sin\chi_0 + 2a_0A_{13}m^2 = 0.\end{gathered}$$

В этих условиях нет ограничений на угол θ_0 и поэтому они могут выполняться для всех значений θ_0:

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(A_{22} - A_{33}), \quad B_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(C_{33} - C_{11}),$$

$$A_{13}B_{13} = B_{11}(A_{22} - A_{11}), \quad \tilde{\lambda}_1 = -B_{11}\sin\chi_0\,, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad \tilde{\lambda}_3 = -\frac{A_{33}B_{13}}{A_{22} - A_{11}},$$

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = -\frac{A_{13}B_{13}^2 \sin\chi_0}{(A_{22}-A_{11})^2}, \quad \operatorname{tg}\chi_0 = \frac{A_{22}-A_{11}}{A_{13}}, \quad m = \frac{B_{13}\sin\chi_0}{A_{22}-A_{11}}.$$

Параметры Р.–Г. получим из формул (6.14) с учетом $n = m$:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos mt\,, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin mt\,.$$

В отличие от условий (6.27) в последних равенствах параметр θ_0 можно полагать произвольным и поэтому уравнения (5.3), (5.4) допускают оба интеграла

$$\lambda_1 = \mathrm{const}, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \mathrm{const}.$$

Пример 2. Решение В. Гесса. Как показал А. Брессан (подробнее о его результате см. [33]), в решении В. Гесса [151] при нулевом значении постоянной интеграла моментов из (2.2) имеет место прецессия относительно горизонтальной оси. То есть

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{6.30}$$

и в формуле (6.20) $\chi_0 = \pi/2$, $\theta_0 = \pi/2$. Для записи решения, описывающего данную прецессию, воспользуемся введенной выше системой координат $\mathbf{e} = (0,0,1)$. Пусть компоненты тензора A_{ij} удовлетворяют условиям [25]

$$A_{12} = 0, \; A_{23} = 0, \; A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}). \tag{6.31}$$

Следуя обозначениям [32], имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin\varphi\,, \cos\varphi\,, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = \left(\dot\psi\sin\varphi\,, \dot\psi\cos\varphi\,, \dot\varphi\right), \tag{6.32}$$

$$A\boldsymbol{\omega} = \left(A_{11}\dot\psi\sin\varphi\,, A_{22}\dot\psi\cos\varphi\,, A_{13}\dot\psi\sin\varphi + A_{33}\dot\varphi\right), \tag{6.33}$$

$$\boldsymbol{\nu} = (-\cos\varphi\cos\psi\,, \sin\varphi\cos\psi\,, -\sin\psi), \tag{6.34}$$

где

$$\dot\varphi = -\frac{A_{13}}{A_{33}}\dot\psi\sin\varphi\,, \quad \dot\psi = \sqrt{\frac{2}{A_{22}}(E - s\sin\psi)}. \tag{6.35}$$

Выпишем решение уравнений (6.35). Из первого уравнения данной системы имеем [32]

$$\sin\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad u = \frac{A_{13}}{A_{33}}\psi + c, \tag{6.36}$$

где c − произвольная постоянная. Формулы (6.33) − (6.35) характеризуют все переменные задачи (2.1). Для нахождения решения $\psi(t)$ из второго уравнения системы (6.35) положим

$$\beta_1 = \frac{2E}{A_{22}}, \quad \beta_2 = -\frac{2s}{A_{22}}, \quad E > s, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{-\beta_2}{2\mu^2}}. \tag{6.37}$$

Тогда из (6.35), (6.37) получим

$$\psi = 2\,\mathrm{am}\,\mu t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t - \mathrm{cn}\,\mu t), \\ \cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t + \mathrm{cn}\,\mu t), \tag{6.38}$$

где $\mathrm{am}\,\mu t$, $\mathrm{sn}\,\mu t$, $\mathrm{cn}\,\mu t$ − эллиптические функции, имеющие модуль k_3 из (6.37). Параметры Р.–Г. имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}, \tag{6.39}$$

где функции $\psi(t), \varphi(t)$ выражаются из формул (6.36), (6.38). Представляет интерес вид ИС для прецессий Брессана–Гесса. Используя (6.8), (6.39) и (6.36), (6.38) найдем

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}, \tag{6.40}$$

$$\frac{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_3} = \mathrm{sh}\left[\frac{A_{13}}{A_{33}}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right]. \tag{6.41}$$

Таким образом, в случае прецессии относительно горизонтальной оси гироскопа Гесса для параметров Р.–Г. имеет место два квадратичных ИС (6.40) и одно ИС трансцендентного вида (6.41).

Замечания. 1. В пункте (5.4) вычислены параметры Р.–Г. в решении В. Гесса на основе подхода, который отличается от приведенного выше. Поэтому значения параметров Р.–Г., полученные указанными способами не совпадают. Это обстоятельство подчеркивает еще раз, что параметры Р.–Г. зависят от способа введения углов Эйлера. Следует отметить определенное преимущество метода данного раздела и метода раздела 5, поскольку в данном разделе получено дополнительное ИС (6.41), аналог которого в разделе 5 не рассматривается.

2. В книгах [32, 33] показано, что решение (6.31) – (6.35) обобщается для уравнений (5.3), (5.4). При этом $B_{ij} = 0 \left(i_{ij} = \overline{1,3}\right)$, $C_{ij} = 0\ (i \neq j)$, $C_{33} = C_{22}$.

6.3. Маятниковые движения

Эти движения можно отнести к частному типу прецессий и охарактеризовать условиями

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0. \tag{6.42}$$

Из (6.14) при наличии (6.42) следует

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{6.43}$$

На основании соотношений (6.43) имеем два линейных инвариантных соотношения

$$\lambda_0 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{6.44}$$

Известно [10, 17, 30], что зависимость $\varphi(t)$ для маятниковых движений определяется уравнением

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}, \tag{6.45}$$

где β_1 и β_2 – постоянные.

Анализ решения (6.45) приводит к трем вариантам зависимости $\varphi(t)$. Здесь будем для определенности предполагать

$$\beta_1 - \beta_2 > 0. \tag{6.46}$$

Тогда в силу (6.46) из уравнений (6.45) получим

$$\begin{gathered}\varphi = 2\mathrm{am}\mu_1 t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{sn}\,\mu_1 t - \mathrm{cn}\,\mu_1 t), \\ \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{sn}\,\mu_1 t + \mathrm{cn}\,\mu_1 t), \quad \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_1 = \sqrt{-\frac{\beta_1}{2\mu_1^2}},\end{gathered} \tag{6.47}$$

где $\mathrm{am}\mu_1 t$, $\mathrm{sn}\,\mu_1 t$, $\mathrm{cn}\,\mu_1 t$ – эллиптические функции Якоби, k_1 – модуль этих эллиптических функций.

В силу соотношений (6.14), (6.47) найдем функции

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2}(\mathrm{cn}\,\mu_1 t + \mathrm{sn}\,\mu_1 t), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}(\mathrm{cn}\,\mu_1 t + \mathrm{sn}\,\mu_1 t), \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(\mathrm{sn}\,\mu_1 t - \mathrm{cn}\,\mu_1 t), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\mathrm{sn}\,\mu_1 t - \mathrm{cn}\,\mu_1 t). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Следовательно, для маятниковых движений твердого тела с неподвижной точкой в случае (6.45) – (6.47) зависимость параметров Р.–Г. определяется соотношениями (6.48), инвариантными соотношениями (6.43) и соотношением $\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, вытекающим из (6.43). Таким образом, из четырех параметров один является независимым.

Замечание. Рассмотренное выше решение для маятниковых движений имеет место в задаче, описываемой уравнениями (5.1). В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (см. уравнения (5.3), (5.4)) для маятниковых движений возможны два варианта зависимости $\dot{\varphi}$ от φ:

1. $\dot{\varphi} = \sqrt{a_2 \cos 2\varphi + a_2' \sin 2\varphi + a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi + a_0}$,

2. $\dot{\varphi} = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \sin\varphi$.

Выпишем примеры условий существования данных решений. Для первого варианта они таковы [32]:

$$B_{12} = B_{11} = B_{22} = 0, \quad C_{13} = C_{23} = 0, \quad s = 0, \quad k = 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 0.$$

Во втором варианте имеем [32]

$$\begin{gathered} \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad 2k = -B_{11}, \\ s_1 B_{11}^2 = -s_3 A_{33} C_{13}, \quad s_2 B_{11}^2 = -s_3 A_{33} C_{23}, \quad C_{12} B_{11}^2 = -A_{33} C_{13} C_{23}, \\ B_{11}^2 (C_{11} - E) + A_{33}(s_3^2 + C_{13}^2) = 0, \quad B_{11}^2 (C_{22} - E) + A_{33}(s_3^2 + C_{23}^2) = 0, \end{gathered}$$

Второй случай будет рассмотрен ниже при изучении прецессионных движений гиростата, как частный случай.

6.4. Регулярные прецессии

Они характеризуются равенствами [25]

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = nt, \quad \psi = mt, \tag{6.49}$$

где t – время. Учитывая в соотношениях (6.14) равентсва (6.49), получим

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n+m)t}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(m-n)t}{2},\\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(m-n)t}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(n+m)t}{2}.\end{gathered} \tag{6.50}$$

В случае (6.49) имеем два ИС (6.15) и соотношение

$$(m-n)\arccos\frac{\lambda_0}{\cos\dfrac{\theta_0}{2}} - (m+n)\arccos\frac{\lambda_1}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}} = 0,$$

которое следует из равенства (6.50) (предполагаем $n \neq m$) при помощи исключения времени t.

Рассмотрим частный случай регулярных прецессий – прецессионно-изоконические движения. Известно, что движение гиростата называется изоконическим, если подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной плоскости к аксоидам. Для регулярных прецессионно-изоконических движении выполняется условие [32]: $m = n$. Тогда из (6.50) следует

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos nt\,, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin nt\,. \tag{6.51}$$

Учитывая формулы (6.51) запишем все ИС для рассматриваемого класса прецессий

$$\lambda_1 = \mathrm{const}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{6.52}$$

Из (6.52) следует, что в рассматриваемом случае имеем два линейных и одно квадратичное ИС.

Замечание. Представляют интерес условия существования регулярных прецессий для уравнений (5.3), (5.4) [32]:

$$A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad 2m(A_{22} - A_{11}) + B_{11} - B_{22} = 0,$$
$$m^2(A_{22} - A_{11}) + C_{22} - C_{11} = 0, \quad m^2 A_{13} - mB_{13} - C_{13} = 0,$$
$$m^2 A_{23} - mB_{23} - C_{23} = 0, \quad s_1 = a_0 C_{13} + m(a_0 m + n)A_{13},$$
$$s_2 = a_0 C_{23} + m(a_0 m + n)A_{23}, \quad \tilde{\lambda}_1 = a_0 B_{13} - (2a_0 m + n)A_{13},$$
$$\tilde{\lambda}_2 = a_0 B_{23} - (2a_0 m + n)A_{23}, \quad mn(A_{22} + A_{33} - A_{11}) + m\lambda_3 +$$
$$+(a_0 m + n)B_{11} - a_0 m B_{33} - a_0 m^2(A_{11} - A_{33}) + a_0(C_{11} - C_{33}) + s_3 = 0.$$

Из этих равенств, например, в случае тяжелого твердого тела, следует, что $A_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad A_{22} - A_{11} = 0, \quad s_1 = s_2 = 0$. То есть твердое тело представляет собой симметричный гироскоп (гироскоп Лагранжа). В общем случае гиростат $(C_{ij} \neq 0, \quad B_{ij} \neq 0)$ не обязательно должен представлять симметричный гироскоп.

6.5. Полурегулярные прецессии первого типа

Они определяются условием [33]: $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная. Принимая начальное значение угла прецессии нулевым, имеем

$$\psi = mt. \tag{6.53}$$

Как показано в [33], для уравнений (5.3), (5.4) имеют место три варианта зависимости $\varphi = \varphi(t)$. В первом варианте $\varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \sin\varphi). \tag{6.54}$$

Если предполагать $b_0 > c_0 > 0$, то из (6.54) получим

$$\varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\frac{b_0\,\mathrm{tg}\,\tau}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2} - c_0\,\mathrm{tg}\,\tau} \quad \left(\tau = \frac{\sqrt{b_0^2 - c_0^2}}{2}t\right). \tag{6.55}$$

В силу (6.53), (6.55) для параметров Р.–Г. имеем соотношения

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\left(\cos\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_1 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\left(\cos\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_2 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_3 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{6.56}$$

где

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}},\quad \cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{b_0\operatorname{tg}\tau}{\sqrt{b_0^2-c_0^2}-c_0\operatorname{tg}\tau}. \tag{6.57}$$

Наиболее интересным является второй вариант – полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа [28, 33]. Для них выполняется условие [28, 33]

$$b_0^2=1+c_0^2. \tag{6.58}$$

В случае (6.58) формула (6.55) упрощается. Запишем ее в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{b_0\operatorname{tg}\tau}{1-c_0\operatorname{tg}\tau}\quad\left(\tau=\frac{mt}{2}\right). \tag{6.59}$$

Для нахождения зависимостей параметров Р.–Г. от времени можно воспользоваться формулами (6.56), (6.57), в которых необходимо учесть соотношения (6.58), (6.59). Интерес представляет вид ИС для прецессионно-изоконических движений первого типа. Для его получения воспользуемся формулами (6.8), (6.53). Тогда найдем зависимости

$$\frac{\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3}=\frac{b_0(\sin mt+c_0\cos mt-c_0)}{\cos mt-c_0\sin mt},\quad \frac{\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}=\frac{\sin mt}{\cos mt}. \tag{6.60}$$

Исключим из соотношений (6.60) время t

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}b_0c_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\sin\frac{\theta_0}{2}+(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)-\\ -c_0(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)-\\ -b_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)[(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)+c_0(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)]=0\end{gathered} \tag{6.61}$$

Таким образом, для данного класса прецессии имеют место два ИС второго порядка (6.15) и одно ИС (6.61) четвертого порядка.

Рассмотрим третий случай прецессии первого типа (6.53). Для него функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (6.45). Будем предполагать, что параметры β_1 и β_2 удовлетворяют условиям (6.46). Примеры таких прецессий рассмотрены в [17]. В силу равенств (6.47), (6.56) параметры Родрига–Гамильтона таковы

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) - \sin\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t)\right],\\
\lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) + \sin\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t)\right],\\
\lambda_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\left[\sin\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) - \cos\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t)\right],\\
\lambda_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\left[\sin\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) + \cos\frac{mt}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t)\right].
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Структуру ИС в рассматриваемом варианте находим, используя формулы (6.8), (6.47), (6.53)

$$\frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{2\operatorname{sn}^2\mu_1 g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) - 1}{\operatorname{sn}\mu_1 g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\operatorname{cn}\mu_1 g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}, \tag{6.63}$$

где

$$g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}.$$

Итак, имеем три ИС: (6.15), (6.53).

Замечание. Запишем примеры динамических условий для полурегулярных прецессий гиростата в задаче (5.3), (5,4).

Первый пример. Зависимость $\dot\varphi$ от φ определена уравнением

$$\dot\varphi^2 = \frac{1}{A_{33}}(\tilde c_2\cos 2\varphi + \tilde c_2'\sin 2\varphi + \tilde c_1\cos\varphi + \tilde c_1'\sin\varphi + \tilde c_0),$$

где $\tilde c_i$ и $\tilde c_i'$ – параметры. Условия существования таковы:

$$A_{13} = A_{23} = 0,\quad B_{12} = 2mA_{12},\quad B_{11} - B_{22} = 2m(A_{11} - A_{22}),$$
$$\tilde\lambda_1 = a_0(B_{13} - 2mA_{13}),\quad \tilde\lambda_2 = a_0(B_{23} - 2mA_{23}),$$
$$a_0\tilde\lambda_1 = \frac{1}{2}\left({a_0'}^2B_{22} + a_0^2B_{33}\right) + \frac{1}{2}m\left[{a_0'}^2(A_{11} - A_{22} + A_{33}) + a_0^2(A_{11} + A_{22} - A_{33})\right],$$
$$k = \frac{1}{2}m(A_{11} + A_{22} + A_{33}).$$

Второй пример. Для него $\varphi(t)$ находится из уравнения

$$\dot\varphi = \beta_0 + \gamma_0\sin\varphi,$$

а параметры задачи удовлетворяют условиям $A = \mathrm{diag}(\mu, \mu, \mu)$ и

$$\beta_0 = \frac{a_0\big(s_1 - a_0C_{13} - m(a_0B_{13} - \lambda_1)\big)}{a_0B_{13} - \lambda_1}, \quad \gamma_0 = \frac{a_0'(a_0B_{13} - \lambda_1)}{a_0\mu},$$

$$B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0C_{23}, \quad \tilde{\lambda}_2 = a_0B_{23},$$

$$\big(a_0B_{13} - \tilde{\lambda}_1\big)^2 = a_0^2\mu(C_{22} - C_{11}), \quad C_{13} = \frac{1}{a_0\mu}\big[a_0B_{11}B_{13} - \tilde{\lambda}_1(B_{11} + m\mu)\big],$$

$$2a_0(s_1 - a_0C_{13})\big(m\mu + {a_0'}^2B_{11}\big) + (a_0B_{13} - \lambda_1)\big[a_0m\big({a_0'}^2B_{11} + {a_0'}^2B_{33}\big) + 2{a_0'}^2\big(s_3 + a_0(C_{22} - C_{33})\big)\big] = 0,$$

$$2E = {a_0'}^2m^2\mu - 2a_0s_3 + {a_0'}^2C_{22} + a_0^2C_{33} + \frac{a_0^2\mu(s_1 - a_0C_{13})^2}{(a_0B_{13} - \lambda_1)^2},$$

$$k = a_0\lambda_3 + {a_0'}^2m\mu - \frac{1}{2}\big({a_0'}^2B_{11} + a_0^2B_{33}\big) + \frac{a_0^2\mu(s_1 - a_0C_{13})}{a_0B_{13} - \lambda_1}.$$

6.6. Полурегулярные прецессии второго типа

Эти движения характеризуются равенством $\dot{\varphi} = n$, где n – постоянная. Выбирая начальное значение φ_0 нулевым, имеем

$$\varphi = nt. \tag{6.64}$$

Рассмотрим первый класс прецессии второго типа – прецессионно-изоконические движения [28]. Для него скорость прецессии определяется уравнением

$$\dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0\sin nt}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \tag{6.65}$$

Примем начальное значение $\psi_0 = 0$. Тогда из (6.65) получим

$$\psi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{nt}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\dfrac{nt}{2}}. \tag{6.66}$$

Из (6.66) следуют соотношения

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\dfrac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0 + c_0\sin nt)}}, \quad \cos\frac{\psi}{2} = \frac{b_0\cos\dfrac{nt}{2} + c_0\sin\dfrac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0 + c_0\sin nt)}}. \tag{6.67}$$

Параметры Р.–Г. в силу (6.14), (6.64), определяются формулами

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt+\psi(t)}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt-\psi(t)}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t)-nt}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t)+nt}{2}, \tag{6.68}$$

где $\sin\frac{\psi}{2}$, $\cos\frac{\psi}{2}$ имеют значения (6.67). Обращаясь к (6.8), (6.64), (6.66) получим

$$\begin{gathered}(b_0c_0G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) + G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) + c_0^2)(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) - \\ -\big(c_0 + b_0G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) - c_0G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\big)(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) = 0,\end{gathered} \tag{6.69}$$

где

$$G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)}{\sin\theta_0}, \quad G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)}{\sin\theta_0}. \tag{6.70}$$

Таким образом, в силу (6.15), (6.69), (6.70) данный класс прецессий можно охарактеризовать двумя ИС квадратичного типа и одним ИС, имеющим третий порядок.

Второй класс прецессий второго типа отвечает случаю, когда [33]

$$\psi(t) = \mu t + 2\,\mathrm{arctg}(b_0 - c_0)\,\mathrm{tg}\left(\frac{nt}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{6.71}$$

Функции $\lambda_i(t)$ $(i = \overline{0,3})$ получим подстановкой выражений (6.64), (6.71) в соотношения (6.14):

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n+\mu)t+\psi^*(t)}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n-\mu)t-\psi^*(t)}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(\mu-n)t+\psi^*(t)}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(\mu+n)t+\psi^*(t)}{2}. \tag{6.72}$$

В формулах (6.71), (6.72) μ, b_0, c_0 – постоянные. Функция ψ^* из (6.72) определена вторым слагаемым формулы (6.71). Значения параметров b_0, c_0 в частности могут удовлетворять условию $b_0^2 = n^2 + c_0^2$ [33]. Дополнительное к (6.15) ИС находится путем исключения t из соотношений (6.72).

Замечание. Выпишем условия существования решения (6.71) для уравнений (5.3), (5.4):

$$b_0 = \frac{a_0[2A_{13}^2 + A_{33}(A_{22} - A_{11})]}{2A_{13}^2}, \quad c_0 = -\frac{a_0'(A_{22} - A_{11})}{2A_{13}},$$
$$4A_{13}^4 + (A_{22} - A_{11})(4A_{33} - 3A_{22} - A_{11})A_{13}^2 - A_{11}A_{33}(A_{22} - A_{11}) = 0,$$
$$\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{A_{22}A_{33}^2}{A_{33}[A_{13}^2 + A_{33}(A_{22} - A_{11})]},$$
$$n = \frac{(A_{22} - A_{11})\big[a_0\big(C_{33} - C_{11} + \mu(B_{33} - B_{11}) + \mu^2(A_{11} - A_{33})\big) - s_3 - \tilde{\lambda}_3\mu\big]}{4\mu A_{13}^2 + (A_{22} - A_{11})[B_{11} + \mu(A_{22} + A_{33} - A_{11})] - 2A_{13}B_{13}}$$
$$A_{13}(A_{22} - A_{11})\big[\tilde{\lambda}_3 + a_0(B_{11} - B_{33}) + 2a_0\mu(A_{33} - A_{11})\big] +$$
$$+2A_{13}^3(n - 2a_0\mu) + a_0B_{13}[2A_{13}^2 - A_{33}(A_{22} - A_{11})] +$$
$$+2A_{13}(A_{22} - A_{11})[a_0\mu A_{33} + n(A_{22} - A_{11})] = 0,$$
$$A_{12} = A_{23} = 0\,, \quad B_{12} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{13} = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad s_2 = 0,$$
$$B_{22} - B_{11} = 2\mu(A_{22} - A_{11}), \quad C_{22} - C_{11} = \mu^2(A_{11} - A_{22}),$$
$$\mu^2A_{13} - \mu B_{13} - C_{13} = 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = a_0B_{13} + A_{13}(n - 2a_0\mu),$$
$$s_1 = a_0C_{13} + \mu A_{13}(a_0\mu - n).$$

Основная цель рассмотрения этих условий состоит в том, что для классического варианта действия силы тяжести решение $\dot{\varphi} = n$, (6.71) динамически невозможно. То есть это обстоятельство влияет на применение формул (6.71), (6.72) в практическом использовании результатов.

Третий класс прецессий второго типа может быть охарактеризован соотношениями [33]

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = nt, \quad \psi(t) = \mu t + 2\operatorname{arctg}\lambda\cos nt\,, \qquad (6.73)$$

где n, μ, λ – постоянные. Для нахождения зависимостей параметров Р.–Г. от времени необходимо в формулы (6.72) подставить $\theta_0 = \pi/2$, а $\psi^*(t) = 2\operatorname{arctg}\lambda\cos nt$.

Замечание. Представляет интерес условия существования решения (6.73) для уравнений (5.3), (5.4)

$$A_{12} = A_{23} = 0\,, \quad A_{13}^2 = A_{11}(A_{22} - A_{11}), \quad B_{23} = B_{12} = 0, \quad C_{23} = C_{12} = 0,$$
$$B_{13} = 2\mu A_{13}, \quad B_{22} - B_{11} = 2\mu(A_{22} - A_{11}), \quad C_{13} = -\mu^2A_{13},$$
$$C_{22} - C_{11} = \mu(A_{11} - A_{22}), \quad \tilde{\lambda}_1 = nA_{13}, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad s_1 = -n\mu A_{13}, \quad s_2 = 0,$$
$$n = \frac{\tilde{\lambda}_3}{A_{22} - 2A_{11} - A_{33}}, \quad s_3(A_{22} - 2A_{11} - A_{33}) + \tilde{\lambda}_3[B_{11} + \mu(2A_{22} - 3A_{11})] = 0,$$

из которых следует, что решение (6.73) для классических уравнений Эйлера–Пуассона не выполняется. Этот результат следует и из статьи Г.В. Горра [25].

6.7. Прецессионно-изоконические движения общего вида

Положим, что движение тела обладает свойством прецессионности и свойством изоконичности (подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу). Имеют место два класса таких движений в динамике твердого тела с неподвижной точкой [33]:

$$\psi = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}\,; \tag{6.74}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2), \quad \dot{\varphi} = \alpha + \beta \sin\varphi\,. \tag{6.75}$$

В формулах (6.74), (6.75) $\beta_1,\ \beta_2,\ b_0,\ c_0,\ \alpha,\ \beta$ – постоянные, которые для каждой конкретной задачи динамики имеют свои значения.

Рассмотрим случай (6.74). Учитывая в формулах (6.14) равенства (6.47), (6.74) получим

$$\begin{gathered} \lambda_0 = 2\cos\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sn}\mu_1 t\operatorname{cn}\mu_1 t\,, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2} = \mathrm{const}, \\ \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}(\operatorname{sn}^2\mu_1 t - \operatorname{cn}^2\mu_1 t). \end{gathered} \tag{6.76}$$

В силу (6.15), (6.76) для класса движений (6.74) имеют место два линейных ИС и одно квадратичное ИС на параметры Р.–Г.

Замечание. Условия существования прецессии (6.74) таковы [32, 33]

$$\begin{gathered} A_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \\ C_{12} = C_{23} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad s_2 = 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad a_0 = \frac{A_{11}}{A_{11} - A_{33}}, \\ s_1 = \frac{C_{13}(A_{11}^2 + A_{33}^2 - 4A_{11}A_{33})}{(A_{33} - A_{11})(2A_{33} - A_{11})}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{A_{11}B_{33} + B_{11}(A_{33} - 2A_{11})}{A_{11} - A_{33}}, \\ \beta_2 = \frac{2A_{11}C_{11}}{(A_{33} - A_{11})(A_{11} - 2A_{33})}, \quad \beta_1 = \frac{s_3(A_{11} - A_{33}) + A_{11}(C_{11} - C_{33})}{(A_{33} - A_{11})^2}. \end{gathered}$$

Из этих условий следует, что для классического варианта (действия на тело силы тяжести) прецессия (6.74) динамически невозможна.

Изучим случай (6.75). Из первого уравнения (6.75) найдем зависимость $\psi(\varphi)$:

$$\psi(\varphi) = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}}, \qquad (6.77)$$

а из второго – зависимость $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \arcsin\frac{\alpha\left(\beta(\cos v - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\sin v}{\alpha^2 - \beta(\cos v - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin v} \quad \left(v = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}t\right). \qquad (6.78)$$

Зависимость параметров Р.–Г. от времени устанавливаем из формул (6.14) в силу (6.77), (6.78). Поскольку окончательные формулы имеют достаточно сложный вид, то укажем только дополнительное к (6.15) инвариантное соотношение на данные параметры. Используя формулы (6.8), (6.77), получим

$$\begin{gathered}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right) \times \\ \times \left[b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right)\right]^{-1}.\end{gathered} \qquad (6.79)$$

Следовательно, третье ИС (6.79) имеет иррациональную структуру.

Замечание. В книге [32] показано, что прецессия (6.75) для случая действия на тело только силы тяжести динамически невозможна. Это следует из найденных для задачи (5.3), (5.4) условий [32]

$$\begin{gathered}A_{12} = A_{23} = 0, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad s_2 = 0, \\ 2\beta[c_0A_{13} + a_0'(A_{11} - A_{22})] = a_0'c_0(B_{11} - B_{22}), \\ \beta[c_0A_{13} + a_0'(A_{11} - A_{22})] = a_0'\alpha\sqrt{C_{22} - C_{11}}, \\ \cdots .\end{gathered}$$

Троеточием обозначены не выписанные условия, их можно найти в [33]. Однако даже для выписанных условий при $C_{ij} = 0$ $(i,\ j = \overline{1,3})$, $B_{ij} = 0$ $(i,\ j = \overline{1,3})$ следует, что параметр $\beta = 0$. Тогда из системы (6.75) получим $\dot{\varphi} = \alpha = \mathrm{const}$, то есть случай полурегулярной прецессии второго типа.

6.8. Выводы

В данном разделе для прецессионных движений гиростата исследованы зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона, найдены структура инвариантных соотношений для этих движений. Рассмотрены следующие задачи: описаны основные соотношения для прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой, изучены параметры Р.–Г. для прецессий Гриоли, Брессана (в решении Гесса), регулярных, полурегулярных прецессий и прецессий общего вида. Указанный в данном разделе способ позволяет найти зависимости от времени параметров Р.–Г. в произвольном решении, которое описывает прецессию тела. Изучено существование рассмотренных прецессионных движений в обобщенной задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести. Показано, что ряд типов прецессий возможен только в обобщенных задачах динамики гиростата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации с помощью параметров Родрига–Гамильтона исследованы свойства движений твердого тела с неподвижной точкой.

Ранее в научной литературе данные параметры применялись в задачах ориентации твердого тела с неподвижной точкой, в частности, в прикладной теории гироскопии. Для исследования аналитических свойств движения тела параметры Родрига–Гамильтона использованы и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.

В диссертации, в разделе 1, выполнен анализ результатов по теме диссертации. Отмечены не только работы, имеющие общее значение для аналитической механики (Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С. Пуассона, С. В. Ковалевской, К. Якоби, Р. Лиувилля, А. Пуанкаре и других), но и работы, которые посвящены задачам геометрического истолкования движения с помощью различных параметров (углов Эйлера, параметров Родрига–Гамильтона и других). Показано формирование обобщенных задач динамики твердого тела: задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, задачи о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.

Второй раздел диссертации посвящен изложению методов изучения динамики твердого тела. Выписаны различные типы дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела. Это связано с тем, что параметры Родрига–Гамильтона могут быть использованы в нескольких случаях, которые характеризуются свойствами как подвижных, так и неподвижных систем координат. Выбор этих систем определяется типом исследуемых движений (колебания, прецессионные движения, изоконические движения и т.д.).

Большое внимание уделено анализу аналитических методов в динамике твердого тела: представлению решений в виде рядов Пуанкаре, методу инвариантных соотношений, методу годографов, теории конечного поворота твердого тела и другим.

Описана задача о движении тела под действием потенциальных и гармонических сил и задача о движении тела в несжимаемой жидкости. Актуальность рассмотрения этих задач состоит в том, что кинематика этих задач и задачи о движении тела с неподвижной точкой имеют тесную связь. Поэтому результаты, которые получены в классической задаче могут быть обобщены и на указанные выше задачи.

В третьем разделе диссертации рассмотрены линейные колебания тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия. Исследованы особые точки уравнений движения относительно параметров Родрига–Гамильтона. Проведена линеаризация уравнений в возмущениях. С помощью этих уравнений найдено решение линейных уравнений и проведен их анализ.

Четвертый раздел посвящен исследованию нелинейных колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия. Выведена функция Гамильтона и на основании теории возмущений выписаны члены разложения этой функции. Следует отметить, что применение нелинейной теории колебаний требует проведения дополнительных преобразований Биркгофа к нормальной форме. В разделе 4 с точностью до членов четвертого порядка получены выражения для фазовых переменных уравнения движения.

В задачах стабилизации и управления движением объектов техники требуются зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени. Аналогичная информация в силу геометрического смысла параметров Родрига–Гамильтона актуальна и для частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона. Поэтому в разделе 5 рассмотрены известные решения данных уравнений (Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса). В ряде случаев для исследуемых решений найдены инвариантные соотношения, которые содержат только параметры Родрига–Гамильтона.

В диссертации получены явные зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени. Использован аппарат теории эллиптических функций Якоби, позволяющий получить наглядное представление о свойствах параметров Родрига–Гамильтона.

В разделе 6 рассмотрены прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой. Эти движения представляют интерес по двум причинам. Во-первых, они имеют наглядный вид (достаточно представить движение волчка Лагранжа в том виде, в котором ось симметрии образует постоянный угол с вертикальной осью). Во вторых, эти движения, как и равномерное вращение относительно вертикали, весьма часто встречается в технике. Были рассмотрены следующие классы движений:

– маятниковые движения,

– регулярная прецессия относительно вертикали,

– полурегулярные прецессии первого типа,

– полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа,

– полурегулярные прецессии второго типа,

– прецессии общего вида и их частные случаи, прецессионно-изоконические движения,

В каждом из изученных случаев определены зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени и определена структура инвариантных соотношений, содержащих только указанные параметры.

Диссертационная работа имеет достаточно ясные перспективы в исследовании общих свойств параметров Родрига–Гамильтона в других решениях уравнений Эйлера–Пуассона и их обобщениях: уравнениях Кирхгофа–Пуассона.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арнольд В. И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики / В. И. Арнольд // Сибирский мат. журнал. – 1963. – 4, №2. – С. 471–474.

2. Арнольд В. И. Математические аспекты классической и небесной механики / В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт // Динамические системы. Совр. Проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : ВИНИТИ. – 1985. – 3. – 304 с.

3. Аппельрот Г. Г. По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe» / Г. Г. Аппельрот // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1892. – 16, вып. 3. – С. 483–507.

4. Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. К. Бобылев // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 21–25.

5. Борисов А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

6. Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский – М. : Наука. – 1979. – 320 с.

7. Брюм А. З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова / А. З. Брюм // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 68–72.

8. Вархалев Ю. П. Об асимптотически равномерных движениях твердого тела с одной неподвижной точкой / Ю. П. Вархалев // Матем. физика и нелинейн. механика. – 1989. – Вып. 12 (46). – С. 4–9.

9. Вархалев Ю. П. Новый класс асимптотически равномерных движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1982. – 46, вып. 3. – С. 397–400.

10. Вархалев Ю. П. Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса–Аппельрота / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1984. – 48, вып. 3 – С. 490–495.

11. Вархалев Ю. П. Первый метод Ляпунова в исследовании движений твердого тела / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25–41.

12. Гашененко И. Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 3–10.

13. Гашененко И. Н. Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 1–4.

14. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 1–7.

15. Гашененко И. Н. Один частный случай движения гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко, В. Н. Касяник // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 31–34.

16. Гашененко И. Н. О редукции уравнений Эйлера–Пуассона / И. Н. Гашененко, Г. В. Мозалевская, Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 69–84.

17. Гашененко И. Н. Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – К. : Наук. думка, 2012. – 401 с.

18. Гашененко И. Н. Возмущенные маятниковые движения твердого тела вокруг неподвижной точки / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 21–34.

19.Гашененко И. Н. Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера–Пуассона / И. Н. Гашененко, Е. Ю. Кучер // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 50–59.

20.Гашененко И. Н. Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 7–16.

21.Гашененко И. Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 20–32.

22.Гашененко И. Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.

23.Горр Г. В. Новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр // Докл. АН СССР. – 1981. – 260, №6. – С. 1316–1317.

24.Горр Г. В. Методы исследования движений твердого тела и их приложение в классификации движений / Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14.– С. 54–74.

25.Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып.4. – С. 573–587.

26.Горр Г. В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела / Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.

27.Горр Г. В. Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики / Г. В. Горр, Д. И. Думбай // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(I). – С. 20–28.

28.Горр Г. В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, А. М. Ковалев, А. Я. Савченко. – К. : Наук. думка, 1984. – 285 с.

29.Горр Г. В. Об асимптотически равномерных движениях вокруг наклонной оси в обобщенной задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 13–18.

30.Горр Г. В. Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – К. : Наук. думка. – 2013. – 408 с.

31.Горр Г. В. Классические задачи динамики твердого тела / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – К. : Наук. думка, 1978. – 296 с.

32.Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк : ДонНУ. – 2010. – 364 с.

33.Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. – Донецк : ДонНУ, 2009. – 222 с.

34.Горр Г. В. Об асимптотически–прецессионных движениях сферического гиростата / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56–62.

35.Горр Г. В. О двух линейных инвариантных соотношениях дифференциальных уравнений динамики / Г. В. Горр, С. В. Скрыпник // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 38–43.

36.Горр Г. В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2005. – 67, вып. 6. – С. 931–939.

37.Горр Г. В. Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 60–66.

38.Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. Н. Горячев // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 23–24.

39.Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае А = В = 4С / Д. Н. Горячев // Матем. сб. Кружка любителей матем. наук. – 1900. – 21, вып. 3. – С. 431–438.

40.Данилюк Д. А. Колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона в специальных осях / Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 151–156.

41.Данилюк Д. А. Движение гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 39–45.

42.Данилюк Д. А. Свойства параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений динамики тяжелого твердого тела / А. Д. Данилюк // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – Москва, 2014. – № 8. – С. 124–131.

43.Данилюк Д. А. Точные решения уравнений движения гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк // Устойчивость, управление и динамика твердого тела : тезисы XI Междунар. конф. (8–12 июня 2011г.). – Донецк, 2011. – С. 38.

44.Данилюк Д. А. Исследования колебаний твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк, А. М. Ковалев // Системный анализ и управление : сборник тезисов VIII Междунар. конф. (29 июня – 6 июля 2003г.). – Евпатория, 2003. – С. 131–132.

45.Данилюк Д. А. Исследования колебаний твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Системный анализ, управление и навигация : тезисы докладов X Междунар. конф. (3–10 июля 2005г.). – Евпатория, 2005. – С. 38.

46.Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. / А. И. Докшевич. – К. : Наук. думка, 1992. – 168 с.

47.Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. / Н. Е. Жуковский. – М., 1949. – Т. 1. – С. 31–152. – (*Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Журн. Рус. физ. –хим. о–ва. Часть физ. –*

1885. – 17, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280).

48.Зиглин С. А. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике / С. А. Зиглин // I. Функц. анализ. – 1982. – т.16, вып.3. – С. 30 – 41; II. Функц. анализ. – 1983. – т.17, вып.1. – С. 8 – 23;

49.Зубов В. И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применения) / В. И. Зубов // Учебное пособие для мех. –мат. спец. ин–тов. 2–е издание. – М. : Высшая школа, 1984. – 232 с.

50.Ковалев А. М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.

51.Ковалев А. М. О движении тела в случае Гесса / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12–27.

52.Ковалев А. М. Кинематическое истолкование движения тела в решении Гесса / А. М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 1970. – 34, вып. 3. – С. 567–570.

53.Ковалев А. М. Асимптотически равномерные движения гироскопа Лагранжа / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 7. – С. 45–47.

54.Ковалев А. М. Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1996. – Вып. 18. – С. 67–73.

55.Ковалев А. М. Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 16–31.

56.Ковалев А. М. Нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев // Докл. НАН Украины. – №3 – 2002. – С. 61–65.

57.Ковалев А. М. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.

58.Ковалев А. М. Применение параметров Родрига–Гамильтона для исследования прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, Д. А. Данилюк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 93–101.

59.Ковалев А. М. Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.

60.Ковалев А. М. Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.

61.Ковалев А. М. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси / А. М. Ковалев, А. Я. Савченко // Прикл. математика и механика. – 1975. – 39, вып. 4. – С. 650–661.

62.Ковалева Л. М. Колебательные движения гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Л. М. Ковалева, Д. А. Данилюк // Устойчивость, управление и динамика твердого тела : тезисы X Междунар. конф. (5–10 июня 2008г.). – Донецк, 2008.

63.Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы / С. В. Ковалевская. – М., 1948. – С. 153–220. – (Сер. : Классики науки). – (*Kovalevsky S. Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe / S. Kovalevsky // Acta math. – 1889. – 12, № 2. – С. 177–232*).

64.Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / В. В. Козлов // Вестн. Моск. ун–та. Математика, механика. – 1975. – № 1. – С. 105–110.

65.Козлов В. В. Асимптотические решения уравнений классической механики / В. В. Козлов // Прикл. математика и механика. – 1982. – 46, вып. 4. – С. 573–577.

66.Козлов В. В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах / В. В. Козлов // Теор. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.

67.Коносевич Б. И. Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку / Б. И. Коносевич, Е. В. Позднякович // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, вып. 3. – С. 544–548.

68.Кошляков В. Н. Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела / В. Н. Кошляков // Киев : Институт математики НАН Украины, 1994. – 176 с.

69.Кошляков В. Н. Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига–Гамильтона / В. Н. Кошляков // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 16–25.

70.Кудряшова Л. В. О точных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова // История и методология естеств. наук. Математика и механика. – 1973. – Вып. 14. – С. 225–241.

71.Кудряшова Л. В. О точных решениях задачи о движении в потенциальном силовом поле твердого тела, имеющего неподвижную точку / Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова // Механика твердого тела. – 1973. – Вып. 5. – С. 39–44.

72.Кудряшова Л. В. Геометрические методы в динамике твердого тела (от Пуансо до наших дней) / Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова // История и методология естеств. наук. Математика и механика. – 1974. – Вып. 16. – С. 224–235.

73.Лагранж Ж. Аналитическая механика : в 2 т. / Ж. Лагранж. – М. ; Л. : Гостехиздат., 1950. – Т. 1. – 594 с.

74.Леви–Чевита Т. Курс теоретической механики : в 2 т. / Т. Леви–

Чевита, У. Амальди. – М. : Изд–во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.

75.Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье // М. : Физматгиз, 1961. − 824 с.

76.Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. / А. М. Ляпунов. – М., 1954. – Т. 1. – С. 320–324. – (*Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости / А. М. Ляпунов // Сообщ. Харьков. матем. о–ва. Сер. 2. – 1893. – 4, № 1–2. – С. 81–85*).

77.Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ляпунов // Сообщ. Харьков. матем. о–ва. Сер. 2. – 1894. – 4, № 3. – С. 123–140.

78.Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. : в 5 т. / А. М. Ляпунов. – М. ; Л., 1956. – Т. 2. – С. 7–263.

79.Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / А. П. Маркеев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 29–36.

80.Маркеев А. П. Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 363–372.

81.Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2001. – 65, вып. 1. – С. 51–58.

82.Маркеев А. П. Об устойчивости прецесии Гриоли / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 556–572.

83.Маркеев А. П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, вып. 2. – С. 282–293.

84.Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Б. К. Млодзеевский // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1894. – 7, вып. 1. – С. 46–48.

85.Орешкина Л. Н. О необходимых и достаточных условиях существования четвертого квадратичного интеграла в некоторых задачах динамики твердого тела / Л. Н. Орешкина // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 18–29.

86.Полубаринова–Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / П. Я. Полубаринова–Кочина // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки : сб., посв. памяти С. В. Ковалевской. – М. ; Л. , 1940. – С. 157–186.

87.Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избр. труды : в 3 т. / А. Пуанкаре. – М. : Наука, 1971. – 1. – 771 с.

88.Рубановский В. Н. Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Вестн. Моск. ун–та. Математика, механика. – 1968. – Вып. 2. – С. 99–106.

89.Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1974. – 38, вып. 4. – С. 616–627.

90.Рубановский В. Н. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49, вып. 2. – С. 212–219.

91.Рубановский В. Н. О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 402–414.

92.Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1954. – 18, вып. 4. – С. 457–458.

93.Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1956. – 30, вып. 1. – С. 51–66.

94.Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1961. –25, вып. 1. – С. 9–16.

95.Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. Моск. ун–та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.

96.Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской / А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 48–51.

97.Савченко А. Я. Исследование устойчивости равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа / А. Я. Савченко // Прикл. механика. – 1974. – 10, № 12. – С. 71–77.

98.Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем / А. Я. Савченко – К. : Наук. думка, 1977. – 160 с.

99.Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твердых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. – К. : Наук. думка, 1991. – 168 с.

100.Скрыпник С. В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С. В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.

101.Соколов В. В. Новый интегральный случай для уравнений Кирхгофа / В. В. Соколов // Теор. и мат. физика. – 2001. – 129, вып. 1. – С. 31–36.

102.Старжинский В. М. Колебания тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в общем случае / В. М. Старжинский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – Вып. 4. – С. 121–128.

103.Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата / Л. Н. Сретенский // Докл. АН УССР. – 1963. – 149, № 2. – С. 292–294.

104.Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости / В. А. Стеклов. – Харьков, 1893. – 234 с.

105.Стеклов В. А. О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1895. – 7, вып. 2. – С. 10–21.

106.Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 19–21.

107.Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 1–3.

108.Степанова Л. А. К истории решения В. Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / Л. А. Степанова // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 51–59.

109.Татаринов Я. В. Лекции по классической механике. / Я. В. Татаринов // М : Изд–во МГУ, 1984. – 296 с.

110.Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки / Я. В. Татаринов // Вестник Моск. ун–та. Серия Математика и Механика. – 1974. – № 6. – С. 99–105.

111.Ткаченко А. И. О применении параметров Родрига–Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объектов / А. И. Ткаченко // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев : Наукова думка, 1986. – Вып. 69. – С. 47–52.

112.Узбек Е. К. О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопичеких сил / Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, вып. 6. – С. 964–970.

113.Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела / М. П. Харламов – Л. : Изд–во Ленингр. ун–та, 1988. – 200 с.

114.Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1955. – 19, вып. 2. – С. 231–233.

115.Харламов П. В. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости / П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1956. – 107, № 3. – С. 381–383.

116.Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П. В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.

117.Харламов П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1964. – 158, № 5. – С. 1048–1050.

118.Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 1. – С. 158–159.

119.Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск : Изд–во Новосиб. ун–та, 1965. – 221 с.

120.Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.

121.Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

122.Харламов П. В. Разделяющие движения гироскопа Лагранжа / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 17–22.

123.Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.

124.Харламов П. В. О различных представлениях уравнений Кирхгофа

/ П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская, М. Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.

125.Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1966. – 30, вып. 4. – С. 784–788.

126.Харламова Е. И. О канонических уравнениях движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 102–107.

127.Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.

128.Харламова Е. И. Уравнения движения гиростата в ньютоновском поле сил / Е. И. Харламова, Л. М. Ковалева // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 92–98.

129.Харламова Е. И. Интегродифференциальные уравнения динамики твердого тела / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская – К. : Наук. думка, 1986. – 296 с.

130.Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде / О. В. Холостова. – М. ; Ижевск : Ин–т компьютерных исследований, 2008. – 128 с.

131.Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая / С. А. Чаплыгин // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1894. – 6, вып. 2. – С. 20–42.

132.Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С. А. Чаплыгин // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1897. – 20, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.

133.Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С. А. Чаплыгин // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1901. – 10, вып. 2. – С. 32–34.

134.Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости / С. А. Чаплыгин // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1903. – 11, вып. 2. – С. 7–10.

135.Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / С. А. Чаплыгин // Труды отд–ния физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1904. – 12, вып. 1. – С. 1–4.

136. Чаплыгин С. А. О принципе последнего множителя / С. А. Чаплыгин // Математический сборник. – 1900. – Т. 21. – С. 479–489.

137.Яхья Х. М. О сведении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки к одному дифференциальному уравнению / Х. М. Яхья // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 64–67.

138.Яхья Х. М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата / Х. М. Яхья // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. – 1987. – Вып. 4. – С. 88–90.

139.Burgatti P. Dimonstrazione della non esistenza d’integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d’un corpo pesante intorno a un punte fisso / P. Burgatti // Rend. Circ. matem. di Palermo. – 1910. – 29. – P. 369–377.

140.Clebsch A. Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit / A. Clebsch // J. reine und angew. Math. – 1856. – 52, H. 2. – S. 103–132.

141.Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Ann. – Leipzig, 1871. – B. 3. – S. 238–262.

142.D’Alembert J. Recherches sun la precession des equinoxes, et sur la nutation de l’axe de la Terre, dans le systéme Newtonien / J. D’Alembert – Acad. Paris. – 1749. – 184 p.

143.Darboux G. Sur le mouvement d’un corps pesant de rèvolution, fixé par un point de son axe / G. Darboux // C. r. Acad. sci. – 1885. – 101. – P. 115–119.

144.Darboux G. Sur la theorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants á la méme polhodie / G. Darboux // C. r. Acad. sci. – 1885. – 101. – P. 1555–1561.

145.Dirichlet L. Über einige Fälle in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressiblen Flüssigen / L. Dirichlet // Medium teoretisch bestimmen last, Berl. Berichten. – 1852. – 30. – P. 10–25.

146.Euler L. Recherches sur la precession des èquinoxes, et sur la nutation de l’axe de la Terre / L. Euler // Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1749–1751. – P. 289–295.

147.Euler L. Recherches sur la connaissance mécanique des corps / L. Euler // Histoire de l’Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1758–1765. – 16. – P. 131–153.

148.Gray A. A treatise on gurostatics and rotational motion / A. Gray – Theory and applications. Reprinted by Dover Publications. – New York, 1959. – 530 p.

149.Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – 26, f. 3–4. – P. 271–281.

150.Grioli G. Questioni di stabilita riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. Scupla norm. super. Pisa (3). – 1949. – 1. – P.43–71.

151.Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann.– 1890.– 37, H. 2.– S. 153–181.

152.Husson E. Recherche des integrales algebriques dans le mouvement d’un solide pesant autour d’un point fixe / E. Husson // Ann. Fac. sci Univ. Toulouse, Serie 2. – 1906. – 8. – P. 73–152.

153.Husson E. Sur un theorém de M. Poincaré relativement au movement d’un solide pesant / E. Husson // Acta math. – 1908. – 31. – P. 71–88.

154.Iacob A. Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point / A. Iacob // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1971. – 16, № 10. – P.

1497–1521, 1971.

155.Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps / C.G.J. Jacobi // Gesammelte Werke. – 2. – Berlin. – 1882. – S. 289–352.

156.Jacobi C.G.J. Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis á des forces accélératrices / C.G.J. Jacobi // Gesammelte Werke. – 2. – Berlin. – 1882. – S. 427–467.

157.Kirchhoff G.R. Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit / G.R. Kirchhoff // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – 71. – S. 237–262.

158.Klein F. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld // New York e. a. Johnson reprint corp. – 1965. – 966 S.

159.Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzial gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – 65. – S. 528–537.

160.Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – 3. – P. 1–25.

161.Liouville R. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini / R. Liouville // C. r. Acad. sci. – 1896. – P. 874–876.

162.Liouville R. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points / R. Liouville // Acta math. – 1897. – 20. – P. 239–284.

163.MacCullagh J. On the rotation of solid body / J. MacCullagh // Proc. Roy. Irish Acad. Dublin. – 1840–1844. – V. 2. – P. 520–525, 542–545 : 1845–1847. – V. 3. – P. 370–371.

164.Perron O. Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differential gbeichungssystem / O. Perron // Ibid. – 1929. – 29, S. 10. –147.

165.Poinsot L. Thèorie nounelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. math. pures et appl. – 1851. – 16. – P. 9–130 ; P. 289–336.

166.Poisson S.D. Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant / S.D. Poisson // Mém. Acad. sci. – 1832. – 11. – P. 521–581.

167.Poisson S.D. Traitè de mécanique / S.D. Poisson // Bachelier, Imprimeur–Libraire pour les Math. Paris. – 1833. – 2. – 782 p.

168.Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O. Staude // J. reine und angew. Math. – 1894. – 113, H. 4. – S. 318–334.

169.Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I : The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5, №5. – P. 747–754.

170.Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H.M. Yehia // J. theoretical and applied machanics. – 1986. – 5, № 5. – P. 755–762.