

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
Государственное Учреждение ДНР
Институт прикладной математики и механики (ИПММ)



На правах рукописи

Пилпани Юлия Юрьевна

УДК 531.38

**АСИМПТОТИЧЕСКИ – ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ
ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ**

Специальность: 01.02.01– Теоретическая механика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Экземпляр диссертации идентичен
по содержанию с другими экземплярами,
которые были представлены
в диссертационный совет.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 01.013.01
Ю.Б. Коносевиц



Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
доцент,
Мазнев А.В.

Донецк – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Раздел I. Анализ литературы по теме диссертации.....	13
Раздел II. Методы исследования движения гиростата, имеющего неподвижную точку	26
2.1. Постановка задачи	26
2.1.1. Содержательная постановка задачи	26
2.1.2. Концептуальная постановка задачи	27
2.1.3. Математическая постановка задачи	27
2.2. Аналогия задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении твердого тела в жидкости	31
2.3. Интегрирование уравнений движения гиростата в квадратурах.....	32
2.4. Метод инвариантных соотношений построения решений уравнений динамики гиростата	35
2.5. Первый метод Ляпунова в построении асимптотических решений уравнений движения гиростата	37
2.6. Схема исследования асимптотически – периодических решений для уравнений Кирхгофа–Пуассона	41
2.7. Теория параметрического резонанса	44
2.8. Прецессионные движения гиростата	48
2.9. Выводы.....	50
Раздел III. Асимптотически – равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.....	52
3.1. Введение	52
3.2. Постановка задачи	53
3.3. Редукция линейной системы	57
3.4. Случай произвольного $a_0 \in (-1,1)$	61
3.5. Случай, когда a принадлежит главной оси	65

	3
3.6. Особый случай $g_0(t) = 0$	66
3.7. Выводы.....	70
Раздел IV. Общий метод исследования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата.....	72
4.1. Анализ предельных классов прецессионных движений.....	73
4.1.1. Постановка задачи.....	73
4.1.2. Регулярные прецессии сферического гиростата.....	74
4.1.3. Полурегулярные прецессии первого типа сферического гиростата	76
4.1.4. Полурегулярные прецессии второго типа сферического гиростата ..	79
4.1.5. Прецессии общего вида сферического гиростата.....	81
4.2. Общий метод исследования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата	84
4.3. Выводы.....	93
Раздел V. Асимптотически – прецессионные движения сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.....	94
5.1. Асимптотические к регулярным прецессиям движения сферического гиростата	94
5.2. Асимптотически – прецессионные движения первого типа	101
5.2.1. Первый класс движений.....	101
5.2.2. Второй класс движений.....	107
5.3. Асимптотически – прецессионные движения второго типа	110
5.4. Асимптотически – прецессионные движения гиростата в случае предельного прецессионного движения общего вида	120
5.4.1. Вид предельного движения.....	120
5.4.2. Представление решения (5.127), (5.128) посредством эллиптических функций	121
5.4.3. Уравнения в вариациях.....	122
5.5. Выводы.....	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	135
--	-----

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование движений объектов современной техники (роботов, манипуляторов, гироскопических систем и других конструкций) с помощью методов аналитической механики дает возможность получить результаты, которые имеют не только теоретическое значение, но и практическое применение. Достаточно отметить, что на практике широко используются выводы о свойствах устойчивости ракет (условие Маевского), спутниковых систем и других сложных механических систем, содержащих твердые и упругие элементы.

Моделирование движений в механике начиналось с применения простейшей модели – абсолютно твердого тела, имеющего неподвижную точку. В теоретических исследованиях сформировался отдельный раздел – динамика твердого тела. Развитие динамики твердого тела осуществляли Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Л. Пуансо, С. Пуассон, Ж. Лиувилль, Е. Гюссон, К. Якоби, Г. Дарбу, Ж. Бине, В. Гесс, Д. Гриоли, и другие. Вклад этих ученых и российских ученых С.В. Ковалевской, Н.Е. Жуковского, А.М. Ляпунова, В.А. Стеклова, С.А. Чаплыгина, Д.К. Бобылева, Д.Н. Горячева, Г.В. Колосова отмечены в обзорных монографиях [5, 19, 20, 26, 29, 30, 43, 94, 107, 118].

Сложность механических систем в технике требует более адекватного моделирования их движения. Модель абсолютно твердого тела оказывается не всегда достаточной для описания движения рассматриваемых систем. Поэтому она была обобщена с помощью учета движения несомых тел на случай модели «гиростат». Уравнения движения гиростата рассматривали Ч. Томсон, А. Грей, В. Вольтерра, Ж. Лиувилль, Н.Е. Жуковский, Т. Леви–Чивита и У. Амальди, П.В. Харламов, В.В. Румянцев, Й. Виттенбург.

В своем курсе по теоретической механики [61] Т. Леви–Чивита и У. Амальди гиростатом называют механическую систему, состоящую из тела–носителя и присоединенных к нему тел, в результате движения которых

распределение масс всей системы не изменяется. Как правило, во многих работах предполагается, что несомые тела имеют симметричную форму, что обусловлено практическим использованием результатов моделирования.

В своих работах [107, 108] П.В. Харламов обобщил понятие «гиростат», указав, что несомые тела могут иметь более сложное распределение масс, чем гироскоп Лагранжа. Требуется только, чтобы выполнялось условие, что центр масс несомого тела должен лежать на оси вращения, которая является главной центральной осью, а моменты инерции его относительно осей, ортогональных к оси вращения совпадали.

В.В. Румянцев [87] рассматривал движение гиростата в пространстве. Он, как и П.В. Харламов, изучал три случая вращения роторов. В первом варианте обобщенные силы, действующие на несомые тела таковы, что скорости вращения роторов постоянны. Во втором случае роторы вращаются по инерции. Для данных случаев уравнения движения допускают интеграл энергии, который может быть получен введением функции Раусса. В третьем варианте обобщенные силы являются произвольными функциями времени, и обобщенный интеграл энергии существует только при дополнительном условии на распределение масс тела-носителя. В монографии [35] изложены все понятия гиростата, в том числе и предложенные А. Греем [134], В. Вольтерра [155], Й. Виттенбургом [12]. Особенное внимание в ней уделено подходу Н.Е. Жуковского, который к понятию гиростата пришел, рассматривая движение тела с жидким заполнением.

Для случая постоянного гиростатического момента гиростата получены многочисленные результаты П.В. Харламовым [101, 102, 104, 107, 109, 111]. В задаче о движении гиростата под действием силы тяжести он вывел новые формы уравнений движения, установил новые классы решений уравнений движения. В задаче о движении тела в жидкости П.В. Харламов обобщил [99, 100, 130] известные результаты В.А. Стеклова [91], А.М. Ляпунова [62] и С.А. Чаплыгина [120, 121]. Построенные им первые интегралы уравнений движения тела в идеальной жидкости позволяют в силу известной математической аналогии [156,

157] использовать и для уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

П.В. Харламов в своих работах использовал комплексный подход к решению проблем динамики гиростата, поскольку наряду с аналитическими методами (метода инвариантных соотношений, методов понижения порядка исходных дифференциальных уравнений) он развил метод кинематического истолкования движения гиростата, основанный на теореме Пуансо. В созданной П.В. Харламовым школе получены многочисленные решения уравнений движения гиростата в различных силовых полях и выполнены значительные геометрические исследования свойств его движения. Е.И. Харламова нашла новое уравнение динамики – интегродифференциальное уравнение [113–117], что позволило найти новые решения уравнений динамики гиростата. А.И. Докшевич [44] установил новые решения уравнений Эйлера–Пуассона и провел исследования условий существования первых интегралов. А.М. Ковалев получил многочисленные результаты аналитического [51] и геометрического характера [47–49, 50]. Г.В. Горр построил новые классы асимптотически – прецессионных и других движений твердого тела и гиростата [19, 21, 23, 24, 28], модифицировал метод Пуансо кинематического истолкования движения гиростата с неподвижной точкой [19]. И.Н. Гашененко провел исследования свойств движения в частных решениях уравнений динамики [16, 17, 19]. Результаты, полученные Г.В. Мозалевской, М.П. Харламовым, А.П. Харламовым и другими учеными, подробно изложены в монографиях [19, 29, 35, 107, 118].

Данная диссертационная работа посвящена изучению асимптотических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Актуальность тематики состоит в том, что после рассмотрения частных решений выяснить свойства интегрального многообразия уравнения движения можно путем рассмотрения окрестности известных решений. Асимптотические решения уравнений движения гиростата, которые при неограниченном возрастании времени стремятся к заданным решениям, позволяют получить новые классы

движений гиростата, что приносит новую информацию о свойствах движения гиростата в общем случае.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательской работы кафедры высшей математики и методики преподавания математики ДонНУ по следующим госбюджетным темам:

- «Метод инвариантных соотношений в построении решений уравнений динамики твердого тела» (№ 0101U005722, Г–01/38, 1.01.2000 г. – 31.12.2006 г.);
- «Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях» (№ 0107U001773, Г–07/38, 1.01.2007 г.– 31.12.2012 г.).

Она проводилась в рамках научных исследований, которые выполнены по госбюджетной теме отдела прикладной механики Института прикладной математики и механики НАН Украины:

«Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел» (№ 0111U000484, № III–6–11, 1.01.2011 г. – 31.12.2015 г.).

Цель и задачи исследования. Объектом исследования является задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предмет исследования – асимптотически – прецессионные решения уравнений класса Кирхгофа–Пуассона. Цель исследования – изучение условий существования асимптотически – равномерных движения относительно наклонной оси гиростата и асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата относительно оси симметрии силового поля.

Методы исследования. В диссертации применен первый метод Ляпунова построения асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теория параметрического резонанса для дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

Научная новизна результатов.

Указаны условия существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси в случаях, когда либо параметр угла нутации, либо параметр угловой скорости принимают произвольные значения.

Проведена редукция уравнений в вариациях, соответствующих асимптотически – равномерным вращениям к системе третьего порядка. Для варианта произвольных значений угла нутации из промежутка $(0, \pi)$ на основе теории параметрического резонанса получены условия существования асимптотически – равномерных движений гироскопа Гесса.

Рассмотрены два особых случая, характеризующихся специальными условиями на параметры задачи. Один из них соответствует варианту, когда ось равномерного вращения является главной осью в гиростате.

Разработана общая схема исследования условий существования асимптотически – прецессионных движений гиростата, на основании которой получена новая форма уравнения Хилла для анализа асимптотически – прецессионных движений.

Найдены условия существования асимптотически – прецессионных движений гиростата для случаев, когда предельное движение является регулярной прецессией относительно вертикали.

Изучены условия существования асимптотически – прецессионных движений первого и второго типа. Использованы два подхода: первый подход основан на достаточном условии Ляпунова, а второй – на теории параметрического резонанса для систем второго порядка.

Рассмотрены условия существования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата в случае, когда предельное движение является прецессией общего вида.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов.

Установленные в диссертации результаты имеют теоретическое значение, поскольку предложенные в ней условия существования асимптотически – равномерных и асимптотически – прецессионных движений значительно шире

полученных ранее условий. Практическая применимость результатов может быть рекомендована в прикладных областях механики (теория управления механическими системами и стабилизация движения).

Результаты диссертации могут быть использованы в ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк), в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», в Московском государственном университете, в Московском авиационном институте в исследовании свойств движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Кроме этого, результаты, полученные с применением теории параметрического резонанса для систем второго порядка, могут быть использованы при чтении специальных курсов по аналитической механике и математическому моделированию движений сложных механических систем и общих курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений в вузах ДНР и России.

Личный вклад соискателя. Результаты опубликованы в 5 статьях в специализированных журналах [69, 70, 75–77] и в 4 тезисах докладов конференций [68, 78–80]. Научные результаты, изложенные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично. Три публикации [75–77] написаны автором диссертации, статьи [69, 70] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. Причем научному руководителю принадлежит постановка задачи, а автору диссертации принадлежат результаты, посвященные получению достаточных условий существования асимптотически – равномерных и асимптотически–маятниковых движений гиростата.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

Международная научно–техническая конференция «Моделирование, идентификация, синтез систем управления» (г. Донецк, 2010 г.) [68].

XV Международная конференция «Динамические системы моделирования и исследование устойчивости» (г. Киев, 2011 г.) [78].

XIV Международная научная конференция им. Академика М. Кравчука (г. Киев, 2012 г.) [79].

Международная научная конференция «Сучасні проблеми механіки і математики» (г. Львов, 2013 г.) [80].

В полном объеме диссертационная работа докладывалась и обсуждалась на семинаре отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины (руководитель – академик НАН Украины А.М. Ковалев, г. Донецк), на семинаре «Динамика твердого тела» кафедры высшей математики и методики преподавания математики ДонНУ (руководитель – доктор физ.-мат. наук, профессор Г.В. Горр, г. Донецк).

Структура и объем диссертации. Диссертация, объемом 149 страниц, состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Список использованных источников состоит из 158 наименований и расположен на 15 страницах.

В первом разделе проведен анализ литературы по теме диссертации.

Второй раздел посвящен изложению методов исследования. Приведены содержательная и математическая постановки задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Изложены методы интегрирования в квадратурах дифференциальных уравнений движения, метод инвариантных соотношений построения решений, первый метод Ляпунова исследования асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, теория параметрического резонанса уравнений второго порядка.

В третьем разделе изучены условия существования асимптотически – равномерных движений относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены результаты, которые существенно обобщают результаты работы [11], поскольку в диссертации применен не только достаточный признак существования положительного характеристического числа уравнения класса Хилла, предложенный А.М. Ляпуновым, но и теория параметрического резонанса.

Четвертый раздел содержит результаты, полученные автором для общего метода исследования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата. Вначале выполнен анализ предельных классов прецессионных

движений сферического гиростата. Рассмотрены условия существования регулярных прецессий, полурегулярных прецессий двух видов, прецессий общего вида. На базе полученных результатов развит метод исследования асимптотически – прецессионных движений сферического по распределению масс гиростата.

В пятом разделе исследованы условия существования асимптотически – прецессионных движений гиростата. Получены условия существования регулярных асимптотически – прецессионных движений гиростата. Рассмотрены свойства асимптотически – прецессионных движений первого типа (два класса), асимптотически – прецессионные движения второго типа, а также асимптотически – прецессионных движений общего вида. В последнем случае предельное движение представлено посредством эллиптических функций Якоби. Полученное в результате редукции системы уравнений в вариациях уравнение второго порядка имеет наглядный вид, что позволит найти новые достаточные условия асимптотически – прецессионных движений.

В заключении к диссертации сформулированы выводы о диссертации, а также перспективы дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность научному консультанту – доктору физ.–мат. наук А.В. Мазневу за постановку задачи, ценные замечания, а также внимание к работе.

РАЗДЕЛ I

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В данной работе исследуются асимптотически прецессионные движения в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Эта задача является обобщением классической задачи о движении тела под действием силы тяжести. В обзорных работах [19, 30, 35] изложены основные результаты, полученные в динамике тяжелого твердого тела.

Известно, что развитие динамики тяжелого твердого тела было обусловлено актуальностью решения одной из задач небесной механики – задачи о прецессии и нутации оси Земли. Первые исследования движения Земли принадлежат Ж. Даламберу. Он рассматривал уравнения движения в полунеподвижной системе координат. Общую постановку задач о движении твердого тела с неподвижной точкой дал Л. Эйлер [132, 133]. Ему принадлежат не только результаты по введению основных кинематических и динамических характеристик в данной задаче, но и уравнения движения, записанные в главной подвижной системе координат. Л. Эйлер открыл новое решение уравнений движения.

Модель тяжелого твердого тела, использованная Л. Эйлером, в настоящее время широко применяется в математическом моделировании движений современных технических конструкций, для которых допустимо предположение о том, что деформации этих конструкций пренебрежимо малы (космические аппараты, роботы, манипуляторы, гироскопические приборы и др.).

Большой вклад в динамику тяжелого твердого тела внесли Ж. Лагранж [60], Л. Пуансо [150], С. Пуассон [151], Ж. Лиувилль [147], Г. Дарбу [130], Л. Дирихле [131], Е. Гюссон [139], Н. Ковалевский [145], К. Якоби [140], В. Гесс [138], Д. Гриоли [135–137] и многие другие. Как отмечено в монографии [29]: «Но наивысшего расцвета достигла динамика твердого тела в исследованиях русских ученых С.В. Ковалевской, Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина, В.А. Стеклова, Д.К. Бобылева, А.М. Ляпунова, Д.К. Горячева, Г.В. Колосова, Г.Г. Аппельрота».

Ж. Лагранж [60] при выводе уравнений движения тяжелого твердого тела использовал кинетическую энергию тела, записанную в произвольной системе координат, и выведенные им уравнения. Для случая осесимметричного тяжелого твердого тела он получил новое решение уравнений движения.

Решение Ж. Лагранжа представляет особый интерес, поскольку его аналогии возникают во многих задачах динамики твердого тела, обобщающих классическую [35, 118].

С. Пуассон в трактате по механике [152] излагает постановку задачи о движении твердого тела в координатной форме. Он предложил не только уравнение для единичного вектора вертикали, но и рассмотрел движение тела по инерции. Исследования С. Пуассона позволили с учетом работ Л. Эйлера в настоящее время при изучении задачи о движении тяжелого твердого тела говорить об уравнениях Эйлера–Пуассона.

При анализе вклада Л. Пуансо [150] в геометрические исследования движения тяжелого твердого тела П.В. Харламов [118] отметил: «Имея в виду результаты Даламбера, Эйлера и Лагранжа, Пуансо заметил, что во всех этих исследованиях нет ничего кроме вычислений, и наглядное представление о движении твердого тела в них отсутствует. И образцом наглядного представления движения явилось геометрическое решение задачи, которое Пуансо дал телу, движущемуся по инерции. Он показал, что в таком движении неизменно связанный с телом эллипсоид, закрепленный в центре, катится без скольжения по неподвижной плоскости. Он ввел в рассмотрение полодию и герполодию, подвижный и неподвижный аксоиды».

Реализовать на практике применение общей теоремы Л. Пуансо о представлении движения тела посредством качения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду позволили уравнения неподвижного годографа, предложенные П.В. Харламовым [106]. К настоящему времени накоплена значительная информация о свойствах движения тела [19, 35, 29].

В 1858 г. Ж. Лиувиль [146] предложил обобщение уравнений Эйлера, в которых гиросtatический момент можно считать переменным. Другие подходы в

рассмотрении задачи о движении тела и гиростата предложили Н.Е. Жуковский [45], П.В. Харламов [108], В.В. Румянцев [87]. В настоящее время задачи о движении тела с переменным гиростатическим моментом рассмотрены в работах [14, 15, 31, 32, 53, 66, 67].

Г. Дарбу [130] принадлежат значительные результаты в геометрических исследованиях движения твердого тела с неподвижной точкой. Они относятся не только к изучению решения Ж. Лагранжа, но и к разработке общих подходов в интерпретации движения тела.

К. Якоби [140] внес существенный вклад в развитие аналитических и геометрических методов анализа решений уравнений Эйлера–Пуассона. Он открыл эллиптические функции, разработал теорию интегрирования уравнений движения, которые допускают определенное количество первых интегралов. Методы интегрирующего множителя К. Якоби нашли широкое применение в динамике твердого тела [39, 65].

Геометрические исследования К. Якоби относились к случаю Ж. Лагранжа. Он предложил такую геометрическую интерпретацию движения гироскопа Лагранжа, при которой это движение раскладывается на два движения класса Пуансо. Данный результат наиболее полно изложен в курсе механики Г.К. Сулова [94].

В связи с теоремой К. Якоби [140] в динамике твердого тела интенсивно излагалась проблема существования у уравнений Эйлера–Пуассона дополнительного первого интеграла [33, 51].

С.В. Ковалевская [54] рассматривала задачу о существовании решений уравнений Эйлера–Пуассона в предположении, что основные переменные задачи являются однозначными функциями комплексного времени, которые не имеют других особенностей, кроме полюсов. Она показала, что в общем случае уравнения Эйлера–Пуассона не имеют таких решений с пятью произвольными постоянными. Исключение составляет случаи Эйлера, Лагранжа и случай, который теперь называют случаем Ковалевской. Кроме этого она получила

дополнительный первый интеграл и свела в своем решении задачу интегрирования уравнений Эйлера–Пуассона к квадратурам.

А.М. Ляпунов [63] дополнил результаты С.В. Ковалевской, рассмотрев вариант, когда однозначные решения имеют особые точки, отличные от точек типа полюсов (например, существенно особые точки). Новых решений уравнения Эйлера–Пуассона он не обнаружил.

Г.Г. Аппельрот [1] применял подход С.В. Ковалевской в построении решений в виде рядов по комплексной переменной t и полагая, что количество произвольных постоянных в решении равно четырем, получил решение В. Гесса. Иногда в литературе это решение называют случаем Гесса–Аппельрота [20].

Анализ условий существования дополнительных к классическим первым алгебраическим интегралов проводили Е. Гюссон [139], П. Бургатти [127].

Е. Гюссон [139] доказал, что рациональный первый интеграл уравнений Эйлера–Пуассона существует только для тел, обладающих динамической симметрией, а полиномиальный первый интеграл существует только в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Р. Лиувилль [147] при условии, что уравнения Эйлера–Пуассона допускают алгебраический первый интеграл в случае равенства двух моментов инерции, доказал, что этот интеграл должен иметь вид однородного многочлена (при этом вес компонент угловой скорости считается равным единице, а вес компонент единичного вектора вертикали – равным двум).

А.И. Докшевич [44] не только упростил доказательство теорем Е. Гюссона и Р. Лиувилля, но и показал ошибочность утверждения П. Бургатти.

После работ Е. Гюссона, Р. Лиувилля актуальными стали проблемы существования первых интегралов в случае, когда они являются аналитическими функциями по некоторому параметру. А. Пуанкаре [81] доказал теорему, в которой основным утверждением является утверждение: необходимым условием существования аналитического первого интеграла является равенство главных моментов инерции.

В.В. Козлов [55, 57] существенно дополнил исследования А. Пуанкаре, доказав в общем виде несуществование аналитических первых интегралов уравнений Эйлера–Пуассона.

Поскольку в общем случае распределения масс в твердом теле не существует дополнительный первый интеграл, то актуальной становится задача построения частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Первыми, кто обратил внимание на важность развития методов построения частных решений, были Ф. Клейн и А. Зоммерфельд [143]. В дальнейшем перспективность решения задачи нахождения частных решений уравнений динамики отмечали В. Гесс [138], О. Штауде [152], П.В. Харламов [105, 107, 141] и многие другие ученые.

Так, в обзорной работе [110] П.В. Харламов пишет (стр. 9): «Большую теоретическую ценность представляет набор точных математических решений в различных классических задачах аналитической динамики твердого тела. Критический анализ всех таких решений должен быть проведен с целью отбора тех из них, которые могут быть использованы для построения полных решений».

Полным решением П.В. Харламов [141] предлагает назвать точное решение, в котором получены не только зависимости переменных задачи от времени, но и дано истолкование движения методом годографов.

Стационарные решения, открытые О. Штауде [153], относятся к простейшим решениям, поскольку в них компоненты угловой скорости тела не зависят от времени. В задаче о движении тяжелого гиростата они рассмотрены П.В. Харламовым [107] и А.М. Ковалевым [46].

Так как стационарные решения уравнений движения твердого тела отвечают равномерным движениям, которые широко распространены в технике, то в динамике твердого тела было сформировано самостоятельное научное направление исследований, посвященное изучению устойчивости этих решений. Известно, что основы теории устойчивости решений заложил А.М. Ляпунов [64], создавший два подхода в анализе свойств устойчивости. В настоящее время они известны как первый и второй методы Ляпунова. Много результатов по исследованию устойчивости стационарных решений уравнений Эйлера–Пуассона

получили В.В. Румянцев [86], Н.В. Рубановский [83], А.П. Маркеев [71–73], А.Я. Савченко и А.М. Ковалев [52], О.В. Холстова [119] и многие другие.

Исследования по построению точных решений уравнений Эйлера–Пуассона тесно связаны с разработкой новых форм динамических уравнений движения тяжелого твердого тела и в более общем случае гиростата. Известны уравнения в форме В. Гесса [138], Н. Ковалевского [145], А.Д. Билимовича [2], Е.И. Харламовой [112], П.В. Харламова [107], А.И. Докшевича [44], Х.М. Яхьи [124] и других ученых (обзор результатов по получению новых форм уравнений движения в динамике можно найти в работах [19, 35]).

Особый интерес представляют уравнения П.В. Харламова [107], который в редукции уравнений динамики твердого тела и гиростата использовал специальную систему координат (эта система характеризуется тем свойством, что одна координатная ось проведена из неподвижной точки в центр масс тела). Такой выбор системы координат позволил получить достаточно наглядные уравнения движения.

Построение частных решений, как отмечено в книге [19], проходит в несколько этапов. Первый этап относится к концу девятнадцатого и началу двадцатого веков. Решение класса физического маятника рассматривалось Б.К. Млодзеевским [74]. Д.К. Бобылев [3] и В.А. Стеклов [92] нашли решение уравнений Эйлера–Пуассона, которое характеризуется линейными инвариантными соотношениями. В.А. Стеклов [93], Н. Ковалевский [145], Д.Н. Горячев [40], С.А. Чаплыгин [123] построили решения, которые можно отнести к полиномиальным решениям уравнений Эйлера–Пуассона.

Среди частных решений уравнений движения тяжелого твердого тела решения В. Гесса [138] и Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина [41, 122] занимают особое место, так как число произвольных постоянных в них равно четырем. То есть по общности решений они занимают второе место после решений Ж.Л. Лагранжа и С.В. Ковалевской.

Ко второму периоду построения решений относят [19] период: 1940–1970 гг. В 1947 г. итальянский механик Д. Гриоли [135] получил новое решение

уравнений Эйлера–Пуассона, которое описывает регулярную прецессию тела относительно наклонной оси. Это решение характеризуется элементарными функциями времени.

Большой вклад в нахождение решений в замкнутом виде внес А.И. Докшевич [44]. В 1966 году он построил частное решение уравнений Эйлера–Пуассона, которое имеет место при условиях Гесса на распределение масс твердого тела, но не является частным случаем решения В. Гесса. Второе решение А.И. Докшевич получил в 1970 году. Оно характеризуется свойством, которое определено численными значениями моментов инерции тела.

В список частных решений уравнений Эйлера–Пуассона входит и решение Б.И. Коносевича – Е.В. Поздняковича [59].

Третий период в построении решений уравнений динамики твердого тела относится к периоду: 1971 г. – настоящее время. Отличительной чертой этого периода можно считать построение точных решений только для уравнений задачи о движении гиростата [35, 90].

Как показано в монографии [29], успех в построении решений уравнений динамики твердого тела обусловлен решением следующих проблем: созданием новых форм уравнений движения гиростата, развитием метода инвариантных соотношений дифференциальных уравнений динамики и метода годографов в истолковании движения тела. Все указанные проблемы были решены П.В. Харламовым.

Перечислим решения уравнений движения тяжелого гиростата: решение Н.Е. Жуковского [45] (обобщение решения Л. Эйлера); решение Х.М. Яхьи [125] (обобщение решения С.В. Ковалевской); два решения Л.Н. Сретенского [90] (обобщения решений В. Гесса и Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина); пять решений П.В. Харламова (см. обзор [118]) (первое решение является обобщением решения О. Штауде, второе решение – обобщением решения Д.К. Бобылева – В.А. Стеклова, третье – обобщением решения В.А. Стеклова, четвертое – обобщением решения Н. Ковалевского, пятое решение – решение, имеющее место при условиях С.В. Ковалевской); три решения Е.И. Харламовой [118] (два из них

являются обобщениями решений Д. Гриоли и А.И. Докшевича); решение А.И. Докшевича [44]; решение П.В. Харламова – Л.М. Ковалевой [111]; решение П.В. Харламова и Е.И. Харламовой; три решения Е.И. Харламовой и Г.В. Мозалевской [118].

Как уже отмечено выше для завершения исследования (построения полного решения) после получения некоторого решения уравнений движения необходимо изучить свойства движения с помощью одного из геометрических методов (например, метода годографов) [118, 150].

Другой важной проблемой после нахождения решения является анализ интегрального многообразия уравнений движения в окрестности построенных решений. В частности, актуальной становится задача определения условий существования асимптотических решений – решений, которые при неограниченном возрастании времени стремятся к исследуемым решениям.

Следует отметить, что асимптотические решения в механике изучали А. Кнезер [144], П. Боль [126], В.В. Козлов [56, 58], О. Перрон [149] и другие. Они изучали движения механических систем в предположении, что потенциальная энергия является квадратичной формой по обобщенным координатам. В дальнейшем в этом направлении работали С.В. Болотин, В.В. Козлов [4], которые обобщили результаты А. Кнезера.

Е. Меттлер [148] при рассмотрении асимптотически – равномерных движений тяжелого твердого тела применял первый метод А.М. Ляпунова [64].

Систематическое применение метода Ляпунова в изучении асимптотических движений в динамике твердого тела выполнил Г.В. Горр и его ученики.

В работах [8,10,11,69] изучены асимптотически – равномерные движения не только для случая действия силы тяжести, но и для случая действия потенциальных и гироскопических сил. Интересны результаты Г.В. Горра [22], посвященные анализу асимптотических к покою движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, так как эти движения описываются рядами А.М. Ляпунова с постоянными коэффициентами.

Асимптотически – маятниковые движения тяжелого твердого тела изучали А.З. Брюм и Г.В. Горр [7] и Ю.П. Вархалев и Г.В. Горр [9]. Асимптотически – прецессионные движения относительно наклонной оси тяжелого твердого тела рассмотрел А.З. Брюм [6].

В статье [10] изложена общая методика исследования асимптотически – периодических движений гиростата в обобщенной задаче динамики гиростата, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. В статье [24] она применена в задаче изучения условий существования асимптотически – прецессионных движений гиростата.

А.П. Маркеев [71–73] получил значительные результаты в проблеме исследования асимптотических решений уравнений Эйлера–Пуассона, так как он в своих работах использовал не только первый метод А.М. Ляпунова, но и методы, основанные на рассмотрении нелинейных уравнений.

При анализе литературы по теме данной работы следует отметить, что обобщение уравнений Эйлера–Пуассона на случай, когда рассматривается не тяжелое твердое тело, а гиростат, дает возможность изучать новую механическую систему. Понятие «гиростат» введено английскими учеными [134] и достаточно полно отражено в книге Т. Леви–Чивиты и У. Амальди [61]. Под гиростатом понимается механическая система связанных твердых тел, распределение масс которых не изменяется в течение времени. Простейшим примером гиростата может служить система тел, состоящая из тела–носителя произвольной формы и симметричного ротора, закрепленного на теле–носителе с помощью оси, относительно которой происходит вращение носимого тела.

П.В. Харламов [107, 108] предложил более общую конструкцию, чем другие ученые. Например, для случая одного носимого тела достаточно считать эту ось главной центральной осью, а моменты инерции относительно других главных осей равными.

Другим обобщением классических уравнений Эйлера–Пуассона служат уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил класса Кирхгофа–Пуассона. Эти уравнения описывают движение заряженного

и намагниченного гиростата в магнитном, электрическом и ньютоновском полях сил. В статьях Х.М. Яхья [156–158] показано, что невырожденным линейным преобразованием переменных они могут быть редуцированы к системе дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Следовательно, данные задачи должны рассматриваться в определенной связи. То есть, например, решения, построенные ранее в одной задаче, не могут считаться новыми для другой задачи.

В задаче о движении твердого тела в жидкости значительные результаты получены Г. Кирхгофом [142], В. Томсоном и П. Тетом [154], А. Клебшем [128, 129], В.А. Стекловым [91], А.М. Ляпуновым [62], С.А. Чаплыгиным [120, 121], П.В. Харламовым [103], В.Н. Рубановским [84, 85].

Г. Кирхгоф [142] вывел уравнения движения для простейшего случая $s = 0$, $\lambda = 0$, где s , λ – постоянные векторы, значения которых будут описаны ниже, а также указал три первых интеграла этих уравнений.

А. Клебш [128, 129] преобразовал уравнения Кирхгофа к более удобной форме и указал два новых решения.

В.А. Стеклов [91] и А.М. Ляпунов [62] при $s = 0$, $\lambda = 0$ получили новые дополнительные интегралы.

С.А. Чаплыгин [120, 121] изучал решения уравнений задачи о движении твердого тела в случае $\lambda = 0$, $s \neq 0$. Он построил новые решения, которые характеризуются одним, двумя и тремя линейными инвариантными соотношениями.

Работы П.В. Харламова [98–100, 103] относятся к общему случаю: $\lambda \neq 0$, $s = 0$. Он обобщил работы Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова, исследовал условия существования одного, двух и трех инвариантных соотношений уравнений движения.

Результаты П.В. Харламова обобщил В.Н. Рубановский [84, 85].

Дифференциальные уравнения класса Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил рассматривали Д. Гриоли [42, 136, 137], Х.М. Яхья [125, 157, 158], Г.В. Горр и его

ученики [21–24]. Так как П.В. Харламов в работах [99–101] получил только условия существования рассматриваемых линейных инвариантных соотношений, то интегрирование уравнений движения требовалось провести дополнительно. Причем очевидно, эта задача более сложная, чем задача нахождения условий существования инвариантных соотношений. В работах Г.В. Горра и Е.К. Узбек [38], Е.К. Узбек и Е.А. Данилейко [95] указано интегрирование уравнений Кирхгофа–Пуассона в случае одного инвариантного соотношения. В работе Г.В. Горра и Е.К. Узбек [37] выполнено интегрирование уравнений Пуассона в случае трех инвариантных соотношений. В работе С.В. Скрыпник [89] рассмотрена задача интегрирования этих уравнений для варианта двух инвариантных соотношений.

Выше указаны статьи, в которых используется метод Якоби в интегрировании приведенных уравнений, то есть уравнений, которые получены в результате преобразования исходных уравнений на заданных инвариантных соотношениях. Сам метод инвариантных соотношений может быть использован в двух вариантах. Первый вариант основан на методе инвариантных соотношений, предложенном Т. Леви–Чивитой [61]. Второй вариант – на методе П.В. Харламова [109]. Особенности этих методов описаны в книгах Г.В. Горра и А.В. Мазнева [30] и И.Н. Гашененко, Г.В. Горра и А.М. Ковалева [19]. В последней книге показаны основные достижения Донецкой школы по динамике твердого тела, организованной П.В. Харламовым.

Отметим основные направления, которые оформились в результате работы этой школы.

Е.И. Харламова [115–117] получила новые решения уравнений движения гиростата и указала интегро–дифференциальное уравнение в этой задаче.

А.Я. Савченко [88] развил динамику систем связанных твердых тел, предложил подход в изучении устойчивости таких систем.

А.М. Ковалев дал наглядную картину движения гироскопа Гесса в решениях В. Гесса [47] и Л.Н. Сретенского [48, 49], применил метод инвариантных соотношений в теории управления механических систем,

разработал теорию вложения инвариантных многообразий в интегральное многообразие [51].

М.П. Харламов [96, 97] применил методы топологического анализа в исследовании решений уравнений динамики твердого тела, получил компактную форму уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой.

Г.В. Горр [21–24] получил новые классы движений гиростата, в том числе и асимптотически – маятниковые, асимптотически – прецессионные движения. Он (совместно с Е.К. Щетининой [39]) разработал теорию интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях, а также указал один подход в кинематическом истолковании движения тела с неподвижной точкой и получил новую форму для окружной скорости вектора угловой скорости в неподвижном пространстве.

А.А. Илюхин (см. обзор [26]) разработал метод исследования пространственных форм упругого стержня, основанный на аналогии Кирхгофа.

Г.В. Горр и А.А. Илюхин [25] исследовали существование инвариантного соотношения, которое характеризует постоянство модуля момента количества движения и совместно с Е.И. Харламовой [27] изучили особые решения уравнений Эйлера–Пуассона.

И.Н. Гашененко [16–18] исследовал геометрические свойства решений уравнений Эйлера–Пуассона.

В последние годы интенсивно изучается задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Результаты, полученные в этой задаче, опубликованы в работах Л.М. Ковалевой и А.Е. Позняковича [53], О. С. Волковой [13], И.Н. Гашененко и О.С. Волковой [14, 15], Г.В. Горра и А.В. Мазнева [31, 32], А.В. Мазнева [66, 67].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию асимптотических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. В качестве методов исследования приняты первый метод Ляпунова [64], теория параметрического резонанса и методика исследования асимптотически – периодических движений [10].

Предельными движениями являются равномерные движения гиростата относительно наклонной оси, регулярные прецессии, полурегулярные прецессии и прецессии общего вида сферического по распределению масс гиростата. Условия существования таких движений изложены в книге Г.В. Горра, А.В. Мазнева и Е.К. Щетининой [34]. В диссертации эти условия записаны в более компактном виде, а соответствующие предельные движения предполагаются периодическими.

РАЗДЕЛ II

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

В данном разделе описана постановка задачи о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Указаны основные методы интегрирования уравнений движения (метод Якоби, метод инвариантных соотношений, первый метод Ляпунова). Приведены результаты по построению решений, которые отвечают прецессионным движениям гиростата относительно вертикали. Рассмотрена методика исследования асимптотически – периодических движений гиростата

2.1. Постановка задачи

2.1.1. Содержательная постановка задачи

Исследование движения заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой O в силовом поле, которое является суперпозицией электрического, магнитного и ньютоновского полей.

Под гиростатом понимается система связанных твердых тел $S_0, S_1, \dots, S_n$, которая характеризуется следующими свойствами: тело S_0 закреплено в точке O и имеет произвольное распределение масс; тела S_i ($i = \overline{1, n}$) закреплены в теле S_0 с помощью осей l_i и вращаются относительно них либо с постоянной скоростью, либо по инерции; центр масс тел S_i принадлежит осям l_i и ось l_i является главной центральной осью тела S_i , а моменты относительно двух других главных центральных осей равны [107, 108].

В простейшем случае гиростат несет на себе симметричные роторы, так как именно этот случай используется на практике.

2.1.2. Концептуальная постановка задачи

В процессе рассмотрения содержательной постановки задачи принимаем следующие допущения: размеры гиростата малы по сравнению с расстоянием от неподвижной точки до точек ньютоновского и кулоновского притяжений. Носимые тела не намагничены и не заряжены, а токи Фуко не возникают. Движение гиростата будем описывать с помощью классических законов механики. При этом считаем, что в результате движения электронов в магнитном поле возникает сила Лоренца.

2.1.3. Математическая постановка задачи

С телом–носителем S_0 в точке O свяжем подвижную систему координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$. В неподвижном пространстве в точке O введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Вектор $\mathbf{i}_3$ будем направлять по векторам $\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_2}$, где O_1, O_2 – центры ньютоновского и кулоновского притяжений, лежащие на одной прямой. Введем вектор $\overrightarrow{OM}$, где точка M принадлежит гиростату. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = x\mathfrak{e}_1 + y\mathfrak{e}_2 + z\mathfrak{e}_3. \quad (2.1)$$

Угловую скорость тела–носителя обозначим через $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathfrak{e}_1 + \omega_2\mathfrak{e}_2 + \omega_3\mathfrak{e}_3. \quad (2.2)$$

В силу формулы распределения скоростей, линейная скорость равна $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Пусть единичные векторы осей l_i равны $\mathfrak{e}_1^{(i)}$, а скорости вращения тел S_i равны $\dot{\chi}_i$ ($i = \overline{1, n}$), то есть абсолютные угловые скорости тел S_i определяются по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\chi}_i \mathfrak{e}_1^{(i)}, \quad (2.3)$$

где $\dot{\chi}_i = \frac{dx}{dt}$ – скорость вращения тела S_i .

Обозначим через $A^{(0)}$ тензор инерции тела S_0 относительно точки O . Его компоненты таковы

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(0)} &= \int_V \rho (y^2 + z^2) dV, & A_{22}^{(0)} &= \int_V \rho (x^2 + z^2) dV, \\
A_{33}^{(0)} &= \int_V \rho (x^2 + y^2) dV, & A_{12}^{(0)} &= -\int_V \rho xy dV, \\
A_{13}^{(0)} &= -\int_V \rho xz dV, & A_{23}^{(0)} &= -\int_V \rho yz dV,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где ρ – плотность тела S_0 . Величины (2.4) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
A_{ii}^{(0)} &> 0 \quad (i = \overline{1,3}), \\
A_{11}^{(0)} + A_{22}^{(0)} &> A_{33}^{(0)}, & A_{22}^{(0)} + A_{33}^{(0)} &> A_{11}^{(0)}, & A_{11}^{(0)} + A_{33}^{(0)} &> A_{22}^{(0)}, \\
|A_{12}^{(0)}| &\leq \frac{1}{2} A_{33}^{(0)}, & |A_{13}^{(0)}| &\leq \frac{1}{2} A_{22}^{(0)}, & |A_{23}^{(0)}| &\leq \frac{1}{2} A_{11}^{(0)},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

в которых учтены неравенства треугольника на осевые моменты инерции. В (2.5) случай, когда тело S_0 представляет собой пластину исключен. Интегрирование в (2.4) ведется по объему, занимаемому телом S_0 .

Момент количества движения тела S_0 равен

$$\mathbf{x}_0 = A^{(0)} \boldsymbol{\omega}. \tag{2.6}$$

Обозначим $\mathbf{x}_i$ – момент количества движения тела S_i относительно точки O . Пусть $\mathbf{h}_i$ – вектор, идущий из неподвижной точки O в центр масс тела S_i , D_i – моменты инерции тела S_i относительно оси вращения, B_i – моменты инерции тела S_i относительно ортогональных к l_i осей. Тогда

$$\mathbf{x}_i = m_i \mathbf{h}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i) + D_i (\boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\varphi}) \mathfrak{z}_1^{(i)} + B_i (\omega_2 \mathfrak{z}_2 + \omega_3 \mathfrak{z}_3). \tag{2.7}$$

Общий момент количества движения гиростата равен величине

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i. \tag{2.8}$$

В (2.7) m_i – масса тела S_i , ω_i – компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (2.2). При вычислении (2.7) была учтена векторная величина (2.3).

Запишем на основании (2.6) и (2.7) общий момент количества движения гиростата (2.8) в предположении, что тела S_i вращаются по инерции (в точках закрепления тел S_i действуют только реакции связи). Как показано

П.В. Харламовым [108], в этом случае значения $p_i = \omega \cdot \mathfrak{z}_1^{(i)} + \mathfrak{z}(t)$ не изменяются с течением времени, а момент количества движения гиростата (2.8) имеет вид

$$\mathbf{x} = A\omega + \lambda, \quad (2.9)$$

где тензор A имеет компоненты

$$A_{11} = A_{11}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \left[B_i \left(l_2^{(i)2} + l_3^{(i)2} \right) + m_i \left(h_{i2}^2 + h_{i3}^2 \right) \right], \quad (2.10)$$

$$A_{23} = A_{23}^{(0)} - \sum_{i=1}^n \left(B_i l_2^{(i)} l_3^{(i)} - m_i h_{i2} h_{i3} \right) \quad (123).$$

В формулах (2.10) указана часть значений A_{ij} , остальные значения получим из (2.10) циклической перестановкой цифр 1, 2, 3, на что указывает символ (123), оставляя B_i и m_i без изменения.

Отметим, что h_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, 3}$) и $l_j^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, 3}$) – компоненты векторов

$$\mathbf{h}_i = h_{i1}\mathfrak{z}_1 + h_{i2}\mathfrak{z}_2 + h_{i3}\mathfrak{z}_3, \quad \mathfrak{z}_1^{(i)} = l_1^{(i)}\mathfrak{z}_1 + l_2^{(i)}\mathfrak{z}_2 + l_3^{(i)}\mathfrak{z}_3.$$

Гиростатический момент в формуле (2.9) таков

$$\lambda = \sum_{i=1}^n D_i p_i \mathfrak{z}_1^{(i)}, \quad (2.11)$$

то есть вектор λ не изменяется с течением времени. Далее будем считать, что он может быть записан в виде

$$\lambda = \lambda_1 \mathfrak{z}_1 + \lambda_2 \mathfrak{z}_2 + \lambda_3 \mathfrak{z}_3. \quad (2.12)$$

Для составления уравнений движения необходимо найти выражения для действующих на гиростат сил. Следуя работам [31, 35, 156], эти уравнения запишем в следующей форме

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega. \quad (2.14)$$

В уравнениях (2.13) и (2.14) введены обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела–носителя; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента (2.12); $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор оси OO_1 , направленный из

точки O в точку O_1 ; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка.

Отметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (2.13) определяет силы инерции, второе слагаемое характеризует момент сил Лоренца (гироскопических сил), третье слагаемое – момент потенциальных сил (электрических, магнитных, ньютоновских сил).

Уравнения (2.13), (2.14) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k, \\ (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2E, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где k и E – произвольные постоянные.

Запишем (2.13)–(2.15) в трех частных случаях. Первый случай $B = 0$, $C = 0$ (задача о движении тяжелого гиростата):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k, \quad (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) = 2E. \quad (2.17)$$

Второй случай $B = 0$ (задача о движении гиростата под действием центральных ньютоновских сил):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{s} - \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k, \quad (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2E. \quad (2.19)$$

Третий случай $C = 0$ (задача о движении гиростата под действием силы тяжести и лоренцевых сил):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{s} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k, \quad (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) = 2E. \quad (2.21)$$

Запишем уравнения (2.13), (2.14) и интегралы (2.15) в переменных – компонентах вектора $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} = (x_1, x_2, x_3)$ и компонентах вектора $\mathbf{v}$. Пусть $a = A^{-1}$ – гирационный тензор, тогда

$$\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}, \quad a = (a_{ij}). \quad (2.22)$$

В силу (2.22), уравнения (2.13) и (2.14) запишутся так

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{ax} + \mathbf{ax} \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad (2.23)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{ax}. \quad (2.24)$$

Следовательно, интегралы уравнений (2.23), (2.24) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= k, \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{ax}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.2. Аналогия задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении твердого тела в жидкости

В разделе 1 отмечена тесная связь рассматриваемой задачи и задачи о движении тела в жидкости. Следуя работам В.А. Стеклова [91], А.М. Ляпунова [62], С.А. Чаплыгина [120, 121], П.В. Харламова [103], обозначим через T кинетическую энергию системы «тело + жидкость»:

$$2T = (a^* \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) + (b\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) + 2(\mathbf{P} \cdot c\mathbf{R}), \quad (2.26)$$

где a^* , b – положительно определенные матрицы третьего порядка, матрица c имеет тоже третий порядок, но может быть и несимметричной. В формуле (2.26) вектор $\mathbf{R}$ называется импульсной силой, вектор $\mathbf{P}$ – импульсной парой. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}^*$ угловую скорость тела, $\mathbf{u}$ – скорость начальной точки. Тогда [103, 157]

$$\boldsymbol{\omega}^* = \text{grad}_{\mathbf{P}} T = a^* \mathbf{P} + c\mathbf{R}, \quad \mathbf{u} = \text{grad}_{\mathbf{R}} T = b\mathbf{R} + c^T \cdot \mathbf{P}, \quad (2.27)$$

где c^T – транспонированная матрица. Уравнения движения тела в жидкости в векторной форме имеют второй порядок, то есть

$$\dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{P} + \boldsymbol{\lambda}^*) \times \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R} - \mathbf{u} \times \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^*, \quad (2.28)$$

где $\boldsymbol{\omega}^*$, $\mathbf{u}$ – определяются формулами (2.27), $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}$ – постоянные векторы.

Уравнения (2.28) допускают интегралы

$$T - 2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}) = 2E, \quad (\mathbf{P} + \boldsymbol{\lambda}^*) \cdot \mathbf{R} = k, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = R_0^2. \quad (2.29)$$

Здесь E , k , R_0 – произвольные постоянные.

Выполним в уравнениях (2.28) замену параметров и переменных

$$\begin{aligned} a^* &= A^{-1}, \quad \lambda^* = \lambda, \quad \mu = \frac{S}{R_0}, \quad \omega^* = \omega, \quad R = R_0 v, \\ p &= A\omega - R_0 A c v. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тогда эти уравнения преобразуются к уравнениям (2.13), (2.14), в которых

$$B = R_0 (c^T A + A c - \text{Sp}(A c) \delta), \quad C = R_0^2 (b - c^T A c), \quad (2.31)$$

где δ – единичная матрица, $\text{Sp}(A c)$ – след матрицы $A c$.

Данную аналогию установил Х.М. Яхья [156–157]. Частные аналогии получили В.А. Стеклов [91] и П.В. Харламов [103].

Очевидно, что из (2.31) можно найти матрицы b и c через матрицы B , C . Из равенств (2.30) можно найти обратное преобразование, то есть выразить v и ω через векторы P и R_0 . Нетрудно убедиться в том, что интегралы (2.29) при преобразовании (2.30) переходят в интегралы (2.15).

Данный результат позволяет подчеркнуть не только важность результатов в рассмотренных задачах, но и возможность переносить результаты из одной задачи в другую. То есть, рассматривая уравнения (2.13)–(2.15), следует иметь ввиду существование у них аналогов первых интегралов уравнений задачи о движении тела в жидкости, решений в замкнутом виде и прочее.

2.3. Интегрирование уравнений движения гиростата в квадратурах

Запишем уравнения (2.23), (2.24) в скалярном виде, принимая в качестве подвижной системы главную систему координат, в которой $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_3 - a_2)x_2x_3 + \lambda_2 a_3 x_3 - \lambda_3 a_2 x_2 + a_2 x_2 (Bv)_3 - a_3 x_3 (Bv)_2 + \\ &\quad + v_2 (Cv)_3 - v_3 (Cv)_2 + s_2 v_3 - s_3 v_2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= (a_1 - a_3)x_3x_1 + \lambda_3 a_1 x_1 - \lambda_1 a_3 x_3 + a_3 x_3 (Bv)_1 - a_1 x_1 (Bv)_3 + \\ &\quad + v_3 (Cv)_1 - v_1 (Cv)_3 + s_3 v_1 - s_1 v_3, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= (a_2 - a_1)x_1x_2 + \lambda_1 a_2 x_2 - \lambda_2 a_1 x_1 + a_1 x_1 (Bv)_2 - a_2 x_2 (Bv)_1 + \\ &\quad + v_1 (Cv)_2 - v_2 (Cv)_1 + s_1 v_2 - s_2 v_1, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = a_3 x_3 \mathbf{v}_2 - a_2 x_2 \mathbf{v}_3, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = a_1 x_1 \mathbf{v}_3 - a_3 x_3 \mathbf{v}_1, \quad \dot{\mathbf{v}}_3 = a_2 x_2 \mathbf{v}_1 - a_1 x_1 \mathbf{v}_2, \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} (B\mathbf{v})_1 &= B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + B_{13}v_3, & (B\mathbf{v})_2 &= B_{12}v_1 + B_{22}v_2 + B_{23}v_3, \\ (B\mathbf{v})_3 &= B_{13}v_1 + B_{23}v_2 + B_{33}v_3, \\ (C\mathbf{v})_1 &= C_{11}v_1 + C_{12}v_2 + C_{13}v_3, & (C\mathbf{v})_2 &= C_{12}v_1 + C_{22}v_2 + C_{23}v_3, \\ (C\mathbf{v})_3 &= C_{13}v_1 + C_{23}v_2 + C_{33}v_3. \end{aligned}$$

Уравнения (2.32)–(2.35) характеризуются свойством, что переменная, относительно которой задана производная не входит в правую часть этого уравнения. То есть уравнения динамики гиростата могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_6), \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (2.36)$$

Теория Якоби интегрирования уравнений (2.36) в квадратурах относится к случаю, когда в дополнение к трем первым интегралам (2.35) существует еще один первый интеграл. То есть уравнения (2.36) допускают четыре первых интеграла

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_6) = c_k, \quad (k = \overline{1, 4}) \quad (2.37)$$

где c_k – произвольные постоянные. Если выполнить замену переменных

$$x_k = g_k(y_1, \dots, y_6) \quad (k = \overline{1, 6}), \quad D = \left\| \frac{\partial g_k(y_1, \dots, y_6)}{\partial y_i} \right\| \neq 0, \quad (2.38)$$

которая существует в некоторой области $E_6 \subset \mathbb{R}_6$, то для обратной к (2.37) замены

$$y_k = G_k(x_1, \dots, x_6) \quad (2.39)$$

выполняется условие невырожденности

$$\left\| \frac{\partial G_k}{\partial x_j} \right\|_{(k=\overline{1, 6}, j=\overline{1, 6})} \neq 0. \quad (2.40)$$

С помощью замены (2.38) уравнения (2.36) запишем так

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, \dots, y_6) \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (2.41)$$

К. Якоби показал, что для уравнений (2.36), (2.41) при выполнении условий (2.38), (2.40) имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial X_i(x_1, \dots, x_6)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{1}{D(y_1, \dots, y_6)} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial D(y_1, \dots, y_6) Y_j(y_1, \dots, y_6)}{\partial y_j} \right\rangle. \quad (2.42)$$

В формуле (2.42) использована угловая скобка, которая означает, что в правую часть необходимо подставить функции (2.39).

Утверждение Якоби состоит в следующем: если система дифференциальных уравнений (2.36) допускает интегралы (2.37), то эта система допускает еще один первый интеграл и её интегрирование сводится к квадратурам.

Основные этапы доказательства этого утверждения состоят в следующем. Вначале выполняется замена переменных

$$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_6), \quad (k = \overline{1, 4}) \quad y_5 = x_5, \quad y_6 = x_6,$$

затем записывается система уравнений (2.41) с учетом (2.37)

$$\begin{aligned} y_k &= c_k \quad (k = \overline{1, 4}), \\ \dot{y}_5 &= Y_5(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6), \quad \dot{y}_6 = Y_6(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Поскольку в силу условия из (2.36) левая часть равенства (2.42) равна нулю, то правая часть этого неравенства равна нулю

$$\begin{aligned} & \frac{\partial D(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6) Y_5(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6)}{\partial y_5} + \\ & + \frac{\partial D(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6) Y_6(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Условие (2.44) показывает, что интегрирующим множителем последних уравнений системы (2.43) может служить функция $D(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6)$. Это означает, что указанная выше система уравнений из (2.43) допускает дополнительный (пятый) интеграл, который не зависит от времени

$$\varphi_5(c_1, \dots, c_4, y_5, y_6) = c_5. \quad (2.45)$$

Предполагается, что из (2.45) можно определить одну из переменных, например $y_6 = y_6(c_1, \dots, c_5)$. Подставив эту функцию в предпоследнее уравнение системы (2.43), приходим к уравнению, из которого путем обращения интеграла

$$\int_{y_5^{(0)}}^{y_5} \frac{dy_5}{\Phi(c_1, \dots, c_5, y_5)} = t$$

находим $y_5 = y_5(c_1, \dots, c_6, t)$, где $c_6 = y_5^{(0)}$. Подстановка этой функции в выражение $y_6 = y_6(c_1, \dots, c_5, y_5)$ позволяет определить в силу (2.43) все переменные y_i ($i = \overline{1, 6}$) в зависимости от времени. Функции $x_k(t)$ найдем из (2.38). То есть задача интегрирования уравнений (2.36) при наличии первых интегралов (2.37) решена.

2.4. Метод инвариантных соотношений построения решений уравнений динамики гиростата

Наиболее эффективными методами инвариантных соотношений являются методы Т. Леви–Чивиты [61] и П.В. Харламова [109].

Вначале рассмотрим подход Т. Леви–Чивиты [61]. Он ввел следующее определение инвариантного соотношения: соотношение

$$\varphi(x_1, \dots, x_6) = 0, \quad \text{grad } \varphi(x_1, \dots, x_6) \neq 0 \quad (2.46)$$

уравнений (2.36) называется инвариантным соотношением, если из условия

$$\varphi(x_1(t_0), \dots, x_6(t_0)) = 0 \quad (2.47)$$

следует для всех $t > t_0$ равенство

$$\varphi(x_1(t), \dots, x_6(t)) = 0. \quad (2.48)$$

В (2.47) t_0 – начальное значение переменной t . Т. Леви–Чивита показал, что функция $\varphi(x_1, \dots, x_6)$ из (2.46) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dt} = L_x \varphi(x_1, \dots, x_6) = \varphi(x_1, \dots, x_6) \lambda(x_1, \dots, x_6), \quad (2.49)$$

где

$$L_x \varphi(x_1, \dots, x_6) = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_6)}{\partial x_j} X_j(x_1, \dots, x_6).$$

Теория Т. Леви–Чивиты распространяется на общий случай, т.е. на случай, когда число переменных равно n .

Уравнение (2.49) получено из равенства (2.48) в предположении аналитичности производной (2.49) от функции $\varphi(x_1, \dots, x_6)$.

С помощью метода Т. Леви–Чивиты получены многие решения уравнений динамики (см. работы С.А. Чаплыгина [120,121], П.В. Харламова [98], В.Н. Рубановского [82,84]).

Вторым подходом в развитии метода инвариантных соотношений является подход П.В. Харламова [109]. Он ввел следующее определение: соотношение

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.50)$$

называется инвариантным соотношением по отношению к системе

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.51)$$

если не пусто многообразие σ :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ L_x \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} X_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ L_x \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ L_x \varphi_k(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_{k-1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

Важность подхода П.В. Харламова отмечена в книгах [19,35]. Для нахождения многообразия σ дифференциальных уравнений (2.51) необходимо исследовать систему равенств (2.52) и определить условия зависимости членов последовательности (2.52). Эти условия и будут условиями существования инвариантного соотношения (2.50) по отношению к системе (2.51).

Для того чтобы отметить особенности применения методов Т. Леви–Чивиты и П.В. Харламова в динамике твердого тела достаточно воспользоваться результатом книги [19]. В ней отмечено, что в динамике тяжелого твердого тела получено два решения, характеризующихся линейным инвариантным соотношением. Это решение В. Гесса [138] и Д. Гриоли [135]. Как показано П.В. Харламовым [101], решение Д. Гриоли невозможно получить методом

Т. Леви–Чивиты. Поэтому он для получения решения Д. Гриоли применяет метод (2.52).

На основе метода инвариантных соотношений, предложенного П.В. Харламовым, получено большое количество частных решений в обобщенных задачах динамики [25,31,35].

2.5. Первый метод Ляпунова в построении асимптотических решений уравнений движения гиростата

В данной работе применяется первый метод Ляпунова в исследовании асимптотически–равномерных и асимптотически – прецессионных движений гиростата. Поэтому в краткой форме укажем основные результаты этого метода.

Пусть система (2.51) допускает частное решение

$$x_i^{(0)}(t) = f_i(t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.53)$$

Это решение можно определить либо в результате применения метода инвариантных соотношений Т. Леви–Чивиты [61], либо – П.В. Харламова [109].

Как отмечено в разделе 1, исследование окрестности решения (2.53) в интегральном многообразии системы (2.51) представляется актуальным, так как позволяет рассмотреть свойства этого многообразия. Поэтому для анализа поведения решений уравнений (2.51) в окрестности (2.53) положим

$$x_i = f_i(t) + y_i. \quad (2.54)$$

Здесь y_i характеризуют возмущения. Внесем (2.54) в уравнение (2.51) и учтем, что $f_i(t)$ является частным решением системы (2.51). Тогда

$$\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad (2.55)$$

где $Y_i(t, 0, \dots, 0) = 0$. Следуя [64], предположим, что $Y_i(t, y_1, \dots, y_n)$ – аналитические функции переменных $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки $y_1 = \dots = y_n = 0$.

Тогда уравнения (2.55) в матричном виде таковы

$$\dot{y} = p(t)y + P(t, y). \quad (2.56)$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $P(t, y) = (P_1, \dots, P_n)^T$, $p(t) = (p_{ij}(t))$, причем

$$P_j(t, y) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = m \\ m=2}}^{\infty} K_j^{(m_1, \dots, m_n)}(t) y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}. \quad (2.57)$$

Функции $p_{ij}(t)$ и $K_j^{(m_1, \dots, m_n)}(t)$ являются непрерывными ограниченными функциями t для $t \geq t_0$, $m_1, \dots, m_n$ – натуральные числа или нули.

Из (2.56) можно записать уравнение в вариациях (линейное уравнение)

$$\dot{y} = p(t)y, \quad (2.58)$$

так как порядок m функций $P_j(t, y)$ из (2.56) относительно переменных $y_1, \dots, y_n$ удовлетворяет условию $m \geq 2$.

Сформулируем теорему А.М. Ляпунова [64].

Теорема. Если система первого приближения (2.58) является правильной системой, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – положительные характеристичные числа этой системы, то нелинейная система (2.56) допускает решение в виде рядов

$$y_j = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = m \\ m=1}}^{\infty} L_j^{(m_1, \dots, m_k)}(t) \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k} \exp\left(-\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i\right) t, \quad (2.59)$$

где $L_j^{(m_1, \dots, m_k)}(t)$ – непрерывные функции t , характеристичные числа которых не менее нуля; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – малые произвольные постоянные; $m_1, m_2, \dots, m_k$ – натуральные числа или нули; ряды (2.59) сходятся абсолютно и при $t \rightarrow \infty$, $y_j \rightarrow 0$.

Характеристичным числом функции $f(t) \in C$ при $t \geq t_0$ называется число

$$\kappa(f(t)) = -\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(t)|}{t}, \quad (2.60)$$

а характеристичным числом вектора $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ называется минимальное из характеристичных чисел компонент этого вектора, вычисленных по формуле (2.60).

Под характеристичным числом системы (2.58) понимаются характеристичные числа нормальной системы решений. Если через $Y(t)$ обозначить фундаментальную матрицу уравнения (2.58), то эта фундаментальная

матрица представляет собой нормальную систему решений, если сумма характеристических чисел её решений достигает максимального значения. Поскольку любое решение уравнения (2.58) имеет конечное характеристическое число (решение отлично от тривиального $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$) [64], то на основании любой фундаментальной матрицы $Y(t)$ можно построить нормальную систему решений.

Правильной системой дифференциальных уравнений (2.58) называется система, для которой

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -\kappa \left[\exp \left(- \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n p_{ss}(t) dt \right) \right],$$

где $\sum_{s=1}^n p_{ss}(t)$ – след матрицы $p(t)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – характеристические числа системы (2.58) (среди которых могут быть и нулевые характеристические числа). Системы с постоянными и периодическими коэффициентами являются правильными.

Для нахождения характеристических чисел систем дифференциальных уравнений динамики гиростата в работе [24] используется результат А. Пуанкаре [81], который относится к случаю периодической системы ($p(t + \omega) = p(t)$).

Теорема. Если система (2.51) допускает p аналитических и однозначных интегралов $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$, тогда либо $p + 1$ характеристических чисел линейной системы равны нулю, либо все определители, содержащиеся в матрице $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)$ ($i = \overline{1, p}, k = \overline{1, n}$) равны нулю во всех точках порождающего периодического решения $f_s(t)$ ($s = \overline{1, n}$).

На основании данной теоремы в статье [24] показано, что для уравнений класса Кирхгофа–Пуассона дифференциальные уравнения в вариациях, полученные при анализе периодических решений, имеют четыре нулевых характеристических числа.

Остановимся на методе построения рядов (2.59). А.М. Ляпунов [64] для системы (2.56) ищет решение в виде ряда

$$y = y^{(1)} + y^{(2)} + \dots + y^{(m)} + \dots \quad (2.61)$$

и для членов ряда (2.61) получает систему

$$\dot{y}^{(1)} = p(t)y^{(1)}, \dots, \dot{y}^{(m)} = p(t)y^{(m)} + R^{(m)}(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m-1)}) \dots \quad (2.62)$$

Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (2.58), тогда для первого приближения из (2.62) имеем

$$y^{(1)}(t) = Y(t)\alpha, \quad (2.63)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ – вектор произвольных начальных данных.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – положительные характеристические числа системы независимых решений из $Y(t)$. Тогда в качестве решения системы первого приближения (2.63) А.М. Ляпунов принимает решение

$$y^{(1)}(t) = Y(t)(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)^T, \quad (2.64)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – произвольные постоянные.

Для решения уравнения на вектор–функцию $y^m(t)$ из (2.62) А.М. Ляпунов [64] получает формулу

$$y^{(m)}(t) = Y(t) \left[\int Y^{-1}(t) R^{(m)}(t) dt + C \right]. \quad (2.65)$$

Каждый из интегралов в (2.65), в котором подынтегральная функция имеет положительное характеристическое число, берется от $+\infty$ до t и полагается, что $C = 0$. Если же подынтегральная функция в (2.65) имеет неположительное характеристическое число, то интегрирование ведется от t_0 до t , а вектор C принимается фиксированным вектором с компонентами, не зависящими от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. А.М. Ляпунов доказал сходимость (2.61).

В [24] показано, что для гамильтоновой системы шестого порядка ряды А.М. Ляпунова задаются формулой

$$y(t) = Y(t)(0, \dots, 0, \alpha_6)^T + \sum_{m=2}^{\infty} Y(t) \int_{-\infty}^t Y^{-1}(t) R^{(m)}(t) dt, \quad (2.66)$$

где α_6 – малая произвольная постоянная. То есть в случае (2.66) имеем однопараметрическое семейство асимптотически – периодических решений.

2.6. Схема исследования асимптотически – периодических решений для уравнений Кирхгофа–Пуассона

Запишем уравнения Кирхгофа–Пуассона

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B \cdot v + s \times v + v \times C \cdot v, \quad (2.67)$$

$$\dot{v} = v \times \omega. \quad (2.68)$$

Интегралы этих уравнений выпишем не изменяя обозначений

$$\begin{aligned} (A \cdot \omega \cdot \omega) - 2(s \cdot v) + (C \cdot v \cdot v) &= 2E, \quad v \cdot v = 1, \\ (A \cdot \omega + \lambda) \cdot v - \frac{1}{2}(B \cdot v \cdot v) &= k. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Пусть известно периодическое решение уравнений (2.67), (2.68)

$$\omega = \omega^*(t), \quad v = v^*(t) \quad (2.70)$$

с периодом τ . Рассмотрим уравнения в возмущениях для решения (2.70). Положим в (2.67) и (2.68)

$$\omega = \omega^*(t) + \Omega, \quad v = v^*(t) + \gamma. \quad (2.71)$$

Тогда [24]

$$\begin{aligned} A \cdot \dot{\Omega} &= (A \cdot \omega^* + \lambda) \times \Omega - \omega^* \times A \cdot \Omega - B \cdot v^* \times \Omega + \omega^* \times B \cdot \gamma + \\ &+ s \times \gamma + v^* \times C \cdot \gamma - C \cdot v^* \times \gamma + A \cdot \Omega \times \Omega + \Omega \times B \cdot \gamma + \gamma \times C \cdot \gamma, \\ \dot{\gamma} &= v^* \times \Omega - \omega^* \times \gamma + \gamma \times \Omega. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Линейные уравнения, вытекающие из системы (2.72), допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} A \cdot \omega^* \cdot \Omega + (C \cdot v^* - s) \cdot \gamma &= c_1, \quad v^* \cdot \gamma = c_2, \\ A \cdot v^* \cdot \Omega + (A \cdot \omega^* - B \cdot v^* + \lambda) \cdot \gamma &= c_3, \end{aligned} \quad (2.73)$$

которые порождены первыми интегралами из (2.69).

Линейную систему из (2.72) запишем в виде

$$\dot{y} = p(t)y, \quad (2.74)$$

где $y = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, $p(t)$ – матрица с периодическими коэффициентами (периода τ). В силу сложности задачи выписывать ее элементы нецелесообразно. Выпишем только вид интегралов (2.73), принимая в качестве подвижной системы координат гиростата главную систему координат. Введем обозначения

$$q_1 = (A_1\omega_1^*, A_2\omega_2^*, A_3\omega_3^*, C_{11}\nu_1^* + C_{12}\nu_2^* + C_{13}\nu_3^* - s_1, \\ C_{12}\nu_1^* + C_{22}\nu_2^* + C_{23}\nu_3^* - s_2, C_{13}\nu_1^* + C_{23}\nu_2^* + C_{33}\nu_3^* - s_3), \\ q_2 = (0, 0, 0, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*), \quad (2.75)$$

$$q_3 = (A_1\nu_1^*, A_2\nu_2^*, A_3\nu_3^*, A_1\omega_1^* + \lambda_1 - B_{11}\nu_1^* - B_{12}\nu_2^* - B_{13}\nu_3^*, \\ A_2\omega_2^* + \lambda_2 - B_{12}\nu_1^* - B_{22}\nu_2^* - B_{23}\nu_3^*, A_3\omega_3^* + \lambda_3 - B_{13}\nu_1^* - B_{23}\nu_2^* - B_{33}\nu_3^*),$$

где A_1, A_2, A_3 – главные моменты инерции; B_{ij}, C_{kl} – компоненты матриц B и C .

Тогда на основе (2.75) первые интегралы (2.73) можно записать так

$$q_1 y = c_1, \quad q_2 y = c_2, \quad q_3 y = c_3. \quad (2.76)$$

Из результатов Пуанкаре [81] вытекает, что система (2.74) допускает частное решение

$$y^*(t) = (\dot{\omega}_1^*(t), \dot{\omega}_2^*(t), \dot{\omega}_3^*(t), \dot{\nu}_1^*(t), \dot{\nu}_2^*(t), \dot{\nu}_3^*(t))^T, \quad (2.77)$$

которое обусловлено тем, что система (2.67), (2.68) автономна. То есть решение (2.77) удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}^*(t) = p(t)y^*(t). \quad (2.78)$$

Поэтому сопряженная к (2.78) система

$$\dot{z} = -p^T(t)z \quad (2.79)$$

допускает первый интеграл

$$y^{*T}z = c_4. \quad (2.80)$$

Поставим задачу об определении ненулевых характеристических чисел системы (2.74). Очевидно, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Пусть λ_5, λ_6 – последние два характеристических числа системы (2.74). С помощью интегралов (2.76) понизим порядок системы (2.74) с шестого порядка до третьего. Применяем замену

$$u_1 = q_1 y, \quad u_2 = q_2 y, \quad u_3 = q_3 y, \quad u_4 = q_4 y, \quad u_5 = q_5 y, \quad u_6 = q_6 y, \quad (2.81)$$

где q_1, q_2, q_3 имеют вид (2.75), вектор – функции $q_4 = q_4(t), q_5 = q_5(t), q_6 = q_6(t)$ выбираем так, чтобы полученная система в переменных u_i ($i = \overline{1,6}$) имела те же характеристичные числа, что и система (2.74), и чтобы преобразование (2.81) было преобразованием Ляпунова. Тогда получим линейную систему

$$\dot{u} = Q(t)u, \quad (2.82)$$

для которой выполняется свойство

$$\dot{u}_1 = 0, \quad \dot{u}_2 = 0, \quad \dot{u}_3 = 0. \quad (2.83)$$

Отсюда имеем $u_i = c_i$ ($i = 1, 2, 3$). Вектор $v = (u_4, u_5, u_6)^T$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathcal{G}} = R(t)\mathcal{G} + S(t), \quad (2.84)$$

где $R(t), S(t)$ – периодические матрицы третьего порядка (период их равен τ). Характеристичные числа системы (2.84) совпадают с характеристичными числами однородной системы

$$\dot{\mathcal{G}} = R(t)\mathcal{G}. \quad (2.85)$$

Для нахождения характеристичных чисел λ_5 и λ_6 системы (2.85) рассмотрим сопряженную систему

$$\dot{w} = -R^T(t)w. \quad (2.86)$$

Эта система допускает первый интеграл

$$\mathcal{G}^{*T}w = c^*, \quad (2.87)$$

где $\mathcal{G}^*$ – частное решение уравнения (2.85), которое можно найти с помощью преобразования (2.81). На основании первого интеграла (2.87) система (2.86) приводится к системе второго порядка. При этом характеристичные числа системы (2.86), а, следовательно, и найденной системы равны $-\lambda_5, -\lambda_6$. Полученная система второго порядка может быть сведена к уравнению типа Хилла

$$\ddot{\xi} + \Theta(t)\xi + \varphi(t) = 0, \quad (2.88)$$

где $\Theta(t)$, $\varphi(t)$ – периодические (периода τ) функции. Ненулевые характеристичные числа системы (2.88) соответствуют ненулевым характеристическим числам системы

$$\ddot{\xi} + \Theta(t)\xi = 0. \quad (2.89)$$

Характеристичные числа уравнения (2.89) могут быть определены на основе различных условий существования ненулевых характеристичных чисел.

Когда выполняется условие Ляпунова $\Theta(t) \leq 0$ ($\Theta(t)$ не равно тождественно нулю) для всех $t \geq t_0$, то уравнение (2.89) имеет решение

$$\xi = E_1(t)e^{\mu_0^2 t} + E_2(t)e^{-\mu_0^2 t}, \quad (2.90)$$

где $E_1(t)$, $E_2(t)$ – периодические функции времени. То есть в силу (2.90) характеристичные числа системы (2.86) таковы: μ_0^2 и $-\mu_0^2$. Это значит, что $\lambda_5 = \mu_0^2$, $\lambda_6 = -\mu_0^2$. Таким способом определяются характеристичные числа системы (2.84), а, следовательно, и системы (2.74). Соответствующие условия существования положительного характеристичного числа системы первого приближения (2.74) являются условиями существования асимптотически – периодических решений уравнений (2.67), (2.68).

2.7. Теория параметрического резонанса

Остановимся на другом способе анализа характеристических чисел уравнения второго порядка. Пусть оно может быть записано в виде

$$\ddot{\xi} + \lambda^2(1 + \mu f(t))\xi = 0, \quad (2.91)$$

где μ – малый параметр. В уравнении (2.91) $f(t)$ – периодическая функция периода π и

$$f(t) = f_1(t) + \mu f_2(t) + \dots, \quad (2.92)$$

здесь $f_i(t)$ – периодические функции (с тем же периодом), а ряд (2.92) сходится при $|\mu| < a$ (a – некоторая постоянная). Характеристическое уравнение для (2.91) имеет вид [64]

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad (2.93)$$

где

$$A = \frac{1}{2}(\xi_1(\pi) + \dot{\xi}_2(\pi)), \quad (2.94)$$

а $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – два частных решения уравнения (2.91), которые определяются начальными данными

$$\xi_1(0) = 1, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \dot{\xi}_2(0) = 1.$$

Решения $\xi_1(\pi)$, $\xi_2(\pi)$ являются целыми функциями параметра λ и аналитическими функциями μ в области $|\mu| < a$. В силу этого

$$\xi_1(0) = \xi_1^{(0)}(t) + \mu \xi_1^{(1)}(t) + \dots, \quad \xi_2(0) = \xi_2^{(0)}(t) + \mu \xi_2^{(1)}(t) + \dots \quad (2.95)$$

Через ρ_1 , ρ_2 обозначим корни уравнения (2.93). Введем характеристические показатели β_1 , β_2 по формулам $\beta_1 = \frac{1}{\pi} \ln \rho_1$, $\beta_2 = \frac{1}{\pi} \ln \rho_2$.

Тогда общее решение уравнения (2.91) можно записать в виде

$$\xi(t) = \phi_1(t)e^{\beta_1 t} + \phi_2(t)e^{\beta_2 t}, \quad (2.96)$$

где $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ – периодические функции (периода π),

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}(\ln |\rho_k| + i \arg \rho_k), \quad m \notin \mathbb{N}.$$

Корни уравнения (2.93) имеют значения

$$\rho_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \quad (2.97)$$

Характеристические числа уравнения (2.91) связаны с характеристическими показателями: $\lambda_k = -\operatorname{Re} \beta_k$. При нахождении положительных характеристических чисел уравнения (2.91) (или отрицательных), необходимо исследовать уравнение (2.97), потребовав $|A| > 1$, где A определено формулой (2.94). Подставим выражения (2.95) в уравнение (2.91) и воспользуемся указанными выше начальными данными. Тогда для $\xi_i^{(j)}$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i^{(0)} &= -\lambda^2 \xi_i^{(0)}, \\ \ddot{\xi}_i^{(1)} &= -\lambda^2 \xi_i^{(1)} - \lambda^2 f_1(t) \xi_i^{(0)} \quad (i = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Начальные условия таковы

$$\begin{aligned} \xi_1^{(0)}(0) &= 1, \quad \dot{\xi}_1^{(0)}(0) = 0, \quad \xi_2^{(0)}(0) = 0, \quad \dot{\xi}_2^{(0)}(0) = 1, \\ \xi_1^{(j)}(0) &= \dot{\xi}_1^{(j)}(0) = \xi_2^{(j)}(0) = \dot{\xi}_2^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Из (2.98) и (2.99) вытекает

$$\xi_1^{(0)}(t) = \cos \lambda t, \quad \xi_2^{(0)}(t) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t.$$

Следовательно, для величины A из формулы (2.94) имеем значение

$$A = \cos \lambda \pi + \frac{1}{2} \left(\xi_1^{(1)}(\pi) + \dot{\xi}_2^{(1)}(\pi) \right) \mu + \dots,$$

где многоточием обозначены члены порядка μ^2 и выше.

Равенство $A = 1$ выполняется при $\mu = 0$, $\lambda = 2n$, а равенство $A = -1$ – при $\mu = 0$, $\lambda = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). При $\lambda = n + \alpha$, где α – малая постоянная, уравнения $A(\alpha, \mu) = \pm 1$ допускают два решения $\alpha = \alpha(\mu)$ для каждого из уравнений. Причем $\alpha_0 = 0$ при $\mu = 0$ и при достаточно малом μ функция $\alpha(\mu)$ является аналитической функцией по μ . В окрестности нечетных значений n величина A в некотором малом интервале по α удовлетворяет условию $A < -1$, а в окрестности четных n величина A удовлетворяет условию $A > 1$.

Из данного подхода вытекает следующий способ определения областей, в которых $|A| > 1$. Полагая, что в уравнении (2.91) параметр λ^2 имеет значение

$$\lambda^2 = n^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu^j, \quad (2.100)$$

а функция $f(t)$ имеет вид (2.92), выполним подстановку (2.92), (2.100) и выражения

$$\xi = \xi_0(t) + \mu \xi_1(t) + \dots \quad (2.101)$$

в уравнение (2.91). Тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 + n^2 \xi_0 &= 0, \\ \ddot{\xi}_1 + n^2 \xi_1 &= -n^2 f_1(t) \xi_0 - \alpha_1 \xi_0, \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{\xi}_k + n^2 \xi_k &= -n^2 (f_1(t) + \alpha_1) \xi_{k-1} - \alpha_k \xi_0 + F_k(t, \xi_0, \dots, \xi_{k-2}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.102)$$

В уравнениях (2.102) F_k – линейные функции от $\xi_0(t), \xi_1(t), \dots, \xi_{k-2}(t)$ с периодическими коэффициентами. Эти функции содержат $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, но не содержат постоянной α_k .

Уравнения (2.102) дают возможность последовательно определять неизвестные функции $\xi_i(t)$. Для того, чтобы эти функции были периодическими, необходимо, чтобы правые части уравнений (2.102) удовлетворяли некоторым условиям. При их выполнении решение $\xi(t)$ из (2.101) будет периодическим.

Общее решение для функции $\xi_0 = \xi_0(t)$ в силу (2.102) имеет вид

$$\xi_0 = A_0 \cos nt + B_0 \sin nt. \quad (2.103)$$

Из второго уравнения системы (2.102) следует, что в правую часть его входят функция $f_1(t)$ (периода π) и функция $\xi_0(t)$ с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Для того, чтобы второе уравнения из (2.102) имело периодическое решение необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье правой части не содержало членов с $\cos nt$, $\sin nt$. Выпишем известные разложения

$$\begin{aligned} n^2 f_1(t) \cos nt &= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt), \\ n^2 f_1(t) \sin nt &= \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos mt + d_m \sin mt), \end{aligned} \quad (2.104)$$

причем $a_n = \frac{\beta}{2}, b_n = \frac{\gamma}{2}, c_n = \frac{\gamma}{2}, d_n = -\frac{\beta}{2}$, где β и γ – коэффициенты при $\cos 2nt$, $\sin 2nt$. Из формул (2.104) получаем требуемые выше условия

$$(\beta + 2\alpha_1) A_0 + \gamma B_0 = 0, \quad \gamma A_0 - (2\alpha_1 - \beta) B_0 = 0. \quad (2.105)$$

Из (2.105) в силу того, что в формуле (2.103) $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ имеем

$$\alpha_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}. \quad (2.106)$$

На основе выбора α_1 по формуле (2.106) общее решение второго уравнения из (2.102) таково $\xi_1 = \xi_1^*(t) + A_1 \cos nt + B_1 \sin nt$, где $\xi_1^*(t)$ – частное периодическое решение неоднородного уравнения. Далее процесс построения рядов (2.95)

повторяется. Вычисления будут такими же, как и в случае $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. Отличие состоит в том, что входящие в k -тое приближение A_k и $\hat{A}_k$ будут определяться из условия периодичности не $(k+1)$ -го, а $(k+2)$ -го приближения.

В случае, когда для α_2 получены кратные корни, то исследование усложняется. Может случиться, что разложение для λ^2 из (2.100) совпадают. Тогда мы имеем случай, который необходимо отбрасывать и переходить к анализу (2.91) в окрестности другого натурального значения n^2 .

Данный метод позволяет установить достаточные условия существования интервалов по λ^2 в окрестности натуральных значений, в которых имеет место одно из условий $A > 1$ или $A < -1$. Эти условия в силу (2.96) обеспечивают существование одного положительного характеристического числа линейной системы с периодическими коэффициентами (2.58) и тем самым позволяют найти условия существования решения (2.66), которое обладает свойством асимптотичности к исследуемому решению (2.70).

2.8. Прецессионные движения гиростата

Диссертация посвящена анализу асимптотически – прецессионных движений. Поэтому важно привести классы прецессий, отмеченные в работах Д. Гриоли [426135], Г.В. Горра, А.В. Мазнева [31], Г.В. Гора, А.М. Ковалева [35].

Пусть вектор $\mathbf{a}$ – единичный вектор с началом в точке является неизменным в гиростате: $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Пусть γ – единичный вектор, который имеет начало в точке O и неизменен в пространстве

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega.$$

Определение [34] Прецессионным движением (прецессией) называется движение, при котором постоянен угол между векторами $\mathbf{a}$ и γ .

Для прецессий имеют место инвариантные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \gamma &= a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0), \quad \mathbf{v} \cdot \gamma = c_0 \quad (c_0 = \cos \varkappa_0), \\ \omega &= \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \gamma. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Рассмотрим следующую классификацию прецессионных движений на основе формул (2.107), предложенную в [34].

1. Прецессии относительно наклонной оси: $\gamma \nparallel \nu$, $\gamma \cdot \nu \neq 0$.

2. Прецессии относительно горизонтальной оси: $\gamma \cdot \nu = 0$.

3. Прецессии относительно вертикали: $\gamma = \nu$.

4. Прецессионно–изоконические движения: $\theta = \theta_0$; подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости:

$$(\omega - \nu) \cdot c = 0, \quad \text{где } |c| = 1. \quad (2.108)$$

На основании этой классификации можно ввести подклассы прецессий. Остановимся на случае прецессии относительно вертикали [34]:

3.а. Регулярные прецессии

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} = m \quad (n \text{ и } m - \text{постоянные}).$$

3.б. Маятниковые движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} \neq n, \quad \dot{\psi} = 0.$$

3.в. Полурегулярные прецессии первого типа

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} \neq n, \quad \dot{\psi} = m.$$

3.г. Полурегулярные прецессии второго типа

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} \neq m.$$

3.д. Прецессии общего вида

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} \neq n, \quad \dot{\psi} \neq m.$$

Классы прецессионно – изоконических движений, т.е. движений для которых имеют место соотношения (2.107), (2.108).

4.а. Регулярные прецессионно – изоконические движения $m = n$:

$$\begin{aligned} \nu &= (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \\ \omega &= (a'_0 n \sin nt, a'_0 n \cos nt, n(1 + a_0)). \end{aligned} \quad (2.109)$$

4.б. Полурегулярные прецессионно – изоконические движения первого типа:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \quad \dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \sin \varphi), \quad \dot{\psi} = m, \\ b_0 = \frac{a_0 c_3 - 1}{a_0 - c_3}, \quad c_0 = \frac{a'_0 c_1}{a_0 - c_3}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \end{aligned} \quad (2.110)$$

4.в. Полурегулярные прецессионно – изоконические движения второго типа:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \quad \dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin \varphi} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2), \\ \psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{nt}{2}}{b_0 + c_0 \operatorname{tg} \frac{nt}{2}}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

4.г. Полурегулярные прецессионно – изоконические движения общего вида:

4.г.1.

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\psi}. \quad (2.112)$$

4.г.2.

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{c}, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin \varphi}, \quad \psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \quad (2.113)$$

Классы движений, описываемые соотношениями (2.109)–(2.113), нашли применение и во многих задачах динамики.

Некоторые классы представленных здесь движений рассмотрены в данной диссертации.

2.9. Выводы

В данном разделе при постановке задачи указаны содержательная, концептуальная и математическая постановки задачи. На основании научных статей [107, 108, 157, 158] выписаны уравнения движения гиростата под

действием потенциальных и гироскопических сил. Приведены основные сведения из теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих определенное число первых интегралов (теория Якоби). Описан метод инвариантных соотношений построения частных решений уравнений движения гиростата. Изложены основные результаты первого метода Ляпунова построения асимптотически – периодических решений уравнений Кирхгофа–Пуассона. Приведены основные классы прецессионных движений гиростата с неподвижной точкой. Часть этих движений будет принята в дальнейшем при изучении асимптотически – прецессионных движений.

РАЗДЕЛ III

АСИМПТОТИЧЕСКИ – РАВНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

3.1. Введение

Равномерные движения гиростата в разных задачах имеют принципиально различные свойства. Например, равномерные движения гиростата под действием силы тяжести, которым отвечают стационарные решения уравнений Эйлера–Пуассона, может происходить только вокруг вектора вертикали. Равномерные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемые стационарными решениями уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, возможны не только вокруг вертикали, но и вокруг наклонной оси в пространстве. Данные свойства существенно влияют на решение задачи о нахождении условий существования асимптотических к равномерным вращениям движений. Это обусловлено тем, что в первой задаче уравнения в вариациях имеют постоянные коэффициенты, а во второй задаче уравнения в вариациях представляют собой систему с периодическими коэффициентами. То есть при анализе асимптотически – равномерных движений гиростата приходится применять различные подходы.

Данный раздел посвящен исследованию условий существования асимптотически – равномерных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Ранее Г.В. Горром, В.М. Ковалевым [28], Ю.П. Вархалёвым и В.М. Ковалёвым [11] при нахождении достаточных условий существования асимптотических движений применялось только достаточное условие Ляпунова [64] существования решения уравнения Хилла с положительным характеристическим числом. В настоящей диссертации значительно расширен спектр применяемых методов. В частности используется теория параметрического резонанса. Это позволило получить новые достаточные

условия существования асимптотически – равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси.

3.2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой, которая описывается уравнениями Кирхгофа–Пуассона. Используя обозначения главы 2, запишем уравнения движения в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (B\mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела–носителя; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор вертикали; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиросtatический момент, характеризующий движения носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ обозначает относительную производную по времени t .

Уравнения (3.1) и (3.2) допускают интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) = 2E, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (3.3)$$

$$(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k. \quad (3.4)$$

Интерес в исследовании равномерных движений для уравнений (3.1), (3.2) с интегралами (3.3), (3.4) состоит не только в том, что они являются обобщением классических уравнений Эйлера–Пуассона, но и в том, что в силу гидродинамической аналогии [156–158] линейным преобразованием они могут быть сведены к уравнениям движения тела в жидкости (об этой задаче см. книгу [64]). Это значит, что полученные здесь результаты могут быть перенесены в задачу о движении твердого тела в жидкости с изменением механической интерпретации соответствующих решений [30,35].

Равномерные вращения гиростата относительно наклонной оси l с единичным вектором γ характеризуется тем, что вектор угловой скорости гиростата ω представляется в виде

$$\omega = \omega_0 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} = 0 \right), \quad (3.5)$$

где ω_0 – скорость равномерного вращения. В силу равенства $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d'\omega}{dt}$ (относительной и абсолютной производных), вектор γ будет постоянен не только в пространстве, но и в теле, т.е. $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d'\gamma}{dt}$. Обозначим вектор, с которым совпадает вектор γ , через a . Тогда в силу (3.5) в системе координат, связанной с гиростатом, имеем

$$\omega = \omega_0 a \quad (3.6)$$

То есть, вектор a неизменен в пространстве. Положим $|a|=1$ и $a \nparallel v$. Таким образом, равномерные вращения гиростата относительно наклонной оси можно отнести к частному случаю прецессионных движений гиростата [30]. Они могут быть описаны инвариантным соотношением $a \cdot v = a_0$ ($a_0 = \cos(\widehat{a, v})$). На основании этого соотношения и равенства (3.6) из уравнения (3.2) и геометрического интеграла $v \cdot v = 1$ в предположении $a = (0, 0, 1)$ в статье [28] получено

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0, \\ \nu_1 &= a'_0 \sin \omega_0 t, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \omega_0 t, \quad \nu_3 = a_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $a_0 = \cos \theta_0$, $a'_0 = \sin \theta_0$.

Подстановка выражений (3.7) в динамическое уравнение (3.1) и в первые интегралы (3.3), (3.4) приводит к следующим условиям существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси

$$\begin{aligned}
s_2 = s_1 = 0, \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad C_{22} = C_{11}, \quad A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \\
B_{22} = B_{11}, \quad \lambda_2 = a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23}, \quad \lambda_1 = a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}, \\
s_3 + \omega_0 B_{11} + a_0 (C_{11} - C_{33}) = 0, \\
k = a_0 \omega_0 A_{22} + a_0 \lambda_3 - \frac{1}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33}), \\
2E = \omega_0^2 A_{33} - 2a_0 s_3 + a_0'^2 C_{11} + a_0'^2 C_{33}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Представляют интерес случаи (не рассмотренные в [11,28]), когда условия (3.8), (3.9) выполняются для любых значений либо a_0 , либо ω_0 .

Пусть соотношения (3.8), (3.9) выполняются для любых значений параметра a_0 , изменяющегося в интервале $(-1, 1)$. Тогда в силу $C_{33} = C_{22} = C_{11}$, можно считать в уравнении (3.1) матрицу C нулевой. Остальные уравнения из (3.8) таковы

$$\begin{aligned}
s_2 = s_1 = 0, \quad B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \\
\lambda_1 = -\omega_0 A_{13}, \quad \lambda_2 = -\omega_0 A_{23}, \quad \omega_0 = -\frac{s_3}{B_{11}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Если равенства (3.8) выполняются для любых значений ω_0 , то из (3.8) имеем

$$\begin{aligned}
s_2 = s_1 = 0, \quad A_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \\
\lambda_1 = a_0 B_{13}, \quad \lambda_2 = a_0 B_{23}, \quad a_0 = \frac{s_3}{C_{33} - C_{11}}.
\end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства указанных выше условий.

1. Во всех трех случаях вектор s обобщенного центра масс гиростата коллинеарен вектору a , относительно которого происходит вращение гиростата.

2. Во всех трех случаях распределение масс гиростата кроме условия $A_{12} = 0$ не подчинено другим условиям. В частности можно эллипсоид инерции гиростата считать и сферическим и эллипсоидом вращения.

3. Для условий (3.8) матрицы B и C имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

то есть ось вращения гиростата (или единичный вектор $\mathbf{a}$) ортогональна круговым сечениям эллипсоидов

$$B_{11}(x^2 + y^2) + B_{33}z^2 + 2B_{13}xz + 2B_{23}yz = \text{const},$$

$$C_{11}(x^2 + y^2) + C_{33}z^2 = \text{const}.$$

4. Матрицу C можно считать нулевой, а матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}.$$

5. В частности, матрицы A , B , C могут иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица B является вырожденной.

Такой анализ в [11, 28] отсутствует.

Для исследования асимптотически – равномерных движений гиростата методом А.М. Ляпунова необходимо определить уравнения в возмущениях, провести анализ линейной системы (уравнений в вариациях), найти условия существования положительных характеристических чисел этой системы. Поэтому, рассмотрим уравнения (3.1), (3.2) в окрестности решения (3.7). Положим

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{v}^{(0)} = (a'_0 \sin \omega_0 t, a'_0 \cos \omega_0 t, a_0)$, $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – векторы возмущений. Внесем выражения (3.10) в уравнения (3.1), (3.2)

$$\begin{aligned} A\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \omega_0 (A\mathbf{a} \times \boldsymbol{\Omega} + A\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times B\boldsymbol{\gamma}) + \\ &+ \boldsymbol{\gamma} \times (C\mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{s} + C\boldsymbol{\gamma}) + \\ &+ \boldsymbol{\Omega} \times (B\mathbf{v}^{(0)} - \boldsymbol{\lambda} - A\boldsymbol{\Omega} - B\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{v}^{(0)} \times C\boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \omega_0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) + \mathbf{v}^{(0)} \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Первый метод Ляпунова основан на использовании свойств линейной системы, вытекающей из (3.11)

$$\begin{aligned}
A\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \omega_0 (A\mathbf{a} \times \boldsymbol{\Omega} + A\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times B\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\gamma} \times (C\mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{s}) + \\
&\quad + \boldsymbol{\Omega} \times (B\mathbf{v}^{(0)} - \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{v}^{(0)} \times C\boldsymbol{\gamma}, \\
\dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \omega_0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) + \mathbf{v}^{(0)} \times \boldsymbol{\Omega}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Система (3.12) имеет три первых интеграла, порожденных исходными интегралами (3.3), (3.4)

$$\begin{aligned}
\omega_0 (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + C\mathbf{v}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_1, \\
\omega_0 (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{v}^{(0)} \cdot A\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma} - B\mathbf{v}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_2, \\
\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^{(0)} &= c_3.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь c_i – произвольные постоянные.

В данной диссертации рассматриваются условия на параметры уравнений (3.1), (3.2), параметры ω_0 , θ_0 при выполнении которых переменные векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, удовлетворяющие уравнениям (3.11) при $t \rightarrow \infty$, стремятся к нулевым векторам ($\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \mathbf{0}$).

3.3. Редукция линейной системы

Обозначим через Ω_i компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}$, а через x, y, z – компоненты вектора $A\boldsymbol{\Omega}$. Компоненты данных векторов связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\
\Omega_2 &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z, \\
\Omega_3 &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где a_{ij} – компоненты гирационного тензора $\mathbf{a} = A^{-1}$. Пусть $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда в скалярном виде уравнения (3.12) таковы

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \omega_0 y + g_0(t)\Omega_2 - a'_0 B_{11}\Omega_3 \cos \omega_0 t + h_0(t)\gamma_3, \\
\dot{y} &= -\omega_0 x - g_0(t)\Omega_1 + a'_0 B_{11}\Omega_3 \sin \omega_0 t - f_0(t)\gamma_3, \\
\dot{z} &= a'_0 B_{11}(\Omega_1 \cos \omega_0 t - \Omega_2 \sin \omega_0 t),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1 &= \omega_0 \gamma_2 - a_0 \Omega_2 + a'_0 \Omega_3 \cos \omega_0 t, \\
\dot{\gamma}_2 &= -\omega_0 \gamma_1 + a_0 \Omega_1 - a'_0 \Omega_3 \sin \omega_0 t, \\
\dot{\gamma}_3 &= a'_0 (\Omega_2 \sin \omega_0 t - \Omega_1 \cos \omega_0 t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Аналоги интегралов (3.13) для уравнений (3.15), (3.16) запишем в виде

$$\begin{aligned} z + B_{11}\gamma_3 &= b_1, \\ a'_0(\gamma_1 \sin \omega_0 t + \gamma_2 \cos \omega_0 t) + a_0\gamma_3 &= b_2, \\ a'_0(x \sin \omega_0 t + y \cos \omega_0 t) - g_0(t)\gamma_3 &= b_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь b_i ($i = \overline{1,3}$) – произвольные постоянные. В уравнениях (3.15) введены обозначения

$$\begin{aligned} g_0(t) &= a'_0 B_{13} \sin \omega_0 t + a'_0 B_{23} \cos \omega_0 t - \lambda_3 - \omega_0 A_{33} + a_0 B_{33}, \\ h_0(t) &= a'_0 (C_{33} - C_{11}) \cos \omega_0 t - \omega_0 B_{23}, \\ f_0(t) &= a'_0 (C_{33} - C_{11}) \sin \omega_0 t - \omega_0 B_{13}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений необходимо в уравнения (3.15), (3.16) подставить величины (3.14).

Согласно основной теореме первого метода Ляпунова [64] для исследования асимптотических решений уравнений (3.11) следует найти условия существования у линейной системы дифференциальных уравнений (3.15), (3.16) положительных характеристичных чисел. Поскольку в силу (3.14), (3.18) система (3.15), (3.16) является системой с периодическими коэффициентами периода $\frac{2\pi}{\omega_0}$

и допускает три независимых первых интеграла (3.17), то система (3.15), (3.16) имеет четыре ненулевых характеристичных числа [10]. Для определения знаков двух оставшихся характеристичных чисел требуется понизить порядок системы (3.15), (3.16) с помощью интегралов (3.17) (методика рассмотрена в [10]).

Введем вместо x , y переменные u , v , а вместо γ_1 , γ_2 – переменные β_1 , β_2 :

$$\begin{aligned} x &= u \sin \omega_0 t + v \cos \omega_0 t, \\ y &= u \cos \omega_0 t - v \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_1 \sin \omega_0 t + \beta_2 \cos \omega_0 t, \\ \gamma_2 &= \beta_1 \cos \omega_0 t - \beta_2 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из (3.19), (3.20) вытекает обратное преобразование

$$\begin{aligned} u &= x \sin \omega_0 t + y \cos \omega_0 t, \\ v &= x \cos \omega_0 t - y \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \gamma_1 \sin \omega_0 t + \gamma_2 \cos \omega_0 t, \\ \beta_2 &= \gamma_1 \cos \omega_0 t - \gamma_2 \sin \omega_0 t.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Таким образом, переход к новым переменным (3.21), (3.22) с учетом того, что переменные z и γ_3 остаются без изменений означает преобразование переменных, которое не изменяет характеристических чисел линейной системы (3.15), (3.16). В силу (3.21), (3.22) из (3.15), (3.16) получим

$$\begin{aligned}\dot{u} &= g_0(t)(g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z) + g_5(t)\gamma_3, \\ \dot{v} &= (g_0(t)h_2(t) - a'_0 B_{11} h_3(t))u + (a'_0 B_{11} g_3(t) - g_0(t)g_1(t))v + \\ &\quad + (g_0(t)h_3(t) - a'_0 B_{11} a_{33})z + g_6(t)\gamma_3, \\ \dot{z} &= -a'_0 B_{11} (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z),\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= -a_0 (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z), \\ \dot{\beta}_2 &= (a'_0 h_3(t) - a_0 h_2(t))u + (a_0 g_1(t) - a'_0 g_3(t))v + \\ &\quad + (a'_0 a_{33} - a_0 h_3(t))z, \\ \dot{\gamma}_3 &= a'_0 (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z),\end{aligned}\quad (3.24)$$

где в силу (3.14), (3.18)–(3.22) обозначено

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\omega_0 t - a_{12}\cos 2\omega_0 t, \\ g_2(t) &= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\cos 2\omega_0 t + a_{12}\sin 2\omega_0 t - \frac{1}{2}(a_{22} + a_{11}), \\ h_2(t) &= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\cos 2\omega_0 t + a_{12}\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{2}(a_{22} + a_{11}), \\ h_3(t) &= a_{23}\cos \omega_0 t + a_{13}\sin \omega_0 t, \\ g_3(t) &= a_{23}\sin \omega_0 t - a_{13}\cos \omega_0 t, \\ g_5(t) &= \omega_0 (B_{13}\cos \omega_0 t - B_{23}\sin \omega_0 t), \\ g_6(t) &= a'_0 (C_{33} - C_{11}) - \omega_0 (B_{13}\sin \omega_0 t + B_{23}\cos \omega_0 t).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Интегралы (3.17) в новых переменных таковы

$$z + B_{11}\gamma_3 = b_1, \quad a'_0\beta_1 + a_0\gamma_3 = b_2, \quad a'_0 u - g_0(t)\gamma_3 = b_3. \quad (3.26)$$

Напомним, что в формулах (3.25) a_{ij} – компоненты гирационного тензора.

Для понижения порядка системы (3.23), (3.24) из интегралов (3.26) найдем

$$z = \frac{-a'_0 u B_{11} + b_1 g_0(t) + b_3 B_{11}}{g_0(t)}, \quad \gamma_3 = \frac{a'_0 u - b_3}{g_0(t)},$$

$$\beta_1 = \frac{-a_0 a'_0 u + b_2 g_0(t) + a_0 b_3}{a'_0 g_0(t)},$$
(3.27)

где предполагаем, что выполнено условие $g_0(t) \neq 0$.

Подставим первые два выражения из (3.27) в первые два уравнения системы (3.23)

$$\dot{u} = \frac{G(t) + a'_0 g_5(t)}{g_0(t)} u + g_0(t) g_2(t) v +$$

$$+ b_1 g_0(t) g_3(t) + \frac{b_3 (B_{11} g_0(t) g_3(t) - g_5(t))}{g_0(t)},$$
(3.28)

$$\dot{v} = \frac{1}{g_0(t)} (H(t) u - G(t) v) + b_1 (g_0(t) h_3(t) - a'_0 a_{33} B_{11}) +$$

$$+ \frac{b_3}{g_0(t)} [B_{11} (g_0(t) h_3(t) - a'_0 a_{33} B_{11}) - g_6(t)].$$
(3.29)

В уравнениях (3.28), (3.29) через $G(t)$ и $H(t)$ обозначены выражения

$$G(t) = g_0(t) (g_0(t) g_1(t) - a'_0 B_{11} g_3(t)),$$

$$H(t) = g_0^2(t) h_2(t) - 2a'_0 B_{11} g_0(t) h_3(t) + a_0'^2 a_{33} B_{11}^2 + a'_0 g_6(t).$$
(3.30)

В силу периодичности коэффициентов при u , v и свободных членов в системе (3.28), (3.29) ненулевые характеристичные числа системы (3.28), (3.29) может иметь только однородная система

$$\dot{u} = \frac{G(t) + a'_0 g_5(t)}{g_0(t)} u + g_0(t) g_2(t) v,$$

$$\dot{v} = \frac{1}{g_0(t)} (H(t) u - G(t) v).$$
(3.31)

Так как по предположению $g_0(t) \neq 0$ и в силу обозначений (3.25) $g_2(t) < 0$, то для получения из системы (3.31) одного уравнения с одной переменной выразим v из первого уравнения

$$v = \frac{\dot{u} g_0(t) - (G(t) + a'_0 g_5(t)) u}{g_0^2(t) g_2(t)}.$$
(3.32)

Подставим (3.32) во второе уравнение из (3.31)

$$\ddot{u} - \left(\ln |g_0^2(t)g_2(t)| \right)' \dot{u} + P(t)u = 0. \quad (3.33)$$

Здесь $P(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(t) = \frac{1}{g_0^3(t)g_2(t)} & \left[\left(g_0^2(t)g_2(t) \right)' (G(t) + a'_0g_5(t)) - \right. \\ & - g_0^2(t)g_2(t)(G(t) + a'_0g_5(t))' - g_0^3(t)g_2^2(t)H(t) - \\ & \left. - g_0(t)g_2(t)G(t)(G(t) + a'_0g_5(t)) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Уравнение (3.33) приведем к уравнению типа Хилла с помощью замены $u = w\sqrt{-g_0^2(t)g_2(t)}$, которая в силу $g_2(t) < 0$ является действительной. Тогда из уравнения (3.33) вытекает, что уравнение на новую переменную w таково

$$\ddot{w} + \left[\frac{\left(g_0^2(t)g_2(t) \right)''}{2g_0^2(t)g_2(t)} - \frac{3 \left[\left(g_0^2(t)g_2(t) \right)' \right]^2}{4g_0^4(t)g_2^2(t)} + P(t) \right] w = 0. \quad (3.35)$$

При нахождении условий существования асимптотически – равномерных движений гиростата согласно теореме Ляпунова необходимо потребовать, чтобы уравнение (3.35) имело решение с положительным характеристическим числом. Для этого можно воспользоваться либо достаточным условием А.М. Ляпунова [64], либо теорией параметрического резонанса.

3.4. Случай произвольного $a_0 \in (-1, 1)$

Предположим, что выполняются условия (3.9). Выбором системы координат можно положить $a_{12} = 0$. Из (3.18) вытекает, что $g_0(t)$ не зависит от времени. Обозначая $g_0(t) = \beta_0$ и используя обозначения (3.25), (3.30), из уравнения (3.35) получим

$$\begin{aligned}
\ddot{w} + \frac{w}{\beta_0^2 (c \cos 2\omega_0 t - b)^2} \Bigg\{ & -\beta_0^2 \omega_0^2 c (2c + c \sin^2 2\omega_0 t - 2b \cos 2\omega_0 t) + \\
& + (c \cos 2\omega_0 t - b) \left[-\frac{\omega_0 \beta_0}{2} (c \cos 2\omega_0 t - b) \times \right. \\
& \times (4A_2 \cos 2\omega_0 t + A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t) - \\
& - \omega_0 c \beta_0 (2A_2 \sin 2\omega_0 t + A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t) \sin 2\omega_0 t - \\
& - \beta_0^2 (c \cos 2\omega_0 t - b)^2 (A_2 \cos \omega_0 t + A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + A_0) - \\
& \left. \left. - \frac{1}{4} (c \cos 2\omega_0 t - b) (2A_2 \sin 2\omega_0 t + A_1 \sin \omega_0 t - B_1 \cos \omega_0 t)^2 \right] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

В уравнении (3.36) введены обозначения

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}), \quad b = \frac{1}{2}(a_{22} + a_{11}), \quad \beta_0 = a_0 B_{33} - \lambda_3 - \omega_0 A_{33}, \\
A_2 &= c\beta_0^2, \quad A_1 = -2a'_0 a_{23} \beta_0 B_{11}, \quad B_1 = -2a'_0 a_{13} \beta_0 B_{11}, \\
A_0 &= b\beta_0^2 + a_0'^2 a_{33} B_{11}^2.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

В статье [11] аналог уравнения (3.36) не рассматривается, так как в ней предполагается, что параметр a_0 принимает фиксированные значения. Кроме этого в цитируемой статье используется только достаточное условие Ляпунова [64] существования положительного характеристического числа у уравнения Хилла. Здесь проведем анализ решений уравнения (3.36) при следующих дополнительных условиях

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{23} = 0, \quad s_3 + 2a_{11} B_{11} (a_0 B_{33} - \lambda_3 - \omega_0 A_{33}) = 0. \tag{3.38}$$

Запишем уравнение (3.36) при условиях (3.37), (3.38), используя в качестве новой независимой переменной $\tau = \omega_0 t$ ($\omega_0 > 0$)

$$w'' + \frac{w}{2\omega_0^2} \left\{ -a_0'^2 a_{13}^2 B_{11}^2 \cos 2\tau + \left[2a_{11}^2 \beta_0^2 + a_0'^2 B_{11}^2 (2a_{11} a_{33} - a_{13}^2) \right] \right\} = 0, \tag{3.39}$$

где штрихом обозначена производная по переменной τ . Из вида уравнения (3.39) ($w'' + p(\tau)w = 0$) в силу того, что

$$2a_{11}^2 \beta_0^2 + a_0'^2 B_{11}^2 (2a_{11} a_{33} - a_{13}^2) > 0,$$

вытекает, что при исследовании положительных характеристических чисел этого уравнения использовать достаточное условие $p(\tau) \leq 0$ невозможно. Поэтому

применим теорию параметрического резонанса, описанную в [30]. Вводя параметры

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\omega_0^2} \left[2a_{11}^2 \beta_0^2 + a_0'^2 B_{11}^2 (2a_{11}a_{33} - a_{13}^2) \right],$$

$$\mu = - \frac{a_0'^2 a_{13}^2 B_{11}^2}{2a_{11}^2 \beta_0^2 + a_0'^2 B_{11}^2 (2a_{11}a_{33} - a_{13}^2)},$$
(3.40)

из (3.39) в силу (3.40) получим уравнение

$$w'' + \lambda^2 (1 + \mu \cos 2\tau) w = 0. \quad (3.41)$$

Так как параметр a_0 принимает произвольные значения из промежутка $(-1, 1)$, то можно выбором параметра a_0' считать параметр μ из (3.41) малым параметром. Тогда к этому уравнению можно применить метод малого параметра [30] и в окрестности натуральных значений по λ^2 найти интервалы неустойчивости решений уравнений (3.41).

Приведем примеры, в которых уравнение (3.41) имеет решение следующего вида

$$w(\tau) = c_1 \psi_1(\tau) e^{\alpha^2 \tau} + c_2 \psi_2(\tau) e^{-\alpha^2 \tau}. \quad (3.42)$$

Здесь ψ_1, ψ_2 – периодические функции τ (периода π), а α^2 и $-\alpha^2$ – характеристические показатели, которые связаны с корнями определяющего уравнения для (3.41)

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где $A = \frac{1}{2}(w_1(\pi) + w_2(\pi))$, $w_1(\pi)$ и $w_2(\pi)$ – два независимых частных решения уравнения (3.41), определяемые следующими равенствами

$$\alpha^2 = \frac{1}{\pi} \ln \rho_1, \quad -\alpha^2 = \frac{1}{\pi} \ln \rho_2 \quad (\rho > 1, \quad 0 < \rho_2 < 1).$$

Для первого примера параметры λ^2 и μ должны удовлетворять условию

$$4 - \frac{1}{3}\mu^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 4 + \frac{5}{3}\mu^2 + \dots \quad (3.43)$$

Второй пример существования у уравнения (3.41) решения (3.42) относится к случаю

$$9 + \frac{81}{64}\mu^2 - \frac{729}{512}\mu^3 + \dots \leq \lambda^2 \leq 9 + \frac{81}{64}\mu^2 + \frac{729}{512}\mu^3 + \dots \quad (3.44)$$

Таким образом, если параметры задачи удовлетворяют одному из условий (3.43), (3.44), где λ и μ определяются формулами (3.40), то уравнение (3.41) допускает решение (3.42), в котором c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Характеристические числа связаны с характеристическими показателями равенством $\lambda_k = -\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \ln \rho_k$. Это значит, что решение $w_2(\tau) = \psi_2(\tau) e^{-\alpha^2 \tau}$ имеет положительное характеристическое число. Оно порождает решение системы уравнений (3.23), (3.24), которое имеет положительное характеристическое число. Это решение можно получить, используя формулы $u = -\beta_0 w \sqrt{-g_2(t)}$, (3.27), (3.32) и уравнение для β_2 из системы (3.24). Исходные переменные задачи можно получить с помощью формул (3.19), (3.20). Следовательно, при одном из условий (3.43), (3.44) линейная система (3.15), (3.16) допускает одно решение с положительным характеристическим числом. Поскольку она является правильной [64], то нелинейная система (3.11) допускает решение $(x = x_1, y = x_2, z = x_3, \gamma_1 = x_4, \gamma_2 = x_5, \gamma_3 = x_6)$, которое представимо в виде рядов Ляпунова

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} L_i^{(m)} \alpha_*^m e^{-\alpha^2 m t}. \quad (3.45)$$

При $t \rightarrow \infty$ $x_i(t) \rightarrow \infty$. Поэтому, если выполняется одно из условий (3.43), (3.44), то существует однопараметрическое семейство решений (3.45), которое описывает асимптотически–равномерное движение гиростата относительно наклонной оси. Отметим, что в (3.45) α_* – произвольная постоянная, а ряды (3.45) сходятся абсолютно [64].

Рассмотрим условия на распределение масс гиростата, отмеченные в формулах (3.10), (3.38). Так как $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{s} = (0, 0, s_3)$, а для компонент

гирационного тензора a_{ij} выполняются равенства $a_{23} = a_{12} = 0$, $a_{22} = a_{11}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{s}$ принадлежат перпендикуляру к круговому сечению гири эллипсоида. Следовательно, распределение масс такое же, как и для гироскопа Гесса [138].

Отметим, что, в частности, гири стат может иметь и сферическое распределение масс.

3.5. Случай, когда $\mathbf{a}$ принадлежит главной оси

В общем случае исследование уравнения (3.36) достаточно сложно, поскольку выражение в скобках представляет собой тригонометрический многочлен восьмого порядка. Поэтому рассмотрим случай, когда равномерное вращение гири стат (3.6) происходит относительно главной оси. Тогда выполняется равенство $A_{ij} = 0$ ($i \neq j$) ($a_{ij} = 0$ ($i \neq j$)). При этом из равенств (3.10) вытекает, что $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Используя обозначения (3.37) для величин A_1 и B_1 , получим равенства $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, а для β_0 значение:

$$\beta_0 = a_0 B_{33} - \lambda_3 - \frac{\omega_0}{a_{33}}.$$

Следовательно, уравнение (3.36) принимает вид

$$\ddot{w} + \frac{B_{11}^2}{C^2 \xi^2} (\xi^3 + a_1 \xi^2 + b_1 \xi + c_1) w = 0, \quad (3.46)$$

где $\xi = C(b - c \cos 2\omega_0 t)$, $C = \frac{1}{a_{33}}$. Поскольку в общем случае величины a_1 , b_1 , c_1

имеют достаточно сложный вид, то здесь выпишем их для случая $\lambda_3 = a_0 B_{33}$

($\beta_0 = -\omega_0 C$). Тогда, вводя вместо a_{11} , a_{22} , a_{33} главные моменты инерции: $a_{11} = \frac{1}{A}$,

$a_{22} = \frac{1}{B}$, $a_{33} = \frac{1}{C}$, из (3.36) имеем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\omega_0 C^2 (B - C)(A - C)}{a_0'^2 A B B_{11}^2}, \\
 b_1 &= -\frac{2\omega_0^2 C^3 (A + B - C)}{a_0'^2 A B B_{11}^2}, \quad c_1 = \frac{3\omega_0^2 C^4}{a_0'^2 A B B_{11}^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

Переменная ξ изменяется в промежутке $\left[\frac{C}{B}, \frac{C}{A}\right]$ (считаем $A < B$).

Потребуем, чтобы уравнение

$$f(\xi) = \xi^3 + a_1 \xi^2 + b_1 \xi + c_1 = 0 \tag{3.48}$$

имело один действительный корень $f\left(\frac{C}{A}\right) < 0$. Если положить $A = \alpha_0$, $B = 2\alpha_0$,

$C = \frac{3}{2}\alpha_0$, где α_0 – положительный параметр, то последнему неравенству можно удовлетворить достаточно большими положительными значениями параметра ω_0 .

Уравнение (3.48) будет иметь один действительный корень, если дискриминант $D > 0$. В силу (3.48) данное неравенство можно привести к виду

$$27a_1^2(3b_1^2 + 4a_1c_1) + 108b_1(b_1^2 - a_1^2) - 486a_1b_1c_1 + 729c_1^2 > 0. \tag{3.49}$$

На основании значений (3.47) можно сделать вывод о том, что наибольший порядок по ω_0^2 в левой части неравенства (3.49) имеет первое слагаемое. Так как в силу (3.47) и выбранных значений главных моментов инерции выражение $3b_1^2 + 4a_1c_1$ положительно, то существуют такие значения ω_0^2 , которые удовлетворяют как условию $f\left(\frac{C}{A}\right) < 0$, так и неравенству (3.49).

Таким образом, и в случае вращения гиростата относительно главной оси, существует асимптотически–равномерное движение гиростата относительно наклонной оси. Соотношения, которые описывают данный класс можно найти по аналогии со случаем 3.4.

3.6. Особый случай $g_0(t) = 0$

Этот случай в силу (3.5) имеет место при выполнении условий

$$B_{23} = B_{13} = 0, \quad \lambda_3 = \omega_0 A_{33} - a_0 B_{33}. \quad (3.50)$$

Тогда общие условия существования равномерных вращений, определяемые неравенствами (3.8), несколько упрощаются. Если учесть (3.50), то из (3.8) имеем

$$\begin{aligned} s_2 = s_1 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \\ C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\ \lambda_2 = -\omega_0 A_{23}, \quad \lambda_1 = -\omega_0 A_{13}, \\ s_3 + \omega_0 B_{11} + a_0 (C_{11} - C_{33}) = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

При условиях (3.51) уравнения (3.23), (3.24) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0, \\ \dot{v} &= a'_0 B_{11} (g_3(t)v - a_{33}z - h_3(t)u) + g_6(t)\gamma_3, \\ \dot{z} &= -a'_0 B_{11} (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z), \\ \dot{\beta}_1 &= -a_0 (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z), \\ \dot{\beta}_2 &= (a'_0 h_3(t) - a_0 h_2(t))u + (a_0 g_1(t) - a'_0 g_3(t))v + (a'_0 a_{33} - a_0 h_3(t))z, \\ \dot{\gamma}_3 &= a_0 (g_1(t)u + g_2(t)v + g_3(t)z). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Запишем интегралы (3.26) в виде

$$\gamma_3 = \frac{b_1 - z}{B_{11}}, \quad \beta_1 = \frac{a_0 z - a_0 b_1 + b_2 B_{11}}{a'_0 B_{11}}, \quad u = u_0 = \frac{b_3}{a'_0}. \quad (3.53)$$

Подставим в систему (3.52) $u = u_0$, $\gamma_3 = \frac{b_1 - z}{B_{11}}$, определенные из соотношений (3.53), и выпишем однородную систему на переменные v и z

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{B_{11}} \left[a'_0 B_{11}^2 g_3(t)v - (a'_0 a_{33} B_{11}^2 + g_6(t))z \right], \\ \dot{z} &= -a'_0 B_{11} (g_2(t)v + g_3(t)z). \end{aligned} \quad (3.54)$$

В силу $g_2(t) < 0$ из системы (3.54) получим формулу для v и уравнение Хилла на переменную w : $z = w\sqrt{-g_2(t)}$

$$v = \frac{-1}{a'_0 B_{11} g_2(t)} (\dot{z} + a'_0 B_{11} g_3(t)z), \quad (3.55)$$

$$\ddot{w} + \left[-\frac{3\ddot{g}_2^2(t)}{4g_2^2(t)} + \frac{\ddot{g}_2(t)}{2g_2(t)} - a'_0 g_2(t)(a'_0 B_{11} a_{33} + g_6(t)) - \right. \\ \left. - a_0'^2 B_{11}^2 g_3^2(t) + a'_0 B_{11} \left(\dot{g}_3(t) - \frac{\dot{g}_2(t) g_3(t)}{g_2(t)} \right) \right] w = 0. \quad (3.56)$$

В пункте 3.4. случай, когда гиростат представлял собой гироскоп Гесса, изучался при условиях $g_0(t) \neq 0$ и (3.10) и наличии равенства $C = 0$ (матрица C в уравнение (3.1) не входит). Для анализа асимптотически – равномерных движений гиростата применялся метод параметрического резонанса. В данном пункте рассмотрим этот случай, принимая во внимание уравнение (3.56).

Пусть в формулах (3.25) $a_{12} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{22} = a_{11}$. Так как при этом $A_{23} = 0$, то из условий (3.8) следует, что $s = (0, 0, s_3)$, $\lambda = (\lambda_1, 0, \lambda_3)$ и гиростат представляет собой гироскоп Гесса. Уравнение (3.56) принимает вид

$$\ddot{w} + \left[a_0'^2 a_{13}^2 B_{11}^2 \sin^2 \omega_0 t + a'_0 a_{13} B_{11} \omega_0 \sin \omega_0 t + \right. \\ \left. + a_0'^2 (B_{11}^2 (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) + a_{11} (C_{33} - C_{11})) \right] w = 0. \quad (3.57)$$

Выражение в квадратных скобках уравнения (3.57) принимает отрицательные значения для всех значений t , если выполнены условия

$$\kappa_0 = \frac{a_{11} a_0' (a_{33} B_{11}^2 + C_{33} - C_{11})}{a_{13} B_{11}}, \quad (3.58) \\ \kappa_0 < \omega_0 \leq -\kappa_0.$$

Таким образом, при наличии условий (3.58) выполнено достаточное условие существования у уравнения (3.57) решения с положительным характеристичным числом [64]. Это значит, что система (3.52) имеет четыре нулевых характеристичных числа и два характеристичных числа противоположных знаков. Решение уравнения (3.57) имеет вид, указанный в формуле (3.42). Тогда из формулы (3.55) можно определить $\nu = \nu(t)$, из формул (3.53) – $\gamma_3(t)$, $\beta_1(t)$ и u , а из последнего уравнения системы (3.52) – $\beta_2(t)$. Исходные переменные можно определить из (3.19), (3.20). Ряды Ляпунова, которые описывают асимптотически – равномерное движение гироскопа Гесса при условиях (3.51), (3.58), имеют вид

(3.45). При этом для первого приближения в формулах (3.53) необходимо положить $b_i = 0$ ($i = \overline{1,3}$).

В рамках варианта $g_0(t) = 0$ изучение случая равномерного вращения гиростата относительно главной оси приводит в силу равенства (3.56) к исследованию уравнения

$$\ddot{w} + \frac{w}{(b - c \cos 2\omega_0 t)^2} \left[a_0'^2 (b - c \cos 2\omega_0 t)^3 (a_{33} B_{11}^2 + C_{33} - C_{11}) + \right. \\ \left. + \omega_0^2 c (2b \cos 2\omega_0 t - c \sin 2\omega_0 t - 2c) \right] = 0. \quad (3.59)$$

Обозначим $\sigma_0 = a_0'^2 (a_{33} B_{11}^2 + C_{33} - C_{11})$ и будем считать $\sigma_0 > 0$. Введение новой переменной $\eta = \frac{1}{b} (b - c \cos 2\omega_0 t)$ позволяет выражение в квадратных скобках привести к виду

$$\Phi(\eta) = \sigma_0 b^3 \eta^3 + \omega_0^2 b^2 \eta^2 - 4\omega_0^2 b^2 \eta + 3\omega_0^2 (b^2 - c^2). \quad (3.60)$$

Переменная η в силу обозначений $b = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$, $c = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})$ изменяется в интервале $\left[\frac{a_{22}}{b}, \frac{a_{11}}{b} \right]$ (считаем $a_{11} > a_{22}$). Потребуем, чтобы $\Phi\left(\frac{a_{11}}{b}\right) < 0$ и дискриминант уравнения $\Phi(\eta) = 0$ был положителен. В силу выражения

$$\Phi\left(\frac{a_{11}}{b}\right) = \sigma_0 a_{11}^3 - a_{11} \omega_0^2 (a_{11} - a_{22})$$

для больших значений ω_0^2 (σ_0 не зависит от ω_0) с учетом $a_{11} - a_{22} > 0$ значение $\Phi\left(\frac{a_{11}}{b}\right)$ отрицательно.

Применим неравенство (3.49) к уравнению $\Phi(\eta) = 0$. Если учесть, что $\sigma_0 > 0$, то второй коэффициент в уравнении $\Phi(\eta) = 0$ положительный, третий – отрицательный, свободный член – положительный. Если рассмотреть аналог

неравенства (3.49) для уравнения $\Phi(\eta) = 0$, то слагаемое $a_1^2(3b_1^2 + 4a_1c_1)$ в силу указанных выше свойств коэффициентов уравнения $\Phi(\eta) = 0$ ($b_1 < 0$, $a_1 > 0$, $c_1 > 0$) положительно. Это значит, что выбор достаточно больших значений ω_0 позволяет добиться не только условия $\Phi\left(\frac{a_{11}}{b}\right) < 0$, но и условия положительности дискриминанта уравнения $\Phi(\eta) = 0$. Таким образом, при $\sigma_0 > 0$ и данных значениях параметра ω_0 выражение в квадратных скобках уравнения (3.59) отрицательно для всех t . Это показывает применимость условия Ляпунова и получение однопараметрического класса асимптотически – равномерных движений гиростата относительно наклонной оси для случая, когда предельное движение – движение относительно главной оси в гиростате.

3.7. Выводы

В данном разделе рассмотрены условия существования асимптотически – равномерных движений гиростата относительно наклонной оси. Получены следующие результаты.

1. Указаны условия существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси в случаях, когда параметр нутации гиростата принимает произвольное значение из промежутка $(0, \pi)$, либо значение угловой скорости равномерного вращения $\omega_0 \in (-\infty, +\infty)$.

2. Выполнена редукция уравнений в вариациях, описывающих асимптотически – равномерные движения, к системе третьего порядка. Показано, что из этой системы можно получить уравнение класса Хилла не прибегая к анализу сопряженной системы.

3. Для случая $a_0 \in (-1, 1)$ и условиях на распределение масс гиростата класса Гесса с помощью теории параметрического резонанса выполнен анализ условий существования решения уравнения Хилла, которое имеет положительное

характеристическое число. Указан вид рядов Ляпунова, характеризующих асимптотическое решение уравнений Кирхгофа–Пуассона.

4. Рассмотрен особый случай, для которого $g_0(t) = 0$. На основе достаточного условия Ляпунова [64] существования решения уравнения Хилла с положительным характеристическим числом получены условия асимптотически – равномерных движений гиростата.

5. Исследованы условия асимптотически – равномерных вращений гиростата для варианта, когда ось вращения является главной осью эллипсоида инерции.

РАЗДЕЛ IV

ОБЩИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ – ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА

В данном разделе систематизированы классы прецессионных движений сферического гиростата, которые в дальнейшем принимаются в качестве предельных движений сферического гиростата. Рассмотрены регулярные прецессии относительно вертикали, выполнен анализ условий их существования.

Дополнены результаты [24, 36] в случае прецессионных движений первого типа. Полученные здесь условия существования носят более общий характер, чем условия [36]. Новым результатом является сведение решения уравнений движения к эллиптическим функциям времени. Дан анализ условий существования прецессионных движений второго типа, которые были найдены А.В. Мазневым [30]. Исследованы задачи получения решения в явном виде. Рассмотрено два таких класса прецессии гиростата.

Изучены прецессии общего вида [30]. Приведены условия их существования и указан вид решения в двух вариантах. В первом варианте решение уравнений Кирхгофа–Пуассона выражается в виде эллиптических функций времени. Во втором варианте решение определяется элементарными функциями времени.

Предложена общая схема исследования асимптотически – прецессионных движений. Получено уравнение Хилла, решения которого дают возможность исследовать с единых позиций данные движения. Ранее [24] это уравнение имело весьма громоздкий вид. Как показано в данной работе, это уравнение можно существенно упростить, не применяя прием перехода к рассмотрению сопряженной системы.

Сформулированы основные этапы в изучении асимптотически – прецессионных движений гиростата, позволяющие в данной форме применить метод асимптотически – периодических гиростата.

4.1. Анализ предельных классов прецессионных движений

4.1.1. Постановка задачи

Запишем уравнения (2.13), (2.14) при условии $A = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$

$$\dot{\omega} = \mu^{-1} [\omega \times (Bv - \lambda) + v \times (Cv - s)], \quad \dot{v} = v \times \omega. \quad (4.1)$$

Эти уравнения имеют первые интегралы

$$\mu\omega^2 + (Cv - 2s) \cdot v = 2E, \quad v \cdot v = 1, \quad \left(\mu\omega + \lambda - \frac{1}{2}Bv \right) \cdot v = k. \quad (4.2)$$

В книгах [31,34] показано, что прецессионные движения гиростата описываются соотношениями

$$a \cdot v = a_0 \quad (a_0 = \angle(a, v)), \quad \omega = \dot{\phi}a + \dot{\psi}v, \quad (4.3)$$

где v_i имеют значения

$$v_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad v_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad v_3 = a_0. \quad (4.4)$$

При наличии равенств (4.3), (4.4) кинематическое уравнение $\dot{v} = v \times \omega$ и геометрический интеграл становятся тождественными, а динамическое уравнение из (4.1) можно привести к виду

$$\mu(\ddot{\phi} + a_0\ddot{\psi}) = -\dot{\psi}(\tau_3 \cdot \tau_5) - (\tau_4 \cdot \tau_3), \quad (4.5)$$

$$\mu(a_0\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) = -\dot{\phi}(\tau_3 \cdot \tau_5), \quad (4.6)$$

$$a_0'^2 \mu \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\psi}(\tau_1 \cdot \tau_5) - \dot{\phi}(\tau_2 \cdot \tau_5) + (\tau_1 \cdot \tau_4) = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= a - a_0v, & \tau_2 &= v - a_0a, & \tau_3 &= a \times v, \\ \tau_4 &= s - Cv, & \tau_5 &= \lambda - Bv, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Можно показать, что из уравнений (4.5), (4.6) следуют соотношения

$$\mu(a_0\dot{\phi} + \dot{\psi}) = k - \left(\lambda - \frac{1}{2}Bv \right) \cdot v, \quad (4.9)$$

$$\mu(\dot{\phi}^2 + 2a_0\dot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\psi}^2) = 2E + (2s - Cv) \cdot v. \quad (4.10)$$

Обозначим

$$k - \left(\lambda - \frac{1}{2} B \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} = f_2(\varphi), \quad 2E + (2\mathbf{s} - C\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = g_2(\varphi), \quad (4.11)$$

где в силу соотношений (4.4)

$$\begin{aligned} f_2(\varphi) &= b_2 \cos 2\varphi + b'_2 \sin 2\varphi + b_1 \cos \varphi + b'_1 \sin \varphi + b_0, \\ g_2(\varphi) &= c_2 \cos 2\varphi + c'_2 \sin 2\varphi + c_1 \cos \varphi + c'_1 \sin \varphi + c_0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{4} a_0'^2 (B_{22} - B_{11}), \quad b'_2 = \frac{1}{2} a_0'^2 B_{12}, \\ b_1 &= a_0' (a_0 B_{23} - \lambda_2), \quad b'_1 = a_0' (a_0 B_{13} - \lambda_1), \\ b_0 &= \frac{1}{4} [a_0'^2 (B_{22} + B_{11}) + 2a_0^2 B_{33}] - a_0 \lambda_2 + k, \\ c_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (C_{11} - C_{22}), \quad c'_2 = -a_0'^2 C_{12}, \\ c_1 &= 2a_0' (s_2 - a_0 C_{23}), \quad c'_1 = 2a_0' (s_1 - a_0 C_{13}), \\ c_0 &= 2E + 2a_0 s_3 - \frac{1}{2} [a_0'^2 (C_{11} + C_{22}) + 2a_0^2 C_{33}]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из уравнений (4.9), (4.10) получим

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mu} (f_2(\varphi) - a_0 \mu \dot{\varphi}), \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\mu g_2(\varphi) - f_2^2(\varphi)}{a_0'^2 \mu^2}. \quad (4.14)$$

Так как $f_2(\varphi)$ и $g_2(\varphi)$ – известные функции (см. формулы (4.12), (4.13)), то условия существования прецессионных движений (4.3), (4.4) сводятся к условиям совместности уравнений (4.5), (4.14).

4.1.2. Регулярные прецессии сферического гиростата

Положим в векторном равенстве для $\boldsymbol{\omega}$ из (4.3) $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} = n$, где m и n – постоянные. Тогда из (4.3), (4.4) имеем (вектор $\mathbf{a}$ направим по третьей координатной оси подвижной системы координат: $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$)

$$\omega_1 = m a_0' \sin nt, \quad \omega_2 = m a_0' \cos nt, \quad \omega_3 = n + m a_0, \quad (4.15)$$

$$v_1 = a_0' \sin nt, \quad v_2 = a_0' \cos nt, \quad v_3 = a_0. \quad (4.16)$$

В соотношениях (4.15), (4.16) начальное значение угла собственного вращения принято равным нулю.

Запишем условия существования регулярных прецессий гиростата (4.15), (4.16) для уравнений (4.5)–(4.7). Для этого в условиях, указанных в книге [34], положим $A = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$. Тогда получим следующую систему равенств

$$\begin{aligned} B_{12} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{22} = C_{11}, \quad mB_{13} + C_{13} = 0, \\ mB_{23} + C_{23} = 0, \quad s_1 = a_0 C_{13}, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad \lambda_1 = a_0 B_{13}, \quad \lambda_2 = a_0 B_{23}, \\ m[n\mu + \lambda_3 + a_0(B_{11} - B_{33})] + nB_{11}a_0(C_{11} - C_{33}) + s_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Рассмотрим условия (4.17) при следующих предположениях. Пусть параметр a_0 принимает произвольные значения из промежутка $(-1, 1)$, тогда

$$\begin{aligned} B_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad C_{22} = C_{11}, \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad m(B_{11} - B_{33}) + C_{11} - C_{33} = 0, \\ m(n\mu_0 + \lambda_3) + nB_{11} + s_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Если в равенствах (4.17) m принимает произвольные значения, то

$$\begin{aligned} B_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad C_{22} = C_{11}, \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ a_0(C_{11} - C_{33}) + nB_{11} + s_3 = 0, \quad \lambda_3 + n\mu + a_0(B_{11} - B_{33}) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Если в равенствах (4.17) параметр n произволен, то из (4.17) вытекает, что все условия из (4.17), кроме последнего, остаются без изменений. Последнее условия приводит к равенствам

$$m\mu + B_{11} = 0, \quad m[\lambda_3 + a_0(B_{11} - B_{33})] + a_0(C_{11} - C_{33}) + s_3 = 0. \quad (4.20)$$

Условия (4.17)–(4.20) будут использованы в дальнейшем при анализе асимптотических к регулярным прецессиям движений гиростата. Очевидно, что решение (4.15), (4.16) периодическое ($T = \frac{2\pi}{n}$).

Замечание: Рассмотрим случай, когда на гиростат действует только сила тяжести. Положим в (4.17) $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1, 3}$):

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad m(n\mu + \lambda_3) + s_3 = 0.$$

Условия $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ из указанной системы показывают, что с учетом равенств $A_1 = A_2 = A_3 = \mu$ гири стат по распределению масс представляет собой гири стат Лагранжа. Этому же условию удовлетворяют равенства (4.18), (4.19).

4.1.3. Полурегулярные прецессии первого типа сферического гири стат

Положим в равенствах (4.3) и уравнениях (4.5)–(4.7) $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная

$$\begin{aligned}\omega_1 &= ma'_0 \sin \varphi, & \omega_2 &= ma'_0 \cos \varphi, & \omega_3 &= \dot{\varphi} + ma_0, \\ \nu_1 &= a'_0 \sin \varphi, & \nu_2 &= a'_0 \cos \varphi, & \nu_3 &= a_0.\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\mu \ddot{\varphi} &= -m(\tau_3 \cdot \tau_5) - (\tau_3 \cdot \tau_5), & \mu a_0 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}(\tau_3 \cdot \tau_5) &= 0, \\ \dot{\varphi} [a_0'^2 \mu m - (\tau_2 \cdot \tau_5)] &+ m(\tau_1 \cdot \tau_5) + (\tau_1 \cdot \tau_4) &= 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Первый случай полурегулярной прецессии.

Пусть в уравнениях (4.22) выполняются условия

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, & B_{12} &= 0, & B_{22} &= B_{11}, & C_{12} &= 0, & \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= 0, \\ C_{13} &= -mB_{13}, & C_{23} &= -mB_{23}, & s_3 &= -m\lambda_3, & m &= -\frac{B_{11}}{\mu}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Тогда второе и третье уравнения системы (4.22) становятся тождественными, а из первого уравнения этой системы имеем

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} (C_{11} - C_{22}) \cos 2\varphi + 2s_1 \sin \varphi + 2s_2 \cos \varphi + c_0^* \right], \\ c_0^* &= 2E - \mu m^2 - \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22}).\end{aligned}\quad (4.24)$$

Из уравнения (4.24) вытекает, что в общем случае $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени. Для наглядности окончательного результата будем полагать

$$C_{11} = C_{22}, \quad s_2 = 0, \quad \mu_1 = \frac{2s_1}{\mu}, \quad \mu_2 = \frac{c_0^*}{\mu}, \quad (4.25)$$

то есть $\dot{\varphi}$ примем в виде

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\mu_1 \sin \varphi + \mu_2}. \quad (4.26)$$

Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться случаи, когда решение (4.21) является периодическим, то при рассмотрении уравнения (4.26) считаем, что параметры задачи удовлетворяют условиям $\mu_2 > \mu_1 > 0$, то есть в силу (4.25) они удовлетворяют неравенствам

$$c_0^* > 2s_1 > 0.$$

Тогда из (4.26) получим

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 1 - 2\operatorname{sn}^2(\rho t, k_*), \quad \cos \varphi = -2\operatorname{sn}(\rho t, k_*)\operatorname{cn}(\rho t, k_*), \\ \dot{\varphi} &= \rho \operatorname{dn}(\rho t, k_*), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, \quad k_* = \sqrt{\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}}.$$

В равенствах (4.27) $\operatorname{sn}(\rho t, k_*)$, $\operatorname{cn}(\rho t, k_*)$, $\operatorname{dn}(\rho t, k_*)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k_* , которые являются периодическими функциями времени.

Период функций $\operatorname{sn}(\rho t, k_*)$, $\operatorname{cn}(\rho t, k_*)$ равен $\frac{4K}{\rho}$, период функции $\operatorname{dn}(\rho t, k_*)$ равен

$\frac{2K}{\rho}$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 u}}. \quad (4.28)$$

Аналога решения (4.21) для классической задачи о движении гиростата нет, так как в силу значения m из (4.23) при $B_{11} = 0$ $m = 0$.

Второй случай полурегулярной прецессии: $\dot{\psi} = m$.

Пусть выполнено условие $a_0 \neq 0$. Тогда из уравнений (4.5)–(4.7) следуют равенства

$$\begin{aligned}
B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad C_{23} + m B_{23} = 0, \\
C_{13} = \frac{B_{11}(a_0 B_{13} - \lambda_1) - \mu m \lambda_1}{a_0 \mu}, \quad (a_0 B_{13} - \lambda_1)^2 = a_0^2 \mu (C_{22} - C_{11}), \\
2a_0(s_1 - a_0 C_{13})(\mu m + a_0'^2 B_{11}) + (a_0 B_{13} - \lambda_1) \times \\
\times [a_0 m(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + 2a_0'^2(s_3 + a_0(C_{22} - C_{33}))] = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

При выполнении условий (4.29) зависимость $\varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{\varphi} = n_1 \sin \varphi + n_0, \tag{4.30}$$

где

$$n_1 = \frac{a_0 B_{13} - \lambda_1}{a_0 \mu}, \quad n_0 = a_0 \frac{s_1 - a_0 C_{13} - \mu m(a_0 B_{13} - \lambda_1)}{\mu a_0 B_{13} - \lambda_1}. \tag{4.31}$$

Отметим, что условия (4.29) обобщают условия, полученные в статье [11]. Для применения первого метода Ляпунова будем предполагать, что $\varphi(t)$ — монотонная функция времени ($n_0 > 0$, $n_0 > n_1$), то есть из формулы (4.30) имеем

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{n_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{n_0^2 - n_1^2} - n_1 \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = t \sqrt{n_0^2 - n_1^2}. \tag{4.32}$$

В силу (4.31) выполнения условий $n_0 > 0$, $n_0 > n_1$ можно добиться надлежащим выбором параметров. Например, данные неравенства выполняются, если имеют место условия

$$\begin{aligned}
a_0 > 0, \quad a_0 B_{13} - \lambda_1 > 0, \\
s_1 > a_0 C_{13} - \mu m(a_0 B_{13} - \lambda_1) + \frac{(a_0 B_{13} - \lambda_1)^2}{a_0^2}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Очевидно, что при $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ из системы (4.29) следует равенство $\lambda_1 = 0$, а из системы $n_1 = 0$. То есть как и в первом случае аналога решения (4.21), в котором $\dot{\varphi} \neq \text{const}$ не существует.

Особый интерес решение (4.21), (4.30) представляет в случае, когда выполняется условие $n_0^2 = n_1^2 + m^2$, так как для него движение гиростата будет обладать не только свойством прецессионности, но и свойством изоконичности

(подвижный и неподвижный годографы симметричны относительно касательной к ним плоскости). Зависимость $\varphi(t)$ из (4.32) при этом несколько упрощается

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \frac{n_0 \operatorname{tg} mt}{m - n_1 \operatorname{tg} mt}. \quad (4.34)$$

4.1.4. Полурегулярные прецессии второго типа сферического гиростата

Рассмотрим случай, когда в равенствах (4.3), (4.4) $\dot{\varphi} = n$, где n – постоянная, а $\dot{\psi} = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a'_0 \dot{\psi} \sin(nt + \varphi_0), & \omega_2 &= a'_0 \dot{\psi} \cos(nt + \varphi_0), & \omega_3 &= n + a_0 \dot{\psi}, \\ \nu_1 &= a'_0 \sin(nt + \varphi_0), & \nu_2 &= a'_0 \cos(nt + \varphi_0), & \nu_3 &= a_0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Первый класс полурегулярных прецессий второго типа.

Этот класс определяется следующими условиями [30,34,36]

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & B_{ij} &= 0 \quad (i \neq j), & B_{22} &= B_{11}, & s_2 &= 0, & \lambda_2 &= 0, \\ C_{12} &= 0, & C_{23} &= 0, & \lambda_1^2 &= \mu(C_{22} - C_{11}), \\ n &= -\frac{1}{\mu\lambda_1}(\lambda_1\lambda_3 + C_{13}\mu), \\ s_3 &= \frac{1}{\lambda_1}[n(\lambda_1 B_{11} + s_1\mu) + s_1\lambda_3]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Скорость прецессии является элементарной функцией времени

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mu\lambda_1}[\mu s_1 + \lambda_1^2 \sin(nt + \varphi_0)]. \quad (4.37)$$

При наличии соотношений (4.36), (4.37) уравнения (4.5)–(4.7) становятся тождествами. Из уравнения (4.37) найдем

$$\psi(t) = -\frac{s_1}{\lambda_1}t + \frac{\lambda_1}{\mu n} \cos(nt + \varphi_0) + \psi_0, \quad (4.38)$$

где ψ_0 – постоянная. Выражение (4.38) показывает, что при $s_1 = 0$ движение гиростата будет периодическим. Если $s_1 \neq 0$, то в формуле (4.38) присутствует вековая составляющая и движение будет не периодическим. Однако при этом решение (4.35) будет периодическим с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому оно может быть

принято в качестве предельного прецессионного движения второго типа. Интерес представляет условие $a_0 = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$), так как в процессе движения гиростата ось собственного вращения будет находиться в горизонтальной плоскости.

Второй класс полурегулярных прецессий второго типа.

Как показано А.В. Мазневым, движения данного класса имеют место при выполнении следующих условий на параметры [34]

$$\begin{aligned} B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad a_0'^2 C_{23} + n\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \mu(C_{22} - C_{11}), \quad n = -\frac{1}{2\mu\lambda_1} [a_0\lambda_1(B_{33} - B_{11}) - \lambda_1\lambda_3 - C_{13}\mu], \quad (4.39) \\ s_3 = \left[\frac{a_0 C_{13} - s_1}{\lambda_1} - a_0 n \right] [a_0(B_{33} - B_{11}) - \lambda_3 - \mu n] + a_0(C_{33} - C_{22}) - nB_{11}. \end{aligned}$$

Отметим, что пятое условие из (4.39) А.В. Мазневым заменено равенствами $\lambda_2 = 0$, $C_{23} = 0$. То есть равенства (4.39) уточняют его результат.

Для второго класса полурегулярных прецессий (4.35) скорость прецессии выражается формулой

$$\dot{\psi} = l_0 + l_1 \sin(nt + \varphi_0), \quad (4.40)$$

где

$$l_0 = \frac{a_0(C_{13} - \lambda_1 n) - s_1}{\lambda_1}, \quad l_1 = \frac{a_0' \lambda_1}{\mu}. \quad (4.41)$$

Из уравнения (4.40) найдем зависимость

$$\psi(t) = l_0 t - \frac{l_1}{n} \cos(nt + \varphi_0) + \psi_0. \quad (4.42)$$

Если выполняется условие

$$s_1 = a_0(C_{13} - \lambda_1 n),$$

то движение гиростата будет периодическим с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Когда в (4.42)

$l_0 \neq 0$, то движение гиростата будет квазипериодическим. В обоих случаях само решение (4.35) является периодическим.

4.1.5. Прецессии общего вида сферического гиростата

Первый класс прецессии общего вида.

Условия существования таких движений проанализированы в [30,34]. Имеют место два класса таких движений. Для наглядности рассмотрения первого класса положим $B_{23} = 0$, $B_{13} = 0$. Остальные условия оставим без изменений. Тогда имеем

$$\begin{aligned} B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \\ s_1 = \frac{3a_0^2 - a_0'^2}{3a_0} C_{13}, \quad s_2 = \frac{3a_0^2 - a_0'^2}{3a_0} C_{23}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Решение (4.3) при условия (4.43) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 = a_0' \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a_0' \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}, \\ \nu_1 = a_0' \sin \varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mu} (\beta_0 - a_0 \mu \dot{\varphi}), \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_1' \sin \varphi + \sigma_0}. \quad (4.45)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_0 \lambda_3 - a_0^2 B_{33} - a_0'^2 B_{11}, \\ \sigma_1 &= \frac{2}{a_0' \mu} (s_2 - a_0 C_{23}), \quad \sigma_1' = \frac{2}{a_0' \mu} (s_1 - a_0 C_{13}), \\ \sigma_0 &= \frac{2\mu E + a_0 \mu (2s_3 - a_0 C_{33}) - a_0'^2 \mu C_{22} - (a_0 \lambda_3 - a_0'^2 B_{11} - a_0^2 B_{33})^2}{a_0'^2 \mu^2}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2a_0 \mu} \left[(a_0'^2 - 2a_0^2) \mu s_3 + a_0 (a_0^2 - a_0'^2) \mu C_{13} + \right. \\ &\quad \left. + (a_0 \lambda_3 - a_0'^2 B_{11} - a_0^2 B_{33}) (\lambda_3 - a_0 B_{33}) + 2a_0 a_0'^2 \mu C_{22} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для нахождения зависимости $\varphi(t)$ введем вместо $\varphi(t)$ новую переменную

$$u = \varphi + \varphi_0, \quad \sin \varphi_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma_*}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{\sigma_1'}{\sigma_*}, \quad \sigma_* = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1'^2}. \quad (4.48)$$

Тогда из второго уравнения системы (4.45) получим

$$\dot{u} = \sqrt{\sigma_* \sin u + \sigma_0}. \quad (4.49)$$

Будем предполагать, что $u(t)$ – периодическая функция, то есть будем считать: $\sigma_0 > \sigma_* > 0$ (выполнения этих неравенств можно добиться выбором параметров (4.46), (4.47)). Тогда из уравнения (4.49) следует

$$\begin{aligned} \sin u &= 1 - 2 \operatorname{sn}^2(\tilde{\rho}t, \tilde{k}), \quad \cos u = -2 \operatorname{sn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k}) \operatorname{cn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k}), \\ \dot{u} &= \tilde{\rho} \operatorname{dn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k}), \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_* + \sigma_0}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2\sigma_*}{\sigma_* + \sigma_0}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$\operatorname{sn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k})$, $\operatorname{cn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k})$, $\operatorname{dn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k})$, $\tilde{k}$ – модуль этих эллиптических функций. В силу (4.48), (4.50) найдем

$$\begin{aligned} \sin \varphi(t) &= \frac{1}{\sigma_*} (\sigma'_1 \sin u - \sigma_1 \cos u), \\ \cos \varphi(t) &= \frac{1}{\sigma_*} (\sigma'_1 \cos u - \sigma_1 \sin u), \\ \dot{\varphi} &= \tilde{\rho} \operatorname{dn}(\tilde{\rho}t, \tilde{k}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Зависимость $\psi(t)$ определим из первого уравнения системы (4.45)

$$\psi(t) = \frac{\beta_0}{\mu} t - a_0 \mu \varphi(t) + \psi_0. \quad (4.52)$$

Формула (4.52) представляет собой интерес, поскольку функция $\psi(t)$ характеризует свойство движения гиростата в неподвижном пространстве. Например, при выполнении равенства

$$a_0 \lambda_3 - a_0^2 B_{33} - a_0'^2 B_{11} = 0 \quad (4.53)$$

гиростат в силу $\theta_0 = \text{const}$, зависимостей $\varphi(t)$ из (4.51) и $\psi(t)$ из (4.53) совершает периодическое движение в неподвижном пространстве.

Второй класс прецессии общего вида.

Данный класс характеризуется тем, что скорости прецессии и собственного вращения определяются формулами

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = \frac{1}{\mu} & \left[(a_0 a'_0 B_{13} - a'_0 \lambda_1 - a_0 b_0 \mu_0) \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + k - a_0 \lambda_3 - a_0 c_0 \mu_0 \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\dot{\varphi} = b_0 \sin \varphi + c_0, \quad (4.55)$$

а параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} B_{12} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{23} = 0, \\ s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu(C_{22} - C_{11}) = \mu^2 n_0^2 + (a_0 B_{13} - \lambda_1)^2, \\ s_3 = \frac{1}{\mu} \left\{ c_0 \mu \left[\frac{3}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + k - 2a_0 \lambda_3 \right] + a_0 \mu_0 (C_{22} - C_{33}) + \right. \\ \left. + [\lambda_3 + a_0 (B_{11} - B_{33})] \left(\frac{1}{2} a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33} + k - a_0 \lambda_3 \right) - a_0 c_0^2 \mu^2 \right\}, \\ C_{13} = \frac{1}{a'_0 \mu} \left\{ b_0 \mu \left[\frac{3}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + k - 2a_0 \lambda_3 \right] + \right. \\ \left. + a'_0 c_0 \mu (3a_0 B_{13} - 2\lambda_1) + a'_0 (a_0 B_{13} - \lambda_1) (\lambda_3 + a_0 (B_{11} - B_{33})) - \right. \\ \left. - a'_0 B_{13} \left[\frac{1}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + k - a_0 \lambda_3 \right] - 3a_0 b_0 c_0 \mu^2 \right\}, \\ k = \frac{a'_0 \mu}{2a_0 b_0 \mu - a'_0 \lambda_1} (s_1 - a_0 C_{13} - a'_0 b_0 c_0 \mu) - \frac{1}{2} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33} - 2a_0 \lambda_3). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Из уравнения (4.55) в предположении $c_0 > b_0 > 0$ имеем

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c_0 + b_0}{c_0 - b_0}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c_0^2 - b_0^2}}{2} t - \frac{\pi}{2}. \quad (4.57)$$

Если принять во внимание зависимость (4.57), выражение (4.54), то приходим к выводу о том, что решение (4.44) при условиях (4.56) является решением уравнений Кирхгофа–Пуассона (4.1). Поэтому оно может быть принято в качестве предельного решения для исследования асимптотически — прецессионных движений гиростата.

4.2. Общий метод исследования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата

Поставим задачу исследования движений сферического гиростата, которые при $t \rightarrow \infty$ стремятся к прецессионному движению (4.3), (4.4.). Введем возмущения $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^*(t) + \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}^*(t) + \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.58)$$

где $\boldsymbol{\omega}^*(t)$, $\boldsymbol{v}^*(t)$ определяются формулами (4.3), (4.4).

Подставим выражения (4.58) в уравнения (4.1)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu} \left[\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}) \times B\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times C\boldsymbol{\gamma} \right], \quad (4.59)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.60)$$

Уравнения (4.59), (4.60) являются уравнениями для возмущений $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ из (4.58). Так как при анализе асимптотически – прецессионных движений будем использовать первый метод Ляпунова, то выпишем линейную систему, вытекающую из (4.59), (4.60)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{v}^* \times C\boldsymbol{\gamma}), \quad (4.61)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{v}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.62)$$

Уравнения (4.61), (4.62) имеют первые интегралы

$$\mu(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \quad \mu(\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mu\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\tau}_5) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_3. \quad (4.63)$$

В диссертации поставим задачу: на основе первого метода Ляпунова [64] исследовать условия существования асимптотически – периодических движений, предельным движением которых является прецессия (4.3), (4.4)

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{a}), \quad u_2 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}), \quad u_3 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \\ u_4 &= \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{a}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{v}, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}_3, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где согласно обозначениям (4.8) $\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$. То есть в качестве переменных приняты независимые переменные, зависящие от проекций векторов возмущений

Ω и γ на вектора s , v , $a \times v$. Если переменные из (4.64) будут найдены как функции времени, то векторы Ω и γ определятся из формул

$$\Omega = \frac{1}{a_0'^2 \mu} (u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2 + u_3 \tau_3), \quad \gamma = \frac{1}{a_0'^2} (u_4 \tau_1 + u_5 \tau_2 + u_6 \tau_3). \quad (4.65)$$

При наличии соотношений (4.64), (4.65) интегралы (4.63) таковы

$$\begin{aligned} \dot{\phi} u_1 + \dot{\psi} u_2 - \frac{1}{a_0'^2} [(\tau_4 \cdot \tau_1) u_4 + (\tau_4 \cdot \tau_2) u_5 + (\tau_4 \cdot \tau_3) u_6] &= c_1, \\ u_5 = c_2, \quad u_2 + (b \cdot \tau_1) u_4 + (b \cdot \tau_2) u_5 + (b \cdot \tau_3) u_6 &= c_3, \end{aligned} \quad (4.66)$$

где $b = \frac{1}{a_0'^2} [\mu(\dot{\phi} a + \dot{\psi} v) + \tau_5]$.

В силу интегралов (4.66) введем переменные $x_i : x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ и

$$x = q(t)u, \quad (4.67)$$

где q_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} q_{11} &= 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \\ q_{21} &= 0, \quad q_{22} = 0, \quad q_{23} = 0, \quad q_{24} = 1, \quad q_{25} = 0, \quad q_{26} = 0, \\ q_{31} &= 0, \quad q_{32} = 0, \quad q_{33} = 0, \quad q_{34} = 0, \quad q_{35} = 0, \quad q_{36} = 1, \\ q_{41} &= \dot{\phi}, \quad q_{42} = \dot{\psi}, \quad q_{43} = 0, \\ q_{44} &= -\frac{(\tau_4 \cdot \tau_1)}{a_0'^2}, \quad q_{45} = -\frac{(\tau_4 \cdot \tau_2)}{a_0'^2}, \quad q_{46} = -\frac{(\tau_4 \cdot \tau_3)}{a_0'^2}, \\ q_{51} &= 0, \quad q_{52} = 0, \quad q_{53} = 0, \quad q_{54} = 0, \quad q_{55} = 1, \quad q_{56} = 0, \\ q_{61} &= 0, \quad q_{62} = 1, \quad q_{63} = 0, \\ q_{64} &= (b \cdot \tau_1), \quad q_{65} = (b \cdot \tau_2), \quad q_{66} = (b \cdot \tau_3), \end{aligned} \quad (4.68)$$

Поскольку в силу (4.68) $|q(t)| = \dot{\phi}$, то в предположении $\dot{\phi}(t) \neq 0$ существует и обратное к (4.67) преобразование. Отметим, что преобразование, которое является суперпозицией преобразований (4.64) и (4.67), является преобразованием Ляпунова, и оно не изменяет характеристических чисел линейной системы (4.61), (4.62).

Запишем систему (4.61), (4.62) в переменных x_i

$$\dot{x}_1 - h_{12}(t)x_2 - h_{13}(t)x_3 = R_1(t), \quad (4.69)$$

$$\dot{x}_2 - \frac{x_1}{\mu} + \dot{\psi}x_3 = R_2(t), \quad (4.70)$$

$$\dot{x}_3 - h_{32}(t)x_2 - h_{33}(t)x_3 = R_3(t), \quad (4.71)$$

$$\dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} R_1(t) &= h_{14}(t)x_4 + h_{15}(t)x_5 + h_{16}(t)x_6, \\ R_2(t) &= h_{24}(t)x_4 + h_{25}(t)x_5 + h_{26}(t)x_6, \\ R_3(t) &= h_{34}(t)x_4 + h_{35}(t)x_5 + h_{36}(t)x_6, \end{aligned} \quad (4.73)$$

где функции $h_{ij}(t)$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$) выписаны в [24]. На основании (4.66), (4.72) $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. То есть функции (4.73) по предположению являются периодическими функциями времени.

Выпишем функции $h_{12}(t)$, $h_{13}(t)$, $h_{32}(t)$, $h_{33}(t)$

$$\begin{aligned} h_{12}(t) &= \frac{1}{a_0'^2 \dot{\phi}} \left[\dot{\phi}^2 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - \dot{\phi} \dot{\psi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - \dot{\phi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_1) - \right. \\ &\quad \left. - a_0'^2 \dot{\phi} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) + D_1 (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) - D_2 (\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \right], \\ h_{13}(t) &= \frac{1}{a_0'^2 \dot{\phi}} \left[\dot{\phi}^2 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_3) - \dot{\phi} \dot{\psi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_3) - \dot{\phi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_3) + \right. \\ &\quad \left. + D_1 (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) - D_2 (\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) \right], \\ h_{32}(t) &= \frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\phi}} \left[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) - (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \right] + \dot{\psi}, \\ h_{33}(t) &= \frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\phi}} \left[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) - (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

В (4.74) обозначено

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \dot{\phi} \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}_2 = \dot{\psi} \mathbf{b} + \frac{1}{a_0'^2} \boldsymbol{\tau}_4, \\ D_1 &= a_0'^2 \left[\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}_3 \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + \dot{\psi} \right], \\ D_2 &= a_0'^2 \left[\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}_3 \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2 - a_0 \dot{\psi} \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Функции (4.74) имеют достаточно сложный вид. Однако, если воспользоваться соотношениями, которые вытекают в результате дифференцирования по t соотношений (4.9), (4.10) и учета обозначений (4.8)

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) &= \frac{1}{\mu} [\ddot{\phi}(\dot{\phi} + a_0 \dot{\psi}) + \ddot{\psi}(a_0 \dot{\phi} + \dot{\psi})], \\ \dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) &= \mu(a_0 \ddot{\phi} + \ddot{\psi}),\end{aligned}\quad (4.76)$$

а также равенством

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) = \dot{\phi}[(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - \mu a_0'^2 \dot{\psi}] \quad (4.77)$$

и производной по t этого равенства, то можно получить достаточно простой вид функций (4.74). Будем предполагать, что предельное движение является прецессией общего вида. Укажем вначале выражения для D_1 и D_2 из (4.75)

$$D_1 = -\frac{a_0'^2}{\mu} [a_0 \mu \dot{\phi} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)], \quad D_2 = -\frac{a_0'^2}{\mu} [\mu \dot{\phi} + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)]. \quad (4.78)$$

Используя (4.8), (4.75), вычислим значения скалярных произведений

$$\begin{aligned}(\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) &= \frac{\dot{\phi}}{a_0'^2} [\mu a_0'^2 \dot{\phi} + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5)], \quad (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) = \frac{\dot{\phi}}{a_0'^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \\ (\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) &= \frac{\mu}{a_0'^2} (a_0 \ddot{\phi} + \ddot{\psi}), \quad (\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) = -\frac{\mu}{a_0'^2} (\ddot{\phi} + a_0 \ddot{\psi}).\end{aligned}\quad (4.79)$$

На основании (4.78), (4.79) из системы (4.74) получим

$$\begin{aligned}h_{12}(t) &= \frac{1}{a_0'^2} [-\mu a_0'^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - 2a_0'^2 (\boldsymbol{\tau}_5 \cdot \mathbf{a})] - \\ &- \dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_1) - a_0'^2 (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) - \\ &- \frac{1}{\mu} [(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5)], \\ h_{13}(t) &= \frac{\mu(\ddot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi} \ddot{\psi})}{\dot{\phi}}, \quad h_{32}(t) = \frac{\mu(\dot{\psi} - a_0 \dot{\phi}) - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)}{\mu}, \quad h_{33} = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}.\end{aligned}\quad (4.80)$$

В силу формул (4.80) однородная система, вытекающая из (4.69)–(4.71), принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu(\ddot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}\ddot{\psi})}{\dot{\phi}}x_3, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu}x_1 - \dot{\psi}x_3, \\
\dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}x_3.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Система (4.81) удобна тем, что ее решение сводится к решению уравнения Хилла.

Из второго уравнения системы (4.81) выразим x_1

$$x_1 = \mu(\dot{x}_2 + \dot{\psi}x_3). \tag{4.82}$$

Подставив x_1 из равенства (4.82) в первое уравнение системы (4.81) и учтем третье уравнение этой системы

$$\ddot{x}_2 + \left(\dot{\psi}h_{32}(t) - \frac{1}{\mu}h_{12}(t) \right) = 0. \tag{4.83}$$

Учитывая формулы (4.80), уравнение Хилла (4.83) запишем в компактной форме

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{\mu a_0'^2} \left\{ \mu a_0'^2 (\dot{\psi}^2 - \dot{\phi}^2 - a_0 \dot{\phi} \dot{\psi}) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_1) - a_0'^2 (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu} \left[(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 - 2a_0 (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi} \left[(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - 2a_0'^2 (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right] - \dot{\psi} \left[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) + a_0'^2 (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Сравнение структуры функции $p(t)$ из (4.85) и полученных ранее формул для этой функции (см., например, [11, 28]) показывает, что (4.85) имеет наиболее простой вид.

Для применения уравнения (4.84) с функцией необходимо учесть результаты, изложенные в п.4.1, согласно которым во всех рассматриваемых решениях, матрица имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Вид матрицы (4.86) позволяет упростить выражения (4.85). Например, в силу (4.8), (4.86) имеем

$$\begin{aligned} (B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= 2a_0a'_0(B_{13}\sin\varphi + B_{23}\cos\varphi) + a_0'^2B_{11} + a_0^2B_{33}, \\ (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) &= a_0'^2[-2a_0a'_0(B_{13}\sin\varphi + B_{23}\cos\varphi) + a_0'^2B_{11} + a_0^2B_{33}], \\ (B\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) &= a'_0(B_{13}\sin\varphi + B_{23}\cos\varphi) + a_0B_{33}, \\ (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) &= a_0'^2[a'_0(B_{13}\sin\varphi + B_{23}\cos\varphi) - a_0B_{11}], \\ (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) &= \lambda_3 - a_0B_{33} + a'_0(B_{13}\sin\varphi + B_{23}\cos\varphi), \\ (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) &= a'_0(\lambda_1 - 2a_0B_{13})\sin\varphi + a'_0(\lambda_2 - 2a_0B_{23})\cos\varphi + \\ &\quad + a_0\lambda_3 - a_0'^2B_{11} - a_0^2B_{33}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Укажем вид выражений $(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_1)$ и $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4)$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot C\boldsymbol{\tau}_1) &= a_0'^2 \left[\frac{1}{2}a_0^2(C_{22} - C_{11})\cos 2\varphi + a_0^2C_{12}\sin 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2a_0a'_0(C_{13}\sin\varphi + C_{23}\cos\varphi) + \frac{1}{2}(2a_0'^2C_{33} + a_0^2(C_{11} + C_{22})) \right], \\ (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) &= -\frac{1}{2}a_0'^2(C_{22} - C_{11})\cos 2\varphi - a_0'^2C_{12}\sin 2\varphi + \\ &\quad + a'_0(s_1 - 2a_0C_{13})\sin\varphi + a'_0(s_2 - 2a_0C_{23})\cos\varphi + \\ &\quad + s_3a_0 - C_{33}a_0^2 - \frac{1}{2}a_0'^2(C_{22} + C_{11}). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Сравнение выражений (4.87), (4.88) показывает, что матрицы B и C будут входить в окончательный вид $p(t)$ из (4.85) по-разному.

Запишем выражения (4.14) при выполнении соотношений (4.87)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mu}(-a_0\mu\dot{\varphi} + n_0 + n_1\cos\varphi + n'_1\sin\varphi), \quad (4.89)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\mu^2a_0'^2}(N_2\cos 2\varphi + N'_2\sin 2\varphi + N_1\cos\varphi + N'_1\sin\varphi + N_0), \quad (4.90)$$

где

$$\begin{aligned}
n_1 &= a'_0(a_0 B_{23} - \lambda_2), \quad n'_1 = a'_0(a_0 B_{13} - \lambda_1), \\
n_0 &= k - a_0 \lambda_3 + \frac{1}{2}(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}), \\
N_2 &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\mu(C_{11} - C_{22}) + (\lambda_1 - a_0 B_{13})^2 - (\lambda_2 - a_0 B_{23})^2 \right], \\
N'_2 &= -a_0'^2 \left[\mu C_{12} + (\lambda_1 - a_0 B_{13})(\lambda_2 - a_0 B_{23}) \right], \\
N_1 &= 2a'_0 \left[\mu(s_2 - C_{23} a_0) + n_0(\lambda_2 - a_0 B_{23}) \right], \\
N'_1 &= 2a'_0 \left[\mu(s_1 - C_{13} a_0) + n_0(\lambda_1 - a_0 B_{13}) \right], \\
N_0 &= -n_0^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 (\lambda_1 - a_0 B_{13})^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 (\lambda_2 - a_0 B_{23})^2 + \\
&\quad + \mu \left[2E + 2a_0 s_3 - \frac{1}{2} a_0'^2 (C_{11} + C_{22}) - a_0^2 C_{33} \right].
\end{aligned} \tag{4.91}$$

В ряде случаев выражение (4.85) удобно преобразовать к другому виду. Из равенства (4.7) имеем

$$\mu a_0'^2 \dot{\phi} \dot{\psi} = \dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - \dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4). \tag{4.92}$$

Подставим произведение $\dot{\phi} \dot{\psi}$ из (4.92) в уравнение (4.10) и учтем обозначение (4.11)

$$a_0' \mu \dot{\psi}^2 = a_0'^2 (g_2(\varphi) - \mu \dot{\phi}^2) - 2a_0 [\dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - \dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4)]. \tag{4.93}$$

Подставим выражения (4.92), (4.93) в формулу (4.850) и учтем в полученном уравнении $\dot{\psi}$ из (4.89). Тогда получим выражения для $p(t)$, не содержащее $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{\mu^2 a_0'^2} \left\{ (a_0'^2 \mu c_2 - N_2) \cos 2\varphi + (a_0'^2 \mu c'_2 - N'_2) \sin 2\varphi + \right. \\
&\quad + (a_0'^2 \mu c_1 - N_1) \cos \varphi + (a_0'^2 \mu c'_1 - N'_1) \sin \varphi + (a_0'^2 \mu c_0 - N_0) + \\
&\quad + \dot{\phi} a_0'^2 \mu [(\boldsymbol{v} \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - 2a_0(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)] + \\
&\quad + (n_0 + n_1 \cos \varphi + n'_1 \sin \varphi) [3a_0(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_2) - a_0'^2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)] + \\
&\quad + \mu [3a_0(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_2) - a_0'^2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4)] - \\
&\quad \left. - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 + 2a_0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Из (4.94) следует, что функция $p(t)$ имеет представление

$$p(t) = \frac{1}{\mu^2 a_0'^2} \left[a_0'^2 \dot{\varphi} (L_1 \cos \varphi + L_1' \sin \varphi + L_0) + F_2(\varphi) \right]. \quad (4.95)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1 &= a_0' \left[(3 + 2a_0^2) B_{23} - 2a_0 \lambda_2 \right], \\ L_1' &= a_0' \left[(3 + 2a_0^2) B_{13} - 2a_0 \lambda_1 \right], \\ L_0 &= a_0 \left[a_0'^2 B_{11} + (a_0^2 + 3) B_{33} \right] - 2\lambda_3 (1 + a_0^2). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Через $F_2(\varphi)$ в формуле (4.95) обозначен тригонометрический многочлен второго порядка

$$F_2(\varphi) = R_2 \cos 2\varphi + R_2' \sin 2\varphi + R_1 \cos \varphi + R_1' \sin \varphi + R_0. \quad (4.97)$$

Значения R_i ($i = \overline{0,2}$) можно получить на основании (4.94) и обозначений (4.13), (4.91).

При исследовании условий существования асимптотически — прецессионных движений гиростата (например, классов движения, для которых предельным движением являются указанные выше классы прецессий (см. раздел 3), или прецессии общего вида [30,34]) применима следующая схема анализа:

1. На параметры задачи накладываем условия, при выполнении которых предельное движение (4.3), (4.4) является периодическим.
2. В формулу (4.85) подставляем условия существования исследуемого класса движений и функции $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, полученные из соотношений (4.89), (4.90).
3. Поскольку функция $p(t)$ из (4.85) может быть преобразована к виду $p(t) = P(\sin(\varphi(t)), \cos(\varphi(t)))$, где P — алгебраическая функция от $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, то потребуем, чтобы существовали такие условия на параметры задачи, при выполнении которых $p(t) \leq 0$ ($p(t) \neq 0$).
4. На основании результатов Ляпунова [64] выписываем решение уравнения Хилла (4.84), имеющее положительное характеристическое число β^2 :

$$x_2(t) = e^{-\beta^2 t} \psi(t), \quad (4.98)$$

где $\psi(t)$ – периодическая функция времени.

5. Из третьего уравнения системы (4.81) определяем зависимость

$$x_3(t) = \dot{\phi}(t) \int_t^{\infty} \frac{h_{32}(t) \psi(t) e^{-\beta^2 t}}{\dot{\phi}(t)} dt. \quad (4.99)$$

6. Из формулы (4.82), используя соотношения (4.98), (4.99), находим $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \mu(\dot{x}_2(t) + \dot{\psi}(t)x_3(t)). \quad (4.100)$$

Поскольку $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$, то для получения зависимости $u_i(t)$

из (4.67) в виде

$$u = \frac{1}{q(t)} x \quad (4.101)$$

в качестве вектора x берем вектор $x = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$.

7. Вычисленные на основе (4.101) компоненты $u_i(t)$ подставляем в формулы (4.65). Эти формулы описывают решение линейной системы (4.61), (4.62).

В силу равенств (4.65), (4.98) – (4.100) делаем заключение о том, что линейная система (4.61), (4.62) имеет одно положительное характеристическое число, а линейная система (4.59), (4.60) допускает однопараметрическое семейство решений, которое описывает асимптотически – прецессионные движения гиростата. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \sum_{m_1=1}^{\infty} L_i^{(m_1)}(t) c^{m_1} e^{-\beta^2 m_1 t}, \\ \gamma_i &= \sum_{m_2=1}^{\infty} M_i^{(m_2)}(t) c^{m_2} e^{-\beta^2 m_2 t}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

В формулах (4.102) c – произвольная постоянная, функции $L_i^{(m_1)}(t)$, $M_i^{(m_1)}(t)$ имеют характеристические числа не более нуля. Ряды (4.102) сходятся абсолютно.

4.3. Выводы

В данном разделе проведен анализ прецессионных движений сферического гиростата в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Уточнены и дополнены результаты А.В. Мазнева [30], полученные им в исследовании прецессий сферического гиростата. В случае периодических решений, определяющих прецессионные движения сферического гиростата, выполнено интегрирование уравнений для скоростей прецессии и собственного вращения.

Разработана общая схема изучения условий существования асимптотически – прецессионных движений. Нахождение решений уравнений в вариациях, имеющих положительное характеристичное число, сведено к исследованию решений уравнения Хилла. Доказано, что найденная форма уравнения Хилла является наиболее простой по сравнению с используемыми ранее в научной литературе формами этого уравнения.

РАЗДЕЛ V

АСИМПТОТИЧЕСКИ – ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

В данном разделе исследованы условия существования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата. Рассмотрены случаи, когда предельное периодическое движение является регулярной прецессией, полурегулярной прецессией первого и второго типа и прецессией общего вида. Выполнен анализ систем алгебраических уравнений на параметры задачи в отдельных вариантах (в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести, в задачах о движении гиростата под действием центральных ньютоновских сил и в задаче о движении гиростата в поле сил Лоренца). Построены ряды Ляпунова, описывающие рассматриваемые классы асимптотических движений.

5.1. Асимптотические к регулярным прецессиям движения сферического гиростата

Запишем уравнения сферического гиростата (4.1)

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\mu} [(\lambda - B\mathbf{v}) \times \omega + (s - C\mathbf{v}) \times \mathbf{v}], \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega \quad (5.2)$$

и их интегралы (4.2)

$$\begin{aligned} \mu\omega^2 - 2(s \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= 2E, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= 1, \quad (\mu\omega + \lambda) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассмотрим класс регулярных прецессий относительно вертикали [30]

$$\omega_1 = ma'_0 \sin nt, \quad \omega_2 = ma'_0 \cos nt, \quad \omega_3 = n + ma_0, \quad (5.4)$$

$$v_1 = a'_0 \sin nt, \quad v_2 = a'_0 \cos nt, \quad v_3 = a_0, \quad (5.5)$$

где $a_0 = \cos \theta_0, a'_0 = \sin \theta_0$.

Решение (5.4), (5.5) является периодическим с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Условия его существования получены в книге [30] для общего случая. Они вытекают из следующих равенств

$$\begin{aligned} m(\tau_3 \cdot \tau_5) + (\tau_3 \cdot \tau_4) &= 0, \quad \tau_3 \cdot \tau_5 = 0, \\ a_0'^2 \mu m n + m(\tau_1 \cdot \tau_5) - n(\tau_2 \cdot \tau_5) + (\tau_1 \cdot \tau_4) &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathbf{a} - a_0 \mathbf{v}, \quad \tau_2 = \mathbf{v} - a_0 \mathbf{a}, \quad \tau_3 = \mathbf{a} \times \mathbf{v}, \\ \tau_4 &= \mathbf{s} - C \mathbf{v}, \quad \tau_5 = \boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

при условии, что они являются тождествами по φ в силу соотношений (5.5). Запишем их в случае сферического гиростата при трех дополнительных условиях

$$B_{23} = 0, \quad \lambda_3 = a_0 B_{33}, \quad s_3 = a_0 C_{33}, \quad (5.8)$$

которые примем для наглядности и краткости вычислений. Тогда условия регулярных прецессий имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{11} & 0 \\ B_{13} & 0 & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & -mB_{13} \\ 0 & C_{11} & 0 \\ -mB_{13} & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= (a_0 B_{13}, 0, a_0 B_{33}), \quad \mathbf{s} = (-a_0 m B_{13}, 0, a_0 C_{33}), \\ a_0 C_{11} &= m^2 \mu + B_{11} (a_0 m + n). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Запишем соотношения в векторном виде

$$\boldsymbol{\omega} = n \mathbf{a} + m \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \quad \mathbf{a} = (0, 0, 1). \quad (5.11)$$

В разделе 4 описан метод исследования условий существования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата. В данном пункте будем предполагать, что предельным движением является регулярная прецессия (5.11) (ее обозначим через $\boldsymbol{\omega}^*(t), \mathbf{v}^*(t)$). Это означает, что параметры уравнений (5.1), (5.2) удовлетворяют условиям (5.8)–(5.10).

Пусть в (5.1), (5.2)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\gamma}. \quad (5.12)$$

Тогда уравнения для возмущений $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ таковы

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{1}{\mu} \left[\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + (na + m\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\Omega}) \times B\boldsymbol{\gamma} + (\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times C\boldsymbol{\gamma} \right], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= (\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\Omega} - (na + m\mathbf{v}^*) \times \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\quad (5.13)$$

На основании (5.13) выпишем линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{1}{\mu} \left[\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + (na + m\mathbf{v}^*) \times B\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{v}^* \times C\boldsymbol{\gamma} \right], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\Omega} - (na + m\mathbf{v}^*) \times \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

которая допускает первые интегралы

$$\begin{aligned}\mu \left[(na + m\mathbf{v}^*) \cdot \boldsymbol{\Omega} \right] - \boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_1, \quad \mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \\ \mu (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \left[\mu (na + m\mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5 \right] \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_3.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Следуя разделу 4 для анализа характеристических чисел линейной системы (5.14) выполним замены переменных. Первая замена имеет вид

$$\begin{aligned}u_1 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}), \quad u_2 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}^*), \quad u_3 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \\ u_4 &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^*, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}_3,\end{aligned}\quad (5.16)$$

для которой первоначальные векторы $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ таковы

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\mu a_0'^2} (u_1 \boldsymbol{\tau}_1 + u_2 \boldsymbol{\tau}_2 + u_3 \boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2} (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3). \quad (5.17)$$

Формулы (5.17) показывают, что величины u_i — компоненты разложения векторов $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ в базисе $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3$.

Вторая замена основана на структуре первых интегралов (5.15), которые при наличии (5.16) упрощаются

$$\begin{aligned}nu_1 + mu_2 - \frac{1}{a_0'^2} \boldsymbol{\tau}_4 \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3) &= c_1, \\ u_5 &= c_2, \quad u_2 + \mathbf{b} \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3) = c_3,\end{aligned}\quad (5.18)$$

где

$$\mathbf{b} = \frac{1}{a_0'^2} \left[\mu (na + m\mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5 \right].$$

Запишем ее в матричном виде, введя векторы

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_6)^T \quad (5.19)$$

и матрицу $q(t)$ с элементами (см. раздел 4)

$$\begin{aligned} q_{11} &= 0, & q_{12} &= 0, & q_{13} &= 1, & q_{14} &= 0, & q_{15} &= 0, & q_{16} &= 0, \\ q_{21} &= 0, & q_{22} &= 0, & q_{23} &= 0, & q_{24} &= 1, & q_{25} &= 0, & q_{26} &= 0, \\ q_{31} &= 0, & q_{32} &= 0, & q_{33} &= 0, & q_{34} &= 0, & q_{35} &= 0, & q_{36} &= 1, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} q_{41} &= n, & q_{42} &= m, & q_{43} &= 0, & q_{44} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \\ q_{45} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), & q_{46} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} q_{51} &= 0, & q_{52} &= 0, & q_{53} &= 0, & q_{54} &= 0, & q_{55} &= 1, & q_{56} &= 0, \\ q_{61} &= 0, & q_{62} &= 1, & q_{63} &= 0, & q_{64} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, & q_{65} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2, & q_{66} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3. \end{aligned}$$

Тогда вторая замена в силу (5.19), (5.20) такова

$$\mathbf{x} = q(t)\mathbf{u}. \quad (5.22)$$

В статье [24] показано, что в результате преобразований (5.16), (5.21) с учетом (5.19), (5.21) можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3 + R_1(t), \\ \dot{x}_2 &= h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2 + h_{23}(t)x_3 + R_2(t), \\ \dot{x}_3 &= h_{31}(t)x_1 + h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3 + R_3(t), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(t) &= h_{14}(t)c_1 + h_{15}(t)c_2 + h_{16}(t)c_3, \\ R_2(t) &= h_{24}(t)c_1 + h_{25}(t)c_2 + h_{26}(t)c_3, \\ R_3(t) &= h_{34}(t)c_1 + h_{35}(t)c_2 + h_{36}(t)c_3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Значения $h_{ij}(t)$ ($i=1, j=\overline{1,6}$) приведены в [24] для общего случая асимптотически – прецессионных движений гиростата. Однако они имеют достаточно сложный вид. В разделе 4 показано, что для прецессий общего вида они могут быть значительно упрощены. Поскольку случай $\dot{\phi} = n$, $\dot{\psi} = m$ в этом разделе исключен, то его рассмотрим в данном пункте.

Характеристические числа системы (5.23), отличные от нуля, порождены однородной системой

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3, \\
\dot{x}_2 &= h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2 + h_{23}(t)x_3, \\
\dot{x}_3 &= h_{31}(t)x_1 + h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Поэтому проведем анализ коэффициентов только этой системы.

Коэффициенты $h_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1,3}$) зависят от векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$

$$\mathbf{g}_1 = n\mathbf{b}, \quad \mathbf{g}_2 = m\mathbf{b} + \frac{1}{a_0'^2}\boldsymbol{\tau}_4, \tag{5.26}$$

и от параметров

$$D_1 = a_0'^2 \left[m + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \mathbf{b}) \right], \quad D_2 = a_0'^2 \left[-a_0 m + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_2 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \mathbf{b}) \right]. \tag{5.27}$$

С помощью равенств (5.6) вычислим (5.27)

$$D_1 = -\frac{a_0'^2}{\mu} (a_0 \mu n + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \quad D_2 = \frac{a_0'^2}{\mu} (\mu n + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \tag{5.28}$$

и скалярные произведения векторов (5.26) и $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ соответственно

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= \frac{n}{a_0'^2} [a_0'^2 \mu n + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5)], \\
\mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= \frac{n}{a_0'^2} (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \quad \mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3 = 0, \quad \mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

В силу (5.7), (5.9), (5.10) очевидны формулы

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_1 &= (-a_0 a_0' \sin \varphi, -a_0 a_0' \cos \varphi, a_0'^2), \\
\boldsymbol{\tau}_2 &= (a_0' \sin \varphi, a_0' \cos \varphi, 0), \quad \boldsymbol{\tau}_3 = (-a_0' \cos \varphi, a_0' \sin \varphi, 0), \\
\boldsymbol{\tau}_4 &= (-a_0' C_{11} \sin \varphi, -a_0' C_{11} \cos \varphi, a_0' m B_{13} \sin \varphi), \\
\boldsymbol{\tau}_5 &= (-a_0' B_{11} \sin \varphi, -a_0' B_{11} \cos \varphi, -a_0' B_{13}), \\
B \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= a_0'^2 (a_0^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33} - 2a_0 a_0' B_{13} \sin \varphi), \\
B \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 &= a_0'^2 (a_0'^2 B_{13} \sin \varphi - a_0 B_{11}), \\
C \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= a_0'^2 (a_0^2 C_{11} + a_0'^2 C_{33} + 2a_0 a_0' m B_{13} \sin \varphi).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Используя выражения (5.28)–(5.30) и обозначения для $h_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1,3}$) из статьи [24], получим

$$\begin{aligned}
h_{11}(t) &= 0, \quad h_{12}(t) = \frac{1}{\mu} \left[a_0' B_{13}^2 \sin^2 nt + a_0' B_{13} (n + ma_0) \sin nt + h_0 \right], \\
h_{13}(t) &= 0, \quad h_{21}(t) = \frac{1}{\mu}, \quad h_{22}(t) = 0, \quad h_{23}(t) = -m, \\
h_{31} &= 0, \quad h_{32}(t) = \frac{1}{\mu} \left[\mu(m - a_0 n) + a_0' B_{11}^2 + a_0 a_0' B_{13} \sin nt \right], \quad h_{33} = 0,
\end{aligned} \tag{5.31}$$

где

$$h_0 = \mu(a_0'^2 - a_0^2)C_{11} - \mu a_0'^2 C_{33} - a_0'^2 B_{11}^2 - \mu^2 n^2 - a_0 \mu n B_{11} - a_0'^2 \mu m B_{22}. \tag{5.32}$$

Следовательно, из (5.25) с учетом (5.31) получим

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{\mu} \left[a_0'^2 B_{13}^2 \sin^2 nt + a_0 \mu B_{13} (n + ma_0) \sin nt + h_0 \right] x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu} x_1 - m x_3, \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{\mu} \left[\mu(m - a_0 n) + a_0' B_{11}^2 + a_0 a_0' B_{13} \sin nt \right] x_2.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Вид системы (5.33) позволяет рассмотреть один интересный случай: $B_{13} = 0$.

Тогда системы (5.33) становится системой с постоянными коэффициентами

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x}, \tag{5.34}$$

где $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $A = (A_{ij})$:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 0, \quad A_{12} = \frac{h_0}{\mu}, \quad A_{13} = 0, \\
A_{21} &= \frac{1}{\mu}, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -m, \\
A_{31} &= 0, \quad A_{32} = h_1, \quad A_{33} = 0,
\end{aligned} \tag{5.35}$$

где $h_1 = \frac{1}{\mu} [a_0'^2 B_{11} + \mu(m - a_0 n)]$. Составим характеристическое уравнение системы

(5.34) с обозначениями (5.35)

$$\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{h_0}{\mu^2} - m h_1 \right) \right] = 0. \tag{5.36}$$

Пусть выполняется условие

$$\frac{h_0}{\mu^2} - mh_1 > 0. \quad (5.37)$$

Тогда характеристическое уравнение (5.36) имеет решение с положительным характеристическим числом. Выпишем соответствующее решение:

$$x_1 = -\frac{h_0 c}{\mu \varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 t}, \quad x_2 = c e^{-\varepsilon_0 t}, \quad x_3 = -\frac{h_1 c}{\varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 t}. \quad (5.38)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{h_0}{\mu^2} - mh_1}$, c – произвольная постоянная.

В силу (5.38) в качестве решения линейной однородной системы из (5.23) необходимо выбрать вектор

$$x = \frac{c e^{-\varepsilon_0 t}}{\varepsilon_0} \left(-\frac{h_0}{\mu}, c \varepsilon_0, -h_1, 0, 0, 0 \right)^T. \quad (5.39)$$

С помощью формул (5.22), (5.17) находим решение линейной системы (5.14), которое имеет положительное характеристическое число. Таким образом, если выполнено условие $B_{13} = 0$ и неравенство (5.37), то существует такое начальное положение гиростата и его начальная угловая скорость, для которых движение гиростата будет асимптотически–прецессионным движением, а предельное движение будет описываться регулярной прецессией относительно вертикали.

Пусть теперь $B_{13} \neq 0$. Из второго уравнения системы (5.33) определим x_1 :

$$x_1 = \mu \dot{x}_2 + m x_3. \quad (5.40)$$

Подставим (5.40) в первое уравнение системы (5.33)

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{\mu} \left[(mh_1 \mu^2 - h_0) - a'_0 B_{13}^2 \sin^2 nt - a'_0 n m B_{13} \sin nt \right] x_2 = 0. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) является уравнением Хилла с периодической функцией при x_2 : $mh_1 \mu^2 - h_0 - a'_0 B_{13}^2 u^2 - a'_0 n m B_{13} u$, где через u обозначена функция $\sin nt$. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$n^2 m^2 + 4(mh_1 \mu^2 - h_0) < 0, \quad (5.42)$$

где h_0 имеет значение (5.32), h_1 выписано выше. Тогда уравнение (5.41) согласно условию Ляпунова имеет решение с положительным характеристическим числом β_0^2

$$x_2 = c\psi(t)e^{-\beta_0^2 t}, \quad (5.43)$$

где c – произвольная постоянная, $\psi(t)$ – периодическая функция t (период равен $\frac{2\pi}{n}$). Для построения решения линейной системы (5.33), которое имеет положительное характеристическое число необходимо воспользоваться третьим уравнением из (5.33) и формулой (5.40). Это решение при условии, что в (5.22) положено $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ дает решение полной линейной системы (5.22). Тогда решение системы (5.14), имеющее положительное характеристическое число, можно найти, воспользовавшись преобразованиями (5.16), (5.22). Следовательно, если выполнено условие (5.42), то движение гиростата будет асимптотически–прецессионным при определенном выборе начальных значений переменных Ω, γ . Оно описывается рядами Ляпунова.

5.2. Асимптотически – прецессионные движения первого типа

5.2.1. Первый класс движений

Рассмотрим случай, когда предельное движение является полурегулярной прецессией первого типа

$$\omega = \dot{\varphi}a + m\nu, \quad \nu = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0). \quad (5.44)$$

Параметры задачи подчиним условиям, отвечающим первому классу полурегулярных прецессий первого типа (4.23)–(4.26). Для получения наглядных условий существования асимптотически – прецессионных движений потребуем ряд дополнительных ограничений. То есть при изучении первого класса полурегулярных прецессий гиростата примем равенства

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad B_{ij} = 0, \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{22} = C_{11}, \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -m\lambda_3. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Тогда зависимость $\varphi(t)$ находится из уравнения (4.26)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\mu} (c_0^* + 2s_2 \cos \varphi). \quad (5.46)$$

Пусть в формуле (5.46) параметры c_0^* , s_2 удовлетворяют неравенствам

$$c_0^* > 2s_2 > 0. \quad (5.47)$$

В силу (5.47) из формулы (5.46) определим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2\operatorname{am} \tau, \quad \sin \varphi = 2\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau, \quad \cos \varphi = \operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \tau, \\ \tau &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_0^* + 2s_2}{\mu}} t, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{c_0^* + 2s_2}{\mu}} \operatorname{dn} \tau, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где $\operatorname{am} \tau$, $\operatorname{cn} \tau$, $\operatorname{sn} \tau$, $\operatorname{dn} \tau$ – эллиптические функции с модулем

$$k_* = 2 \sqrt{\frac{s_2}{c_0^* + 2s_2}}.$$

Отметим, что условия (5.45), (5.46) получены из уравнений

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\varphi} &= -m(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \quad a_0 \mu \ddot{\varphi} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \\ a_0'^2 \mu \dot{\varphi} t + m(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) &- \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Следуя разделу 4, обозначим решение (5.44) так

$$\boldsymbol{\omega}^* = \dot{\varphi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*, \quad \mathbf{v}^* = (a_0' \sin \varphi, a_0' \cos \varphi, a_0). \quad (5.50)$$

При исследовании асимптотических движений к движениям, описываемым равенствами (5.50) (или в виде функций Якоби (5.48)), положим

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi \mathbf{a} + m \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\gamma}. \quad (5.51)$$

В силу (5.51) по аналогии со случаем (5.14) запишем уравнение в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{1}{\mu} \left[\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + (\dot{\varphi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*) \times B \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{v}^* \times C \boldsymbol{\gamma} \right], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\Omega} - (\dot{\varphi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*) \times \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Уравнение (5.52) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} \mu \left[(\dot{\varphi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*) \cdot \boldsymbol{\Omega} \right] - (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma}) &= c_1, \quad \mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \\ \mu (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \left[\mu (\dot{\varphi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5 \right] \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_3. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Векторы $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}_3$, $\boldsymbol{\tau}_4$, $\boldsymbol{\tau}_5$, входящие в (5.49), имеют вид (5.7).

Следуя методу раздела 4, введем переменные u_i по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}), & u_2 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}^*), & u_3 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \\ u_4 &= (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}), & u_5 &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^*), & u_6 &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \end{aligned} \quad (5.54)$$

тогда

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{a_0'^2 \mu} (u_1 \boldsymbol{\tau}_1 + u_2 \boldsymbol{\tau}_2 + u_3 \boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2} (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3). \quad (5.55)$$

В силу (5.54) из (5.53) по аналогии с (5.18) имеем

$$\dot{\phi} u_1 + m u_2 - \frac{1}{a_0'^2} [\boldsymbol{\tau}_4 \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3)] = c_1, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} u_5 &= c_2, & u_2 + \mathbf{b} \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3) &= c_3, \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{a_0'^2} [\mu(\dot{\phi} \mathbf{a} + m \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Введем обозначения (5.19) и рассмотрим преобразование (5.22)

$$\mathbf{x} = q(t) \mathbf{u}, \quad (5.58)$$

где элементы матрицы $q(t) = (q_{ij}(t))$ таковы

$$\begin{aligned} q_{11} &= 0, & q_{12} &= 0, & q_{13} &= 1, & q_{14} &= 0, & q_{15} &= 0, & q_{16} &= 0, \\ q_{21} &= 0, & q_{22} &= 0, & q_{23} &= 0, & q_{24} &= 1, & q_{25} &= 0, & q_{26} &= 0, \\ q_{31} &= 0, & q_{32} &= 0, & q_{33} &= 0, & q_{34} &= 0, & q_{35} &= 0, & q_{36} &= 1, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} q_{41} &= \dot{\phi}, & q_{42} &= m, & q_{43} &= 0, & q_{44} &= -\frac{1}{a_0'^2} (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \\ q_{45} &= -\frac{1}{a_0'^2} (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), & q_{46} &= -\frac{1}{a_0'^2} (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} q_{51} &= 0, & q_{52} &= 0, & q_{53} &= 0, & q_{54} &= 0, & q_{55} &= 1, & q_{56} &= 0, \\ q_{61} &= 0, & q_{62} &= 1, & q_{63} &= 0, & q_{64} &= (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1), & q_{65} &= (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2), & q_{66} &= (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3). \end{aligned}$$

Следует иметь ввиду, что компоненты (5.59), (5.60) отличаются от компонент (5.20), (5.21) не только тем, что в (5.60) вместо n входит $\dot{\phi}$, но и тем, что в формулах (5.60) вектор $\mathbf{b}$ задается формулой (5.57). В (5.57), (5.60) предполагается, что $\dot{\phi}$ определяется формулой из (5.48). Если учесть обозначения $\boldsymbol{\tau}_i$ из (5.7) и $\mathbf{v}^*$ из (5.50), где функции $\sin \phi$ и $\cos \phi$ имеют вид, указанный в

системе (5.48), то интегралы (5.56) представляют собой линейные функции по u_i с периодическими коэффициентами, период которых равен периоду эллиптических функций из (5.48).

В результате преобразований (5.54), (5.58) из (5.52) получим линейную систему с периодическими коэффициентами вида (5.23), (5.24), но с другими функциями $h_{ij}(t)$. Если использовать результат, указанный Г.В. Горром и Д.И. Думбаем [24] при условии, что $A = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$, то можно получить однородную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu}x_1 - tx_3, \\ \dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3.\end{aligned}\tag{5.61}$$

В разделе 4 рассмотрен случай прецессии общего вида и получена достаточно удобная для исследования система. Если воспользоваться условиями (5.49) для преобразования функций $h_{13}(t)$, $h_{33}(t)$, то получим

$$h_{13}(t) = \frac{\mu t \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}, \quad h_{33}(t) = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}},$$

то есть система (5.61) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu t \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu}x_1 - tx_3, \\ \dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3.\end{aligned}\tag{5.62}$$

Эта система показывает, что случай $\dot{\psi} = t$ может быть получен и из системы, указанной в разделе 4. Следовательно он не является особым в получении линейной системы.

В работе Г.В. Горра и Е.М. Мироновой [36] система (5.62) получена другим способом. В этой работе проведена редукция системы (5.62) к уравнениям Хилла

путем подстановки функции x_1 , найденной из второго уравнения системы (5.62), во второе уравнение этой системы

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{\mu}(\mu m h_{32}(t) - h_{12}(t))x_2 = 0, \quad (5.63)$$

где

$$\begin{aligned} h_{12}(t) = & \frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\phi}} \left\{ \mu \dot{\phi}^2 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - \mu m \dot{\phi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - \mu \dot{\phi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_1) - \right. \\ & - \mu a_0'^2 \dot{\phi} (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{s} - \mathbf{v}^* \cdot C \mathbf{v}) - \left[\mu \dot{\phi} + \mathbf{a} (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) \right] \left[\mu a_0'^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) \right] - \\ & - \left[\mu a_0 \dot{\phi} + \mathbf{v}^* \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) \right] \left[\mu a_0'^2 m \dot{\phi} + m \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\mathbf{s} - C \mathbf{v}^*) \right] \Big\}, \quad (5.64) \\ h_{32}(t) = & -\frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\phi}} \left[a_0 a_0'^2 \mu \dot{\phi}^2 + a_0 \dot{\phi} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) + \right. \\ & \left. + m \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\mathbf{s} - C \mathbf{v}^*) \right]. \end{aligned}$$

В статье [36] при рассмотрении прецессии первого типа в качестве предельного движения для функции

$$p(t) = \frac{1}{\mu}(\mu m h_{32}(t) - h_{12}(t)) \quad (5.65)$$

на основании (5.64) получена рациональная функция относительно $\sin \varphi$, которая является отношением квадратичной функции относительно $\sin \varphi$ к линейной функции относительно этой переменной. Однако, если воспользоваться преобразованиями, указанными в разделе 4, для случая прецессии первого типа, то получим более простое выражение для $p(t)$

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{1}{\mu a_0'^2} \left\{ -a_0'^2 \mu \dot{\phi}^2 + a_0'^2 \mu m^2 + \dot{\phi} \left[(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) - 2a_0'^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right] - \right. \\ & - m \left[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B \boldsymbol{\tau}_1) + a_0'^2 (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C \boldsymbol{\tau}_1) - a_0'^2 (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) \right] - \\ & \left. - \frac{1}{\mu} \left[(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 - 2a_0 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5) (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_5) \right] - a_0 a_0'^2 \mu \dot{\phi} m \right\}. \quad (5.66) \end{aligned}$$

Например, при $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ из (5.66) с учетом (5.49) найдем

$$\begin{aligned}
p(t) = & \frac{1}{a_0'^2 \mu} \left\{ a_0 a_0'^2 \mu \dot{\varphi} m + a_0'^2 \mu m^2 - a_0'^2 \mu \dot{\varphi}^2 - \right. \\
& - \dot{\varphi} \left[a_0 (1 + a_0^2 a_0'^2) B_{33} - a_0^3 a_0'^2 B_{11} - 2 a_0'^2 \lambda_3 \right] - \\
& - m a_0'^2 \left[a_0' \lambda_1 \sin \varphi + a_0' \lambda_2 \cos \varphi + a_0 \lambda_3 + (a_0^2 - a_0'^2) (B_{11} - B_{33}) \right] + \\
& + (a_0'^2 - a_0^2) (C_{11} a_0'^2 \sin^2 \varphi + C_{22} a_0'^2 \cos^2 \varphi) - \\
& - a_0'^3 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a_0 a_0'^2 s_3 + (a_0^2 - a_0'^2) a_0'^2 C_{33} - \\
& - \frac{a_0'^2}{\mu} \left[\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + 2 \lambda_1 \lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi - \right. \\
& \left. - 2 a_0' \lambda_1 B_{11} \sin \varphi - 2 a_0' \lambda_2 B_{11} \cos \varphi + a_0'^2 B_{11}^2 + (\lambda_3 - a_0 B_{33})^2 \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Запишем функцию (5.67) для случая первого класса прецессии первого типа (5.44), то есть положим, что в (5.67) выполняются соотношения (5.45), (5.46), (5.48)

$$\begin{aligned}
p(t) = & \frac{1}{a_0'^2 \mu} \left[2 \lambda_3 \sqrt{\frac{c_0^* + 2 s_3}{\mu_2}} \operatorname{dn} \tau - 3 s_2 (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \tau) + \mu m^2 - \right. \\
& \left. - c_0^* + m (B_{11} - B_{33}) + (C_{11} - C_{33}) - \frac{1}{\mu} (B_{11}^2 + \lambda_3^2) \right].
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Следовательно, для функции x_2 в силу (5.63) имеем уравнение

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \tag{5.69}$$

где функция $p(t)$ имеет вид (5.68).

При анализе решения уравнения (5.69), которое имеет положительное характеристическое число, воспользуемся условиями Ляпунова [64]: $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$). Поскольку эллиптическая функция $\operatorname{dn} \tau$ ограничена и содержит в качестве множителя в равенстве (5.68) величину $\sqrt{c_0^* + 2 s_2}$, а параметр c_0^* удовлетворяет условию (5.47), то выбором достаточно больших положительных значений этого параметра в (5.68) можно добиться указанного выше условия $p(t) \leq 0$. Тогда уравнение (5.69) имеет решение с положительным характеристическим числом β_0^2 : $x_2(t) = c \psi(t) e^{-\beta_0^2 t}$, где c — произвольная

постоянная, $\psi(t)$ – периодическая функция с периодом равным периоду функций (5.48). При этом функции $x_1(t)$, $x_3(t)$ найдем из второго и третьего уравнений системы (5.62), а для функций $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ принимаем нули ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$). Тогда будет построено первое приближение для решений, описывающих асимптотически – прецессионные движения гиростата, предельным движением которых служит прецессия (5.50). Построение рядов Ляпунова описано в разделе 2.

5.2.2. Второй класс движений

Этот класс описывается соотношениями (5.44), в которых $a_0 \neq 0$, $\dot{\varphi}$ характеризуется линейной зависимостью (4.30) и условиями на параметры, полученными в статье [36]. Для получения наглядных условий существования рассмотрим последние в частном случае

$$\begin{aligned} B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \\ \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = a_0(B_{33} - B_{11}), \quad \lambda_1^2 = a_0^2 \mu (C_{22} - C_{11}), \quad m = -\frac{B_{11}}{\mu}, \quad (5.70) \\ s_2 = s_1 = 0, \quad s_3 = a_0 \left[(C_{33} - C_{22}) + \frac{B_{11}}{a_0^2 \mu} (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) \right]. \end{aligned}$$

Зависимость $\varphi(t)$ находим из уравнения

$$\dot{\varphi} = p_0 + q_0 \sin \varphi, \quad (5.71)$$

где

$$p_0 = \frac{a_0 B_{11}}{\mu}, \quad q_0 = -\frac{a_0' \lambda_1}{a_0 \mu}. \quad (5.72)$$

Следуя статье Г.В. Горра, Е.М. Мироновой [36], будем предполагать $p_0 > 0$, $p_0 > q_0$, то есть в силу (5.72) параметры задачи подчиним условиям

$$a_0 B_{11} > 0, \quad \frac{a_0^2 B_{11} + a_0' \lambda_1}{a_0} > 0. \quad (5.73)$$

Неравенства (5.73) выполняются, например, при

$$a_0 > 0, \quad B_{11} > 0, \quad a_0^2 B_{11} + a_0' \lambda_1 > 0.$$

Как отмечено в пункте 5.2.1, условия существования асимптотически – прецессионных движений в данном варианте рассмотрены в [36]. В основе исследования лежит уравнение Хилла вида $\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0$, где $p(t)$ – отношение многочлена третьего порядка относительно $\sin \varphi$ к многочлену первого порядка. Покажем, что если за основу взять функцию (5.67), то получим более наглядные и простые условия существования асимптотических движений.

При условиях $p_0 > 0$, $p_0 > q_0$ из (5.71) следует, что $\dot{\varphi} > 0$, то есть переменная φ является монотонно возрастающей переменной

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \frac{p_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{p_0^2 - q_0^2} - q_0 \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = \sqrt{p_0^2 - q_0^2} t. \quad (5.74)$$

Из формулы (5.74) вытекает, что функции $\sin \varphi(t)$, $\cos \varphi(t)$ являются периодическими функциями времени с периодом T :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p_0^2 - q_0^2}}.$$

То есть решение (5.44), которое в скалярной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a'_0 m \sin \varphi(t), \quad \omega_2 = a'_0 m \cos \varphi(t), \quad \omega_3 = (p_0 + a_0) + q_0 \sin \varphi(t), \\ \nu_1 &= a'_0 \sin \varphi(t), \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi(t), \quad \nu_3 = a_0, \end{aligned} \quad (5.75)$$

обладает свойством периодичности и $\dot{\varphi} \neq 0$. Это значит, что при исследовании условий существования асимптотически – прецессионных движений, предельным движением для которых является прецессия (5.75), можно воспользоваться методикой п. 5.2.1. Она состоит в применении следующих преобразований:

- запись линейной системы (5.52) с первыми интегралами (5.53);
- выполнение двух последовательных замен переменных (5.55), (5.58), которые не изменяют характеристические числа линейной системы (5.52);
- редукция исходной линейной системы к системе (5.61);
- анализ решений уравнения Хилла, в котором функция $p(t)$ имеет вид (5.66).

Таким образом, основная задача в изучении асимптотических движений заключается в анализе функции (5.66) при условиях (5.70), (5.71):

$$p(t) = \frac{1}{a_0'^2} \left[-\frac{2a_0'^4 \lambda_1^2}{a_0^2} \sin^2 \varphi + 3a_0'^3 \lambda_1 B_{11} \sin \varphi + a_0'^4 \mu (C_{22} - C_{33}) + B_{11} B_{33} (a_0'^4 - a_0^4) - a_0'^4 B_{11}^2 \right]. \quad (5.76)$$

Поскольку коэффициент при $\sin^2 \varphi$ в формуле (5.76) отрицателен, то функцию (5.76) можно представить в виде квадратичной функции относительно $\sin \varphi$, ветви которой направлены в отрицательном направлении оси p . Если потребовать выполнения неравенства

$$8a_0'^4 \mu (C_{22} - C_{33}) + 8(1 - 2a_0'^2) B_{11} B_{33} + a_0'^2 (17a_0'^2 - 8) B_{11}^2 < 0, \quad (5.77)$$

то уравнение Хилла $\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0$ с функцией (5.76) будет иметь решение с положительным характеристическим числом вида (5.43). К условию (5.77) необходимо присоединить неравенство $C_{22} > C_{11}$, которое дает действительное значение параметра λ_1 из системы (5.70), и неравенства (5.73). При выполнении указанных условий линейная система (5.62) записанная в силу (5.71)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \mu m q_0 \cos \varphi \cdot x_3, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu} x_1 - m x_3, \\ \dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + q_0 \cos \varphi \cdot x_3, \end{aligned} \quad (5.78)$$

имеет решение с положительным характеристическим числом. Также как и в пункте 5.2.1, переменная $x_2 = c\psi e^{-\beta_0^2 t}$, где $\psi(t)$ – периодическая функция, но имеющая другой период, по сравнению со случаем $a_0 = 0$. Однако формально оба случая можно объединить в один результат: установлены условия существования асимптотически – прецессионных движений, для которых предельным движением является полурегулярная прецессия гиростата (5.50). Эти движения описываются рядами Ляпунова

$$\Omega_i = \sum_{m_1=1}^{\infty} L_i^{(m_1)}(t) c^{m_1} e^{-\beta_0^2 m_1 t}, \quad \gamma_i = \sum_{m_2=1}^{\infty} M_i^{(m_2)}(t) c^{m_2} e^{-\beta_0^2 m_2 t}, \quad (5.79)$$

в которых c – произвольная постоянная, функции $L_i^{(m_1)}(t)$, $M_i^{(m_2)}(t)$ имеют неотрицательные характеристические числа. При $t \rightarrow \infty$ $\Omega_i(t) \rightarrow 0$, $\gamma_i(t) \rightarrow 0$. Ряды (5.79) сходятся абсолютно.

Таким образом, в данном пункте найдены новые условия существования асимптотически – прецессионных движений, которые имеют более простой вид по сравнению с рассмотренными в [36].

5.3. Асимптотически – прецессионные движения второго типа

Рассмотрим случай, когда предельное движение сферического гиростата описывается прецессией второго типа [30]

$$\omega^* = n\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^*, \quad \mathbf{v}^* = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0). \quad (5.80)$$

Причем исследуем вариант (4.36) – (4.38)

$$\begin{aligned} B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \mu(C_{22} - C_{11}), \quad s_3 = a_0(C_{33} - C_{22}) - nB_{11} - \frac{3n\mu}{\lambda_1}(s_1 + \lambda_1 na_0), \end{aligned} \quad (5.81)$$

а параметр прецессии n и функция $\dot{\psi}$ таковы

$$\begin{aligned} n = -\frac{1}{2\mu}[\lambda_3 + a_0(B_{11} - B_{33})], \\ \dot{\psi} = -\frac{1}{\lambda_1\mu}(\mu s_1 + \mu\lambda_1 na_0 + \lambda_1^2 a'_0 \sin nt). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Анализ условий существования асимптотических движений будем проводить с помощью метода, указанного в разделе 4. Положим в уравнениях (5.1), (5.2)

$$\omega = n\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^* + \mathbf{\Omega}, \quad \gamma = \mathbf{v}^* + \mathbf{\Omega}, \quad (5.83)$$

выпишем линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{\mu}[\boldsymbol{\tau}_5 \times \mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \gamma + (n\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^*) \times B\gamma + \mathbf{v}^* \times C\gamma], \\ \dot{\gamma} = \mathbf{v}^* \times \mathbf{\Omega} - (n\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^*) \times \gamma. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Она имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} \mu \left[(na + \dot{\psi} \mathbf{v}^*) \cdot \boldsymbol{\Omega} \right] - (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma}) &= c_1, \quad \mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \\ \mu (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \left[\mu (na + \dot{\psi} \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5 \right] \cdot \boldsymbol{\gamma} &= c_3, \end{aligned} \quad (5.85)$$

где введены обозначения (5.7). Отметим, что при использовании интегралов (5.85) следует учитывать условия (5.81).

Для анализа характеристичных чисел системы (5.84) выполним два преобразования. Первое преобразование основано, как и в случае полурегулярной прецессии первого типа, на соотношениях (5.54). Тогда интегралы (5.85) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} nu_1 + \dot{\psi} u_2 - \frac{1}{a_0'^2} \left[\boldsymbol{\tau}_4 \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3) \right] &= c_1, \\ u_5 = c_2, \quad u_2 + \mathbf{b} \cdot (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3) &= c_3, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где

$$\mathbf{b} = \frac{1}{a_0'^2} \left[\mu (na + \dot{\psi} \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5 \right]. \quad (5.87)$$

В силу (5.82) система (5.84) является с периодическими коэффициентами; этим же свойством очевидно обладают интегралы (5.86), так как вектор-функция (5.87) является периодической (период равен $\frac{2\pi}{n}$).

Второе преобразование системы (5.84) аналогично преобразованию (5.88), но с другой матрицей $q(t)$. Для нахождения компонент этой матрицы достаточно в формулах (5.59), (5.60) заменить $\dot{\phi}$ на n , а параметр m – на $\dot{\psi}$.

Можно показать, что в силу соотношений (см. формулы (4.5) – (4.7) раздела 4)

$$\begin{aligned} a_0 \mu \ddot{\psi} &= -\dot{\psi} (\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_4), \quad \mu \ddot{\psi} = n (\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \\ a_0'^2 \mu n \dot{\psi} + \dot{\psi} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - n (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) &= 0, \end{aligned}$$

из которых получено решение (5.80), (5.82) при условиях (5.81), вытекает, что положительные характеристичные числа системы (5.84) содержится среди положительных характеристичных чисел системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \mu\dot{\psi}x_3, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu}x_1 - \dot{\psi}x_3, \quad \dot{x}_3 = h_{32}(t)x_2.\end{aligned}\tag{5.88}$$

где функции $h_{12}(t)$, $h_{32}(t)$ находятся на основании [24]. То есть преобразования линейной системы, выполненные в разделе 4 для общего случая прецессии, не имеют особенностей.

Из системы (5.88) найдем

$$x_1 = \mu\dot{x}_2 + \dot{\psi}x_3\tag{5.89}$$

и подставим в первое уравнение системы (5.88). Тогда

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0.\tag{5.90}$$

С учетом условий (5.81) для функций $p(t)$ из (5.90) найдем выражение

$$p(t) = \frac{1}{a_0'^2 \mu} (Q_2 \sin^2 nt + Q_1 \sin nt + Q_0),\tag{5.91}$$

где

$$Q_2 = a_0'^2 (C_{22} - C_{11}) > 0,\tag{5.92}$$

$$Q_1 = \frac{a_0'^3}{\lambda_1} [2s_1\lambda_1 + (C_{22} - C_{11})(B_{11} + B_{33} - a_0\lambda_3)],\tag{5.93}$$

$$\begin{aligned}Q_0 &= \frac{a_0'^2}{\lambda_1} (s_1 + a_0 n \lambda_1) (B_{11} + B_{33} - a_0 \lambda_3) + \frac{a_0'^2 \mu}{\lambda_1^2} (s_1 + a_0 n \lambda_1)^2 + \\ &+ a_0'^4 (C_{22} - C_{33}) + n \left[2a_0'^2 \lambda_3 + a_0 a_0'^2 (1 + a_0^2) B_{11} - a_0'^2 \mu n - a_0 (1 + a_0'^2 a_0^2) B_{33} \right] - \\ &- \frac{a_0'^2}{\mu} \left[a_0'^2 B_{11}^2 + (\lambda_3 - a_0 B_{33})^2 \right].\end{aligned}\tag{5.94}$$

На основании условия Ляпунова $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$) найдем условия существования у уравнения (5.90) решения с положительным характеристическим числом. В силу (5.92) коэффициент при $\sin^2 nt$ в указанном уравнении положителен, поэтому неравенство $p(t) \leq 0$ будет выполняться, если

$$Q_2 + Q_1 + Q_0 \leq 0, \quad Q_2 - Q_1 + Q_0 \leq 0.\tag{5.95}$$

Представим выражение Q_0 в виде $\tilde{Q}_0 - a_0'^4 C_{33}$, где $\tilde{Q}_0$ не зависит от параметра C_{33} . Тогда условиям (5.95) можно удовлетворить выбором параметра C_{33} , то есть положить

$$C_{33} \geq \max \left\{ \frac{Q_2 + Q_1 + \tilde{Q}_0}{a_0'^4}, \frac{Q_2 - Q_1 + \tilde{Q}_0}{a_0'^4} \right\}. \quad (5.96)$$

Следовательно, если параметры задачи выбраны так, что выполнено условие (5.96), то уравнение (5.90) имеет решение с положительным характеристическим числом. В этом случае система (5.88) при значении $\dot{\psi}$ из (5.82) имеет решение также с положительным характеристическим числом, а линейная система (5.84) удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова (см. раздел 2) о существовании асимптотических решений нелинейной системы, соответствующей системе (5.84). Движение гиростата будет характеризоваться свойством асимптотичности к прецессии второго типа (5.81), (5.82).

Отметим, что аналогичный подход был использован в статье [24], но к уравнению Хилла другого типа. Поэтому полученные в [24] условия существования асимптотических движений гиростата отличаются от условия (5.96).

Рассмотрим другой подход в изучении решения (5.90). Он состоит в применении теории параметрического резонанса [30]. Следуя статье [24], в качестве предельного движения гиростата примем более общее решение, чем (5.81), (5.82), а именно решение

$$\dot{\psi} = \gamma_0 + \gamma_1 \sin nt, \quad n = -\frac{1}{2\mu\lambda_1} [\mu C_{13} + \lambda_1 \lambda_3 + a_0 \lambda_1 (B_{11} - B_{33})], \quad (5.97)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\lambda_1} (C_{13} a_0 - s_1 - n a_0 \lambda_1), \quad \gamma_1 = -\frac{a_0' \lambda_1}{\mu}. \quad (5.98)$$

Условия существования прецессии (5.97), (5.98) таковы

$$\begin{aligned} B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{23} = 0, \\ s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1^2 = \mu(C_{22} - C_{11}), \end{aligned} \quad (5.99)$$

$$s_3 = [a_0(B_{33} - B_{11}) - \mu n] \left[\frac{1}{\lambda_1} (a_0 C_{13} - s_1) - a_0 n \right] + a_0(C_{33} - C_{22}) - nB_{11}. \quad (5.100)$$

Запишем уравнение Хилла при $B_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1,3}$), $s_1 = 0$

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad (5.101)$$

где

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1 \sin(nt + \varphi_0) + \beta_2 \sin^2(nt + \varphi_0), \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\varepsilon^2}{4\mu^2} \left[\lambda_3^2 - \frac{2C_{13}\mu\lambda_3}{\lambda_1} - \frac{15C_{13}^2\mu}{C_{22} - C_{11}} + 4\mu(C_{22} - C_{11}) \right] + \frac{4C_{13}^2}{\mu(C_{22} - C_{11})}, \\ \beta_1 &= \varepsilon(\varepsilon_0 + \varepsilon^2\varepsilon_2 + \varepsilon^4\varepsilon_4 + \dots), \quad \beta_2 = -\varepsilon^2\varepsilon_2'', \quad \varepsilon = a'_0, \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{\mu} \left(9C_{13} + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\mu} \right), \quad \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_0}{8}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{4}{\mu}(C_{11} - C_{22}). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Ранее уравнение (5.101) изучалось на основе достаточного условия Ляпунова [24] существования у него решения с положительным характеристическим числом, которое состояло, в том, что предполагалось $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$). Здесь к данному уравнению применим теорию параметрического резонанса [24]. Для этой цели необходимо в (5.101)–(5.103) ввести малый параметр и решение уравнения (5.101) искать в виде ряда по этому малому параметру. В силу свойства прецессионности движения малым параметром может служить параметр a'_0 , который обозначен через ε . Поскольку в общем случае при таком способе введения параметра при вычислениях сталкиваемся со значительными трудностями, то положим

$$\lambda_3^2 - 2C_{13}\mu\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + 4\mu(C_{33} + 3C_{22} - 4C_{11}) - \frac{15C_{13}^2\mu}{C_{22} - C_{11}} = 0. \quad (5.104)$$

Для существования действительных решений уравнения (5.104) относительно λ_3 считаем, что выполнены неравенства

$$4C_{13}^2 - (C_{33} + 3C_{22} - 4C_{11})(C_{22} - C_{11}) > 0, \quad C_{22} - C_{11} > 0.$$

Используя в уравнении (5.101) указанные выше условия, а также равенство $\varepsilon = a'_0$, заменой $\tau = nt$ приведем его к стандартному виду

$$y'' + \lambda^2 \left[1 + \varepsilon \left(\kappa_1 \sin \tau + \varepsilon \kappa_2 \cos \tau + \varepsilon^2 \kappa_2' \sin \tau + \varepsilon^4 \kappa_4 \cos 2\tau + \dots \right) \right] y = 0. \quad (5.105)$$

где

$$\lambda = \frac{\eta}{n^2}, \quad \kappa_1 = \frac{\varepsilon_0}{\eta}, \quad \kappa_2' = -\frac{\kappa_1}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon_2''}{\eta}, \quad \kappa_4 = \frac{\varepsilon_4}{\eta}, \quad \eta = \frac{4C_{13}^2}{\lambda_1^2}. \quad (5.106)$$

Согласно теории параметрического резонанса в окрестности натуральных значений λ появляются интервалы, для которых определяющее уравнение $\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0$ имеет действительные корни ρ_1 и ρ_2 , где $A = \frac{y_1(\pi) + y_2(\pi)}{2}$, а $y_1(t)$, $y_2(t)$ – независимые частные решения уравнения (5.105). Этим корням соответствуют два решения уравнения (5.105)

$$y_1 = \varphi_1(\tau) e^{-\beta_1 \tau}, \quad y_2 = \varphi_2(\tau) e^{-\beta_2 \tau}, \quad (5.107)$$

различными знаками характеристичных чисел $\beta_1 = \operatorname{Re} \sigma_1$, $\beta_2 = \operatorname{Re} \sigma_2$ ($\sigma_i = \ln \rho_i / \pi$). Здесь $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ – периодические функции τ . Так как $\beta_1 = \beta_2$, то в силу (5.107) система (5.84) имеет четыре нулевых характеристичных числа, одно положительное и одно отрицательное характеристичное число. Следовательно, к системе уравнений в вариациях, линейной системой которой является (5.84), применима теорема Ляпунова о существовании у нее решения, которое при $t \rightarrow \infty$ стремиться к нулю. То есть для этого решения движение гиростата будет асимптотически–прецессионным.

Для применения указанных результатов положим в уравнении (5.105)

$$\lambda^2 = N^2 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad y(\tau) = \xi_0(\tau) + \varepsilon \xi_1(\tau) + \dots, \quad (5.108)$$

где $\xi_i(\tau)$ – периодические функции с периодом π , $N = 1, 2, \dots$

После подстановки выражений (5.108) в уравнение (5.105), полагая $N = 1$, получим систему дифференциальных уравнений, из которой следует

$$\xi_0(\tau) = A_0 \cos \tau + B_0 \sin \tau, \quad (5.109)$$

$$\ddot{\xi}_1(\tau) + \xi_1(\tau) = \frac{\kappa_1}{2} (B_0 \cos 2\tau - A_0 \sin 2\tau - B_0) - \alpha_1 (A_0 \cos \tau - B_0 \sin \tau), \quad (5.110)$$

$$\ddot{\xi}_2(\tau) + \xi_2(\tau) = -\xi_1(\tau) (\kappa_1 \sin \tau + \alpha_1) - \xi_0(\tau) (\alpha_1 \sin \tau + \kappa_2 \cos 2\tau + \alpha_2),$$

где A_0, B_0 – произвольные постоянные. Согласно теории параметрического резонанса приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \tau$ и $\sin \tau$ в правой части уравнения для $\xi_1(\tau)$. Так как $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, то

$$\alpha_1 = 0. \quad (5.111)$$

Связь между A_0, B_0 устанавливается при рассмотрении дальнейших приближений. Вычислим эти приближения, используя уравнения (5.110). на основании условия (5.111) из уравнения для $\xi_1(\tau)$ имеем:

$$\xi_1(\tau) = \frac{\kappa_1}{6} (A_0 \sin 2\tau - B_0 \cos 2\tau - 3B_0). \quad (5.112)$$

Подставим $\xi_0(\tau)$ и $\xi_1(\tau)$ из (5.109), (5.112) в уравнение для $\xi_2(\tau)$ из системы (5.110)

$$\begin{aligned} 12(\ddot{\xi}_2(\tau) + \xi_2(\tau)) = & (\kappa_1^2 - 6\kappa_2)(B_0 \sin 3\tau + A_0 \cos 3\tau) - \\ & - A_0 \cos \tau (\kappa_1^2 + 6\kappa_2 + 12\alpha_2) + B_0 \sin \tau (5\kappa_1^2 + 6\kappa_2 - 12\alpha_2). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Требование периодичности решения уравнения (5.113) приводит к равенствам

$$A_0(\kappa_1^2 + 6\kappa_2 + 12\alpha_2) = 0, \quad B_0(5\kappa_1^2 + 6\kappa_2 - 12\alpha_2) = 0.$$

Так как $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, то в случае $N=1$ для α_2 получаем два различных значения. Для первого значения

$$\alpha_2 = -\frac{\kappa_1^2 + 6\kappa_2}{12}, \quad A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \quad (5.114)$$

для второго значения

$$\alpha_2 = \frac{5\kappa_1^2 + 6\kappa_2}{12}, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 1. \quad (5.115)$$

Аналогично подсчитываются последующие приближения.

Таким образом, в силу (5.114), (5.115) с точностью до величин второго порядка относительно ε , найденную область неустойчивости, расположенную вблизи $N=1$ можно охарактеризовать условием

$$1 - \frac{\kappa_1^2 + 6\kappa_2}{12} \varepsilon^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 1 + \frac{5\kappa_1^2 + 6\kappa_2}{12} \varepsilon^2 + \dots \quad (5.116)$$

Второй пример существования у уравнения (5.105) решения относится к случаю $N = 2$. Полагаем $\alpha^2 = 4 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots$. Задавая решение в виде (5.108), из уравнения (5.105) получим

$$\begin{aligned}\xi_0(\tau) &= A_0 \cos 2\tau + B_0 \sin 2\tau, \\ \ddot{\xi}_1(\tau) + 4\xi_1(\tau) &= -\xi_0(\tau)(4\kappa_1 \sin \tau + \alpha_1) = \\ &= 2\kappa_1 [B_0(\cos 3\tau - \cos \tau) + A_0(\sin \tau - \sin 3\tau)],\end{aligned}\quad (5.117)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_2(\tau) + 4\xi_2(\tau) &= -\xi_1(\tau)(4\kappa_1 \sin \tau + \alpha_1) - \\ &\quad - \xi_0(\tau)(\alpha_1 \kappa_1 \sin \tau + 4\kappa_2 \cos 2\tau + \alpha_2), \\ \ddot{\xi}_3(\tau) + 4\xi_3(\tau) &= -\xi_2(\tau)(4\kappa_1 \sin \tau + \alpha_1) - \\ &\quad - \xi_1(\tau)(\alpha_1 \kappa_1 \sin \tau + 4\kappa_2 \cos 2\tau + \alpha_2) - \\ &\quad - \xi_0(\tau)(\alpha_2 \kappa_1 \sin \tau + \alpha_1 \kappa_2 \cos 2\tau + 4\kappa'_2 \sin \tau + \alpha_3), \\ \ddot{\xi}_4(\tau) + 4\xi_4(\tau) &= -\xi_3(\tau)(4\kappa_1 \sin \tau + \alpha_1) - \\ &\quad - \xi_2(\tau)(\alpha_1 \kappa_1 \sin \tau + 4\kappa_2 \cos 2\tau + \alpha_2) - \\ &\quad - \xi_1(\tau)(\alpha_2 \kappa_1 \sin \tau + \alpha_1 \kappa_2 \cos 2\tau + 4\kappa'_2 \sin \tau + \alpha_3) - \\ &\quad - \xi_0(\tau)(\alpha_3 \kappa_1 \sin \tau + \alpha_2 \kappa_2 \cos 2\tau + \alpha_1 \kappa'_2 \sin \tau + \alpha_4).\end{aligned}\quad (5.118)$$

В силу теории параметрического резонанса с учетом $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, (5.117) из системы (5.118) получим $\alpha_1 = 0$, аналогично равенству (5.111). На основании равенства $\alpha_1 = 0$ решение уравнения для $\xi_1(\tau)$ таково

$$\xi_1(\tau) = \frac{2\kappa_1}{15} (3B_0 \cos 3\tau + 3A_0 \sin 3\tau - 5B_0 \cos \tau + 5A_0 \sin \tau). \quad (5.119)$$

Подставим $\alpha_1 = 0$ и равенство (5.119) во второе равенство системы (5.118)

$$\begin{aligned}15(\ddot{\xi}_2(\tau) + 4\xi_2(\tau)) &= 6(2\kappa_1^2 - 5\kappa_2)(A_0 \cos 4\tau + B_0 \sin 4\tau) + \\ &\quad + (8\kappa_1^2 - 15\alpha_2)(A_0 \cos 2\tau + B_0 \sin 2\tau) - 10A_0(2\kappa_1^2 + 3\kappa_2).\end{aligned}$$

Из условия периодичности решения (5.108) следует $A_0(8\kappa_1^2 - 15\alpha_2) = 0$, $B_0(8\kappa_1^2 - 15\alpha_2) = 0$. То есть для обоих вариантов имеем

$$\alpha_2 = \frac{8\kappa_1^2}{15}, \quad A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{8\kappa_1^2}{15}, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 1. \quad (5.120)$$

С учетом (5.111), (5.120) решение для $\xi_2(\tau)$ системы (5.118) примет вид

$$30\xi_2(\tau) = (5\kappa_2 - \kappa_1^2)(A_0 \cos 4\tau + B_0 \sin 4\tau) - 5A_0(3\kappa_2 + 2\kappa_1^2). \quad (5.121)$$

Подставляя (5.111), (5.119)–(5.121) в третье уравнение системы (5.118), имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_3(\tau) + 4\xi_3(\tau) = & \frac{\kappa_1}{15}(17\kappa_2 - 2\kappa_1^2)(B_0 \cos 5\tau - A_0 \sin 5\tau) + \\ & + \left(\kappa_1\kappa_2 + \frac{46}{75}\kappa_1^3 + 2\kappa_2' \right)(B_0 \cos 3\tau - A_0 \sin 3\tau) + \\ & + \frac{2B_0}{45}(48\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1^3 - 45\kappa_2')\cos \tau + \\ & + \frac{2A_0}{45}(-12\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1^3 + 45\kappa_2')\sin \tau - \\ & - A_0\alpha_3 \cos 2\tau - \frac{B_0}{6}\alpha_3 \sin 2\tau + A_0(2\kappa_1^2 + 3\kappa_2). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau$ в уравнении (5.122). Тогда получим $\alpha_3 = 0$, то есть

$$\begin{aligned} \xi_3(\tau) = & \frac{\kappa_1}{315}(2\kappa_1^2 - 17\kappa_2)(B_0 \cos 5\tau - A_0 \sin 5\tau) - \\ & - \frac{1}{375}(75\kappa_1\kappa_2 + 46\kappa_1^3 + 150\kappa_2')(B_0 \cos 3\tau - A_0 \sin 3\tau) + \\ & + \frac{2B_0}{135}(48\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1^3 - 45\kappa_2')\cos \tau + \\ & + \frac{2A_0}{135}(-12\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1^3 + 45\kappa_2')\sin \tau + \frac{A_0}{24}(2\kappa_1^2 + 3\kappa_2). \end{aligned}$$

С учетом найденных значений $\xi_i(\tau)$ ($i = \overline{0,3}$), α_i ($i = \overline{1,3}$), четвертое уравнение из (5.118) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_4(\tau) + 4\xi_4(\tau) = & A_0Q \cos 6\tau + B_0Q \sin 6\tau + \\ & + A_0P \cos 4\tau + B_0P \sin 4\tau + A_0 \left(R + \frac{4}{3}\kappa_1^3\kappa_2 + 2\kappa_2^2 - \alpha_4 \right) \cos 2\tau + \\ & + B_0 \left(R - \frac{16}{15}\kappa_1^2\kappa_2 \right) \sin 2\tau + \frac{8A_0\kappa_1}{135}(3\kappa_1^4 - 2\kappa_1^3 + 6\kappa_1\kappa_2 - 40\kappa_2'), \end{aligned} \quad (5.123)$$

где

$$Q = \frac{1}{315}(76\kappa_1^2\kappa_2 - 4\kappa_1^2 - 105\kappa_2^2), \quad P = \frac{\kappa_1^2}{7875}(2837\kappa_1^2 - 500\kappa_2),$$

$$R = \frac{1}{3375}(2550\kappa_1^2\kappa_2 - 788\kappa_1^4 - 1125\kappa_2^2 + 3600\kappa_1\kappa_2'). \quad (5.124)$$

С учетом требования периодичности решения уравнения (5.123) приравниваем коэффициенты при $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau$ в правой части уравнения (5.123) к нулю. Получаем два различных значения для α_4 :

$$\alpha_4 = R + \frac{4\kappa_1^3\kappa_2}{3} + 2\kappa_2^2, \quad A_0 = 1, \quad B_0 = 0,$$

или

$$\alpha_4 = R - \frac{16\kappa_1^2\kappa_2}{15}, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 1.$$

Аналогично подсчитываются следующие приближения. Таким образом, с точностью до величин четвертого порядка относительно ε область неустойчивости, расположенная вблизи $N = 2$, может быть охарактеризована условием

$$4 + \frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2 + \left(R - \frac{16}{15}\kappa_1^2\kappa_2\right)\mu^4 + \dots \leq \lambda^2 \leq$$

$$\leq 4 + \frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2 + \left(R + \frac{4\kappa_1^3\kappa_2}{3} + 2\kappa_2^2\right)\mu^4 + \dots, \quad (5.125)$$

где полагаем $10\kappa_1^3 + 15\kappa_2 + 8\kappa_1^2 > 0$.

Если параметры задачи удовлетворяют одному из условий (5.116), (5.125), то уравнение (5.105) допускает решение вида (5.107). Следовательно при выполнении условий $B_{ij} = 0$, (5.104), (5.116), (5.125) существует такое начальное положение гиростата и начальная скорость, при которых движение гиростата будет обладать свойством асимптотичности движения. Предельным движением гиростата будет служить прецессия второго типа (5.97). Асимптотически–прецессионное движение будет описываться однопараметрическими рядами Ляпунова.

5.4. Асимптотически – прецессионные движения гиростата в случае предельного прецессионного движения общего вида

5.4.1. Вид предельного движения

Здесь рассмотрим решение А.В. Мазнева [30], которое описывает прецессию общего вида. Причем для наглядности окончательных условий асимптотичности движения примем ряд дополнительных ограничений на параметры задачи. То есть полагаем, что выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} B_{ij} &= 0 \quad (i \neq j), \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \\ s_1 &= \frac{C_{13}}{3a_0}(3a_0^2 - a_0'^2), \quad s_2 = \frac{C_{23}}{3a_0}(3a_0^2 - a_0'^2), \\ \lambda_2 &= 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad k = 2a_0\lambda_3 - \frac{3}{2}(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}), \\ 2E &= \frac{1}{a_0\mu} \left\{ \mu s_3 (1 - 3a_0^2) + a_0 (2a_0^2 - 1) \mu C_{33} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 a_0'^2 \mu C_{11} + (\lambda_3 - a_0 B_{33}) [a_0 \lambda_3 - (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33})] \right\}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Тогда решение [30] можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mu} (\varepsilon_0 - a_0 \mu \dot{\varphi}), \quad \varepsilon_0 = a_0 (\lambda_3 - a_0 B_{33}) - a_0'^2 B_{11}, \quad (5.127)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{a_0 \mu^2} \left[-\frac{2a_0' \mu}{3} (C_{23} \cos \varphi + C_{13} \sin \varphi) + \varkappa_0 \right], \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_0 &= \mu [s_3 + a_0 (C_{11} - C_{33})] + a_0 \lambda_3^2 + \lambda_3 [B_{11} (2a_0^2 - 1) - 2a_0^2 B_{33}] + \\ &\quad + a_0 [a_0^2 B_{33}^2 - (2a_0^2 - 1) B_{11} B_{33} - a_0 a_0'^2 B_{11}]. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Из соотношений (5.126) следует, что векторы λ и a коллинеарны и ортогональны круговым сечениям эллипсоидов $B_{11}(x^2 + y^2) + B_{33}z^2 = \text{const}$ и $C_{11}(x^2 + y^2) + C_{33}'z^2 + 2(C_{13}x + C_{23}y)z = \text{const}$. Последние два равенства системы (5.126) определяют значения постоянных первых интегралов на решении (5.127), (5.128).

Обозначим через $\omega^*(t)$ и $\nu^*(t)$ решение (5.51), в котором зависимости $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ находятся путем интегрирования уравнений из (5.127), (5.128). Общая

методика изучения движений сферического гиростата изложена в разделе 4. Согласно этой методике положим

$$\omega = \omega^*(t) + \Omega, \quad \nu = \nu^*(t) + \gamma. \quad (5.130)$$

Общая задача может быть сформулирована так: определить условия на параметр a_0 , при выполнении которых $\Omega \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$.

5.4.2. Представление решения (5.127), (5.128) посредством эллиптических функций

Запишем формулу (5.128) введя новую переменную $\varphi_*(t) = \varphi + \gamma_0$, где

$$\sin \gamma_0 = \frac{C_{23}}{\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{C_{13}}{\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}, \quad (5.131)$$

и параметры

$$\beta_1 = \frac{\kappa_0}{a_0 \mu^2}, \quad \beta = -\frac{2a'_0}{3a_0 \mu} \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}, \quad (5.132)$$

тогда

$$\dot{\varphi}_* = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin \varphi_*}. \quad (5.133)$$

Поскольку первый метод Ляпунова применим в случае, когда решение $\omega^*(t)$, $\nu^*(t)$ является периодическим по времени, то в уравнении (5.133) параметры (5.132) должны удовлетворять условиям: $\beta_2 < 0$, $\beta_1 > -\beta_2$. Эти неравенства в силу (5.129), (5.132) выполняются, например при $\operatorname{tg} \theta_0 > 0$ и достаточно больших значениях величины λ_3 (выражение для β_2 не зависит от λ_3). Обозначим

$$k_* = -\frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (5.134)$$

На основании указанных выше предположений выражение (5.134) удовлетворяет неравенству $0 < k_* < 1$. Используя при интегрировании уравнения (5.133) метод теории эллиптических функций Якоби, получим

$$\begin{aligned}\varphi_* &= 2 \operatorname{am}(\sigma_0 \tau) - \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi_* = -1 + 2 \operatorname{sn}^2(\sigma_0 t, k_*), \\ \cos \varphi_* &= 2 \operatorname{sn}(\sigma_0 t, k_*) \operatorname{cn}(\sigma_0 t, k_*), \quad \dot{\varphi}_* = 2 \sigma_0 \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*),\end{aligned}\quad (5.135)$$

где $\sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1 - \beta_2}$, k_* –модуль эллиптических функций Якоби имеет значение из (5.134), $\operatorname{am}(\sigma_0 \tau)$, $\operatorname{sn}(\sigma_0 t, k_*)$, $\operatorname{cn}(\sigma_0 t, k_*)$, $\operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)$ – эллиптические функции.

Подставим $\dot{\varphi}$ из системы (5.135) в выражение для $\dot{\psi}$ из (5.127)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mu} (\varepsilon_0 - 2a_0 \mu \sigma_0 \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)). \quad (5.136)$$

Таким образом решение $\omega^*(t)$, $\nu^*(t)$ приведено к периодическому решению

$$\begin{aligned}\nu_1 &= a'_0 \sin(\varphi_* - \gamma_0), \quad \nu_2 = a'_0 \sin(\varphi_* - \gamma_0), \quad \nu_3 = a_0, \\ \omega_1 &= a'_0 \dot{\psi} \sin(\varphi_* - \gamma_0), \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos(\varphi_* - \gamma_0), \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi},\end{aligned}\quad (5.137)$$

где параметр γ_0 выражается по формулам (5.131), функции $\varphi_*(t)$, $\dot{\varphi}_*(t)$, $\dot{\psi}(t)$ определяются соотношениями из (5.135), (5.136).

Период решения (5.137) равен значению

$$T = \frac{2}{\mu_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi_*}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi_*}}. \quad (5.138)$$

5.4.3. Уравнения в вариациях

Подставим выражения (5.130) в уравнения (5.1)(5.2)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}) \times B\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times C\boldsymbol{\gamma}), \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= (\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\quad (5.139)$$

Первый метод Ляпунова основан на уравнениях в вариациях, вытекающих из (5.139)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\gamma}), \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\quad (5.140)$$

Уравнения (5.140) допускают первые интегралы

$$\mu(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \mu(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mu \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\tau}_5) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_3, \quad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2. \quad (5.141)$$

В уравнениях (5.139), (5.140) и интегралах (5.141) введем обозначения

$$\boldsymbol{\tau}_4 = \mathbf{s} - C\mathbf{v}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - B\mathbf{v}^*. \quad (5.142)$$

Принятая в (5.142) нумерация связана с тем, что в дальнейшем будут использованы обозначения

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{a} - a_0\mathbf{v}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{v}^* - a_0\mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{a} \times \mathbf{v}^*. \quad (5.143)$$

Для редукции системы (5.140) на основании интегралов (5.141) введем новые переменные [70]

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}), \quad u_2 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}), \quad u_3 = \mu(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \\ u_4 &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}_3. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Если функции $u_i(t)$ будут найдены, то векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ определим по формулам

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\mu a_0'^2} (u_1 \boldsymbol{\tau}_1 + u_2 \boldsymbol{\tau}_2 + u_3 \boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2} (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3). \quad (5.145)$$

Запишем интегралы (5.141) принимая во внимание выражение $\boldsymbol{\omega}^* = \dot{\phi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^*$ и формулы (5.142), (5.144)

$$\begin{aligned} \dot{\phi}u_1 + \dot{\psi}u_2 - \frac{1}{a_0'^2} [(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3)u_6] &= c_1, \\ u_5 &= c_2, \quad u_2 + (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3)u_6 = c_3, \end{aligned} \quad (5.146)$$

где

$$\mathbf{b} = \frac{1}{a_0'^2} [\mu(\dot{\phi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\tau}_5].$$

Наряду с преобразованием (5.145), следуя [70], выполним второе преобразование. введем вектор

$$\mathbf{x} = q(t)\mathbf{u}, \quad (5.147)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_6)^T$, а элементы матрицы $q(t)$ таковы (см. раздел 4)

$$\begin{aligned}
q_{11} &= 0, & q_{12} &= 0, & q_{13} &= 1, & q_{14} &= 0, & q_{15} &= 0, & q_{16} &= 0, \\
q_{21} &= 0, & q_{22} &= 0, & q_{23} &= 0, & q_{24} &= 1, & q_{25} &= 0, & q_{26} &= 0, \\
q_{31} &= 0, & q_{32} &= 0, & q_{33} &= 0, & q_{34} &= 0, & q_{35} &= 0, & q_{36} &= 0, \\
q_{41} &= \dot{\phi}, & q_{42} &= \dot{\psi}, & q_{43} &= 0, & q_{44} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \\
q_{45} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), & q_{46} &= -\frac{1}{a_0'^2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \\
q_{51} &= 0, & q_{52} &= 0, & q_{53} &= 0, & q_{54} &= 0, & q_{55} &= 1, & q_{56} &= 0, \\
q_{61} &= 0, & q_{62} &= 1, & q_{63} &= 0, & q_{64} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, & q_{65} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2, & q_{66} &= \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3.
\end{aligned} \tag{5.148}$$

Очевидно, что в силу равенств (5.148)

$$|q(t)| = \dot{\phi} = 2\sigma_0 \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*) \neq 0.$$

Поэтому существует обратное к (5.148) преобразование

$$\mathbf{u} = q^{-1}(t)\mathbf{x}, \tag{5.149}$$

которое вместе с (5.144) сохраняет характеристичные числа линейной системы (5.140).

В результате применения преобразований (5.144), (5.147) система (5.140) принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu}{\dot{\phi}}(\dot{\phi}\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\dot{\psi})x_3 + R_1(t), \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{\mu}x_1 - \dot{\psi}x_3 + R_2(t), \\
\dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\psi}}x_3 + R_3(t), \\
\dot{x}_4 &= 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0,
\end{aligned} \tag{5.150}$$

где $R_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$) – периодические функции времени (периода (5.138)). Выражения для $h_{12}(t)$, $h_{32}(t)$ выписаны в статье [24]. Здесь отметим, что эти функции также периодические с тем же периодом T .

Согласно первому методу Ляпунова [64] для нахождения асимптотических решений системы (5.139) необходимо определить условия существования положительных характеристичных чисел линейной системы (5.140). В силу преобразований (5.144), (5.147), сохраняющих характеристичные числа системы

(5.140), необходимо исследовать характеристичные числа системы (5.140). Положительные характеристичные числа системы (5.150) может иметь только однородная система из (5.150). В статье [70] с помощью подстановки

$$x_1 = \mu(\dot{x}_2 + \dot{\psi}x_3) \quad (5.151)$$

получено уравнение

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \quad (5.152)$$

где

$$\begin{aligned} p(t) = \frac{1}{\mu a_0'^2} \bigg\{ & -a_0'^2 \mu (\dot{\phi}^2 - \dot{\psi}^2 + a_0 \dot{\phi} \dot{\psi}) + \dot{\phi} [(\tau_2 \cdot B \tau_1) - 2a_0'^2 (a \cdot \tau_5)] - \\ & - \dot{\psi} [(\tau_1 \cdot B \tau_1) + a_0'^2 (v \cdot \tau_5)] - (\tau_1 \cdot C \tau_1) - a_0'^2 (v \cdot \tau_4) - \\ & - \frac{1}{\mu} [(v \cdot \tau_5)^2 + (a \cdot \tau_5)^2 - 2a_0 (a \cdot \tau_5)(v \cdot \tau_5)] \bigg\}. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Распишем выражение (5.153) при условиях (5.126), (5.135), (5.136)

$$p(t) = \frac{1}{\mu} \left[2L_0 \sigma_0 \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*) + 2\mu \sigma_0^2 (12a_0^2 - 1) \operatorname{dn}^2(\sigma_0 t, k_*) + S_0 \right], \quad (5.154)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 = & -2\lambda_3 (a_0^2 + 1) + a_0 a_0'^2 B_{11} + a_0 (3 + a_0^2) B_{33}, \\ S_0 = & \frac{1}{\mu} \left\{ -\frac{1 + 10a_0^2}{2a_0} s_3 \mu + \frac{1 - 12a_0^2}{2} \mu (C_{11} - C_{33}) - \frac{3 + 8a_0^2}{2} \lambda_3^2 + \right. \\ & + \frac{\lambda_3}{2a_0} \left[(1 + 6a_0^2 - 14a_0^4) B_{11} + 2a_0^2 (9a_0^2 + 2) B_{33} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[a_0'^2 (10a_0^2 - 1) B_{11}^2 + 4a_0^2 (9a_0^2 - 4) B_{11} B_{33} - a_0^2 (10a_0^2 + 1) B_{33}^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.155)$$

В силу (5.154), (5.155) функция $p(t)$ является многочленом второго порядка относительно периодической функции $\operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)$, которая принимает положительные значения в интервале $\left[\sqrt{1 - k_*^2}, 1 \right]$. Потребуем, чтобы $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$) для всех значений t . Выполнения этого условия можно добиться, потребовав $L_0 < 0$, $12a_0^2 - 1 < 0$, $S_0 < 0$. Поскольку при интегрировании уравнения

(5.133) полагалось, что $\operatorname{tg} \theta_0 > 0$, то, рассматривая неравенство $12a_0^2 - 1 \leq 0$, приходим к следующему ограничению на параметр θ_0 :

$$\operatorname{arctg} \sqrt{11} \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (5.156)$$

Из выражения для L_0 из (5.155) вытекает, что неравенства $L_0 < 0$ можно добиться, полагая

$$\lambda_3 > \frac{a_0}{2(a_0^2 + 1)} \left[a_0'^2 B_{11} + (3 + a_0^2) B_{33} \right]. \quad (5.157)$$

Рассмотрим выражение S_0 из (5.155). При величине λ_3^2 стоит отрицательный множитель. Следовательно, при достаточно больших значениях величины λ_3 будет выполняться неравенство $S_0 < 0$. Ранее (при анализе решения уравнения (5.133)) на основании ограничения $\beta_1 > -\beta_2 > 0$ было принято условие, что величина λ_3 принимает достаточно большие значения. Учитывая (5.154) и результаты по изучению условия $S_0 < 0$, приходим к выводу о том, что выбор достаточно больших значений λ_3 обеспечит требование периодичности решения уравнения (5.133) и выполнение неравенств $L_0 < 0$, $S_0 < 0$.

Приходим к следующему утверждению: если параметр θ_0 удовлетворяет неравенству (5.156), то существуют такие положительные (достаточно большие) значения параметра λ_3 , для которых $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$); уравнение (5.152) имеет решение с положительным характеристическим числом α_0^2

$$x_2(t) = c \varphi_1(t) e^{-\alpha_0^2 t}, \quad (5.158)$$

где $\varphi_1(t)$ – периодическая функция времени (5.138), c – произвольная постоянная.

После нахождения решения (5.158) уравнения Хилла (5.152) функцию $x_3(t)$ можно найти из третьего уравнения системы (5.150). Например, решение однородной системы в силу (5.158) таково

$$x_3(t) = c \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*) \int_t^\infty \frac{h_{32}(t) \varphi_1(t) e^{-\alpha_0^2 t}}{\operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)} dt. \quad (5.159)$$

Формулы (5.158), (5.159) позволяют найти функцию $x_1(t)$.

Последние три уравнения системы (5.150) приводят к равенствам $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. Для построения рядов Ляпунова необходимо для первого приближения принять c_i ($i = \overline{1,3}$) равными нулю. Таким образом, строится решение для фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ из уравнения (5.140). Это позволяет определить вектор-функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Тогда вектор-функции $\mathbf{\Omega}(t)$, $\gamma(t)$ в линейном приближении находятся из формул (5.145). Линейная система (5.140) имеет одно характеристическое число α_0^2 . Поскольку она является правильной (коэффициенты при фазовых переменных в системе (5.139) – периодические функции времени), то в силу теоремы Ляпунова [64] нелинейная система (5.139) допускает однопараметрическое решение

$$\Omega_i = \sum_{n=1}^{\infty} N_i^{(n)}(t) c^n e^{-\alpha_0^2 n t}, \quad \gamma_i = \sum_{m=1}^{\infty} M_i^{(m)}(t) c^m e^{-\alpha_0^2 m t}, \quad (5.160)$$

в котором характеристические числа функций $N_i^{(n)}(t)$, $M_i^{(m)}$ не менее нуля. Ряды (5.160) сходятся абсолютно и при $t \rightarrow \infty$ $\Omega_i(t) \rightarrow \infty$, $\gamma_i(t) \rightarrow \infty$ ($i = \overline{1,3}$).

Итак, показано, что если выполнено условие (5.156), а параметр λ_3 принимает достаточно большое положительное значение, то существует однопараметрическое семейство решений (5.160), описывающее асимптотически – прецессионные движения гиростата, предельным движением которых является прецессия общего вида (5.137).

Вид функции (5.154) позволяет привести и другие достаточные условия существования асимптотически – прецессионных движений. Например, положим $B_{ii} = 0$ ($i = \overline{1,3}$), $\lambda_3 = 0$. Тогда в силу (5.155) $L_0 = 0$ и

$$S_0 = -\frac{1+10a_0^2}{2a_0} S_3 + \frac{1-12a_0^2}{2} (C_{11} - C_{33}). \quad (5.161)$$

Кроме указанных предположений будем считать, что параметр θ_0 изменяется в промежутке

$$0 < \theta_0 < \arccos \frac{1}{\sqrt{12}}. \quad (5.162)$$

В силу того, что эллиптическая функция $\text{dn}(\sigma_0 t, k_*)$ изменяется на интервале $[\sqrt{1-k_*^2}, 1]$, потребуем, чтобы выполнялись условия

$$2\mu\sigma_0^2(12a_0^2 - 1) + S_0 < 0, \quad 2\mu_0\sigma_0^2(12a_0^2 - 1)(1 - k_*^2) + S_0 < 0,$$

которые в силу равенства $\sigma_0^2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{4}$ и выражений (5.132), (5.161) (для простоты записи положим $C_{13} > 0$, $C_{23} = 0$) можно привести к неравенству

$$S_3 > \frac{12a_0^2 - 1}{3a_0'} C_{13}. \quad (5.163)$$

Если учесть условие $\beta_1 > -\beta_2$ существования решения уравнения (5.133), то получим дополнительное ограничение на параметр S_3

$$S_3 > a_0(C_{33} - C_{11}) + \frac{2a_0' C_{13}}{3a_0}. \quad (5.164)$$

Очевидно, что при выполнении условий (5.162)–(5.164) функция (5.154) отрицательна для всех значений времени. То есть опять выполняется достаточное условие существования положительного характеристического числа решения уравнения (5.152) и существует решение вида (5.160) для нелинейной системы (5.139).

5.5. Выводы

В данном разделе получены следующие результаты:

Установлены условия существования асимптотически прецессионных движений для случая, когда предельное движение является регулярной прецессией гиростата относительно вертикали.

Рассмотрены два класса асимптотически – прецессионных движений гиростата первого типа. Первый класс характеризуется тем, что предельное движение описывается эллиптическими функциями Якоби. Для исследования условий существования асимптотических движений применено условие Ляпунова

[64]. Второй класс предельных движений определяется элементарными функциями времени. Условия существования соответствующих асимптотических движений записаны в виде неравенств на параметры задачи.

Изучены условия существования асимптотически – прецессионных движений второго типа. Использованы два подхода: первый подход основан на условии Ляпунова [64], а второй – на теории параметрического резонанса. Это позволило получить два варианта условий, при выполнении которых движения гиростата будут характеризоваться свойством асимптотичности.

Рассмотрен предельный класс прецессионных движений общего вида, определяющийся эллиптическими функциями времени. Применена методика изучения асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата, описанная в разделе 4. Анализ характеристичных чисел линейной системы сведен к анализу характеристичных чисел уравнения Хилла, в котором коэффициент при независимой переменной является квадратичной функцией от эллиптической функции $\operatorname{dn} u$ ($u = \sigma_0 t$). Данный вид коэффициента позволил получить наглядные условия существования асимптотических движений гиростата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию асимптотических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. В качестве предельных движений рассмотрены равномерные вращения относительно вертикали и прецессионные движения сферического гиростата.

Ранее в научных публикациях асимптотически – равномерные движения гиростата изучались лишь для фиксированного распределения масс гиростата. При этом применялось лишь условие Ляпунова [64] существования у уравнения Хилла решения с положительным характеристичным числом. В данной работе не только расширен класс условий существования равномерных движений гиростата, но и наряду с условием Ляпунова применена теория параметрического резонанса для уравнения второго порядка класса Хилла. Это позволило получить новое условие существования положительных характеристичных чисел этого уравнения и тем самым установить новые классы асимптотически – равномерных движений гиростата. Особый интерес представляют классы, в которых параметр угла нутации является произвольным.

В диссертации предложен новый подход в изучении асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата. Этот подход может быть применен и в исследовании равномерных вращений относительно вертикали, так как эти движения являются частным случаем прецессионных движений.

Рассмотрены все четыре случая предельных прецессионных движений гиростата:

1. регулярные прецессии гиростата ($\dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} = m$),
2. полурегулярные прецессии гиростата первого типа ($\dot{\varphi} \neq n, \quad \dot{\psi} = m$),
3. полурегулярные прецессии гиростата второго типа ($\dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} \neq m$),
4. прецессии общего вида ($\dot{\varphi} \neq n, \quad \dot{\psi} \neq m$).

В диссертации детально проанализированы условия существования всех рассматриваемых прецессий. В ряде случаев получены некоторые дополнения и

уточнения результатов статей [30,34]. Кроме того, выполнено сведение решений для прецессий либо к эллиптическим, либо к элементарным функциям времени. Это дает целостное представление о свойствах всех решений уравнений Кирхгофа–Пуассона, которые описывают прецессионные движения сферического гиростата.

Следует отметить, что ранее исследование асимптотически – периодических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил для общего случая распределения масс в гиростате проводили Г.В. Горр, Д.И. Думбай [24]. Они получили уравнение Хилла, на основе которого можно установить условия существования асимптотических движений гиростата. Однако это уравнение даже для случая сферического распределения масс в гиростате представляется достаточно сложным, что обусловлено использованием в [24] сопряженной линейной системы. В диссертации для общего случая прецессий показано, что переход к сопряженной системе не нужен, если воспользоваться специальными уравнениями для предельных прецессионных движений. Причем для наглядности и для доказательства невырожденности указанных преобразований в частных случаях прецессий показано, что процедура получения уравнения Хилла не имеет особенностей.

При постановке задачи указаны содержательная, концептуальная и математическая постановки задачи. Выписаны уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Приведены основные сведения из теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих определенное число первых интегралов (теория Якоби). Описан метод инвариантных соотношений построения частных решений уравнений движения гиростата. Изложены основные результаты первого метода Ляпунова построения асимптотически – периодических решений уравнений Кирхгофа–Пуассона. Приведены основные классы прецессионных движений гиростата с неподвижной точкой. Часть этих движений будет принята в дальнейшем при изучении асимптотически – прецессионных движений.

Рассмотрены условия существования асимптотически – равномерных движений гиростата относительно наклонной оси. Получены следующие результаты.

1. Указаны условия существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси в случаях, когда параметр нутации гиростата принимает произвольное значение из промежутка $(0, \pi)$, либо значение угловой скорости равномерного вращения $\omega_0 \in (-\infty, +\infty)$.

2. Выполнена редукция уравнений в вариациях, описывающих асимптотически – равномерные движения, к системе третьего порядка. Показано, что из этой системы можно получить уравнение класса Хилла не прибегая к анализу сопряженной системы.

3. Для случая $a_0 \in (-1, 1)$ и условиях на распределение масс гиростата класса Гесса с помощью теории параметрического резонанса выполнен анализ условий существования решения уравнения Хилла, которое имеет положительное характеристическое число. Указан вид рядов Ляпунова, характеризующих асимптотическое решение уравнений Кирхгофа – Пуассона.

4. Рассмотрен особый случай, для которого $g_0(t) = 0$. На основе достаточного условия Ляпунова [64] существования решения уравнения Хилла с положительным характеристическим числом получены условия асимптотически – равномерных движений гиростата.

5. Исследованы условия асимптотически – равномерных вращений гиростата для варианта, когда ось вращения является главной осью эллипсоида инерции.

Проведен анализ прецессионных движений сферического гиростата в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Уточнены и дополнены результаты А.В. Мазнева [30], полученные им в исследовании прецессий сферического гиростата. В случае периодических решений, определяющих прецессионные движения сферического гиростата,

выполнено интегрирование уравнений для скоростей прецессии и собственного вращения.

Разработана общая схема изучения условий существования асимптотически – прецессионных движений. Нахождение решений уравнений в вариациях, имеющих положительное характеристическое число, сведено к исследованию решений уравнения Хилла. Доказано, что найденная форма уравнения Хилла является наиболее простой по сравнению с используемыми ранее в научной литературе формами этого уравнения.

Получены следующие результаты:

1. Установлены условия существования асимптотически – прецессионных движений для случая, когда предельное движение является регулярной прецессией гиростата относительно вертикали.

2. Рассмотрены два класса асимптотически – прецессионных движений гиростата первого типа. Первый класс характеризуется тем, что предельное движение описывается эллиптическими функциями Якоби. Для исследования условий существования асимптотических движений применено условие Ляпунова [64]. Второй класс предельных движений определяется элементарными функциями времени. Условия существования соответствующих асимптотических движений записаны в виде неравенств на параметры задачи.

3. Изучены условия существования асимптотически – прецессионных движений второго типа. Использованы два подхода: первый подход основан на условии Ляпунова [64], а второй – на теории параметрического резонанса. Это позволило получить два варианта условий, при выполнении которых движения гиростата будут характеризоваться свойством асимптотичности.

4. Рассмотрен предельный класс прецессионных движений общего вида, определяющийся эллиптическими функциями времени. Применена методика изучения асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата, описанная в разделе 4. Анализ характеристических чисел линейной системы сведен к анализу характеристических чисел уравнения Хилла, в котором коэффициент при независимой переменной является квадратичной функцией от эллиптической

функции $\operatorname{dn} u$ ($u = \sigma_0 t$). Данный вид коэффициента позволил получить наглядные условия существования асимптотических движений гиростата.

Перспективы проведенных в диссертации исследований могут состоять в следующем:

- применение общего метода изучения прецессий, предложенного в работе, для варианта произвольного распределения масс в гиростате,
- получение уравнения Хилла без использования сопряженной системы уравнений,
- анализ рядов Ляпунова, описывающих асимптотически – прецессионные движения, особенно в случае предельной регулярной прецессии гиростата,
- геометрическое истолкование полученных в диссертации движений с помощью метода годографов,
- распространение предложенных в диссертации результатов в другие задачи динамики, например в задачу о движении гиростата в жидкости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аппельрот Г. Г. По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe» / Г. Г. Аппельрот // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1892. – 16, вып. 3. – С. 483–507.
2. Билимович А. Д. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / А. Д. Билимович // Сборник статей, посв. Г. К. Суслову. – К., 1911. – С. 23–74.
3. Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. К. Бобылев // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 21–25.
4. Болотин С. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики / С. В. Болотин, В. В. Козлов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика, механика. – 1980. – Вып. 4. – С. 84–89.
5. Борисов А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов И. С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
6. Брюм А. З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова / А. З. Брюм // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 68–72.
7. Брюм А. З. Достаточные условия существования асимптотически маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / А. З. Брюм, Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, вып. 4. – С. 681–684.
8. Вархалев Ю. П. Новый класс асимптотически равномерных движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1982. – 46, вып. 3. – С. 397–400.
9. Вархалев Ю. П. Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса–Аппельрота / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1984. – 48, вып. 3 – С. 490–495.
10. Вархалев Ю. П. Первый метод Ляпунова в исследовании движений твердого тела / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25–41.

11. Вархалев Ю. П. Об асимптотически равномерных движениях гириостата относительно наклонной оси / Ю. П. Вархалев, В. М. Ковалев // *Механика твердого тела*. – 1990. – Вып. 22. – С. 43–48.
12. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М. : Мир, 1980. – 288 с.
13. Волкова О. С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик / О. С. Волкова // *Механика твердого тела*. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
14. Волкова О. С. Маятниковые вращения тяжелого гириостата с переменным гириостатическим моментом / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела*. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
15. Волкова О. С. Точные решения уравнений движения гириостата вокруг неподвижной точки / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // *Современные проблемы математики, механики и информатики*. – Харьков, 2011. – С. 74–84.
16. Гашененко И. Н. Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина / И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела*. – 1989. – Вып. 21. – С. 9–18.
17. Гашененко И. Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела*. – 1990. – Вып. 22. – С. 3–10.
18. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гириостата / И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела*. – 1997. – Вып. 29. – С. 1–7.
19. Гашененко И. Н. Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
20. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / В. В. Голубев. – М. : Гостехтеориздат, 1953. – 287 с.
21. Горр Г. В. Новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр // *Докл. АН СССР*. – 1981. – 260, №6. – С. 1316–1317.

22. Горр Г. В. Методы исследования движений твердого тела и их приложение в классификации движений / Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 54–74.
23. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 573–587.
24. Горр Г. В. Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики / Г. В. Горр, Д. И. Думбай // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(I). – С. 20–28.
25. Горр Г. В. Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата / Г. В. Горр, А. А. Илюхин // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
26. Горр Г. В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, А. М. Ковалев, А. Я. Савченко. – К. : Наук. думка, 1984. – 285 с.
27. Горр Г. В. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, Е. И. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
28. Горр Г. В. Об асимптотически равномерных движениях вокруг наклонной оси в обобщенной задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой / Г. В. Горр, В. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 13–18.
29. Горр Г. В. Классические задачи динамики твердого тела / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – К. : Наук. думка, 1978. – 296 с.
30. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
31. Горр Г. В. О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 369–376.
32. Горр Г. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Динамические системы. Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. – 2012. – Т. 2(30), № 1–2. – С. 23–32.

33. Горр Г. В. Об условиях существования первого интеграла уравнений Кирхгофа–Пуассона на инвариантном множестве / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 50–61.
34. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
35. Горр Г. В. Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – К. : Наук. думка, 2013. – 408 с.
36. Горр Г. В. Об асимптотически – прецессионных движениях сферического гиростата / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56–62.
37. Горр Г. В. Дробно–линейный интеграл уравнений Пуассона в случае трех инвариантных соотношений / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Проблемы нелинейн. анализа в инженерных системах: Междунар. МФНА–АНН журнал. – 2004. – 10.– № 2(21); – С. 54–63.
38. Горр Г. В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2005. – 67, вып. 6. – С. 931–939.
39. Горр Г. В. Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 60–66.
40. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. Н. Горячев // Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 23–24.
41. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ / Д. Н. Горячев // Матем. сб. Круглая любителей матем. наук. – 1900. – 21, вып. 3. – С. 431–438.
42. Гриоли Д. Обобщенные движения прецессии / Д. Гриоли // Механика. Период. сборник переводов иностр. статей. – 1971. – № 3 (127). – С. 3–8.
43. Даламбер Ж. Динамика / Ж. Даламбер. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 343 с.
44. Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. / А. И. Докшевич. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.

45. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. / Н. Е. Жуковский. – М., 1949. – Т. 1. – С. 31–152. – (Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Журн. Рус. физ.–хим. о–ва. Часть физ. – 1885. – 17, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280).
46. Ковалев А. М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // Матем. физика и нелинейная механика. – 1968. – С. 87 – 102.
47. Ковалев А. М. О движении тела в случае Гесса / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12–27.
48. Ковалев А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Л. Н. Сретенского задачи о движении гиростата / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 37–45.
49. Ковалев А. М. Кинематическое истолкование движения тела в случае Л. Н. Сретенского / А. М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 45–50.
50. Ковалев А. М. Асимптотически равномерные движения гироскопа Лагранжа / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 7. – С. 45–47.
51. Ковалев А. М. Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 16–31.
52. Ковалев А. М. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси / А. М. Ковалев, А. Я. Савченко // Прикл. математика и механика. – 1975. – 39, вып. 4. – С. 650–661.
53. Ковалева Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалева, А. Е. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
54. Ковалевская С. В. Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки, когда интегрирование производится с помощью ультраэллиптических функций времени // Научные работы / С. В. Ковалевская. – М., 1948. – С. 235–244. – (Сер.: Классики науки). – (Kovalevsky S. Mémoires sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, cé l'integration s'effectue a l'aide

- de fonctions ultraelliptiques du temps / S. Kovalevsky // Memoires présentés par divers savants a l'Académie des sciences de l'Institut national de France. – Paris, 1890. – 31. – С. 1–62).
55. Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / В. В. Козлов // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1975. – № 1. – С. 105–110.
56. Козлов В. В. Асимптотические решения уравнений классической механики / В. В. Козлов // Прикл. математика и механика. – 1982. – 46, вып. 4. – С. 573–577.
57. Козлов В. В. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В. В. Козлов, Д. А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – 266, № 6. – С. 1298–1300.
58. Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений классической механики / В. В. Козлов, В. П. Паломодов // Докл. АН СССР. – 1982. – 263, № 2. – С. 285–289.
59. Коносевиц Б. И. Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку / Б. И. Коносевиц, Е. В. Позднякович // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, вып. 3. – С. 544–548.
60. Лагранж Ж. Аналитическая механика: в 2 т. / Ж. Лагранж. – М.; Л.: Гостехиздат., 1950. – Т. 1. – 594 с.
61. Леви-Чевита Т. Курс теоретической механики: в 2 т. / Т. Леви-Чевита, У. Амальди. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
62. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. / А. М. Ляпунов. – М., 1954. – Т. 1. – С. 320–324. – (Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости / А. М. Ляпунов // Сообщ. Харьков. матем. о-ва. Сер. 2. – 1893. – 4, № 1–2. – С. 81–85).
63. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ляпунов // Сообщ. Харьков. матем. о-ва. Сер. 2. – 1894. – 4, № 3. – С. 123–140.
64. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: в 5 т. / А. М. Ляпунов. – М.; Л., 1956. – Т. 2. – С. 7–263.

65. Мазнев А. В. Об одном случае существования интегрирующего множителя уравнений динамики твердого тела на инвариантных соотношениях класса Чаплыгина / А. В. Мазнев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – 19. – С. 155–161.
66. Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–102.
67. Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести / А. В. Мазнев // Моделирование, управление и устойчивость MCS–2012: междунар. конф., (Крым, г. Севастополь, 10–14 сент. 2012 г.). – С. 132–133.
68. Мазнев А. В. Асимптотически – равномерные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Анисимова // Моделирование, идентификация, синтез систем управления: сб. тез. 13 Междунар. научно–техн. конф., (12–19 сен. 2010 г.). – Москва–Донецк, 2010. – С. 64.
69. Мазнев А. В. Асимптотически – равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 2. – С. 237–246.
70. Мазнев А. В. О редукции уравнений в вариациях задачи об асимптотически – прецессионных движениях / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 150–160.
71. Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениям тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / А. П. Маркеев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 29–36.
72. Маркеев А. П. Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 363–372.
73. Маркеев А. П. Об устойчивости прецессии Гриоли / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 556–572.

74. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Б. К. Млодзеевский // Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания. – 1894. – 7, вып. 1. – С. 46–48.
75. Пилпани Ю. Ю. Об одном классе асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 177 – 183.
76. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически – прецессионные движения второго типа сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Вісн. Донецького ун – ту. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 91 – 96.
77. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически – прецессионные движения сферического гиростата в случае прецессии общего вида / Ю. Ю. Пилпани // Вісн. Донецького ун – ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 69 – 74.
78. Пилпани Ю. Ю. Об одном классе асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Динамічні системи моделювання та дослідження стійкості: тези 15 Міжнар. Конф. (м. Київ, 25 – 27 трав. 2011 р.). – Київ, 2011. – С. 115.
79. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически – прецессионные движения второго типа сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Тези 14 Міжнар. конф. ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 19 – 21 квіт. 2012 р.). – Київ, 2012. – С. 348.
80. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически – прецессионные движения сферического гиростата в случае прецессии общего вида / Ю. Ю. Пилпани // Сучасні проблеми механіки і математики: тези Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 21–25 трав. 2013 р.). – Львів, 2013. – С. 148.
81. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избр. труды: в 3 т. / А. Пуанкаре. – М. : Наука, 1971. – 1. – 771 с.
82. Рубановский В. Н. Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1968. – Вып. 2. – С. 99–106.

- 83.Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1974. – 38, вып. 4. – С. 616–627.
- 84.Рубановский В. Н. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49, вып. 2. – С. 212–219.
- 85.Рубановский В. Н. О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 402–414.
- 86.Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1956. – 30, вып. 1. – С. 51–66.
- 87.Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
- 88.Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем / А. Я. Савченко – К.: Наук. думка, 1977. – 160 с.
- 89.Скрыпник С. В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С. В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
- 90.Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения твердого тела с гироскопом / Л. Н. Сретенский // Вестник Моск. ун-та. Математика, механика. – 1963. – № 3. – С. 60–71.
- 91.Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости / В. А. Стеклов. – Харьков, 1893. – 234 с.
- 92.Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 19–21.
- 93.Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 1–3.

94. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
95. Узбек Е. К. Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Е. К. Узбек, Е. А. Данилейко // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 87–94.
96. Харламов М. П. Понижение порядка в механических системах с симметрией / М. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 4–18.
97. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела / М. П. Харламов – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
98. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1955. – 19, вып. 2. – С. 231–233.
99. Харламов П. В. Два линейных интеграла уравнений Кирхгофа / П. В. Харламов // Труды Донецкого индустр. ин-та. – 1957. – 20. – С. 42–49.
100. Харламов П. В. О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / П. В. Харламов // Труды Донецкого индустр. ин-та. – 1957. – 20. – С. 51–67.
101. Харламов П. В. О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1962. – 143, № 4. – С. 805–807.
102. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1963. – 27, вып. 4. – С. 703–707.
103. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П. В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
104. Харламов П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1964. – 158, № 5. – С. 1048–1050.
105. Харламов П. В. Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 3. – С. 703–707.

106. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 1. – С. 158–159.
107. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
108. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
109. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
110. Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
111. Харламов П. В. Об одном новом решении задачи о движении тяжелого гиростата / П. В. Харламов, Л. М. Ковалева // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 3–8.
112. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1966. – 30, вып. 4. – С. 784–788.
113. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.
114. Харламова Е. И. Об алгебраическом инвариантном соотношении интегродифференциального уравнения задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, при условиях Гесса / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 28–32.
115. Харламова Е. И. Об условиях существования алгебраических инвариантных соотношений уравнений движения твердого тела / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 38–57.
116. Харламова Е. И. О двух решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 69–74.

117. Харламова Е. И. Об экспоненциальных решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламов // *Механика твердого тела*. – 1971. – Вып. 3. – С. 90–95.
118. Харламова Е. И. Интегродифференциальные уравнения динамики твердого тела / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская – К.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
119. Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде / О. В. Холостова. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 128 с.
120. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая / С. А. Чаплыгин // *Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания*. – 1894. – 6, вып. 2. – С. 20–42.
121. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С. А. Чаплыгин // *Матем. сборник Кружка любителей матем. наук*. – 1897. – 20, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.
122. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С. А. Чаплыгин // *Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания*. – 1901. – 10, вып. 2. – С. 32–34.
123. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / С. А. Чаплыгин // *Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания*. – 1904. – 12, вып. 1. – С. 1–4.
124. Яхья Х. М. О сведении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки к одному дифференциальному уравнению / Х. М. Яхья // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1984. – № 4. – С. 64–67.
125. Яхья Х. М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата / Х. М. Яхья // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1*. – 1987. – Вып. 4. – С. 88–90.
126. Bohl P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage / P. Bohl // *J. reine und angew. Math.* – 1904. – 127, H. 3. – S. 179–276.
127. Burgatti P. Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso / P. Burgatti // *Rend. Circ. matem. di Palermo*. – 1910. – 29. – P. 369–377.

128. Clebsch A. Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit / A. Clebsch // J. reine und angew. Math. – 1856. – 52, H. 2. – S. 103–132.
129. Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Ann. – Leipzig, 1871. – B. 3. – S. 238–262.
130. Darboux G. Sur la theorie de Poinsoet et sur des mouvements correspondants á la même polhodie / G. Darboux // C. r. Acad. sci. – 1885. – 101. – P. 1555–1561.
131. Dirichlet L. Über einige Fälle in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressiblen Flüssigen / L. Dirichlet // Medium teoretisch bestimmen last, Berl. Berichten. – 1852. – 30. – P. 10–25.
132. Euler L. Recherches sur la precession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre / L. Euler // Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1749–1751. – P. 289–295.
133. Euler L. Recherches sur la connaissance mécanique des corps / L. Euler // Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1758–1765. – 16. – P. 131–153.
134. Gray A. A treatise on gurostatics and rotational motion / A. Gray – Theory and applications. Reprinted by Dover Publications. – New York, 1959. – 530 p.
135. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – 26, f. 3–4. – P. 271–281.
136. Grioli G. Questioni di stabilita riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. Scupla norm. super. Pisa (3). – 1949. – 1. – P.43–71.
137. Grioli G. Questioni di dinamica del corpo rigido / G. Grioli // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. – 1963. – 35, f. 1–2. – P. 35–39.
138. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann.– 1890.– 37, H. 2.– S. 153–181.
139. Husson E. Recherche des integrales algebriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe / E. Husson // Ann. Fac. sci Univ. Toulouse, Serie 2. – 1906. – 8. – P. 73–152.
140. Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps / C.G.J. Jacobi // Gesammelte Werke. – 2. – Berlin. – 1882. – S. 289–352.

141. Kharlamov P.V. New methods in the dynamics of system of rigid bodies / P.V. Kharlamov // In Dynamics of multibody system: Proc. IUTAM symp. Berlin: Springer Verl. – 1978. – P. 133–143.
142. Kirchhoff G.R. Über die Bewegung eines Rotation körpers in einer Flüssigkeit / G.R. Kirchhoff // J. für die reine und angew. Math. – 1870. – 71. – S. 237–262.
143. Klein F. über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld // New York e. a. Johnson reprint corp. – 1965. – 966 S.
144. Kneser A. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslage (Zweiter Aufsatz) / A. Kneser // J. reine und angew. Math. – 1897. – 11, H. 3. – S. 186–223.
145. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzial gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – 65. – S. 528–537.
146. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – 3. – P. 1–25.
147. Liouville R. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points / R. Liouville // Acta math. – 1897. – 20. – P. 239–284.
148. Mettler E. Periodische und asymptotische Bewegung des unsymmetrischen schweren Kreisels / E. Mettler // Math. Zeitschrift. – 1937. – 43, H.1. – S.59–100.
149. Perron O. Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differential gbeichungssystem / O. Perron // Ibid. – 1929. – 29, S. 10. –147.
150. Poincot L. Thèorie nounelle de la rotation des corps / L. Poincot // J. math. pures et appl. – 1851. – 16. – P. 9–130; P. 289–336.
151. Poisson S.D. Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant / S.D. Poisson // Mém. Acad. sci. – 1832. – 11. – P. 521–581.
152. Poisson S.D. Traité de mécanique / S.D. Poisson // Bachelier, Imprimeur–Libraire pour les Math. Paris. – 1833. – 2. – 782 p.
153. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O. Staude // J. reine und angew. Math. – 1894. – 113, H. 4. – S. 318–334.
154. Thomson W. Treatise on natural philosophy / W. Thomson, P. Tait // Vol. 1. Oxford. – 1867. – 727 p

155. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – 22. – P. 201–358.
156. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5, №5. – P. 747–754.
157. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H.M. Yehia // J. theoretical and applied machanics. – 1986. – 5, № 5. – P. 755–762.
158. Yehia H.M. Equivalent mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems / H.M. Yehia // Internazional Journal of non–linear Mechanics. – 2001. – 36. – P. 89–105.