

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"

На правах рукописи

Котов Герман Александрович

**ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА
С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ**

01.02.01 — "Теоретическая механика"

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент,
Мазнев А. В.

Донецк — 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	11
2. О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ	24
2.1. Описание механической модели	24
2.2. Момент количества движения тела–носителя S_0 . Уравнения Эйлера–Пуассона	27
2.3. Момент количества движения системы S	28
2.4. Описание потенциальных и гироскопических сил	32
2.4.1. Случай ньютоновского силового поля	32
2.4.2. Описание сил Лоренца и сил Кулона	33
2.5. Уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом	34
2.6. Метод инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений	35
2.7. Прецессионные движения гиростата	38
2.8. Вывод	40
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ДЛЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ	41
3.1. Постановка задачи	41
3.2. Уравнения движения в базисе $\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}$	42
3.3. Уравнения движения в базисе $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$	45

3.3.1. Маятниковые движения	49
3.3.2. Редукция дифференциальных уравнений прецессионных движений гиростата с помощью первого интеграла	53
3.4. Вывод	58
4. ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ВИДА $\lambda(t) = \lambda(t)\alpha$	59
4.1. Полурегулярные прецессионные движения первого типа	60
4.1.1. Общее уравнение движений	61
4.1.2. Случай $A_{23} = 0, \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0$	64
4.2. Прецессионно-изоконические движения	75
4.2.1. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения	75
4.2.2. Прецессионно-изоконические движения общего вида	78
4.3. Прецессионные движения, описываемые связью $\dot{\psi} = \rho_1 \dot{\varphi} + \rho_0$	81
4.4. Вывод	84
5. ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ВИДА $\lambda(t) = \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta$	85
5.1. Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил	85
5.1.1. Первое решение	87
5.1.2. Второе решение	92
5.2. Регулярные прецессионные движения тяжелого гиростата	93
5.2.1. Равномерные вращения	94
5.2.2. Регулярные прецессии с компонентами гиросtatического момента специального вида	96
5.2.3. Регулярные прецессии с произвольным переменным гиросtatическим моментом	99

5.3. Полурегулярные прецессионные движения второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил	106
5.4. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил	108
5.5. Вывод	110
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	112

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. При исследовании гироскопических систем, спутников, роботов и манипуляторов с целью стабилизации и управления движением этих объектов используются специальные механические системы, называемые гиростатами, в которых учтено движение составных частей моделируемых объектов (роторов, жидкостей в полостях тела и др.) [1], [2], [5], [6], [44], [82].

Понятие "гиростат" впервые появилось в работах У. Томпсона [165], В. Вольterra [166], Н. Е. Жуковского [46]. В своем курсе по теоретической механике [69] Т. Леви-Чивита и У. Амальди гиростатом называют механическую систему, состоящую из произвольного по распределению масс тела-носителя и присоединенных к нему тел, в результате движения которых распределение масс всей системы не меняется. К таким системам относятся, например, объекты, которые несут на себе закрепленные осью симметричные тела.

П. В. Харламов в работах [109], [110] обобщил понятие "гиростат" указав, что несомые тела могут иметь более сложное распределение масс, чем гироскоп Лагранжа: для них должно выполняться условие, что центр масс несомого тела должен находиться на оси вращения, которая является главной центральной осью, а моменты инерции его относительно осей, ортогональных оси вращения, равны.

В обзорных работах [23], [21], [122], [110] указана литература по результатам, полученным в задаче о движении тяжелого гиростата.

При исследовании движений гиростата возникают две самостоятельные задачи. Первая из них относится к случаю, когда гиростатический момент постоянен. Поскольку для уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом сохраняются три первых интеграла, то в ней путем обобщения получены многочисленные результаты (например, П. В. Харламов обобщил многие решения задачи о движении тяжелого тела с неподвижной точкой [110], [106], [107], [111], Л. Н. Сретенский обобщил решение Гесса и Горячева-Чаплыгина [96] и др.).

Вторая задача исследования движения гиростата в различных задачах динамики относится к случаю, когда гиростатический момент зависит от времени. При ее рассмотрении применяются результаты В. Вольтерра [166], Н. Е. Жуковского [46], В. В. Румянцева [89], П. В. Харламова [110], Й. Виттенбурга [11] и др. Особо интенсивно вторая проблема развивается в настоящее время. Многие исследования (см., например, обзоры [18], [21], [22]) посвящены изучению задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом неравномерного вращения как одного несомого ротора, так и двух роторов.

В настоящей работе изучается задача о прецессионных движениях гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях одного и двух несомых роторов.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательской работы кафедры высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры:

"Дослідження нестационарних неоднорідних нелінійних та ймовірносних математичних моделей механіки, фізики і економіки" (№ 0109U003034, январь 2009 г. – декабрь 2011 г.);

кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета:

"Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях" (№ 0107U001773, Г-07/38, 01.01.2007 г. – 31.12.2012 г.);

отдела прикладной механики ГУ "Институт прикладной математики и механики":

"Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел" (№ 0111U000484, № III-6-11, 01.01.2011 г. – 31.12.2015 г.).

Цель и задачи работы.

Объектом исследования является задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил.

скопических сил. На теле-носителе закреплены один или два вращающихся ротора.

Предметом исследования является система обыкновенных дифференциальных уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающая движение гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Целью данной диссертационной работы является нахождение и изучение условий существования программных движений, характеризующихся свойствами прецессионности и изоконичности, построение решений уравнений Кирхгофа–Пуассона в замкнутом виде. Для этого сформулированы следующие *задачи*:

1. Редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона для прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом.

2. Анализ условий существования решений редуцированных уравнений Кирхгофа–Пуассона, описывающих заданные программные движения.

3. Построение в замкнутой форме решений уравнений прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях одного и двух несомых тел.

4. Исследование свойств найденных решений в терминах, принятых в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Получение аналитических формул для компонент гиростатического момента, которые могут служить для управления программными движениями.

Методы исследования. В диссертации применены методы инвариантных соотношений [69], [116], [50] построения решений уравнений динамики твердого тела, теория интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах, методы решения обратных задач аналитической механики.

Научная новизна полученных результатов.

1. Проведена редукция уравнений движения гиростата с двумя вращающимися роторами под действием потенциальных и гироскопических сил на инвариантных соотношениях, описывающих прецессионные движения гиростата.

2. С целью получения редуцированной системы уравнений предложены

два подхода: первый подход основан на применении базиса, характеризующего прецессионные движения; второй подход заключается в использовании ортонормированного базиса, векторы которого связаны с направлением гиростатического момента.

3. С помощью интеграла момента количества движения при использовании второго подхода уравнения Кирхгофа–Пуассона преобразованы к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка на углы прецессии и собственного вращения.

4. Построено новое решение уравнений Кирхгофа–Пуассона, соответствующее маятниковым движениям гиростата первого класса.

5. Второй класс маятниковых движений установлен с помощью введения новых переменных задачи. Он описывается эллиптическими функциями и интегралами от эллиптических функций времени.

6. В задаче о движении гиростата с одним вращающимся ротором под действием потенциальных и гироскопических сил при использовании первого подхода получена новая форма дифференциальных уравнений, описывающих полурегулярные прецессии первого типа. На их основе установлен новый класс прецессий, в котором скорость собственного вращения является отношением тригонометрических полиномов.

7. Показано, что условия существования регулярных прецессий гиростата определяют положение центра масс и направление гиростатического момента, а также устанавливают зависимости компонент гиростатического момента от времени.

8. Рассмотрены условия существования полурегулярных и прецессионно-изоконических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построены новые решения уравнений движения гиростата.

9. Показано, что найденные решения характеризуются новыми классами зависимостей скоростей собственного вращения и прецессии, а также компонент гиростатического момента от времени.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. В ней построены классы точных решений уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатиче-

ского момента. Они могут быть применены в прикладных областях механики, использующих теорию управления и стабилизации движения. Решения дифференциальных уравнений, рассмотренных в диссертации, дают дополнительную информацию о свойствах решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты диссертации могут быть использованы в ГУ "Институт прикладной математики и механики" (г. Донецк), в ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" в исследованиях движений тела под действием потенциальных и гироскопических сил, при чтении специальных курсов по аналитической механике и математическому моделированию, а также общих курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений в вузах ДНР и России.

Личный вклад соискателя. По теме диссертации опубликованы 7 статей в рецензируемых изданиях. Научные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Из трех совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором самостоятельно. Г. В. Горру и А. В. Мазневу принадлежат постановка задач, указание методов исследования, формулировка некоторых результатов, а также общее руководство. В совместной работе [13] А. А. Возняк принадлежит решение, соответствующее случаю $\gamma = (0, 0, 1)$, остальные результаты получены автором диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена применением общепринятых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на

— научной конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов Донецкого национального университета по итогам научно-исследовательской работы за период 2007-2008 гг. — Донецк, 2009;

— XV international conference, DSMSI. — Киев, 2011;

— V международной научно-практической интернет-конференции "Со-

временные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты — 2016".
— Донецк, 2016.

Публикации. По теме диссертации опубликовано десять работ:

— 7 научных статей [13, 28, 62, 64–66, 79] изданы в журналах, которые рекомендованы ВАК ДНР;

— 3 тезисов докладов научных конференций [63, 73, 76].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Объем работы составляет 131 страницу, библиография — 170 источников.

Раздел 1

Обзор литературы по теме диссертации

В обзорных монографиях по динамике твердого тела [18, 21–23, 122] изложены становление и развитие динамики твердого тела и динамики систем связанных твердых тел. Многие объекты современной техники, в частности, гироскопические системы, спутники, роботы представляют собой системы связанных твердых тел. Разработка жидкостных ракет, задачи управления и стабилизации орбитальных спутников, содержащих роторы и запасы жидкого топлива, вопросы сейсмостойкости жидкостных резервуаров и другие подобные проблемы приводят к задаче о движении гиростата, содержащего полость, заполненную жидкостью [1] или системы сочлененных гиростатов [5, 6, 44, 81]. С помощью теории упругих стержней моделируется пространственная конфигурация биологических макромолекул [48]. В математическом моделировании движений таких объектов особое значение имеют содержательная, концептуальная и математическая задачи.

На первом этапе проводилось исследование движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в предположении, что деформации тела отсутствуют, то есть в основу математического моделирования была положена концептуальная модель абсолютно твердого тела. Ж. Даламбер [41], рассматривая прецессию и нутацию оси Земли, получил математическую модель, которая описывалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Математическую модель движения твердого тела с неподвижной точкой разработал Л. Эйлер [149]; он ввел все основные динамические и кинематические характеристики и создал как динамические, так и кинематические уравнения.

Остановимся на результатах, полученных в решении математической задачи о движении тяжелого твердого тела. Л. Эйлер рассмотрел случай, когда центр масс тела неподвижен. Он нашел дополнительный первый интеграл, что позволило свести интегрирование уравнений движения к квадратурам. Движение тела в случае Л. Эйлера изучали Л. Пуансо [162], Г. Дарбу [148],

К. Якоби [155], Ж. Мак–Куллаг [161] и другие ученые. Л. Пуансо показал, что в случае Эйлера эллипсоид инерции тела для точки опоры во время движения катится без скольжения по одной из своих касательных плоскостей. Эта плоскость перпендикулярна к главному моменту количества движения тела и остается неподвижной в пространстве. Мгновенная угловая скорость по величине пропорциональна радиусу–вектору точки касания, а по направлению с ним совпадает.

Л. Пуансо давал и вторую интерпретацию, на основании которой Д. Дарбу и Ж. Кениг построили прибор, названный ими герполографом, с помощью которого моделируется движение тела по инерции.

Главным геометрическим результатом Л. Пуансо может служить его теорема: "Движение твердого тела с неподвижной точкой можно представить качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу этого вектора".

В связи с важностью случая Эйлера отметим и другие интерпретации.

Ж. Мак–Куллаг показал, что гирационный эллипсоид тела, соответствующий точке опоры, проходит все время движения через неподвижную точку в пространстве, лежащую на неизменном главном моменте количества движения.

К. Якоби доказал, что всякое вращение Эйлера может быть разложено на постоянное вращение около нормали к плоскости катания и на некоторое колебательное движение Пуансо. К. Якоби аналогичный результат доказал для случая Лагранжа (т.е. движение гироскопа Лагранжа может быть разложено на два движения Пуансо).

Большой вклад в динамику тяжелого твердого тела внесли Ж. Лагранж [68], Л. Пуансо [162], С. Пуассон [163], Р. Лиувиль [160], Г. Дарбу [148], Е. Гюссон [154], Н. Ковалевский [158], В. Гесс [153], Д. Гриоли [150], С. В. Ковалевская [56] (о результатах С. В. Ковалевской см. в статье [86]), Н. Е. Жуковский [46], С. А. Чаплыгин [136] — [141], В. А. Стеклов [97] — [99], Д. К. Бобылев [8], А. М. Ляпунов [71, 72], Д. К. Горячев [39, 40], Г. В. Колосов [59], Г. Г. Аппельрот [4].

После получения математической модели движения твердого тела с непо-

движной точкой актуальной явилась задача об интегрировании уравнений Эйлера–Пуассона в квадратурах. Согласно теореме К. Якоби, для интегрирования в квадратурах необходимо найти дополнительный первый интеграл исходных уравнений. В динамике тяжелого твердого тела были кроме случая Эйлера получены случаи Ж. Лагранжа и С. В. Ковалевской. Случай Ж. Лагранжа относится к варианту, когда тело имеет симметричную форму; для него имеет место дополнительный линейный первый интеграл. Этот случай изучали С. Пуассон, К. Якоби, В. Гесс и другие (см. монографию Г. К. Сулова [100]).

С. В. Ковалевская, изучая задачу о существовании решений уравнений Эйлера–Пуассона в предположении, что основные переменные задачи являются однозначными функциями комплексного времени, показала, что в общем случае уравнения Эйлера–Пуассона не имеют таких решений с пятью произвольными постоянными. В этом случае исключаются решения Эйлера, Лагранжа и решение, которое теперь называют случаем Ковалевской.

А. М. Ляпунов рассмотрел вариант, когда однозначные решения имеют особые точки, отличные от точек типа полюсов (например, существенно особые точки). Он показал, что новых решений уравнения Эйлера–Пуассона не допускают.

Г. Г. Аппельрот применял указанный выше метод для построения решений в виде рядов по комплексной переменной t в случае, когда количество произвольных постоянных в решении равно четырем. Он получил решение В. Гесса.

Поскольку в случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской дополнительный интеграл имеет алгебраическую структуру, то в динамике твердого тела доказан ряд теорем о существовании таких интегралов для уравнений Эйлера–Пуассона (см. статьи Е. Гюссона [154], П. Бургатти [145]).

После работ Е. Гюссона, Р. Лиувилля были решены проблемы существования первых интегралов в случае, когда они являются аналитическими функциями по некоторому параметру [58]. Дополнительных интегралов такого вида не существует. Неинтегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона связана с расщеплением сепаратрис [47].

Аналогичная ситуация имеет место и для дифференциальных уравнений Кирхгофа–Пуассона, которые описывают задачу о движении тела в жидкости и задачу о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил [57].

В связи с несуществованием дополнительных интегралов и неинтегрируемостью уравнений динамики твердого тела актуальным направлением является исследование свойств движения тела с неподвижной точкой, которое основано на построении частных решений уравнений динамики. Достаточно большой набор частных решений позволит провести определенное исследование движения тела в общем случае. Важность построения частных решений уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона связана не только с тем, что, благодаря применению теоремы Пуансо [162] к исследованию движения тела, появилась возможность классификации движений тела единым методом, но и с перспективой исследовать окрестности частных решений. Если применить теорию возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений и первый метод Ляпунова, то можно установить глобальные свойства интегрального многообразия уравнений динамики твердого тела. Такая задача рассматривалась в статьях [9, 18, 74]. Все частные решения уравнений Эйлера–Пуассона приведены в монографиях [18, 22, 23, 122].

На этапе математической постановки задачи большое значение имеют новые формы дифференциальных уравнений движения твердого тела. Начало таким исследованиям положено В. Гессом, А. Д. Билимовичем [7], Х. М. Яхьей [144], А. И. Докшевичем [42], П. В. Харламовым [113], Е. И. Харламовой [127, 131, 132], Н. Ковалевским, С. А. Чаплыгиным. Как показала история, уравнения В. Гесса и А. Д. Билимовича не получили широкого применения, а уравнения Н. Ковалевского и С. А. Чаплыгина носили частный характер, так как получены при определенных ограничениях на параметры уравнений Эйлера–Пуассона. П. В. Харламов [114] предложил новый способ понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона. Он основан на использовании специальной системы координат, которая введена так, что одна из координатных осей содержит центр тяжести тела. С ее помощью уравнения Эйлера–Пуассона (и их обобщения — уравнения движения тяжелого гиро-

стата) приведены к системе двух уравнений первого порядка, которая имеет нелинейную структуру. Эта форма дифференциальных уравнений носит название первой формы уравнений П. В. Харламова. Вторая форма уравнений П. В. Харламова имеет второй порядок относительно компоненты кинетического момента и получена путем исключения компонента единичного вектора вертикали, интегралов и одного из динамических уравнений и подстановкой найденных значений в уравнение Пуассона. Частными случаями этих уравнений являются уравнения Н. Ковалевского и С. А. Чаплыгина.

Второй этап развития задач динамики твердого тела характеризуется тем, что тело–носитель содержит роторы, которые вращаются относительно осей симметрии с постоянной скоростью. Математическая постановка задачи о движении гиростата [46,89,110,118] отличается от математической постановки задачи о движении тяжелого твердого тела тем, что правые части дифференциальных уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом содержат линейные по компонентам угловой скорости слагаемые. Данное обстоятельство не повлияло на количество дополнительных первых интегралов, и поэтому к уравнениям движения гиростата применима теория Якоби интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах.

Н. Е. Жуковский [46] обобщил решение Л. Эйлера (сведение задачи к квадратурам осуществил Й. Виттенбург [11]). Решение Ж. Лагранжа получает только тривиальное обобщение, которое не сказывается на процессе получения решения в эллиптических функциях. Решение С. В. Ковалевской на случай задачи о движении гиростата обобщил Х. М. Яхья [144]. Частные варианты этого решения изучались в работе [103].

Стационарные решения уравнений Эйлера–Пуассона изучал О. Штауде [112, 164]. Они относятся к простейшим решениям, поскольку в них компоненты угловой скорости тела не зависят от времени. В задаче о движении тяжелого гиростата конус осей перманентных вращений рассмотрел П. В. Харламов в статье [110], А. М. Ковалев изучил свойства этого конуса [54].

Стационарные решения уравнений движения твердого тела отвечают равномерным движениям, которые широко распространены в технике. В связи с этим в динамике твердого тела было сформировано отдельное научное

направление по исследованию устойчивости этих решений. Основы теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений заложил А. М. Ляпунов, создавший два подхода в анализе свойств устойчивости (первый и второй методы Ляпунова). Много результатов по исследованию устойчивости стационарных решений уравнений Эйлера–Пуассона получили В. В. Румянцев [90], Н. В. Рубановский [88], А. П. Маркеев [82, 83], А. Я. Савченко [91], А. М. Ковалев, А. М. Киселев [49, 53], О. В. Холостова [135] и другие.

В силу того, что уравнения движения гиростата с постоянным гирос태тическим моментом носят более общий характер, чем уравнения Эйлера–Пуассона, стало возможным не только обобщить известные решения, но и получить новые классы точных решений. В динамике тяжелого гиростата найдены следующие решения: два решения Л. Н. Сретенского [96] (обобщение решение В. Гесса и Д. Н. Горячева – С. А. Чаплыгина), пять решений П. В. Харламова [119, 120] (первое решение является обобщением решения О. Штауде, второе — решения Д. К. Бобылева – В. А. Стеклова, третье — решения В. А. Стеклова, четвертое — решения Н. Ковалевского, пятое решение получено при условиях С. В. Ковалевской), три решения Е. И. Харламовой [128] – [130] (два из этих решений являются обобщениями решений Д. Гриоли и А. И. Докшевича), решения А. И. Докшевича [42], решение П. В. Харламова – Л. М. Ковалевой [117], решение Е. И. Харламовой и П. В. Харламова [124], три решения Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской [122, 123, 125, 134] (одно из решений обобщает решение Б. И. Коносевича – Е. В. Поздняковича [60]), решение Г. В. Мозалевской [84]. Увеличение числа решений уравнений движения гиростата связано и с тем, что были получены новые формы дифференциальных уравнений (П. В. Харламов, Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская, А. И. Докшевич и другие).

Более подробно с результатами Донецкой школы динамики твердого тела можно ознакомиться в работе [70].

При нахождении частных решений уравнений динамики тяжелого гиростата применялись разные подходы. Первый подход можно охарактеризовать как полуобратный метод нахождения решений, который заключается в отыс-

кании решений определенной аналитической структуры. Вторым подход основывается на методе инвариантных соотношений, предложенном Т. Леви–Чивитой [69]. В третьем подходе используется метод инвариантных соотношений, предложенный П. В. Харламовым [115], который отличается от второго подхода тем, что, как показано в работе [115], он носит более общий характер, чем подход Т. Леви–Чивиты.

Систематическое построение частных решений в задаче о движении тяжелого гиростата проводилось в тесной связи с применением метода годографов кинематического истолкования движения, предложенного Л. Пуансо. Однако, теорема Пуансо долгое время не находила широкого применения при изучении движения тела с неподвижной точкой. Это обусловлено тем, что анализ неподвижного годографа был связан с большими трудностями, так как отсутствовали уравнения этого годографа. После того, как П. В. Харламов [109] предложил уравнения неподвижного годографа, записанные в тех же переменных, что и уравнения движения, стало возможным в каждом частном решении провести анализ движения с помощью теоремы Пуансо. Полным решением П. В. Харламов [121] назвал такое исследование в динамике гиростата, в котором не только построено новое решение уравнений движения, но и дано геометрическое истолкование движения гиростата (отметим некоторые из работ этого направления [19, 29, 35–37, 45, 51, 52, 61, 67, 85, 92, 93, 102, 104, 106, 107, 126]).

В применении теоремы Пуансо очень важны методы визуализации в представлении движения тела. Эти методы в кинематическом истолковании движения тела разработали М. П. Харламов [105], А. П. Харламов [102], И. Н. Гашененко [16, 17, 19, 20]. С помощью этих методов можно построить полное решение в каждом случае интегрируемости уравнений динамики гиростата. В книгах [18, 22, 23] дан анализ литературы, посвященной результатам в исследовании свойств движения тела.

Существенное упрощение уравнений П. В. Харламова получил Г. В. Горр [21]. Для полярного угла этих уравнений он нашел такое представление, в котором, в отличие от уравнений П. В. Харламова, не содержатся производные от вектора угловой скорости. При рассмотрении параметров Родрига–

Гамильтона Г. В. Горр и А. М. Ковалев [38] предложили алгебраическую форму уравнений неподвижного годографа, которая содержит компоненты угловой скорости и параметры Родрига–Гамильтона. Указанные выше результаты открывают новые перспективы в создании методов кинематического истолкования движения гиростата.

Третий этап в разработке новых содержательных, концептуальных и математической постановок задач динамики систем связанных твердых тел класса "гиростат" соответствует математическому моделированию движений гиростата в силовых полях сложной структуры. В качестве примера приведем анализ движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Содержательная постановка задачи состоит в рассмотрении движения гиростата в центральном ньютоновском, магнитном и электрическом поле [21, 22]. Концептуальная задача может быть охарактеризована следующими свойствами: тело–носитель намагничено, наэлектризовано; несомые тела свободны от намагничивания и не несут электрические заряды; расстояния от неподвижной точки до точек ньютоновского и кулоновского притяжений (лежащих на одной оси) малы по сравнению с размерами тела. Математическая постановка задачи о движении гиростата описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. Эти уравнения вначале использовались в задаче о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.

Опишем более подробно уравнения Кирхгофа–Пуассона, рассматривая модель движения гиростата под действием описанного выше класса сил, используя гидродинамическую аналогию Х. М. Яхьи, то есть в терминах задачи о движении тела в жидкости.

Обозначим через \mathbf{s} — вектор обобщенного центра масс гиростата; $\boldsymbol{\lambda}$ — вектор гиростатического момента ($\boldsymbol{\lambda} = \text{const}$). Уравнения движения для указанных задач при условии $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ вывел Г. Кирхгоф [156]. Используя подход У. Томпсона и П. Тэта, Г. Кирхгоф нашел три интеграла уравнений и указал условие существования дополнительного линейного интеграла. А. Клебш [146, 147] преобразовал уравнения Кирхгофа к новой форме и установил два новых решения. Г. Вебер [167] изучал частный вариант второго случая А. Клебша.

В. А. Стеклов [98] и А. М. Ляпунов [71] нашли новые дополнительные первые интегралы для случая $\lambda = 0, s = 0$. В. А. Стеклов поставил задачу об условиях существования квадратичных интегралов уравнений Кирхгофа при условиях $\lambda = 0, s = 0$ и доказал теорему: квадратичные интегралы уравнений движения существуют только в случаях Кирхгофа, Клебша, Стеклова. Как показал А. М. Ляпунов этот анализ оказался неполным, так как пропущен случай сферического распределения масс. В. А. Стеклов изложил все результаты, которые ему были известны: вывод уравнений движения тела в жидкости как в форме Кирхгофа, так и в форме А. Клебша; случаи А. Клебша; свой случай; результаты Альфана [152] и Кеттера [159]; уравнения движения тяжелого твердого тела в случае, когда тело имеет отверстия и заполнено жидкостью (т.е. при $\lambda = 0, s \neq 0$). Следовательно, общие уравнения тяжелого твердого тела в жидкости получены В. А. Стекловым. Основные результаты Кирхгофа, Клебша, Стеклова, Ляпунова относятся к случаю $\lambda = 0, s = 0$.

С. А. Чаплыгин [138] рассматривал случай $\lambda = 0, s \neq 0$. Наиболее известные результаты С. А. Чаплыгина таковы: геометрическая интерпретация движения тела в жидкости в случае Клебша (движение тела в случае Клебша при определенных предположениях может быть представлено качением без скольжения гиперблоида по некоторой винтовой поверхности); решение задач о движении тела в жидкости для специального вида кинетической энергии; построение решений уравнения движения, которые характеризуются одним, двумя и тремя инвариантными соотношениями.

Работы П. В. Харламова посвящены общему случаю: $\lambda \neq 0, s = 0$. Он обобщил решения Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова; исследовал условия существования одного, двух и трех линейных инвариантных соотношений (обобщив решения С. А. Чаплыгина); предложил новые формы уравнений движения тела в жидкости. Интегралы, полученные П. В. Харламовым, обобщил В. Н. Рубановский [87, 88].

Условия существования квадратичных интегралов уравнений Кирхгофа рассмотрены В. Н. Рубановским. Он доказал утверждение, которое обобщает выводы В. А. Стеклова.

Большой интерес представляют результаты по интегрированию уравнений движения класса Кирхгофа в случае одного инвариантного соотношения (Г. В. Горр, Е. К. Узбек [31], [101]), двух инвариантных соотношений (С. В. Скрышник [94], П. В. Харламов [108]), трех инвариантных соотношений (Г. В. Горр, Е. К. Узбек [30]) и результаты (Г. В. Горр, Е. М. Миронова [25, 34], А. В. Мазнев [75]), посвященные построению новых нелинейных полиномиальных решений.

Отметим и результаты Х. М. Яхьи [143], который обобщил случай интегрируемости С. А. Чаплыгина. Решение Х. М. Яхьи характеризуется дополнительным интегралом четвертого порядка.

Результат В. В. Соколова [95] о построении дополнительного первого интеграла четвертой степени показал сложность в построении интегралов общего вида, так как не появились в научной литературе другие работы, посвященные исследованию условий существования первых интегралов порядка выше второго. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа–Пуассона в квадратурах показана В. В. Козловым и Д. А. Онищенко [57] (об этом сказано выше).

Дифференциальные уравнения класса Кирхгофа–Пуассона в трактовке уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил изучали Д. Гриоли [150, 151], Х. М. Яхья [168, 169], Г. В. Горр и другие.

Н. Н. Макеев рассмотрел движение гиростата с постоянным гиростатическим моментом в псевдоевклидовом пространстве [80].

В монографии Г. В. Горра и А. В. Мазнева [22] отмечено, что наибольшее количество частных решений уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил получено при рассмотрении прецессионных движений гиростата (их характеристика будет подробно изложена ниже). Данный класс движений представляет интерес, поскольку прецессии являются рабочими режимами многих технических конструкций (гироскопических систем, спутников и других объектов). Установленные в статьях [10, 24, 170] решения, описывающие прецессионные движения, существенно отличаются от решений этого класса для задачи о движении тяжелого гиростата. Достаточно заметить, что в классиче-

ской задаче существуют только регулярные прецессии гироскопов Лагранжа и Гриоли, полурегулярные прецессии первого типа гироскопа Гесса, прецессии общего вида гироскопа Докшевича (доказательства этих утверждений установлены Г. В. Горром). Напротив, в задаче о движении гиростата, описываемого уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона, открыты новые типы решений гиростата в случае его прецессии относительно вертикали (см. обзоры [18, 22, 157]). Наглядность представления прецессионных движений гиростата обусловлена применением в исследовании углов Эйлера.

Четвертый этап в развитии задачи о движении гиростата с неподвижной точкой связан с тем, что в реальных системах техники несомые тела вращаются неравномерно. Концептуальная модель гиростата, имеющего неподвижную точку, в случае переменности гиростатического момента приводит к математической постановке задачи, для которой дифференциальные уравнения движения являются неавтономными. Эти уравнения описаны В. Вольтерра [166], Н. Е. Жуковским [46], В. В. Румянцевым [89], П. В. Харламовым [110].

Механическая модель гиростата применяется в многочисленных задачах теоретического и прикладного значения. Еще в работах У. Томпсона [165], была рассмотрена модель, которую он назвал гиростатом. Моделирование движений систем связанных твердых тел с помощью гиростата применяется и в задачах исследования движения спутников, технических конструкций и других объектов.

В. В. Румянцев на основе подхода, использующего уравнения Лагранжа, вывел уравнения движения спутника в поле ньютоновского притяжения. При этом спутник моделируется системой тел, в которой ротор предполагается геометрически и физически симметричными. Это предположение позволило получить дополнительные первые интегралы уравнений движения.

В работе Н. И. Амелькина [2,3] при исследовании стационарных движений тела, несущего двухстепенные гироскопы, предполагается, что роторы гироскопов статически уравновешены и динамически симметричны относительно осей их вращения, а каждый гироскоп статически уравновешен и динамически симметричен относительно оси рамки.

Другие исследования в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом указаны в [26, 27, 33, 75, 77–79].

Так как уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом неавтономны, то количество первых интегралов уменьшается (имеют место геометрический интеграл и интеграл момента количества движения). Если не задан закон изменения от времени гиростатического момента, то система дифференциальных уравнений движения не замкнута. Поэтому для ее интегрирования необходимо либо задать закон изменения гиростатического момента, либо задать инвариантное соотношение, которое описывает некоторое программное движение тела–носителя. Во втором случае можно применить метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений, предложенный А. М. Ковалевым, Г. В. Горром, В. Н. Неспириным [50]. На основе этого метода можно понизить порядок исходных дифференциальных уравнений и затем применять подходы в интегрировании уравнений движения, которые имеют замкнутый характер.

Простейший класс движений (равномерные вращения относительно вертикали) тяжелого гиростата изучен Э. И. Дружининым [43].

Л. М. Ковалева и А. Е. Позднякович [55] рассмотрели условия существования равномерных вращений гиростата в случае, когда ось вращения не совпадает с направлением силы тяжести.

О. С. Волкова [15] изучила равномерные вращения и регулярные прецессии гиростата. В статье О. С. Волковой и И. Н. Гашененко [14] исследованы маятниковые движения тела–носителя и движения, которые описываются линейными инвариантными соотношениями.

В работах Г. В. Горра и А. В. Мазнева [26], [33] рассмотрена задача о движении гиростата, несущего вращающийся ротор, под действием потенциальных и гироскопических сил. Ими получены новые классы решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом. При исследовании условий существования решений уравнений класса Кирхгофа–Пуассона А. В. Мазнев для редуцированных уравнений установил новые классы первых интегралов дробно–линейного и трансцендентного видов, которые не имеют аналогов в классических задачах о движении гиростата с постоян-

ным гиростатическим моментом.

Приведем результаты, полученные в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в случае, когда тело–носитель имеет два ротора.

В статье А. М. Ковалева, Г. В. Горра, В. Н. Неспирино [50] при разработке метода инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений в качестве примера рассмотрены условия существования равномерных вращений тяжелого гиростата. Различные классы маятниковых движений изучены А. А. Возняк [12], Г. В. Горром и Г. А. Котовым [28, 64]. Регулярные прецессии гиростата относительно вертикали изучены Г. В. Горром, Е. К. Щетининой [32] и автором диссертации [64–66]. Общий метод исследования прецессий гиростата разработан автором диссертации [64]. Полурегулярные прецессии первого типа рассмотрены Г. В. Горром и Е. К. Щетининой [32], [142].

Автором диссертации исследованы различные классы прецессий тяжелого гиростата и гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [13, 28, 62, 64–66, 79].

В данном разделе проведен анализ научной литературы, посвященной становлению одной из важнейших областей аналитической механики — динамики гиростата, находящегося под действием различных классов сил и моментов. Отмечены различные подходы в определении понятия "гиростат". Дан анализ публикаций, посвященных изучению прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Показана актуальность изучения движений гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Раздел 2

О методах исследования движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Моделирование движений объектов современной техники, представляющих собой сложные механические системы, основано на моделях абсолютно твердого тела и системы связанных твердых тел. В содержательной постановке рассматриваемых задач должны быть учтены все особенности в движении тела-носителя S_0 и несомых тел S_i ($i = \overline{1, n}$). К настоящему времени модель гиростата получила широкое применение ([70] и обзоры [18], [21], [23], [22]).

Рассматриваются следующие механические модели:

1. Гиростат с постоянным гиростатическим моментом.
2. Гиростат с одним неравномерно вращающимся ротором.
3. Гиростат с двумя роторами, один из которых равномерно вращается, а гиростатический момент второго ротора зависит от времени.
4. Гиростат с двумя роторами, каждый из которых неравномерно вращается относительно оси закрепления.

В данном разделе описаны содержательная и концептуальная постановка задач для перечисленных моделей. Указаны дифференциальные уравнения движения гиростата, методы исследования решений.

2.1 Описание механической модели

В динамике твердого тела существуют несколько определений гиростата. В курсе теоретической механики [69] принято следующее определение.

"Рассмотрим материальную систему Σ , состоящую из неизменной части S (ядро, оправа, арматура, оболочка и т.п.) и из других тел S' , изменяемых или твердых, но связанных не неизменно с S ... Хорошо известный случай, когда влияние этих частей S' будет ... циклическим, т.е. будет

происходить все время так, что распределение масс всей системы Σ не будет изменяться. Это будет иметь место, например, в том случае, когда с твердым телом S неизменно связаны оси нескольких гироскопов, в тесном смысле слова, т.е. гироскопов, обладающих полной симметрией (физической и геометрической), так как в этом случае распределение масс всей системы остается неизменным. То же самое можно сказать о твердом теле, в котором сделана полость в форме тора, наполненная однородной жидкостью, находящейся в каком угодно движении. Обобщая выражение, применяемое английскими механиками, будем называть материальные системы с внутренними циклическими движениями гиростатами."

П. В. Харламов дал более общее определение гиростата [118].

Определение. Гиростатом в случае n -носимых тел называется система S_0, S_1, \dots, S_n , которая обладает следующими свойствами: тело S_0 с неподвижной точкой O имеет произвольное распределение масс; носимые тела S_1, \dots, S_n вращаются вокруг осей l_i , закрепленных в S_0 и их центры масс лежат на осях l_i ; оси l_i являются главными центральными осями тел S_i , а моменты инерции относительно двух других главных центральных осей равны.

Гиростат будем обозначать так: S .

В неподвижной точке O введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, единичные векторы которой обозначим через $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. С телом носителем S_0 свяжем систему координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Рассмотрим движение гиростата S (системы S_0, S_1, \dots, S_n) с неподвижной точкой O в центральном ньютоновском поле сил, в магнитном поле сил и в электрическом поле сил. Пусть ν — единичный вектор оси, на которой лежат центры ньютоновского и кулоновского притяжения (O^*, E). Тела S_i ($i = \overline{1, n}$) закреплены на теле S_0 осями l_i , они свободны от электрических зарядов и не намагничены. Тело S_0 намагничено и несет положительные и отрицательные заряды. Намагниченность обеспечивается магнитными диполями (рис. 2.1).

Обозначим через \mathbf{G} — момент количества движения системы S . В силу

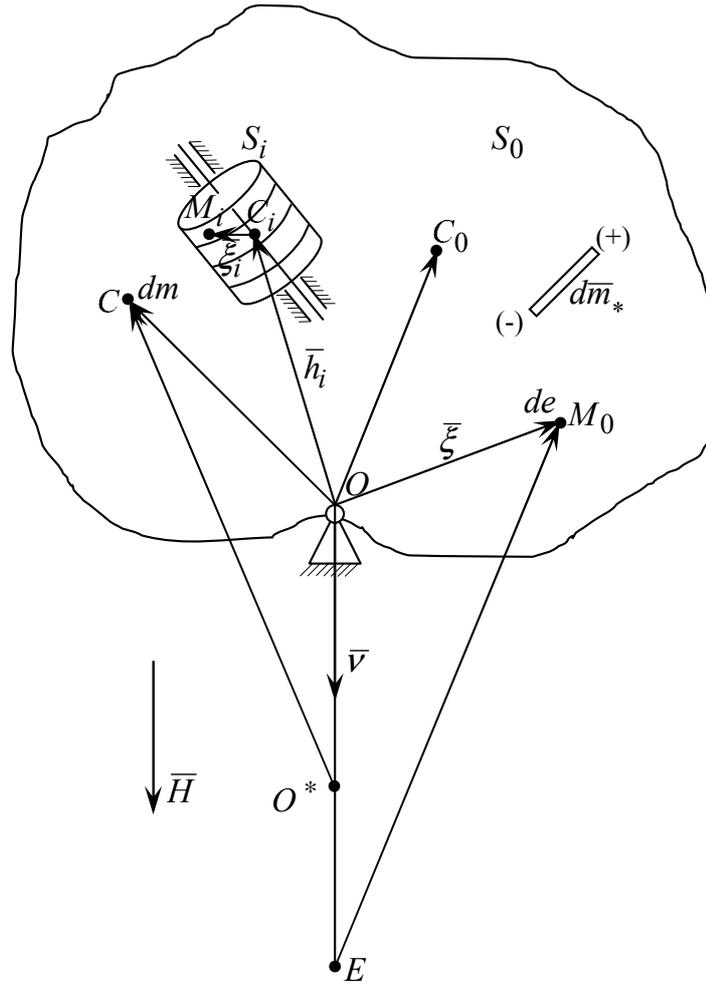


Рис. 2.1

основной теоремы об изменении момента количества системы S имеем

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_0, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела-носителя S_0 , \mathbf{M}_0 — момент действующих на гири стат сил относительно точки O , точкой обозначена относительная производная вектора \mathbf{G} . Для замыкания уравнения (2.1) запишем уравнение Пуассона для вектора $\boldsymbol{\nu}$ (предполагаем, что силовое поле, которое порождает момент \mathbf{M}_0 имеет ось симметрии $\boldsymbol{\nu}$):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.2)$$

Постановка задачи заключается в том, чтобы описать механический смысл

векторов \mathbf{G} и \mathbf{M}_0 .

2.2 Момент количества движения тела-носителя S_0 .

Уравнения Эйлера-Пуассона

Пусть на тяжелое твердое тело S_0 действует только сила тяжести $\mathbf{P} = mg\boldsymbol{\nu}$, где m — масса тела S_0 , g — величина ускорения свободного падения, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор вертикали, неизменный в неподвижном пространстве.

Следуя [110], обозначим C_0 — центр масс тела S_0 , $\mathbf{r}_c = \overline{OC_0}$, M — произвольная точка тела S_0 , $\overline{OM} = \mathbf{r}$. Обозначим через \mathbf{v} — скорость движения точки M в неподвижном пространстве, через $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость движения тела S_0 . Тогда очевидны соотношения $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Пусть \mathbf{x}_0 — момент количества движения тела S_0 относительно точки O , ρ , V — плотность и объем тела S_0 соответственно. Тогда имеем

$$\mathbf{x}_0 = \int_{S_0} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \int_V \rho [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] dV = A^{(0)}\boldsymbol{\omega}. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) записана в подвижной системе координат $Oxyz$, единичные векторы которой $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{r} = r_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + r_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + r_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \omega_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \omega_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

$$\mathbf{x}_0 = x_1^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + x_3^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

Из (2.3) следует:

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_{ij}^{(0)} \omega_j, \quad i = \overline{1,3}, \quad A_{ij} = A_{ji},$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(0)} &= \int_V \rho(r_2^2 + r_3^2) dV, & A_{22}^{(0)} &= \int_V \rho(r_3^2 + r_1^2) dV, & A_{33}^{(0)} &= \int_V \rho(r_1^2 + r_2^2) dV, \\ A_{12}^{(0)} &= - \int_V \rho r_1 r_2 dV, & A_{13}^{(0)} &= - \int_V \rho r_1 r_3 dV, & A_{23}^{(0)} &= - \int_V \rho r_2 r_3 dV. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величины (2.4) удовлетворяют следующим условиям [22]

$$\begin{aligned} A_{ii}^{(0)} > 0 \quad (i = \overline{1, 3}), & \quad A_{11}^{(0)} + A_{22}^{(0)} > A_{33}^{(0)}, & \quad A_{22}^{(0)} + A_{33}^{(0)} > A_{11}^{(0)}, \\ A_{33}^{(0)} + A_{11}^{(0)} > A_{22}^{(0)}, & \quad |A_{12}^{(0)}| \leq \frac{A_{33}^{(0)}}{2}, & \quad |A_{13}^{(0)}| \leq \frac{A_{22}^{(0)}}{2}, & \quad |A_{23}^{(0)}| \leq \frac{A_{11}^{(0)}}{2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5) определяют ограничения на параметры A_{ij} .

Момент количества движения \mathbf{G} из (2.1) определен в виде (2.3), (2.4), осталось указать \mathbf{M}_0 .

Момент силы тяжести относительно точки O : $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_c \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_c \times mg\boldsymbol{\nu} = s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu})$, где $s = mg|\mathbf{r}_c|$, $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|}$ и уравнения (2.1), (2.2) таковы

$$A^{(0)}\dot{\boldsymbol{\omega}} = A^{(0)}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E,$$

где k, E — произвольные постоянные.

2.3 Момент количества движения системы S

Полагаем, что на теле S_0 с неподвижной точкой O закреплены n тел S_i с массами m_i и угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_i$, которые являются телами вращения относительно осей l_i с направляющими векторами $\boldsymbol{\alpha}_1^{(i)}$ (рис 2.1). Подвижные системы координат $C_i x_i y_i z_i$ выбраны таким образом, что начало находится в

центре масс C_i каждого тела S_i , ось $C_i x_i$ направлена по $\mathfrak{a}_1^{(i)}$, а другие оси $C_i y_i$, $C_i z_i$ ей ортогональны. Пусть D_i — момент инерции тела S_i относительно l_i , B_i — экваториальный момент инерции тела S_i . Момент количества движения для i -го тела имеет вид

$$\mathbf{x}_i^{(2)} = A^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i = B_i \mathfrak{a}_1^{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{a}_1^{(i)}) + D_i p_i \mathfrak{a}_1^{(i)}, \quad (2.7)$$

где $p_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathfrak{a}_1^{(i)} + \dot{\varkappa}_i$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела S_0 , \varkappa_i — угол вращения тела S_i относительно S_0 . Обозначая расстояние от неподвижной точки до центра масс каждого тела S_i через $\mathbf{h}_i = \overline{OC_i}$, получим общий момент количества движения системы S_0, S_1, \dots, S_n :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^n D_i p_i \mathfrak{a}_1^{(i)}, \\ A \boldsymbol{\omega} &= A^{(0)} \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^n [m_i \mathbf{h}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i) + B_i \mathfrak{a}_1^{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{a}_1^{(i)})]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В базисе $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$, связанном с S_0 , из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i &= h_{i1} \mathfrak{a}_1 + h_{i2} \mathfrak{a}_2 + h_{i3} \mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{a}_1^{(i)} = \delta_1^{(i)} \mathfrak{a}_1 + \delta_2^{(i)} \mathfrak{a}_2 + \delta_3^{(i)} \mathfrak{a}_3, \\ A_{11} &= A_{11}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \left[B_i (\delta_2^{(i)2} + \delta_3^{(i)2}) + m_i (h_{i2}^2 + h_{i3}^2) \right], \\ A_{23} &= A_{23}^{(0)} - \sum_{i=1}^n \left[B_i \delta_2^{(i)} + \delta_3^{(i)} - m_i h_{i2} h_{i3} \right]. \end{aligned} \quad (123) \quad (2.9)$$

В формулах (2.9) символ (123) обозначает перестановку индексов.

Следуя [118], выделим два класса вращения тел S_i . В первом классе предположим, что носимые тела подчинены связям, зависящим от времени, которые обеспечивают требуемую зависимость $\varkappa_i(t)$. Вектор $\boldsymbol{\lambda}_*(t) = \sum_{i=1}^n D_i \dot{\varkappa}(t) \mathfrak{a}_1^{(i)}$ определен в системе координат, связанной с телом S_0 . Тогда в силу $p_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathfrak{a}_1^{(i)} + \dot{\varkappa}(t)$ соотношение (2.8) запишем так:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A_* \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}_*(t), & A_* \boldsymbol{\omega} &= A \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^n D_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}) \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}, \\ \boldsymbol{\lambda}_*(t) &= \sum_{i=1}^n D_i \dot{\boldsymbol{\varkappa}}_i \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тензор инерции A_* в формулах (2.10) имеет компоненты

$$A_{km}^* = A_{km} + \sum_{i=1}^n D_i \delta_k^{(i)} \delta_m^{(i)} \quad (k, m = \overline{1, 3}), \quad (2.11)$$

где A_{km} — компоненты тензора A .

Второй класс отвечает варианту, когда компоненты p_i находятся из известных соотношений, вытекающих из уравнений относительного движения $D_i \dot{p}_i = L_i(t)$, то есть

$$p_i(t) = \frac{1}{D_i} \int_{t_0}^t L_i(t) dt. \quad (2.12)$$

Для случая (2.12) момент количества движения гиростата определяется формулой

$$\mathbf{x} = A \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t), \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^n D_i p_i \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}, \quad (2.13)$$

а компоненты тензора A из (2.13) вычисляются по формулам (2.9).

Итак, момент количества движения гиростата (системы S_0, S_1, \dots, S_n) может быть представлен в двух вариантах: (2.10) и (2.13). Векторы

$$\boldsymbol{\lambda}_*(t) = \sum_{i=1}^n D_i \dot{\boldsymbol{\varkappa}}_i \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^n D_i p_i \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}$$

называют гиростатическими моментами, а тензоры A_* и A называются тензорами инерции гиростата.

В более общем случае часть носимых тел подчинена связям, обеспечивающим зависимости $\boldsymbol{\varkappa}_i(t)$, а для остальных тел известна зависимость $L_i = L_i(t)$.

То есть $L_i = L_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $\varkappa_i = \varkappa_i(t)$ ($i = r + 1, \dots, n$). Момент количества движения гиростата равен вектору

$$\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{\omega} &= A^{(0)}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^r \left[B_i \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}) + m_i \mathbf{h}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i) \right] + \\ &+ \sum_{i=r+1}^n D_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}) \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}, \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &= \sum_{i=1}^r D_i p_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)} + \sum_{i=r+1}^n D_i \dot{\varkappa}_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В случае (2.14), (2.15) $\boldsymbol{\lambda}(t)$ называют гиростатическим моментом, A — тензором инерции гиростата [118].

Запишем уравнения (2.1), (2.2). Вначале полагаем $\mathbf{G} = A_*\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}_*(t)$, тогда

$$A_*\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}_*(t) + (A_*\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}_*(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.16)$$

Пусть теперь $\mathbf{G} = A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)$:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.17)$$

Уравнения движения гиростата S записаны для наглядности в двух вариантах (2.16) и (2.17). Обобщающая эти формы система уравнений может быть основана и на формуле (2.14).

2.4 Описание потенциальных и гироскопических сил

2.4.1 Случай ньютоновского силового поля

Рассмотрим, как и ранее, систему тел S (гиростат): S_0, S_1, \dots, S_n . Центр масс этой системы обозначим через C (рис 2.1).

Пусть $M_i \in S_i$, C_i — центр масс тела S_i ; l_i — ось вращения, которая является осью симметрии тела S_i ; m_i — масса тела S_i ; $M_0 \in S_0$, C_0 — центр масс тела S_0 , $\overline{OM_0} = \boldsymbol{\xi}$, $\overline{C_i M_i} = \boldsymbol{\xi}_i$. Обозначим через O^* — центр притяжения. Определим момент \mathbf{L} действующих на гиростат ньютоновских сил относительно точки O . Считаем, что $\overline{OO^*} = R\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор оси OO^* .

На частицу dm тела S_0 действует сила $-\frac{\mu dm}{r^3}\mathbf{r}$, где μ — постоянная, характеризующая данное силовое поле. Очевидно [133]

$$\mathbf{L} = \mu R \int_S \frac{\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\nu}}{|\mathbf{r}|^3} dm, \quad \mathbf{r} = -R\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2.18)$$

где интегрирование ведется по всей системе S .

В статье [133] показано, что для гиростата формула (2.18) принимает вид

$$\mathbf{L} = mg(\mathbf{r}^{(c)} \times \boldsymbol{\nu}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{\nu} \times A_* \boldsymbol{\nu}, \quad (2.19)$$

где компоненты A_* определены в (2.11), $\mathbf{r}^{(c)} = \overline{OC}$, $g = \frac{\mu}{R^2}$, $\varepsilon^2 = \frac{3\mu}{R^3}$.

Поскольку тензор A_* появился при первом способе движения тел S_i , то для составления дифференциальных уравнений движения вначале положим, что $\dot{\boldsymbol{\varkappa}}_1(t) = \text{const}$, то есть тела S_i равномерно вращаются относительно тела S_0 . В силу (2.10) $\boldsymbol{\lambda}_* = \sum_{i=1}^n D_i \dot{\boldsymbol{\varkappa}}_i \boldsymbol{\varkappa}_1^{(i)}$. Уравнения движения системы S при первом способе движения тел S_i на основании (2.10), (2.19) имеют вид [133]

$$A_* \dot{\boldsymbol{\omega}} = (A_* \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}_*) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \varepsilon^2 (\boldsymbol{\nu} \times A_* \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.20)$$

где $\mathbf{s} = mg\mathbf{r}^{(c)}$.

Уравнения (2.20) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A_* \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}_*) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad A_* \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \varepsilon^2 (A_* \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad (2.21)$$

где k, E — постоянные интегралов.

Уравнения движения гиростата S для второго случая таковы

$$A \dot{\boldsymbol{\omega}} = (A \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \varepsilon^2 \boldsymbol{\nu} \times (A_* \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.22)$$

где компоненты тензора A определяются формулами (2.9), а компоненты тензора A_* — формулами (2.11).

Уравнения (2.22) имеют интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \varepsilon^2 (A_* \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E. \quad (2.23)$$

Итак, уравнения (2.20) с интегралами (2.21) и уравнения (2.22) с интегралами (2.23) выписаны для случая постоянного гиростатического момента. Они могут быть обобщены на случай переменного гиростатического момента, что будет проведено ниже после учета сил Лоренца и Кулона.

2.4.2 Описание сил Лоренца и сил Кулона

Пусть \mathbf{H} — напряженность постоянного магнитного поля; E_0 — напряженность электрического поля; de — элементарный заряд; dm — элементарная масса; $d\mathbf{m}_*$ — элементарный диполь, $OO_* = R$, $OE = R'$; μ^* — электрическая постоянная; μ — ньютонская постоянная (рис. 2.1). Предполагаем, что токи Фуко отсутствуют.

Силы, возникающие при взаимодействии электрических зарядов с электрическим полем характеризуются кулоновской элементарной силой $-\frac{\mu^* de}{r'^3} \mathbf{r}'$. Другие потенциальные силы характеризуются силой Ньютона $-\frac{\mu dm}{r^3} \mathbf{r}$ и силой, которая обусловлена действием магнитного поля \mathbf{H} на диполь $d\mathbf{m}_*$. Структура кулоновских сил совпадает по виду с силами ньютонского при-

тяжения, поэтому при выводе уравнений движения гиростата используется матрица C , составленная с учетом кулоновских сил и сил гравитации [22].

Запишем момент сил Лоренца, которые возникают при движении электрических зарядов в магнитном поле \mathbf{H}

$$\mathbf{M}_0^{(lop)} = - \int_{S_0} \mathbf{r} \times [\mathbf{H} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] de = \boldsymbol{\omega} \times \int_{S_0} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) de = \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu}. \quad (2.24)$$

В (2.24) интегрирование ведется по телу-носителю S_0 , так как несомые тела S_1, \dots, S_n не несут электрических зарядов. Матрица B симметрична и ее компоненты указаны в [22].

2.5 Уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом

Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [118], [143], [144], [150]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.25)$$

Уравнения (2.25) имеют только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k \quad (2.26)$$

и поэтому теория Якоби не применима. Если в уравнении (2.25) положить $B = 0$ и $C = 0$, то приходим к задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести. Отметим, что имеют место два варианта формирования тензора A (см. (2.9), (2.11)).

Выделим три вида переменного гиростатического момента

$$1. \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad (2.27)$$

$$2. \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t) \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, |\boldsymbol{\beta}| = 1, \quad (2.28)$$

$$3. \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t) \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t) \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad |\boldsymbol{\beta}| = 1. \quad (2.29)$$

Система (2.25) является неавтономной системой дифференциальных уравнений, если функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ задана. В случае, когда функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ не задана, система (2.25) незамкнута. Тогда при ее изучении необходимо указать инвариантное соотношение и воспользоваться методом [50]. Это позволит получить цепочку производных от инвариантного соотношения и из нее определить $\boldsymbol{\lambda}(t)$.

В данной диссертации изучены условия существования решений системы (2.25) с гиростатическим моментом вида (2.27) и (2.29).

Случай (2.28), когда один ротор вращается равномерно, а скорость движения второго ротора зависит от времени оставлен для будущих исследований.

2.6 Метод инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений

Этот метод предложен А. М. Ковалевым, Г. В. Горром, В. Н. Неспириным [50] и является обобщением метода П. В. Харламова [116]. Следуя [115], рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.30)$$

где t — независимая переменная, x_1, \dots, x_n — неизвестные функции этой переменной, а X_i — функции от $n + 1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве U пространства размерности $n + 1$, в котором координатами являются компоненты вектора (x_1, \dots, x_n, t) . Будем предполагать, что функции $X_i(x_1, \dots, x_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, имеют непрерывные частные производные любого порядка. Полагая $t = x_{n+1}$ запишем систему (2.30) в автономном виде

$$\dot{u}_i = Y_i(u_1, \dots, u_{n+1}), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (2.31)$$

где $Y_i \equiv X_i$, $i = \overline{1, n}$, $Y_{n+1} \equiv 1$. Тогда решению уравнений (2.30) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^{(0)}$ будет соответствовать решение системы (2.31) с начальными условиями $u_1(0) = x_1^{(0)}, \dots, u_n(0) = x_n^{(0)}$, $u_{n+1}(0) = t_0$. Это соответствие определяется зависимостью $x_i(t) = u_i(t - t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Определение. *Непустое множество $M \subseteq U$ называется инвариантным по отношению к (2.31), если для любой точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t_0)$ из M решение уравнения (2.31) с начальными условиями $(u_1(0), \dots, u_n(0), u_{n+1}(0))$ удовлетворяет условию $(u_1(t), \dots, u_{n+1}(t)) \in M$ при $t \in (t_1 + t_0, t_2 - t_0)$, где (t_1, t_2) — интервал существования соответствующего решения системы (2.30).*

Рассмотрим уравнение

$$f(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0. \quad (2.32)$$

Предположим, что функция $f(u_1, \dots, u_{n+1})$ дифференцируемая по всем переменным до произвольного порядка, в частности до порядка $n + 1$, и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} \right) \neq 0$$

в рассматриваемой области U .

Определение. *Соотношение (2.32) называется инвариантным соотношением (ИС) системы (2.31), если множество G точек, удовлетворяющих этому соотношению, содержит некоторое инвариантное множество.*

Поскольку инвариантное множество по определению не может быть пустым, то должна существовать по крайней мере одна точка, для которой (2.32) выполнено.

Для функции (2.32) построим последовательность функций

$$\begin{aligned} f^{(1)}(u_1, \dots, u_{n+1}) &= f(u_1, \dots, u_{n+1}), \\ f^{(l)}(u_1, \dots, u_{n+1}) &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{(l-1)}(u_1, \dots, u_{n+1})}{\partial u_j} Y_j(u_1, \dots, u_{n+1}), \quad l = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.33)$$

реть случаи

$$f^{(l)}(u_1, \dots, u_{n+1}) \Big|_{f^{(1)}(u_1, \dots, u_{n+1})=0, \dots, f^{(l-1)}(u_1, \dots, u_{n+1})=0} \equiv 0. \quad (2.35)$$

В формуле (2.35) предусмотрены все варианты исследования системы. При выполнении (2.35) получим систему уравнений, которая задает инвариантное множество M . Этот метод будет использован ниже.

2.7 Прецессионные движения гиростата

Прецессионные движения гиростата относятся к наиболее наглядным с механической точки зрения движениям и находят широкое применение в важной для техники теории гироскопических систем.

Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой O [22]. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — постоянный единичный вектор, смысл которого описан в п. 2.5; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, фиксированный в неподвижном пространстве; \varkappa_0 — угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$; \boldsymbol{a} — единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость гиростата. Очевидны соотношения

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \cos \varkappa_0 = c_0. \quad (2.36)$$

Точкой обозначена производная по времени в подвижной системе координат.

Определение. Движение тела называют прецессионным, если в течение всего времени движения постоянен угол между векторами \boldsymbol{a} и $\boldsymbol{\gamma}$.

Обозначим θ_0 — угол между векторами \boldsymbol{a} и $\boldsymbol{\gamma}$, тогда по определению

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \cos \theta_0 = a_0. \quad (2.37)$$

Производная от (2.37) с учетом (2.36) равна $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$, откуда в случае $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ получаем соотношение

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi_1(t)\boldsymbol{a} + \varphi_2(t)\boldsymbol{\gamma}. \quad (2.38)$$

С учетом (2.38) равенства (2.36) примут вид

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \varphi_1(t)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \varphi_2(t)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \varphi_1(t)(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}). \quad (2.39)$$

Подвижную систему координат можно выбрать таким образом, чтобы

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\gamma} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0),$$

где $a'_0 = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin \theta_0$, причем $|\boldsymbol{\gamma}| = 1$ и выполнено условие (2.37). Из второго уравнения системы (2.39) следует $\varphi_1(t) = \dot{\varphi}$. Принимая во внимание равенства (2.36), первое уравнение из (2.39) и координаты $\boldsymbol{\gamma}$, определим вектор $\boldsymbol{\nu}$ в базисе \mathbf{a} , $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$ и функцию $\varphi_2(t)$:

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b'_0 \sin \psi) \boldsymbol{\gamma} - b'_0 \mathbf{a} \sin \psi - b'_0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) \cos \psi, \quad \varphi_2(t) = \dot{\psi},$$

где $b'_0 = \frac{\sin \varkappa_0}{a'_0}$. Выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (2.38) примет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.40)$$

Таким образом, кинематическими условиями прецессии гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$ служат инвариантные соотношения (2.37), (2.40).

В диссертации исследования проводились в случае прецессионных движений относительно вертикали, то есть $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nu}$

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\nu},$$

где величины θ_0 , φ , ψ являются углами Эйлера, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ — скорости собственного вращения и прецессии гиростата соответственно.

В зависимости от характера функций $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ прецессионные движения классифицируются следующим образом (n , m — константы):

1. $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} = n$ — регулярная прецессия;
2. $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} \neq n$ — полурегулярная прецессия первого типа;
3. $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} \neq m$ — полурегулярная прецессия второго типа;

4. $\dot{\varphi} \neq n$ и $\dot{\psi} \neq m$ — прецессия общего вида.

2.8 Вывод

В разделе проведен анализ получения дифференциальных уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Выполнено описание механической модели с учетом различных способов взаимодействия тела-носителя и носимых тел. Указаны формулы для момента количества движения гиростата в трех задачах: задаче о движении тяжелого гиростата, задаче о движении гиростата под действием ньютоновских сил, задаче о движении гиростата под действием сил Лоренца и Кулона.

Сформулирована математическая модель задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Отмечено отличие дифференциальных уравнений этой задачи от задачи о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Изложен модифицированный метод инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений, который будет применяться в дальнейших исследованиях.

Рассмотрены кинематические условия прецессионности движений гиростата относительно оси симметрии силового поля.

Раздел 3

Дифференциальные уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом для прецессионных движений

В данном разделе рассмотрена задача о прецессионных движениях гиростата с неподвижной точкой и двумя несомыми роторами под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены две формы дифференциальных уравнений на компоненты гиростатического момента и углы Эйлера. Первая форма основана на использовании базиса векторов характерных направлений прецессий. Вторая форма получена с помощью базиса векторов, указывающих направление гиростатического момента. Выполнена редукция дифференциальных уравнений прецессионных движений гиростата к одному дифференциальному уравнению на функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (2.25) с учетом (2.29)

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta} - B\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad (3.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя S_0 ; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ — дифференцируемые функции времени; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — симметричные постоянные матрицы третьего порядка, описанные в разделе 2; точка над

переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ обозначает производную по времени t .

Уравнения (3.1), (3.2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3.3)$$

где k — произвольная постоянная.

Согласно п. 2.7 векторы \boldsymbol{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ выберем следующим образом

$$\boldsymbol{a} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}. \quad (3.4)$$

Уравнение Пуассона (3.2) в силу (3.4) обращается в тождество.

Подставляя $\boldsymbol{\omega}$ из (3.4) в уравнение (3.1) получим:

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} + \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}[Sp(A)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] - \\ & - \lambda_1(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - \lambda_2(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu})] - \\ & - \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + \\ & + \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $Sp(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

Для дальнейшего исследования уравнения (3.5) используются три независимых вектора, чтобы от векторного уравнения перейти к трем скалярным уравнениям. В качестве таких базисных троек можно использовать векторы \boldsymbol{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

3.2 Уравнения движения в базисе \boldsymbol{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}$

Спроектируем уравнение (3.5) на три единичных независимых вектора \boldsymbol{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}$ соответственно.

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}_1(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}) + \dot{\lambda}_2(t)(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{a}) + \ddot{\varphi}(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{a}) - \\ & - \lambda_1(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} - \lambda_2(t)\dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} + \\ & + \dot{\psi}(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{a} = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{\lambda}_1(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \dot{\lambda}_2(t)(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \\
& - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \lambda_1(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \lambda_2(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \\
& - \dot{\varphi}^2(A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}(B\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
& [\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}] \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \ddot{\varphi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \\
& + \dot{\varphi}\dot{\psi}[Sp(A)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})^2 - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] - \lambda_1(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}) + \\
& + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - \lambda_2(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu})] \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - \\
& - \dot{\varphi}^2(A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \\
& + \dot{\varphi}(B\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \dot{\psi}(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - \\
& - (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - (\boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу (3.4) уравнения (3.6)–(3.8) и интеграл моментов из (3.3) соответственно примут вид

$$\begin{aligned}
& \alpha_3\dot{\lambda}_1(t) + \beta_3\dot{\lambda}_2(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33})\ddot{\psi} - \\
& - a'_0\dot{\psi}[\lambda_1(t)(\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi) + \lambda_2(t)(\beta_1 \cos \varphi - \beta_2 \sin \varphi)] + \\
& + \dot{\psi}^2(A_2 \sin 2\varphi - A'_2 \cos 2\varphi - a_0 A'_1 \cos \varphi + a_0 A_1 \sin \varphi) - \\
& - \dot{\psi}(B_2 \sin 2\varphi - B'_2 \cos 2\varphi - a_0 B'_1 \cos \varphi + a_0 B_1 \sin \varphi) + \\
& + C'_2 \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi + \varkappa_1 \sin \varphi - \varkappa'_1 \cos \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
& (a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a'_0\alpha_2 \cos \varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}_1(t) + (a'_0\beta_1 \sin \varphi + a'_0\beta_2 \cos \varphi + \\
& + a_0\beta_3)\dot{\lambda}_2(t) + (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33})\ddot{\varphi} + a'_0\dot{\varphi}[\lambda_1(t)(\alpha_1 \cos \varphi - \\
& - \alpha_2 \sin \varphi) + \lambda_2(t)(\beta_1 \cos \varphi - \beta_2 \sin \varphi)] + \ddot{\psi}(A_2 \cos 2\varphi + A'_2 \sin 2\varphi + \\
& + 2a_0 A_1 \cos \varphi + 2a_0 A'_1 \sin \varphi + A_0) + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}(A'_2 \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi + \\
& + a_0 A'_1 \cos \varphi - a_0 A_1 \sin \varphi) + (A'_1 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 - (B'_2 \cos 2\varphi - \\
& - B_2 \sin 2\varphi + a_0 B'_1 \cos \varphi - a_0 B_1 \sin \varphi)\dot{\varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& a'_0\dot{\lambda}_1(\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi) + a'_0\dot{\lambda}_2(\beta_1 \cos \varphi - \beta_2 \sin \varphi) + a'_0\lambda_1[(a'_0\alpha_3 - \\
& - a_0\alpha_1 \sin \varphi - a_0\alpha_2 \cos \varphi)\dot{\psi} - (\alpha_2 \cos \varphi + \alpha_1 \sin \varphi)\dot{\varphi}] + a'_0\lambda_2[(a'_0\beta_3 - \\
& - a_0\beta_1 \sin \varphi - a_0\beta_2 \cos \varphi)\dot{\psi} - (\beta_2 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi)\dot{\varphi}] + (A'_1 \cos \varphi - \\
& - A_1 \sin \varphi)\ddot{\varphi} + (A'_2 \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi + a_0 A'_1 \cos \varphi - a_0 A_1 \sin \varphi)\ddot{\psi} -
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& - \dot{\varphi}\dot{\psi}(2A_2 \cos 2\varphi + 2A'_2 \sin 2\varphi + 2a_0A_1 \cos \varphi + 2a_0A'_1 \sin \varphi - a_0'^2 A_{33}) - \\
& - \dot{\varphi}^2(A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi) - \dot{\psi}^2(a_0A_2 \cos 2\varphi + a_0A'_2 \sin 2\varphi + \\
& + (a_0^2 - a_0'^2)A_1 \cos \varphi + (a_0^2 - a_0'^2)A'_1 \sin \varphi + a_0D_0) + \dot{\varphi}(B_2 \cos 2\varphi + \\
& + B'_2 \sin 2\varphi + a_0B_1 \cos \varphi + a_0B'_1 \sin \varphi - B_0^*) + \dot{\psi}(a_0B_2 \cos 2\varphi + \\
& + a_0B'_2 \sin 2\varphi + (a_0^2 - a_0'^2)B_1 \cos \varphi + (a_0^2 - a_0'^2)B'_1 \sin \varphi + a_0E_0) + \\
& + a_0C_2 \cos 2\varphi + a_0C'_2 \sin 2\varphi + \delta_1 \cos \varphi + \delta'_1 \sin \varphi + \delta_0 = 0, \\
& (a_0'\alpha_1 \sin \varphi + a_0'\alpha_2 \cos \varphi + a_0\alpha_3)\lambda_1(t) + (a_0'\beta_1 \sin \varphi + a_0'\beta_2 \cos \varphi + \\
& + a_0\beta_3)\lambda_2(t) + (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + a_0A_{33})\dot{\varphi} + (A_2 \cos 2\varphi + \\
& + A'_2 \sin 2\varphi + 2a_0A_1 \cos \varphi + 2a_0A'_1 \sin \varphi + A_0)\dot{\psi} - \frac{1}{2}(B_2 \cos 2\varphi + \\
& + B'_2 \sin 2\varphi + 2a_0B_1 \cos \varphi + 2a_0B'_1 \sin \varphi + B_0) = k.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В формулах (3.9)-(3.12) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A'_2 = a_0'^2 A_{12}, \quad A_1 = a_0' A_{23}, \quad A'_1 = a_0' A_{13}, \\
A_0 &= \frac{a_0'^2}{2}(A_{11} + A_{22}) + a_0^2 A_{33}, \quad D_0 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{11} + A_{22} - 2A_{33}), \\
B_2 &= \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} - B_{11}), \quad B'_2 = a_0'^2 B_{12}, \quad B_1 = a_0' B_{23}, \quad B'_1 = a_0' B_{13}, \\
B_0 &= \frac{a_0'^2}{2}(B_{11} + B_{22}) + a_0^2 B_{33}, \quad E_0 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}), \\
B_0^* &= -\frac{a_0'^2}{2}(B_{11} + B_{22}), \quad C_2 = \frac{a_0'^2}{2}(C_{22} - C_{11}), \quad C'_2 = a_0'^2 C_{12}, \\
\delta_1 &= a_0'((a_0^2 - a_0'^2)C_{23} - a_0s_2), \quad \delta'_1 = a_0'((a_0^2 - a_0'^2)C_{13} - a_0s_1), \\
\kappa_1 &= a_0'(s_2 - a_0C_{23}), \quad \kappa'_1 = a_0'(s_1 - a_0C_{13}), \\
\delta_0 &= \frac{a_0'^2}{2}(2s_3 + a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33})).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения (3.9)-(3.11) получены в случае, когда гиростатический момент имеет вид (2.29). В данной диссертации в разделе 4 исследования проведены на основании уравнений (3.9)-(3.11) и интеграла (3.12) с гиростатическим моментом вида (2.27).

3.3 Уравнения движения в базисе α , β , $\alpha \times \beta$

Рассмотрим ортонормированный базис α , β и $\alpha \times \beta$. Положим $\gamma = \alpha \times \beta$ и спроектируем уравнение (3.5) на векторы α , β , γ соответственно [64].

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t) [\dot{\varphi}(\beta \times a) \cdot \alpha + \dot{\psi}(\beta \times \nu) \cdot \alpha] + \ddot{\varphi}(Aa \cdot \alpha) + \ddot{\psi}(A\nu \cdot \alpha) + \\ + \dot{\varphi}\dot{\psi} [Sp(A)(\nu \times a) \cdot \alpha - 2(A\nu \times a) \cdot \alpha] - \dot{\varphi}^2(Aa \times a) \cdot \alpha - \\ - \dot{\psi}^2(A\nu \times \nu) \cdot \alpha + \dot{\varphi}(B\nu \times a) \cdot \alpha + \dot{\psi}(B\nu \times \nu) \cdot \alpha - (s \times \nu) \cdot \alpha - \\ - (\nu \times C\nu) \cdot \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) - \lambda_1(t) [\dot{\varphi}(\alpha \times a) \cdot \beta + \dot{\psi}(\alpha \times \nu) \cdot \beta] + \ddot{\varphi}(Aa \cdot \beta) + \ddot{\psi}(A\nu \cdot \beta) + \\ + \dot{\varphi}\dot{\psi} [Sp(A)(\nu \times a) \cdot \beta - 2(A\nu \times a) \cdot \beta] - \dot{\varphi}^2(Aa \times a) \cdot \beta - \\ - \dot{\psi}^2(A\nu \times \nu) \cdot \beta + \dot{\varphi}(B\nu \times a) \cdot \beta + \dot{\psi}(B\nu \times \nu) \cdot \beta - (s \times \nu) \cdot \beta - \\ - (\nu \times C\nu) \cdot \beta = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(Aa \cdot \gamma) + \ddot{\psi}(A\nu \cdot \gamma) - \lambda_1(t) [\dot{\varphi}(\alpha \times a) \cdot \gamma + \dot{\psi}(\alpha \times \nu) \cdot \gamma] - \\ - \lambda_2(t) [\dot{\varphi}(\beta \times a) \cdot \gamma + \dot{\psi}(\beta \times \nu) \cdot \gamma] + \dot{\varphi}\dot{\psi} [Sp(A)(\nu \times a) \cdot \gamma - \\ - 2(A\nu \times a) \cdot \gamma] - \dot{\varphi}^2(Aa \times a) \cdot \gamma - \dot{\psi}^2(A\nu \times \nu) \cdot \gamma + \\ + \dot{\varphi}(B\nu \times a) \cdot \gamma + \dot{\psi}(B\nu \times \nu) \cdot \gamma - (s \times \nu) \cdot \gamma - (\nu \times C\nu) \cdot \gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} d_{0,1} &= \alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}, & d'_{1,1} &= a'_0 (\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}), \\ d_{1,1} &= a'_0 (\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{23}), & A_{0,1} &= \alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}, \\ A_{1,1} &= a'_0 [\alpha_1 (A_{22} - A_{33}) - \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}], \\ A'_{1,1} &= a'_0 [\alpha_2 (A_{33} - A_{11}) + \alpha_1 A_{12} - \alpha_3 A_{23}], \\ A_{2,1} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\alpha_3 A_{12} - \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}), & \kappa_0 &= \frac{1}{2} (a_0'^2 - 2a_0^2), \\ A'_{2,1} &= \frac{a_0'^2}{2} [\alpha_2 A_{23} - \alpha_1 A_{13} + \alpha_3 (A_{11} - A_{22})], \\ h_{1,1} &= a'_0 (\alpha_1 B_{22} - \alpha_2 B_{12}), & B_{1,1} &= a'_0 [\alpha_1 (B_{22} - B_{33}) - \alpha_2 B_{12} + \alpha_3 B_{13}], \\ h'_{1,1} &= a'_0 (\alpha_1 B_{12} - \alpha_2 B_{11}), & B'_{1,1} &= a'_0 [\alpha_2 (B_{33} - B_{11}) + \alpha_1 B_{12} - \alpha_3 B_{23}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{0,1} &= \alpha_1 B_{23} - \alpha_2 B_{13}, \quad B_{2,1} = \frac{a_0'^2}{2} (2\alpha_3 B_{12} - \alpha_1 B_{23} - \alpha_2 B_{13}), \\
B'_{2,1} &= \frac{a_0'^2}{2} [\alpha_2 B_{23} - \alpha_1 B_{13} + \alpha_3 (B_{11} - B_{22})], \\
C_{2,1} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\alpha_3 C_{12} - \alpha_1 C_{23} - \alpha_2 C_{13}), \\
C'_{2,1} &= \frac{a_0'^2}{2} [\alpha_2 C_{23} - \alpha_1 C_{13} + \alpha_3 (C_{11} - C_{22})], \\
\delta'_{1,1} &= a_0' [\alpha_2 C_{33} - \alpha_2 C_{11} - \alpha_1 C_{12} - \alpha_3 C_{23}] + \alpha_3 s_2 - \alpha_2 s_3, \\
\delta_{1,1} &= a_0' [\alpha_1 C_{22} - \alpha_1 C_{33} - \alpha_2 C_{12} + \alpha_3 C_{13}] + \alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1, \\
\delta_{0,1} &= \varkappa_0 (\alpha_2 C_{13} - \alpha_1 C_{23}) + a_0 (\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= d_{0,1} \ddot{\varphi} + (d'_{1,1} \sin \varphi + d_{1,1} \cos \varphi + a_0 d_{0,1}) \ddot{\psi} + A_{0,1} \dot{\varphi}^2 - \\
&- (A_{2,1} \cos 2\varphi + A'_{2,1} \sin 2\varphi + a_0 A_{1,1} \cos \varphi + a_0 A'_{1,1} \sin \varphi + \varkappa_0 A_{0,1}) \dot{\psi}^2 + \\
&+ \dot{\varphi} \dot{\psi} [(d'_{1,1} - A_{1,1}) \cos \varphi - (d_{1,1} + A'_{1,1}) \sin \varphi + 2a_0 A_{0,1}] + (h'_{1,1} \sin \varphi + \\
&+ h_{1,1} \cos \varphi + a_0 h_{0,1}) \dot{\varphi} + (B_{2,1} \cos 2\varphi + B'_{2,1} \sin 2\varphi + a_0 B_{1,1} \cos \varphi + \\
&+ a_0 B'_{1,1} \sin \varphi - \varkappa_0 h_{0,1}) \dot{\psi} + C_{2,1} \cos 2\varphi + C'_{2,1} \sin 2\varphi + \delta_{1,1} \cos \varphi + \\
&+ \delta'_{1,1} \sin \varphi + \delta_{0,1}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Учитывая обозначения (3.17), (3.18), запишем уравнение (3.14) в виде

$$\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t) \left[\gamma_3 \dot{\varphi} + (a_0' \gamma_1 \sin \varphi + a_0' \gamma_2 \cos \varphi + a_0 \gamma_3) \dot{\psi} \right] + F_1(t) = 0.$$

При рассмотрении уравнения (3.15) примем обозначения

$$\begin{aligned}
d_{0,2} &= \beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}, \quad d'_{1,2} = a_0' (\beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}), \\
d_{1,2} &= a_0' (\beta_1 A_{12} + \beta_2 A_{22} + \beta_3 A_{23}), \quad A_{0,2} = \beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}, \\
A_{1,2} &= a_0' [\beta_1 (A_{22} - A_{33}) - \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}], \\
A'_{1,2} &= a_0' [\beta_2 (A_{33} - A_{11}) + \beta_1 A_{12} - \beta_3 A_{23}], \\
A_{2,2} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\beta_3 A_{12} - \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}), \\
A'_{2,2} &= \frac{a_0'^2}{2} [\beta_2 A_{23} - \beta_1 A_{13} + \beta_3 (A_{11} - A_{22})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1,2} &= a'_0(\beta_1 B_{22} - \beta_2 B_{12}), \quad B_{1,2} = a'_0 \left[\beta_1 (B_{22} - B_{33}) - \beta_2 B_{12} + \beta_3 B_{13} \right], \\
h'_{1,2} &= a'_0(\beta_1 B_{12} - \beta_2 B_{11}), \quad B'_{1,2} = a'_0 \left[\beta_2 (B_{33} - B_{11}) + \beta_1 B_{12} - \beta_3 B_{23} \right], \\
h_{0,2} &= \beta_1 B_{23} - \beta_2 B_{13}, \quad B_{2,2} = \frac{a_0'^2}{2} (2\beta_3 B_{12} - \beta_1 B_{23} - \beta_2 B_{13}), \\
B'_{2,2} &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\beta_2 B_{23} - \beta_1 B_{13} + \beta_3 (B_{11} - B_{22}) \right], \\
C_{2,2} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\beta_3 C_{12} - \beta_1 C_{23} - \beta_2 C_{13}), \\
C'_{2,2} &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\beta_2 C_{23} - \beta_1 C_{13} + \beta_3 (C_{11} - C_{22}) \right], \\
\delta'_{1,2} &= a'_0 \left[a_0 (\beta_2 C_{33} - \beta_2 C_{11} - \beta_1 C_{12} - \beta_3 C_{23}) + \beta_3 s_2 - \beta_2 s_3 \right], \\
\delta_{1,2} &= a'_0 \left[a_0 (\beta_1 C_{22} - \beta_1 C_{33} - \beta_2 C_{12} + \beta_3 C_{13}) + \beta_1 s_3 - \beta_3 s_1 \right], \\
\delta_{0,2} &= \varkappa_0 (\beta_2 C_{13} - \beta_1 C_{23}) + a_0 (\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= d_{0,2} \ddot{\varphi} + (d'_{1,2} \sin \varphi + d_{1,2} \cos \varphi + a_0 d_{0,2}) \ddot{\psi} + A_{0,2} \dot{\varphi}^2 - \\
&- \left(A_{2,2} \cos 2\varphi + A'_{2,2} \sin 2\varphi + a_0 A_{1,2} \cos \varphi + a_0 A'_{1,2} \sin \varphi + \varkappa_0 A_{0,2} \right) \dot{\psi}^2 + \\
&+ \dot{\varphi} \dot{\psi} \left[(d'_{1,2} - A_{1,2}) \cos \varphi - (d_{1,2} + A'_{1,2}) \sin \varphi + 2a_0 A_{0,2} \right] + (h'_{1,2} \sin \varphi + \\
&+ h_{1,2} \cos \varphi + a_0 h_{0,2}) \dot{\varphi} + \left(B_{2,2} \cos 2\varphi + B'_{2,2} \sin 2\varphi + a_0 B_{1,2} \cos \varphi + \right. \\
&+ a_0 B'_{1,2} \sin \varphi - \varkappa_0 h_{0,2} \left. \right) \dot{\psi} + C_{2,2} \cos 2\varphi + C'_{2,2} \sin 2\varphi + \delta_{1,2} \cos \varphi + \\
&+ \delta'_{1,2} \sin \varphi + \delta_{0,2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Обозначения для уравнения (3.16) будут

$$\begin{aligned}
d_{0,3} &= \gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}, \quad d'_{1,3} = a'_0 (\gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}), \\
d_{1,3} &= a'_0 (\gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} + \gamma_3 A_{23}), \quad A_{0,3} = \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}, \\
A_{1,3} &= a'_0 \left[\gamma_1 (A_{22} - A_{33}) - \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13} \right], \\
A'_{1,3} &= a'_0 \left[\gamma_2 (A_{33} - A_{11}) + \gamma_1 A_{12} - \gamma_3 A_{23} \right], \\
A_{2,3} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\gamma_3 A_{12} - \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}), \\
A'_{2,3} &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\gamma_2 A_{23} - \gamma_1 A_{13} + \gamma_3 (A_{11} - A_{22}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1,3} &= a'_0(\gamma_1 B_{22} - \gamma_2 B_{12}), \quad B_{1,3} = a'_0 \left[\gamma_1 (B_{22} - B_{33}) - \gamma_2 B_{12} + \gamma_3 B_{13} \right], \\
h'_{1,3} &= a'_0(\gamma_1 B_{12} - \gamma_2 B_{11}), \quad B'_{1,3} = a'_0 \left[\gamma_2 (B_{33} - B_{11}) + \gamma_1 B_{12} - \gamma_3 B_{23} \right], \\
h_{0,3} &= \gamma_1 B_{23} - \gamma_2 B_{13}, \quad B_{2,3} = \frac{a_0'^2}{2} (2\gamma_3 B_{12} - \gamma_1 B_{23} - \gamma_2 B_{13}), \\
B'_{2,3} &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\gamma_2 B_{23} - \gamma_1 B_{13} + \gamma_3 (B_{11} - B_{22}) \right], \\
C_{2,3} &= \frac{a_0'^2}{2} (2\gamma_3 C_{12} - \gamma_1 C_{23} - \gamma_2 C_{13}), \\
C'_{2,3} &= \frac{a_0'^2}{2} \left[\gamma_2 C_{23} - \gamma_1 C_{13} + \gamma_3 (C_{11} - C_{22}) \right], \\
\delta'_{1,3} &= a'_0 \left[a_0 (\gamma_2 C_{33} - \gamma_2 C_{11} - \gamma_1 C_{12} - \gamma_3 C_{23}) + \gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3 \right], \\
\delta_{1,3} &= a'_0 \left[a_0 (\gamma_1 C_{22} - \gamma_1 C_{33} - \gamma_2 C_{12} + \gamma_3 C_{13}) + \gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1 \right], \\
\delta_{0,3} &= \varkappa_0 (\gamma_2 C_{13} - \gamma_1 C_{23}) + a_0 (\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
F_3(t) &= d_{0,3} \ddot{\varphi} + (d'_{1,3} \sin \varphi + d_{1,3} \cos \varphi + a_0 d_{0,3}) \ddot{\psi} + A_{0,3} \dot{\varphi}^2 - \\
&- \left(A_{2,3} \cos 2\varphi + A'_{2,3} \sin 2\varphi + a_0 A_{1,3} \cos \varphi + a_0 A'_{1,3} \sin \varphi + \varkappa_0 A_{0,3} \right) \dot{\psi}^2 + \\
&+ \dot{\varphi} \dot{\psi} \left[(d'_{1,3} - A_{1,3}) \cos \varphi - (d_{1,3} + A'_{1,3}) \sin \varphi + 2a_0 A_{0,3} \right] + (h'_{1,3} \sin \varphi + \\
&+ h_{1,3} \cos \varphi + a_0 h_{0,3}) \dot{\varphi} + \left(B_{2,3} \cos 2\varphi + B'_{2,3} \sin 2\varphi + a_0 B_{1,3} \cos \varphi + \right. \\
&+ a_0 B'_{1,3} \sin \varphi - \varkappa_0 h_{0,3} \left. \right) \dot{\psi} + C_{2,3} \cos 2\varphi + C'_{2,3} \sin 2\varphi + \delta_{1,3} \cos \varphi + \\
&+ \delta'_{1,3} \sin \varphi + \delta_{0,3}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Преобразуем уравнения (3.14)–(3.16) с учетом обозначений (3.17)–(3.22)

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t) \left[\gamma_3 \dot{\varphi} + (a'_0 \gamma_1 \sin \varphi + a'_0 \gamma_2 \cos \varphi + a_0 \gamma_3) \dot{\psi} \right] + F_1(t) &= 0, \\
\dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t) \left[\gamma_3 \dot{\varphi} + (a'_0 \gamma_1 \sin \varphi + a'_0 \gamma_2 \cos \varphi + a_0 \gamma_3) \dot{\psi} \right] + F_2(t) &= 0, \\
\lambda_2(t) \left[\alpha_3 \dot{\varphi} + (a'_0 \alpha_1 \sin \varphi + a'_0 \alpha_2 \cos \varphi + a_0 \alpha_3) \dot{\psi} \right] - \\
- \lambda_1(t) \left[\beta_3 \dot{\varphi} + (a'_0 \beta_1 \sin \varphi + a'_0 \beta_2 \cos \varphi + a_0 \beta_3) \dot{\psi} \right] + F_3(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Преимущество формул (3.23) по сравнению с уравнениями (3.9)–(3.11) заключается в том, что последнее уравнение в (3.23) не содержит производных

от функций $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Следовательно, для решения системы (3.23) возможно применение модифицированного метода инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений [50], поскольку производная от последнего уравнения в силу первых двух уравнений также не содержит производных функций $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$.

Исследованию прецессионных движений гиростата в обобщенных полях с помощью базиса $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ посвящен раздел 5 данной диссертации.

3.3.1 Маятниковые движения

Применим метод инвариантных соотношений [50] к задаче о маятниковых движениях гиростата под действием силы тяжести [64]. Полагаем в (3.17)–(3.23) $B = 0$, $C = 0$, $\dot{\psi} = 0$, а скорость собственного вращения зададим соотношением

$$\dot{\varphi}^2 = p_0 + p_1 \sin \varphi. \quad (3.24)$$

Тогда система (3.23) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= \gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_2(t) - F_1, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_1(t) - F_2, \\ \dot{\varphi}(\alpha_3 \lambda_2(t) - \beta_3 \lambda_1(t)) + F_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где с учетом (3.17)–(3.22) обозначено:

$$\begin{aligned} F_1 &= g_1 \sin \varphi + g_2 \cos \varphi + g_0, \\ F_2 &= h_1 \sin \varphi + h_2 \cos \varphi + h_0, \\ F_3 &= f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi + f_0, \\ g_1 &= (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}) p_1 + a'_0 (\alpha_3 s_2 - \alpha_2 s_3), \\ g_2 &= \frac{1}{2} (\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}) p_1 + a'_0 (\alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1), \\ g_0 &= (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}) p_0 + a_0 (\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2), \\ h_1 &= (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}) p_1 + a'_0 (\beta_3 s_2 - \beta_2 s_3), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{1}{2}(\beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33})p_1 + a'_0(\beta_1 s_3 - \beta_3 s_1), \\
h_0 &= (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})p_0 + a_0(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2), \\
f_1 &= (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_1 + a'_0(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3), \\
f_2 &= \frac{1}{2}(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33})p_1 + a'_0(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1), \\
f_0 &= (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_0 + a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2).
\end{aligned}$$

Чтобы перейти к дифференцированию по φ , разделим в (3.25) все уравнения на $\dot{\varphi}$ и учтем скорость собственного вращения из (3.24).

$$\begin{aligned}
\lambda'_1 &= \gamma_3 \lambda_2 - \frac{F_1}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}}, \\
\lambda'_2 &= -\gamma_3 \lambda_1 - \frac{F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}}, \\
\alpha_3 \lambda_2 - \beta_3 \lambda_1 + \frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

В уравнениях (3.27) штрихом обозначена производная по переменной φ .

Используя метод [50], продифференцируем последнее уравнение из (3.27) по φ и подставим функции λ'_1 и λ'_2 из первого и второго уравнений системы (3.27). Получим

$$-\alpha_3 \gamma_3 \lambda_1 - \beta_3 \gamma_3 \lambda_2 + \frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} + \left(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} \right)' = 0. \tag{3.28}$$

Производная от (3.28) по φ такова

$$\begin{aligned}
&\gamma_3^2 (-\alpha_3 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_1) + \gamma_3 \frac{\alpha_3 F_1 + \beta_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} + \\
&+ \left(\frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} \right)' + \left(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} \right)'' = 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

С помощью последнего равенства из (3.27) в уравнении (3.29) исключим переменные λ_1 и λ_2

$$\begin{aligned} & \gamma_3^2 \frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} + \gamma_3 \frac{\alpha_3 F_1 + \beta_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} + \\ & + \left(\frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} \right)' + \left(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} \right)'' = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (3.30), учитывая обозначения (3.26) и выполняя дифференцирование, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \gamma_3 \left[\gamma_3 (f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi + f_0) + \alpha_3 (g_1 \sin \varphi + g_2 \cos \varphi + g_0) + \right. \\ & + \left. \beta_3 (h_1 \sin \varphi + h_2 \cos \varphi + h_0) \right] + \beta_3 \left[g_1 \cos \varphi - g_2 \sin \varphi - \right. \\ & - \left. \frac{p_1 \cos \varphi (g_1 \sin \varphi + g_2 \cos \varphi + g_0)}{2(p_0 + p_1 \sin \varphi)} \right] - \alpha_3 \left[h_1 \cos \varphi - h_2 \sin \varphi - \right. \\ & - \left. \frac{p_1 \cos \varphi (h_1 \sin \varphi + h_2 \cos \varphi + h_0)}{2(p_0 + p_1 \sin \varphi)} \right] - f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi - \\ & - \frac{p_1 \cos \varphi (f_1 \cos \varphi - f_2 \sin \varphi)}{p_0 + p_1 \sin \varphi} + \frac{p_1 \sin \varphi (f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi + f_0)}{2(p_0 + p_1 \sin \varphi)} + \\ & + \frac{3p_1^2 \cos^2 \varphi (f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi + f_0)}{4(p_0 + p_1 \sin \varphi)^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Поскольку программное движение уже задано, то дифференциальное уравнение (3.31) является тождеством по φ .

Пусть

$$f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi + f_0 = \mu_0 (p_0 + p_1 \sin \varphi),$$

где μ_0 — некоторый параметр. Преобразовывая (3.31) и требуя тождественного равенства нулю тригонометрического многочлена, приходим к совокупности условий:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}) p_1 + a_0' (\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1) = 0, \\ & (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}) p_1 + a_0' (\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3) - \mu_0 p_1 = 0, \\ & (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}) p_0 + a_0 (\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2) - \mu_0 p_0 = 0, \\ & 2(\beta_3 g_2 - \alpha_3 h_2) - 4\gamma_3 (\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + \mu_0 p_1 (1 - 4\gamma_3^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
& \beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1 + 2\gamma_3(\alpha_3 g_2 + \beta_3 h_2) = 0, \\
& 2p_0(\beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1) + p_1(\alpha_3 h_0 - \beta_3 g_0) + 2\gamma_3 p_0(\alpha_3 g_2 + \beta_3 h_2) = 0, \\
& 2p_0(\alpha_3 h_2 - \beta_3 g_2) + 2\gamma_3 \left[p_0(\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + p_1(\alpha_3 g_0 + \beta_3 h_0) \right] - \\
& \quad - p_0 p_1 \mu_0 (1 - 4\gamma_3^2) = 0, \\
& 4\gamma_3 \left[2p_0(\alpha_3 g_0 + \beta_3 h_0) + p_1(\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + \right. \\
& \quad \left. + 6p_1(\alpha_3 h_2 - \beta_3 g_2) \right] + \mu_0 \left[p_1^2 (4\gamma_3^2 - 3) + 8\gamma_3^2 p_0^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Для нахождения λ_1 и λ_2 используем последнее уравнение из (3.27) и его производную (3.28):

$$\begin{aligned}
& \alpha_3 \lambda_2 - \beta_3 \lambda_1 + \mu_0 \sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi} = 0, \\
& -\gamma_3(\alpha_3 \lambda_1 + \beta_3 \lambda_2) + \frac{r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi + r_0}{\sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}} = 0,
\end{aligned}$$

где $r_1 = \beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1$, $r_2 = \beta_3 g_2 - \alpha_3 h_2 + \frac{1}{2}\mu_0 p_1$, $r_0 = \beta_3 g_0 - \alpha_3 h_0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\alpha_3(r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi + r_0) + \mu_0 \gamma_3 \beta_3 (p_0 + p_1 \sin \varphi)}{\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2) \sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}}, \\
\lambda_2 &= \frac{\beta_3(r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi + r_0) - \mu_0 \gamma_3 \alpha_3 (p_0 + p_1 \sin \varphi)}{\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2) \sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Рассмотрим движение, при котором угол нутации $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Из первого и третьего уравнений (3.32) найдем соответственно:

$$p_1 = \frac{2(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3)}{\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}}, \quad \mu_0 = \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}. \tag{3.34}$$

Второе уравнение системы (3.32) примет вид:

$$\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3 = 0.$$

При $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$ из системы (3.32) вытекает условие $s_3 = 0$, что приводит к маятниковым движениям с постоянной скоростью. Пусть $\gamma_2 \neq 0$,

тогда получим равенство

$$s_3 = \frac{\gamma_3 s_2}{\gamma_2}. \quad (3.35)$$

Оставшиеся условия (3.32) с учетом (3.26), (3.34), (3.35) выполняются при $s_2 = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{s} = (s_1, 0, 0).$$

Из (3.33) получим

$$\lambda_1 = \frac{\dot{\varphi}(\beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13})}{\gamma_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\dot{\varphi}(\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})}{\gamma_3}. \quad (3.36)$$

Случай $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ является особым для данной задачи, он рассмотрен А. А. Возняк в [12].

Таким образом, для гиростата, несущего два ротора и совершающего вращения вокруг горизонтальной оси, найдены законы движения (3.33) несомых тел, скорость собственного вращения задана в виде (3.24) с ограничением (3.34) на параметр p_1 (параметр p_0 — свободный), указано положение центра масс гиростата, который находится на оси, проходящей через неподвижную точку и перпендикулярной оси вращения.

Угол собственного вращения и, в силу (3.36), компоненты гиростатического момента описываются эллиптическими функциями времени.

3.3.2 Редукция дифференциальных уравнений прецессионных движений гиростата с помощью первого интеграла

Как показано выше, с помощью метода инвариантных соотношений для системы (3.23) удастся получить два уравнения на компоненты гиростатического момента и указать явный вид функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ можно определить и другим методом, основанном на использовании интеграла момента количества движения. Этот метод предложен и описан в данной диссертационной работе, с его помощью получены все результаты раздела 5 кроме случая маятниковых движений.

Введем замены [64]

$$\begin{aligned}
M &= a'_0 \alpha_1 \sin \varphi + a'_0 \alpha_2 \cos \varphi + a_0 \alpha_3, \\
N &= a'_0 \beta_1 \sin \varphi + a'_0 \beta_2 \cos \varphi + a_0 \beta_3, \\
L &= a'_0 \gamma_1 \sin \varphi + a'_0 \gamma_2 \cos \varphi + a_0 \gamma_3, \\
F_4(t) &= \dot{\varphi}(A'_1 \sin \varphi + A_1 \cos \varphi + a_0 A_{33}) + \dot{\psi}(A_2 \cos 2\varphi + A'_2 \sin 2\varphi + \\
&+ 2a_0 A_1 \cos \varphi + 2a_0 A'_1 \sin \varphi + A_0) - \frac{1}{2} \left(B'_2 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi + \right. \\
&\left. + 2a_0 B_1 \cos \varphi + 2a_0 B'_1 \sin \varphi + B_0 + 2k \right),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

где в выражении для $F_4(t)$ использованы обозначения (3.13).

Запишем с учетом (3.37) интеграл момента количества движения (3.12):

$$\lambda_1(t)M + \lambda_2(t)N + F_4(t) = 0. \tag{3.38}$$

Из интеграла (3.38) и третьего уравнения из (3.23) найдем

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \frac{NF_3(t) - F_4(t)(\alpha_3 \dot{\varphi} + M \dot{\psi})}{\dot{\varphi}(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot{\psi}(M^2 + N^2)}, \\
\lambda_2(t) &= -\frac{MF_3(t) + F_4(t)(\beta_3 \dot{\varphi} + N \dot{\psi})}{\dot{\varphi}(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot{\psi}(M^2 + N^2)}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Отметим, что для векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ в силу ортонормированности справедливы очевидные соотношения

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3.40}$$

Учитывая свойства (3.40) и замены (3.37), преобразуем знаменатели компонент гиросtatического момента из (3.39) к виду:

$$\dot{\varphi}(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot{\psi}(M^2 + N^2) = a_0 \dot{\varphi} + \dot{\psi} - L(\gamma_3 \dot{\varphi} + L \dot{\psi}).$$

Введем следующие замены:

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= R_1\ddot{\varphi} + R_2\ddot{\psi} + R_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + R_4\dot{\varphi}^2 + R_5\dot{\psi}^2 + R_6\dot{\varphi} + R_7\dot{\psi} + R_8, \\
NF_3(t) - F_4(t)(\alpha_3\dot{\varphi} + M\dot{\psi}) &= P_1\ddot{\varphi} + P_2\ddot{\psi} + P_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + P_4\dot{\varphi}^2 + P_5\dot{\psi}^2 + \\
&+ P_6\dot{\varphi} + P_7\dot{\psi} + P_8, \\
MF_3(t) + F_4(t)(\beta_3\dot{\varphi} + N\dot{\psi}) &= Q_1\ddot{\varphi} + Q_2\ddot{\psi} + Q_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + Q_4\dot{\varphi}^2 + Q_5\dot{\psi}^2 + \\
&+ Q_6\dot{\varphi} + Q_7\dot{\psi} + Q_8,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 &= d_{0,1}, \quad R_2 = d'_{1,1} \sin \varphi + d_{1,1} \cos \varphi + a_0 d_{0,1}, \\
R_3 &= (d'_{1,1} - A_{1,1}) \cos \varphi - (d_{1,1} + A'_{1,1}) \sin \varphi + 2a_0 A_{0,1}, \quad R_4 = A_{0,1}, \\
R_5 &= -(A_{2,1} \cos 2\varphi + A'_{2,1} \sin 2\varphi + a_0 A_{1,1} \cos \varphi + a_0 A'_{1,1} \sin \varphi + \varkappa_0 A_{0,1}), \\
R_6 &= h'_{1,1} \sin \varphi + h_{1,1} \cos \varphi + a_0 h_{0,1}, \\
R_7 &= B_{2,1} \cos 2\varphi + B'_{2,1} \sin 2\varphi + a_0 B_{1,1} \cos \varphi + a_0 B'_{1,1} \sin \varphi - \varkappa_0 h_{0,1}, \\
R_8 &= C_{2,1} \cos 2\varphi + C'_{2,1} \sin 2\varphi + \delta_{1,1} \cos \varphi + \delta'_{1,1} \sin \varphi + \delta_{0,1}, \\
P_1 &= d_{0,3}(a'_0 \beta_1 \sin \varphi + a'_0 \beta_2 \cos \varphi + a_0 \beta_3), \\
P_2 &= \frac{a'_0}{2}(\beta_2 d_{1,3} - \beta_1 d'_{1,3}) \cos 2\varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_1 d_{1,3} + \beta_2 d'_{1,3}) \sin 2\varphi + \\
&+ a_0(a'_0 \beta_2 d_{0,3} + \beta_3 d_{1,3}) \cos \varphi + a_0(a'_0 \beta_1 d_{0,3} + \beta_3 d'_{1,3}) \sin \varphi + \\
&+ \frac{a'_0}{2}(\beta_1 d'_{1,3} + \beta_2 d_{1,3}) + a_0^2 \beta_3 d_{0,3}, \\
P_3 &= \left[\frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_1 - \alpha_2 A_1 + \beta_1(d_{1,1} + A'_{1,1}) + \beta_2(d'_{1,1} - A_{1,1})) - \right. \\
&- \left. \alpha_3 A_2 \right] \cos 2\varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_1(d'_{1,1} - A_{1,1}) - \beta_2(d_{1,1} + A'_{1,1}) - \alpha_2 A'_1 - \right. \\
&- \left. \alpha_1 A_1) - \alpha_3 A'_2 \right] \sin 2\varphi + a_0(\beta_3(d'_{1,1} - A_{1,1}) + 2a'_0 \beta_2 A_{0,3} - 3\alpha_3 A_1 - \\
&- a'_0 \alpha_2 A_{33}) \cos \varphi + a_0(2a'_0 \beta_1 A_{0,3} - \beta_3(d_{1,1} + A'_{1,1}) - 3\alpha_3 A'_1 - \\
&- a'_0 \alpha_1 A_{33}) \sin \varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_2(d'_{1,1} - A_{1,1}) - \beta_1(d_{1,1} + A'_{1,1}) - \alpha_2 A_1 - \\
&- \alpha_1 A'_1) + a_0^2(2\beta_3 A_{0,3} - \alpha_3 A_{33}) - \alpha_3 A_0, \\
P_4 &= (a'_0 \beta_1 A_{0,3} - \alpha_3 A'_1) \sin \varphi + (a'_0 \beta_2 A_{0,3} - \alpha_3 A_1) \cos \varphi +
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
& + a_0(\beta_3 A_{0,3} - \alpha_3 A_{33}), \\
P_5 = & \frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_2 - \alpha_2 A_2 + \beta_1 A'_{2,3} - \beta_2 A_{2,3}) \cos 3\varphi - \frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A_2 + \alpha_2 A'_2 + \\
& + \beta_1 A_{2,3} + \beta_2 A'_{2,3}) \sin 3\varphi + a_0 \left[\frac{a'_0}{2}(2\alpha_1 A'_1 - 2\alpha_2 A_1 + \beta_1 A'_{1,3} - \beta_2 A_{1,3}) - \right. \\
& - \alpha_3 A_2 - \beta_3 A_{2,3} \left. \right] \cos 2\varphi - a_0 \left[\frac{a'_0}{2}(2\alpha_1 A_1 + 2\alpha_2 A'_1 + \beta_1 A_{1,3} + \beta_2 A'_{1,3}) + \right. \\
& + \alpha_3 A'_2 + \beta_3 A'_{2,3} \left. \right] \sin 2\varphi - \left[\frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_2 + \alpha_2(A_2 + 2A_0) + \beta_1 A'_{2,3} + \beta_2(A_{2,3} + \right. \\
& + 2\kappa_0 A_{0,3})) + a_0^2(2\alpha_3 A_1 + \beta_3 A_{1,3}) \left. \right] \cos \varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_1(A_{2,3} - 2\kappa_0 A_{0,3}) - \beta_2 A'_{2,3} + \right. \\
& + \alpha_1(A_2 - 2A_0) - \alpha_2 A'_2) - a_0^2(2\alpha_3 A'_1 + \beta_3 A'_{1,3}) \left. \right] \sin \varphi - \frac{a_0}{2} \left[a'_0(2\alpha_1 A'_1 + \right. \\
& + 2\alpha_2 A_1 + \beta_1 A'_{1,3} + \beta_2 A_{1,3}) + 2\alpha_3 A_0 + 2\beta_3 \kappa_0 A_{0,3} \left. \right], \\
P_6 = & \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_2 h_{1,3} - \beta_1 h'_{1,3}) + \frac{1}{2} \alpha_3 B_2 \right] \cos 2\varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_1 h_{1,3} + \beta_2 h'_{1,3}) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \alpha_3 B'_2 \right] \sin 2\varphi + a_0(a'_0 \beta_2 h_{0,3} + \beta_3 h_{1,3} + \alpha_3 B_1) \cos \varphi + a_0(a'_0 \beta_1 h_{0,3} + \beta_3 h'_{1,3} + \\
& + \alpha_3 B'_1) \sin \varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_1 h'_{1,3} + \beta_2 h_{1,3}) + a_0^2 \beta_3 h_{0,3} + \alpha_3 \left(k + \frac{B_0}{2} \right), \\
P_7 = & \frac{a'_0}{4}(\alpha_2 B_2 - \alpha_1 B'_2 + 2\beta_2 B_{2,3} - 2\beta_1 B'_{2,3}) \cos 3\varphi + \frac{a'_0}{4}(\alpha_1 B_2 + \alpha_2 B'_2 + \\
& + 2\beta_1 B_{2,3} + 2\beta_2 B'_{2,3}) \sin 3\varphi + \frac{a_0}{2} \left[a'_0(\alpha_2 B_1 - \alpha_1 B'_1 + \beta_2 B_{1,3} - \beta_1 B'_{1,3}) + \right. \\
& + \alpha_3 B_2 + 2\beta_3 B_{2,3} \left. \right] \cos 2\varphi + \frac{a_0}{2} \left[a'_0(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B'_1 + \beta_1 B_{1,3} + \beta_2 B'_{1,3}) + \alpha_3 B'_2 + \right. \\
& + 2\beta_3 B'_{2,3} \left. \right] \sin 2\varphi + \left\{ \frac{a'_0}{4} \left[\alpha_2(B_2 + 2B_0 + 4k) + \alpha_1 B'_2 + 2\beta_2(B_{2,3} - 2\kappa_0 h_{0,3}) + \right. \right. \\
& + 2\beta_1 B'_{2,3} \left. \right] + a_0^2(\alpha_3 B_1 + \beta_3 B_{1,3}) \left. \right\} \cos \varphi + \left\{ \frac{a'_0}{4} \left[\alpha_1(4k + 2B_0 - B_2) + \alpha_2 B'_2 - \right. \right. \\
& - 2\beta_1(B_{2,3} + 2\kappa_0 h_{0,3}) + 2\beta_2 B'_{2,3} \left. \right] + a_0^2(\alpha_3 B'_1 + \beta_3 B'_{1,3}) \left. \right\} \sin \varphi + \frac{a_0}{2} \left[a'_0(\alpha_1 B'_1 + \right. \\
& + \alpha_2 B_1 + \beta_1 B'_{1,3} + \beta_2 B_{1,3}) + \alpha_3(2k + B_0) - 2\beta_3 \kappa_0 h_{0,3} \left. \right], \\
P_8 = & \frac{a'_0}{2}(\beta_2 C_{2,3} - \beta_1 C'_{2,3}) \cos 3\varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_2 C'_{2,3} + \beta_1 C_{2,3}) \sin 3\varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_2 \delta_{1,3} - \right. \\
& - \beta_1 \delta'_{1,3}) + a_0 \beta_3 C_{2,3} \left. \right] \cos 2\varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_1 \delta_{1,3} + \beta_2 \delta'_{1,3}) + a_0 \beta_3 C'_{2,3} \right] \sin 2\varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_2 C_{2,3} + \beta_1 C'_{2,3} + 2\beta_2 \delta_{0,3}) + a_0 \beta_3 \delta_{1,3} \right] \cos \varphi + \left[\frac{a'_0}{2}(\beta_2 C'_{2,3} - \beta_1 C_{2,3} + \right. \\
& \left. + 2\beta_1 \delta_{0,3}) + a_0 \beta_3 \delta'_{1,3} \right] \sin \varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_1 \delta'_{1,3} + \beta_2 \delta_{1,3}) + a_0 \beta_3 \delta_{0,3}.
\end{aligned}$$

Выражения для Q_i получаются из P_i заменой α_k на $-\beta_k$, а β_k на α_k соответственно ($i = \overline{1, 8}$, $k = \overline{1, 3}$).

Подставим выражения (3.39) в первое уравнение из (3.23):

$$\begin{aligned}
& [a_0 \dot{\varphi} + \dot{\psi} - L(\gamma_3 \dot{\varphi} + L\dot{\psi})] \left\{ P_1 \ddot{\varphi} + P_2 \ddot{\psi} + \ddot{\varphi} [(2P_4 + P'_1 + \gamma_3 Q_1) \dot{\varphi} + \right. \\
& + (P_3 + Q_1 L) \dot{\psi} + P_6] + \ddot{\psi} [(2P_5 + Q_2 L) \dot{\psi} + (P'_2 + P_3 + \gamma_3 Q_2) \dot{\varphi} + P_7] + \\
& + (P'_4 + \gamma_3 Q_4) \dot{\varphi}^3 + Q_5 L \dot{\psi}^3 + \dot{\varphi}^2 [(P'_3 + Q_3 \gamma_3 + Q_4 L) \dot{\psi} + P'_6 + \gamma_3 Q_6] + \\
& + \dot{\psi}^2 [(P'_5 + \gamma_3 Q_5 + Q_3 L) \dot{\varphi} + Q_7 L] + \dot{\varphi} \dot{\psi} (P'_7 + \gamma_3 Q_7 + LQ_6) + (P'_8 + \\
& + \gamma_3 Q_8) \dot{\varphi} + LQ_8 \dot{\psi} \left. \right\} - \left\{ P_1 \ddot{\varphi}^2 (a_0 - \gamma_3 L) + P_2 \ddot{\psi}^2 (1 - L^2) + \ddot{\varphi} \ddot{\psi} [P_2 (a_0 - \right. \\
& - \gamma_3 L) + P_1 (1 - L^2)] + \ddot{\varphi} [\dot{\varphi}^2 (P_4 (a_0 - \gamma_3 L) - \gamma_3 P_1 L') + \dot{\psi}^2 P_5 (a_0 - \\
& - \gamma_3 L) + \dot{\varphi} \dot{\psi} (P_3 (1 - L^2) - 2P_2 L L')] + (1 - L^2) (P_6 \dot{\varphi} + P_7 \dot{\psi} + P_8) \left. \right\} - \\
& - L' [\gamma_3 P_4 \dot{\varphi}^4 + \dot{\varphi}^3 (\gamma_3 P_6 + \dot{\psi} (\gamma_3 P_3 + 2P_4 L)) + 2P_5 L \dot{\varphi} \dot{\psi}^3 + (2P_3 L + \\
& + \gamma_3 P_5) \dot{\varphi}^2 \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 (\gamma_3 P_8 + \dot{\psi} (2P_6 L + \gamma_3 P_7)) + 2\dot{\varphi} \dot{\psi} L (P_7 \dot{\psi} + P_8) \left. \right\} + \\
& + [a_0 \dot{\varphi} + \dot{\psi} - L(\gamma_3 \dot{\varphi} + L\dot{\psi})]^2 (R_1 \ddot{\varphi} + R_2 \ddot{\psi} + R_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + R_4 \dot{\varphi}^2 + R_5 \dot{\psi}^2 + \\
& + R_6 \dot{\varphi} + R_7 \dot{\psi} + R_8) = 0,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

где $P'_i = \frac{dP_i}{d\varphi}$, ($i = \overline{1, 8}$), $L' = \frac{dL}{d\varphi}$.

Таким образом, получено обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (3.43) на углы прецессии и собственного вращения, которое с учетом (3.41) и (3.42) задает прецессионные движения общего вида относительно вертикали для гиростата, несущего два ротора с переменным гиростатическим моментом.

3.4 Вывод

Показано, что в задаче о прецессионных движениях гиростата актуальны два подхода, основанные на разных видах базиса, характеризующего рассматриваемый класс движений. Особенностью первого подхода является описание прецессионных движений с помощью трех дифференциальных уравнений на углы прецессии, собственного вращения и компоненты гиростатического момента. В силу незамкнутости данных уравнений для исследования условий существования предлагается рассматривать такие классы прецессий, которые могут быть описаны дополнительным условием прецессионности: свойством регулярности или полурегулярности.

Вторая форма дифференциальных уравнений характеризуется двумя дифференциальными уравнениями на переменные задачи и одним дифференциальным уравнением, в которое не входят производные от компонент гиростатического момента. Это свойство позволяет применять метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрены маятниковые движения гиростата относительно горизонтальной оси в поле силы тяжести.

Предложен метод исследования уравнений движений гиростата класса Кирхгофа-Пуассона в случае прецессионных движений с помощью первого интеграла. Проведена редукция уравнений движения к обыкновенному дифференциальному уравнению на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и указан явный вид этого уравнения.

Раздел 4

Прецессионные движения гиростата с гиростатическим моментом вида $\lambda(t) = \lambda(t)\alpha$

Данный раздел посвящен исследованию различных классов прецессионных движений гиростата в случае, когда несомым телом является один неравномерно вращающийся ротор, то есть вектор гиростатического момента зависит от времени, изменение его величины происходит вдоль оси, фиксированной в теле-носителе.

Для полурегулярных прецессионных движений первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с помощью первого интеграла выполнена редукция трех дифференциальных уравнений к двум уравнениям на одну функцию $\varphi(t)$ и указан явный вид этих уравнений. Построены решения редуцированных уравнений, описывающие маятниковые движения и полурегулярные прецессии первого типа в случае специального распределения масс гиростата.

Для варианта, когда величина скорости собственного вращения является постоянной или линейной функцией относительно $\sin \varphi$, в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил исследованы два случая прецессионно-изоконических движений и движения, характеризующиеся зависимостью $\dot{\psi} = \rho_1 \dot{\varphi} + \rho_0$. Выписан явный вид систем алгебраических уравнений, связывающих параметры задачи, приведены примеры разрешимости и указана интерпретация полученных результатов.

4.1 Полурегулярные прецессионные движения первого типа

Рассмотрим полурегулярные прецессионные движения первого типа гири относительно вертикали [13]. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{v} заданы в (3.4), а угловая скорость из (3.4) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\mathbf{a} + m\mathbf{v}, \quad (4.1)$$

где $\dot{\psi} = m = \text{const}$. Обозначим

$$B^* = mSp(A)E - 2mA + B, \quad C^* = C + mB - m^2A, \quad (4.2)$$

где E – единичная матрица, $Sp(A)$ – след матрицы A . Поскольку третья ось подвижной системы координат направлена по вектору \mathbf{a} , то поворотом системы координат можно добиться

$$\alpha_2 = 0.$$

Полагая в уравнениях (3.9)-(3.11) $\alpha_2 = 0$, $\lambda_2(t) \equiv 0$ и учитывая (4.2) получим

$$\begin{aligned} \alpha_3 \dot{\lambda}(t) - a'_0 \alpha_1 m \lambda(t) \cos \varphi + A_{33} \ddot{\varphi} + C'_2 \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi + \varkappa_1 \sin \varphi - \\ - \varkappa'_1 \cos \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (a'_0 \alpha_1 \sin \varphi + a_0 \alpha_3) \dot{\lambda}(t) + a'_0 \alpha_1 \dot{\varphi} \lambda(t) \cos \varphi + (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + \\ + a_0 A_{33}) \ddot{\varphi} + (A'_1 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \\ + \dot{\varphi} (B_2 \sin 2\varphi - B'_2 \cos 2\varphi + B_1 \sin \varphi - B'_1 \cos \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} a'_0 \alpha_1 \dot{\lambda}(t) \cos \varphi + a'_0 (a'_0 \alpha_3 - a_0 \alpha_1 \sin \varphi) \lambda(t) - a'_0 \alpha_1 \lambda(t) \dot{\varphi} \sin \varphi + \\ + (A'_1 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi) \ddot{\varphi} - (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} (B_2 \cos 2\varphi + \\ + B'_2 \sin 2\varphi + a_0 B_1 \cos \varphi + a_0 B'_1 \sin \varphi + B_0) + a_0 C_2 \cos 2\varphi + \\ + a_0 C'_2 \sin 2\varphi + \delta_1 \cos \varphi + \delta'_1 \sin \varphi + \delta_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Интеграл моментов (3.12) представим с помощью матриц B^* и C^* в виде

$$(a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a_0\alpha_3)\lambda(t) = \frac{1}{2}B_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}B'_2 \sin 2\varphi + \\ + a_0B_1 \cos \varphi + a_0B'_1 \sin \varphi + k_0 - (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + a_0A_{33})\dot{\varphi}. \quad (4.6)$$

В формулах (4.3)–(4.6) использованы обозначения

$$A_1 = a'_0A_{23}, \quad A'_1 = a'_0A_{13}, \quad B_2 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22}^* - B_{11}^*), \quad B'_2 = a_0'^2B_{12}^*, \\ B_1 = a'_0B_{23}^*, \quad B'_1 = a'_0B_{13}^*, \quad B_0 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{11}^* + B_{22}^*), \quad C'_2 = a_0'^2C_{12}^*, \\ C_2 = \frac{a_0'^2}{2}(C_{22}^* - C_{11}^*), \quad \varkappa_1 = a'_0(s_2 - a_0C_{23}^*), \quad \varkappa'_1 = a'_0(s_1 - a_0C_{13}^*), \quad (4.7) \\ \delta'_1 = a'_0((a_0^2 - a_0'^2)C_{13}^* - a_0s_1), \quad \delta_1 = a'_0((a_0^2 - a_0'^2)C_{23}^* - a_0s_2), \\ \delta_0 = \frac{a_0'^2}{2}[2s_3 + a_0(C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{33}^*)], \quad A_0 = a_0A_{33}, \\ k_0 = k - \frac{1}{2}mSp(A) + \frac{1}{4}[a_0'^2(B_{22}^* + B_{11}^*) + 2a_0^2B_{33}^*],$$

где B_{ij}^* и C_{ij}^* ($i, j = 1, 2, 3$) являются элементами матриц B^* и C^* из (4.2).

4.1.1 Общее уравнение движений

Для получения общего уравнения полурегулярных прецессионных движений первого типа гиростата необходимо исключить неизвестную функцию $\lambda(t)$ из уравнений (4.3)–(4.5) с помощью интеграла (4.6). Будем предполагать, что выражение $a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a_0\alpha_3 \neq 0$. Это приводит к условиям $\alpha_3^2 > a_0'^2$ и $\alpha_1^2 + a_0^2 \neq 0$. Обозначим

$$N_1 = a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a_0\alpha_3, \quad M_1 = A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi + a_0A_{33}, \\ M'_1 = A'_1 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi, \quad Q_1 = A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi, \\ M_2 = \frac{1}{2}B_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}B'_2 \sin 2\varphi + a_0B_1 \cos \varphi + a_0B'_1 \sin \varphi + k_0,$$

$$\begin{aligned}
M_2' &= -B_2 \sin 2\varphi + B_2' \cos 2\varphi - a_0 B_1 \sin \varphi + a_0 B_1' \cos \varphi, \\
L_2 &= C_2' \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi + \varkappa_1 \sin \varphi - \varkappa_1' \cos \varphi, \\
Q_2 &= B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi + a_0 B_1 \cos \varphi + a_0 B_1' \sin \varphi + B_0, \\
R_2 &= a_0 C_2 \cos 2\varphi + a_0 C_2' \sin 2\varphi + \delta_1 \cos \varphi + \delta_1' \sin \varphi + \delta_0, \\
P_1 &= a_0 \alpha_3 A_1 \sin \varphi + a_0 (a_0' \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1') \cos \varphi + a_0' \alpha_1 A_1, \\
R_1 &= a_0 \alpha_1 \sin \varphi - a_0' \alpha_3, \quad M_3 = \frac{1}{4} a_0' \alpha_1 B_2 \cos 3\varphi + \frac{1}{4} a_0' \alpha_1 B_2' \sin 3\varphi + \\
&+ a_0 \alpha_3 B_2' \cos 2\varphi - a_0 \alpha_3 B_2 \sin 2\varphi + (a_0^2 \alpha_3 B_1' - \frac{3}{4} a_0' \alpha_1 B_2 - \\
&- a_0' \alpha_1 k_0) \cos \varphi - (a_0^2 \alpha_3 B_1 + \frac{3}{4} a_0' \alpha_1 B_2') \sin \varphi - a_0 a_0' \alpha_1 B_1.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из (4.6) найдем функцию $\lambda(t)$ и ее производную

$$\lambda(t) = \frac{M_2 - M_1 \dot{\varphi}}{N_1}, \quad \dot{\lambda}(t) = \frac{-M_1 N_1 \ddot{\varphi} + P_1 \dot{\varphi}^2 + M_3 \dot{\varphi}}{N_1^2}. \tag{4.9}$$

При подстановке (4.9) в уравнения (4.3)–(4.5) с учетом (4.8) получим

$$\begin{aligned}
N_1 D_1 \ddot{\varphi} + \alpha_3 P_1 \dot{\varphi}^2 + L_3 \dot{\varphi} - N_1 R_3 &= 0, \\
N_1 P_1 \ddot{\varphi} - G_1 \dot{\varphi}^2 - H_3 \dot{\varphi} - N_1 F_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= A_{33} N_1 - \alpha_3 M_1 = (a_0' \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1') \sin \varphi - \alpha_3 A_1 \cos \varphi, \\
G_1 &= a_0' \alpha_1 P_1 \cos \varphi + a_0' \alpha_1 N_1 M_1 \sin \varphi - Q_1 N_1^2 = a_0^2 \alpha_3 (a_0' \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1') \sin \varphi + \\
&+ A_1 (a_0'^2 \alpha_1^2 - a_0^2 \alpha_3^2) \cos \varphi + a_0 a_0' \alpha_1 (a_0' \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1'), \\
L_3 &= \alpha_3 M_3 + a_0' \alpha_1 M_1 N_1 m \cos \varphi = \sum_{n=0}^3 (l_n \cos n\varphi + l_n' \sin n\varphi), \\
l_3 &= \frac{a_0' \alpha_1}{4} (\alpha_3 B_2 - a_0' \alpha_1 m A_1'), \quad l_3' = \frac{a_0' \alpha_1}{4} (\alpha_3 B_2' + a_0' \alpha_1 m A_1), \\
l_2 &= \frac{a_0 \alpha_3}{2} (2\alpha_3 B_2' + a_0' \alpha_1 m A_1), \\
l_2' &= \frac{1}{2} [a_0 \alpha_3 (-2\alpha_3 B_2 + a_0' \alpha_1 m A_1') + a_0'^2 \alpha_1^2 m A_0],
\end{aligned}$$

$$l_1 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (-3\alpha_3 B_2 + a'_0 \alpha_1 m A'_1) + a_0^2 \alpha_3^2 B'_1 + a'_0 \alpha_1 \alpha_3 (a_0 m A_0 - k_0),$$

$$l'_1 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (-3\alpha_3 B'_2 + a'_0 \alpha_1 m A_1) - a_0^2 \alpha_3^2 B_1, \quad l_0 = \frac{a_0 a'_0 \alpha_1 \alpha_3}{2} (m A_1 - 2B_2);$$

$$R_3 = a'_0 \alpha_1 M_2 m \cos \varphi - L_2 N_1 = \sum_{n=0}^3 (r_n \cos n\varphi + r'_n \sin n\varphi),$$

$$r_3 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (m B_2 - 2C_2), \quad r'_3 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (m B'_2 - 2C'_2),$$

$$r_2 = \frac{a'_0 \alpha_1}{2} (a_0 m B_1 + \varkappa_1) - a_0 \alpha_3 C'_2, \quad r'_2 = \frac{a'_0 \alpha_1}{2} (a_0 m B'_1 + \varkappa'_1) + a_0 \alpha_3 C_2,$$

$$r_1 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (m B_2 + 2C_2) + a_0 \alpha_3 \varkappa'_1 + a'_0 \alpha_1 m k_0,$$

$$r'_1 = \frac{a'_0 \alpha_1}{4} (m B'_2 + 2C'_2) - a_0 \alpha_3 \varkappa_1, \quad r_0 = \frac{a'_0 \alpha_1}{2} (a_0 m B_1 - \varkappa_1);$$

$$H_3 = a'_0 \alpha_1 M_3 \cos \varphi - a'_0 \alpha_1 N_1 M_2 \sin \varphi + Q_2 N_1^2 + a'_0 m R_1 N_1 M_1 =$$

$$= \sum_{n=0}^3 (h_n \cos n\varphi + h'_n \sin n\varphi),$$

$$h_3 = -\frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (\alpha_3 B_2 + a'_0 \alpha_1 m A_1), \quad h'_3 = \frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (\alpha_3 B'_2 - a'_0 \alpha_1 m A'_1),$$

$$h_2 = a_0^2 \alpha_3^2 B_2 + \frac{a'_0 \alpha_1 \alpha_3 m}{2} (a_0'^2 - a_0^2) A'_1 + \frac{a_0'^2 \alpha_1^2}{2} (B_0 - a_0 m A_0),$$

$$h'_2 = a_0^2 \alpha_3^2 B'_2 - \frac{a'_0 \alpha_1 \alpha_3 m}{2} (a_0'^2 - a_0^2) A_1, \tag{4.11}$$

$$h_1 = a_0 B_1 (a_0^2 \alpha_3^2 - a_0'^2 \alpha_1^2) + \frac{5}{4} a_0 a'_0 \alpha_1 \alpha_3 B'_2 + \frac{a_0 a_0'^2 m}{4} (\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2) A_1,$$

$$h'_1 = a_0^3 \alpha_3^2 B'_1 + a'_0 \alpha_1 \alpha_3 \left(m [a_0^2 - a_0'^2] A_0 - a_0 \left[k_0 + 2B_0 + \frac{5}{4} B_2 \right] \right) +$$

$$+ \frac{a_0 a_0'^2 m}{4} (3\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2) A'_1,$$

$$h_0 = a'_0 a_0^2 \alpha_1 \alpha_3 B'_1 + \frac{a'_0 \alpha_1 \alpha_3 m}{2} (a_0^2 - a_0'^2) A'_1 + \frac{a_0'^2 \alpha_1^2}{2} (a_0 m A_0 - B_2 -$$

$$- B_0 - 2k_0) - a_0 \alpha_3^2 (a_0'^2 m A_0 + a_0 B_0);$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= R_2 N_1 - a'_0 m R_1 M_2 = \sum_{n=0}^3 (f_n \cos n\varphi + f'_n \sin n\varphi), \\
f_3 &= \frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (m B'_2 - 2C'_2), \quad f'_3 = -\frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (m B_2 - 2C_2), \\
f_2 &= \frac{\alpha_3}{2} (2a_0^2 C_2 + a_0'^2 m B_2) + \frac{a_0' \alpha_1}{2} (\delta_1 - a_0^2 m B_1), \\
f'_2 &= \frac{\alpha_3}{2} (2a_0^2 C'_2 + a_0'^2 m B'_2) - \frac{a_0' \alpha_1}{2} (\delta'_1 - a_0^2 m B'_1), \\
f_1 &= -\frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (m B'_2 - 2C'_2) + a_0 \alpha_3 (a_0'^2 m B_1 + \delta_1), \\
f'_1 &= \frac{a_0 a'_0 \alpha_1}{4} (m B_2 - 2C_2) + a_0 \alpha_3 (a_0'^2 m B'_1 + \delta'_1) + a_0' \alpha_1 (\delta_0 - a_0 m k_0), \\
f_0 &= \frac{a_0' \alpha_1}{2} (\delta_1 - a_0^2 m B'_1) + \alpha_3 (a_0 \delta_0 + a_0'^2 m k_0).
\end{aligned}$$

Таким образом, задача об исследовании полурегулярных прецессий первого типа неавтономного гиростата сводится к изучению решений системы дифференциальных уравнений на неизвестную функцию $\varphi(t)$ (4.10) с обозначениями (4.11).

4.1.2 Случай $A_{23} = 0$, $\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0$

Нахождение решений уравнений (4.10) в общем виде не проводилось. В работе [142] исследование проводилось при некоторых ограничениях на параметры задачи. В данной диссертации изучение уравнений (4.10) проведено при следующих ограничениях на распределение масс гиростата S .

Пусть

$$A_{23} = 0, \quad \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0. \quad (4.12)$$

Тогда D_1 из (4.11) и P_1 из (4.8) тождественно равны нулю. Система (4.10) принимает вид

$$L_3 \dot{\varphi} - N_1 R_3 = 0, \quad H_3 \dot{\varphi} + N_1 F_3 = 0,$$

откуда, полагая $L_3 \neq 0$, найдем ($N_1 \neq 0$ по постановке задачи)

$$\dot{\varphi} = \frac{N_1 R_3}{L_3}. \quad (4.13)$$

$$H_3 R_3 + F_3 L_3 = 0. \quad (4.14)$$

Учитывая в уравнении (4.14) равенства (4.12) и обозначения (4.8), (4.11) потребуем, чтобы (4.14) выполнялось для всех φ . Получим следующую систему алгебраических равенств на параметры задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3} \left\{ a_0'^2 m A_{33} \left(A_{33} (B_2^2 - B_2'^2) - 2A_1'^2 C_2 \right) + A_1' \left[(mA_1'^2 - B_2 A_{33})(a_0 \varkappa_1' + \delta_1') - \right. \right. \\ & \left. \left. - B_2' A_{33} (a_0 \varkappa_1 + \delta_1) + B_0 A_1' (mB_2 - 2C_2) \right] \right\} = 0, \\ & \frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3} \left\{ 2a_0'^2 m A_{33} (B_2 B_2' A_{33} - A_1'^2 C_2') + A_1' \left[- (mA_1'^2 - B_2 A_{33})(a_0 \varkappa_1 + \delta_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - B_2' A_{33} (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + B_0 A_1' (mB_2' - 2C_2') \right] \right\} = 0, \\ & \frac{a_0 a_0'^2 \alpha_3^3 m B_2 B_2'}{2} - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8A_{33}^3} \left\{ A_0 \left[3(mA_1'^2 - B_2 A_{33})(a_0 \varkappa_1 + \delta_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3B_2' A_{33} (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') - a_0'^2 m A_{33} (B_2 B_1 - B_2' B_1') + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_1' (B_2' C_2 + B_2 C_2' - 2mB_0 B_2') \right] + A_1' \left[a_0 A_1' B_1 (mB_2 - mB_0 - 2C_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\varkappa_1 A_1' - 6A_0 C_2') (B_0 + ma_0'^2 A_{33}) + \delta_0 A_{33} B_2' - a_0 m A_1'^2 C_2' \right] \right\} = 0, \quad (4.15) \\ & \frac{a_0 a_0'^2 \alpha_3^3 m (B_2'^2 - B_2^2)}{4} - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8A_{33}^3} \left\{ (mA_1'^2 - B_2 A_{33}) (3A_0 (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + A_1' \delta_0) - \right. \\ & \left. - a_0'^2 m A_0 A_{33} (B_2 B_1' + B_2' B_1) - 3A_0 A_{33} B_2' (a_0 \varkappa_1 + \delta_1) + A_0 A_1' (B_2' C_2' - \right. \\ & \left. - B_2 C_2 + 2mB_0 B_2) + A_1' \left[a_0 A_1' (B_1 (mB_2 - 2C_2) - mB_0 B_1') - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\varkappa_1' A_1' + 6A_0 C_2) (B_0 + ma_0'^2 A_{33}) + a_0 m A_1'^2 C_2 \right] \right\} = 0, \\ & \frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4} \left[2B_2 (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + 2B_2' (a_0 \varkappa_1 + \delta_1) + 3a_0'^2 m (B_2 B_1' + B_2' B_1) \right] + \\ & + \frac{\alpha_3^3 A_1'}{16A_{33}^3} \left\{ 4A_0^2 \left[mB_2^2 + B_2 C_2 - B_2' C_2' + 6B_0 C_2 - mB_2 B_0 - mB_2'^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_1 (a_0 \varkappa_1 + \delta_1) - (B_1' + 3mA_1') (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + 6ma_0'^2 A_{33} C_2 \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - A_1'^2 [4a_0\chi_1 B_1 - 2C_2(3B_0 + 2B_2 + 4k_0)] + mA_1'^2 [6A_{33}C_2(a_0'^2 - 2a_0^2) - \\
& - B_2(2B_2 + B_0 + 4k_0) - 4a_0^2 B_1^2 - 12\delta_0 A_0 + 4B_0 k_0 - 3A_1'(a_0\chi_1' + \delta_1')] + \\
& + 3A_{33}^2 [4a_0\delta_0 B_2 - a_0'^2 m(B_2^2 - B_2'^2 - 4a_0\chi_1' A_1')] + A_1' A_{33} [B_2'(3\delta_1 + \\
& + 7a_0\chi_1) + a_0\chi_1'(5B_2 + 12B_0 + 4k_0) + \delta_1'(4k_0 + 5B_2) + 4a_0^2(4B_1 C_2' - \\
& - 2B_1' C_2 + m(2B_0 B_1' + B_2 B_1' - B_2' B_1))] \Big\} = 0, \\
& \frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4} [2B_2'(a_0\chi_1' + \delta_1') - 2B_2(a_0\chi_1 + \delta_1) + 3a_0'^2 m(B_2' B_1' - B_2 B_1)] + \\
& + \frac{\alpha_3^3 A_1'}{16A_{33}^3} \left\{ 4A_0^2 [B_2'(C_2 + 2mB_2 - mB_0) + C_2'(B_2 + 6B_0 + 6ma_0'^2 A_{33}) + \right. \\
& + B_1(a_0\chi_1' + \delta_1') + (B_1' + 3mA_1')(a_0\chi_1 + \delta_1)] + A_1'^2 [2C_2'(3B_0 + 2B_2 + \\
& + 4k_0) - 4a_0\chi_1' B_1] + 6A_{33}^2 [2a_0\delta_0 B_2' - a_0'^2 m(B_2 B_2' + 2a_0\chi_1 A_1')] + \\
& + mA_1'^2 [6A_{33}C_2'(a_0'^2 - 2a_0^2) - B_2'(2B_2 + B_0 + 4k_0) - 4a_0^2 B_1 B_1'] - \\
& - A_1' A_{33} [a_0\chi_1(7B_2 + 12B_0 + 4k_0) + 4a_0^2(4B_1 C_2 + 2B_1' C_2' - \\
& - m(B_2 B_1 + B_2' B_1' - 2B_0 B_1)) + \delta_1(4k_0 + 3B_2) - 5B_2'(a_0\chi_1' + \delta_1')] + \\
& \left. + mA_1'^3(5a_0\chi_1 + \delta_1) \right\} = 0, \\
& \frac{\alpha_3^3 a_0}{2} [2a_0(B_2'\delta_0 + a_0 C_2' B_0) + a_0^2(B_1(a_0\chi_1' + \delta_1') + B_1'(a_0\chi_1 + \delta_1)) + \\
& + 2ma_0'^2(a_0^2 B_1 B_1' + B_2' k_0 + a_0^2 A_{33} C_2')] - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{4A_{33}^3} \left\{ a_0 A_{33}^2 [ma_0'^2(3B_2 B_1 - \right. \\
& - 2B_2' B_1' + 2k_0 B_1) + 6a_0^2(C_2 B_1 + C_2' B_1') + 2a_0^2 m(B_2' B_1' - 2B_2 B_1 + \\
& + B_0 B_1) + 6mA_1' C_2'(a_0^2 - a_0'^2) + (B_2 + 2k_0)(a_0\chi_1 + \delta_1) - 2B_2'(a_0\chi_1' + \\
& + 2\delta_1') + 2a_0(\chi_1(3B_0 + 2B_2) - B_1\delta_0)] + A_1'^2 [(\chi_1 + 2ma_0 B_1)(B_2 + 2k_0) + \\
& + 2\chi_1(B_0 + mA_{33}(a_0'^2 - 3a_0^2))] + A_1' A_{33} [a_0(2B_2' C_2 - 5B_2 C_2') - 2a_0\delta_1' B_1 - \\
& - 6a_0 C_2(B_0 + k_0) - 2a_0 m B_2 B_2' + 2a_0^2(B_1\chi_1' - B_1'\chi_1) - 2\delta_0 B_2'] + \\
& \left. + 2a_0 m [A_1'^3 C_2' + a_0 A_{33}^3 (\chi_1(3a_0'^2 - a_0^2) - a_0\delta_1)] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_0 \alpha_3^3}{2} \left[a_0^2 (B_1' (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') - B_1 (a_0 \varkappa_1 + \delta_1)) - 2a_0 (a_0 B_0 C_2 + \delta_0 B_2) - \right. \\
& \left. - m a_0'^2 (2B_2 k_0 + 2a_0^2 A_{33} C_2 + a_0^2 (B_1^2 - B_1'^2)) \right] - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{4 A_{33}^3} \left\{ a_0 A_{33}^2 \left[m a_0'^2 (2B_1' k_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3B_2' B_1 + 2B_2 B_1') + 6a_0^2 (B_1 C_2' - B_1' C_2) + 2a_0^2 m (B_1' B_0 - B_2 B_1' - 2B_2' B_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 6m A_1' C_2 (a_0'^2 - a_0^2) + 2(2B_2 + k_0) (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + B_2' (5a_0 \varkappa_1 + \delta_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2a_0 \delta_0 (B_1' + 3m A_1') + 2a_0 \varkappa_1' (3B_0 - B_2) \right] + A_1'^2 \left[(B_2 + B_0 + 2k_0) (a_0 m B_1' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varkappa_1') + m A_{33} \varkappa_1' (a_0'^2 - 3a_0^2) + a_0 m (B_2' B_1 - 3A_{33} \delta_1') \right] + A_1' A_{33} \left[2\delta_0 (B_2 + k_0) - \right. \\
& \left. - 2a_0^3 m (B_1^2 + B_1'^2) - 2a_0^2 (B_1' \varkappa_1' + B_1 \varkappa_1) + 6a_0 C_2 (B_2 + B_0 + k_0) + \right. \\
& \left. + a_0 (B_2' C_2' - 2B_2 C_2) - 2a_0 m B_2'^2 + 4a_0 m k_0 B_0 + 2a_0 \delta_1 B_1 \right] - \\
& \left. - m \left[A_1'^3 (a_0 C_2 + \delta_0) + 2a_0^2 A_{33}^3 (a_0^2 \varkappa_1' + a_0 \delta_1' - 3a_0'^2 \varkappa_1') \right] \right\} = 0, \\
& \frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4} \left[a_0'^2 m (B_1' (B_2 - 4k_0) - B_2' B_1) - 2B_2 (a_0 \varkappa_1' - \delta_1') + 2B_2' (a_0 \varkappa_1 - \delta_1) + \right. \\
& \left. + 4a_0^2 B_1 C_2' - 4a_0 B_1' (a_0 C_2 + \delta_0) + 4a_0 \varkappa_1' (B_0 + a_0'^2 m A_{33}) \right] + \\
& + \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8 A_{33}^3} \left\{ A_{33}^2 \left[a_0'^2 m (B_2^2 + B_2'^2 + 8a_0^2 B_1^2 + 8k_0 (B_2 + k_0)) + 8a_0^2 m k_0 (B_0 - B_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2a_0^2 (B_1 (a_0 \varkappa_1' + 5\delta_1) - B_1' (5a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + 3(B_2 C_2 + B_2' C_2')) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2a_0^2 m (B_2^2 + B_2'^2 - B_2 B_0 + 4a_0^2 B_1^2 + 3A_1' \delta_1') + 2a_0 (\delta_0 (4k_0 + 5B_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2a_0 C_2 (2k_0 + 3B_0) + 3m A_1' \varkappa_1' (a_0'^2 - a_0^2)) \right] + A_1'^2 \left[2C_2 (B_2 + B_0 + 2k_0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + m B_2^2 + 2m k_0 (3B_2 + B_0 + 4k_0) + 2m A_{33} (a_0'^2 C_2 - 3a_0 (a_0 C_2 + \delta_0)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2a_0 B_1 (3a_0 m B_1 - \varkappa_1) \right] + A_1' A_{33} \left[6a_0 \varkappa_1' B_0 + 2B_2 (3a_0 \varkappa_1' + \delta_1') + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_2' (3a_0 \varkappa_1 + \delta_1) + 2k_0 (5a_0 \varkappa_1' + \delta_1') - 2a_0^2 m (B_1' (B_2 - 2B_0 + 4k_0) + 5B_2' B_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 4a_0^2 B_1' C_2 \right] - m \left[4a_0^2 A_{33}^2 (C_2 (2a_0^2 - 3a_0'^2) + 2a_0 \delta_0) + A_1'^3 (a_0 \varkappa_1' + \delta_1') \right] \right\} = 0, \\
& \frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4} \left[a_0'^2 m (B_1 (B_2 + 4k_0) + B_2' B_1) - 2B_2' (a_0 \varkappa_1' - \delta_1') - 2B_2 (a_0 \varkappa_1 - \delta_1) - \right. \\
& \left. - 4a_0^2 B_1' C_2' - 4a_0 B_1 (a_0 C_2 - \delta_0) - 4a_0 \varkappa_1 (B_0 + a_0'^2 m A_{33}) \right] + \\
& + \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8 A_{33}^3} \left\{ A_{33}^2 \left[2a_0'^2 m (4B_2' k_0 - 9a_0 \varkappa_1 A_1') - a_0^2 m B_1 B_1' (a_0^2 - a_0'^2) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10a_0\delta_0B'_2 + 2a_0^2\left(2C'_2(2k_0 + 3B_0) + 9(B_2C'_2 - B'_2C_2) + B_1(7\delta'_1 - a_0\chi'_1) - \right. \\
& \left. - B'_1(\delta_1 - 7a_0\chi_1) + 3mA'_1(3a_0\chi_1 - \delta_1) + mB'_2(B_0 - 4k_0)\right) + \\
& + A_1'^2\left[2C'_2(B_2 + 2B_0 + 2k_0) + mB'_2(B_2 + B_0 + 2k_0) + 2mA_{33}C'_2(2a_0'^2 - \right. \\
& \left. - 9a_0^2) + 2a_0B_1(a_0mB'_1 + \chi'_1)\right] + A_1'A_{33}\left[-2a_0\chi_1(k_0 + 9B_0) + \right. \\
& \left. + B'_2(5\delta'_1 - 3a_0\chi'_1) + 2(B_2 + k_0)(\delta_1 - 6a_0\chi_1) - 4a_0^2B'_1C'_2 + 8a_0B_1\delta_0 + \right. \\
& \left. + 2a_0^2m(B_1(B_2 + 2B_0 - 4k_0) - 5B'_2B'_1)\right] - m\left[4a_0^2A_{33}^3C'_2(2a_0^2 - 3a_0'^2) - \right. \\
& \left. - A_1'^3(5a_0\chi_1 - \delta_1)\right] \Big\} = 0, \\
& \frac{a_0^3\alpha_3^3}{2}\left[B_1(a_0\chi'_1 - \delta'_1) - B'_1(a_0\chi_1 - \delta_1) + 2(B'_2C_2 - B_2C'_2)\right] + \\
& + \frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\left\{A_{33}^2\left[a_0B_2(7a_0\chi_1 - 5\delta_1) + a_0B'_2(7a_0\chi'_1 - 5\delta'_1) + 4a_0^3(B_1C_2 + B'_1C'_2) + \right. \right. \\
& \left. + 4a_0k_0(a_0\chi_1 - \delta_1) + 4a_0^3m(B_1(B_2 + 2k_0 - B_0) + B'_1B'_2 + 3A_1'C'_2) - \right. \\
& \left. - 3a_0a_0'^2m(B_2B_1 + B'_2B'_1 + 2A_1'C'_2 + 4k_0B_1) + 12a_0^2(B_0\chi_1 - B_1\delta_0)\right] + \\
& + A_1'^2\left[\chi_1(3B_0 + 2B_2 + 4k_0) - 2a_0B_1C_2 + 3m\chi_1A_{33}(a_0'^2 - 3a_0^2) - \right. \\
& \left. - a_0mB_1(B_0 + 3B_2 + 8k_0) + 3a_0m\delta_1A_{33}\right] + A_1'A_{33}\left[B'_2(5a_0C_2 - 3\delta_0) - \right. \\
& \left. - a_0\left(C'_2(5B_2 + 6B_0 + 4k_0) - 2mB'_2(4k_0 - B_0) + 4B_1(a_0\chi'_1 + \delta'_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 4a_0B'_1(\chi_1 - 2ma_0B_1)\right)\right] + a_0m\left[3A_1'^3C'_2 + 4a_0\chi_1A_{33}^3(3a_0'^2 - a_0^2) + \right. \\
& \left. + 4a_0^2\delta_1A_{33}^3\right] \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Полученная система алгебраических уравнений на параметры задачи (4.15) определяет условия существования полурегулярных прецессий первого типа при ограничениях (4.12). Ниже рассмотрены примеры разрешимости системы (4.15) соответствующие маятниковым движениям и полурегулярным прецессиям первого типа.

Пример 1. Случай $m = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$ (маятниковые движения)

Положим в (4.15) $m = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Тогда из второго равенства в (4.12) следует $A_{13} = 0$. Система (4.15) с учетом (4.7) допускает следующее

Решение 1.

$$\begin{aligned}
C_{13} = C_{23} = 0, \quad B_{22} = -B_{11}, \quad s_3 = -\frac{a_0}{2}(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}), \\
s_1 = \frac{a_0 \left[C'_2(B_2B_1 - B'_2B'_1) - C_2(B'_2B_1 + B_2B'_1) \right]}{a'_0(B_2'^2 + B_2^2)}, \\
s_2 = -\frac{a_0 \left[C_2(B_2B_1 - B'_2B'_1) + C'_2(B'_2B_1 + B_2B'_1) \right]}{a'_0(B_2'^2 + B_2^2)}, \\
\operatorname{ctg}^2 \theta_0 = \frac{B_{11}^2 + B_{12}^2}{B_{13}^2 + B_{23}^2}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Угол нутации θ_0 , как видно из (4.16), зависит только от компонент матрицы $B = (B_{ij})$, которая характеризует гироскопические силы. Поскольку $\alpha_1 = 0$, то необходимо потребовать ограничение $a_0 \neq 0$. Так как $\operatorname{ctg} \theta_0 = \frac{a_0}{a'_0}$, то возникает условие $B_{11}^2 + B_{12}^2 \neq 0$.

Приведем числовой пример полагая:

$$\begin{aligned}
B_{11} = b_0, \quad B_{12} = 2b_0, \quad B_{13} = 4b_0, \quad B_{23} = -b_0, \quad a_0 = \frac{\sqrt{110}}{22}, \\
C_{11} = c_0, \quad C_{22} = 3c_0, \quad C_{33} = 6c_0, \quad C_{12} = -3c_0, \quad a'_0 = \frac{\sqrt{374}}{22}, \\
s_1 = \frac{27\sqrt{110}}{110}c_0, \quad s_2 = -\frac{\sqrt{110}}{10}c_0, \quad s_3 = \frac{2\sqrt{110}}{11}c_0,
\end{aligned}$$

где b_0 и c_0 — числовые независимые параметры. Из (4.9) и (4.13) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{c_0(5610 \cos 2\varphi + 1870 \sin 2\varphi + \sqrt{41140}(27 \cos \varphi + 11 \sin \varphi))}{b_0(748\sqrt{110} \cos 2\varphi + 374\sqrt{110} \sin 2\varphi + 110\sqrt{374}(\cos \varphi + 4 \sin \varphi))}, \tag{4.17}$$

$$\lambda(t) = \frac{\sqrt{110}}{5} \left(\frac{17b_0}{44}(2 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi) + \frac{\sqrt{85}b_0}{22}(4 \sin \varphi - \cos \varphi) + k_0 - \frac{\sqrt{110}A_{33}}{22}\dot{\varphi} \right).$$

В отличие от решений [142] в данном случае скорость собственного вращения является отношением тригонометрических полиномов второго порядка.

Решение 2.

$$\begin{aligned}
B_{22} &= B_{11}, \quad B_{12} = 0, \\
B_1 &= \frac{-2B_{11}(C_{13}C'_2 + C_{23}C_2)}{a'_0(C_{13}^2 + C_{23}^2)}, \quad B'_1 = \frac{-2B_{11}(C_{23}C'_2 - C_{13}C_2)}{a'_0(C_{13}^2 + C_{23}^2)}, \\
s_1 &= \frac{a_0a_0'^4C_{13}(C_{23}^2 + C_{13}^2) - 2a_0C_{13}(C_2'^2 + C_2^2) + 2\delta_0(C_{23}C'_2 - C_{13}C_2)}{a_0'^4(C_{13}^2 + C_{23}^2)}, \\
s_2 &= \frac{a_0a_0'^4C_{23}(C_{23}^2 + C_{13}^2) - 2a_0C_{23}(C_2'^2 + C_2^2) + 2\delta_0(C_{13}C'_2 + C_{23}C_2)}{a_0'^4(C_{13}^2 + C_{23}^2)}, \\
&\left(2C_2C_{13}C_{23} - C_2'(C_{23}^2 - C_{13}^2)\right)\left(a_0'^6(C_{13}^2 + C_{23}^2) - 4a_0'^2(C_2'^2 + C_2^2)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Если в последнем равенстве системы (4.18) параметр C_2' удовлетворяет условию

$$C_2' = \frac{2C_2C_{13}C_{23}}{C_{23}^2 - C_{13}^2},$$

то $\dot{\varphi}$ из (4.13) является тригонометрическим полиномом первого порядка:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{B_{11}} \left[a'_0C_{13} \sin \varphi + a'_0C_{23} \cos \varphi + \frac{1}{a_0'^2}(a_0C_2 - \delta_0) \right] + \frac{2a_0C_2C_{13}^2}{a_0'^2B_{11}(C_{23}^2 - C_{13}^2)}. \tag{4.19}$$

Если выполнено соотношение

$$a_0'^6(C_{13}^2 + C_{23}^2) - 4a_0'^2(C_2'^2 + C_2^2) = 0,$$

то с учетом (4.7) имеем $\operatorname{tg}^2\theta_0 = \frac{4C_{12}^2 + (C_{22} - C_{11})^2}{C_{13}^2 + C_{23}^2}$.

В данном примере угол нутации θ_0 зависит от компонент матрицы C , характеризующей ньютоновское и кулоновское воздействие. Пусть

$$\begin{aligned}
B_{11} &= B_{22} = 2b_0, \quad C_{11} = c_0 > 0, \quad C_{22} = 2c_0, \quad C_{33} = -5c_0, \quad C_{12} = c_0, \\
C_{13} &= -c_0, \quad C_{23} = -2c_0, \quad s_3 = -2c_0, \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_0' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
B_{23} &= \frac{8b_0}{5}, \quad B_{13} = \frac{6b_0}{5}, \quad s_1 = \frac{c_0}{5}(6 - 11\sqrt{2}), \quad s_2 = \frac{c_0}{10}(16 - 31\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Функции $\dot{\varphi}$ и $\lambda(t)$ из (4.9) и (4.13) таковы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{c_0 [5\sqrt{2}(\sin 2\varphi - 2 \cos 2\varphi)]}{8b_0(3 \cos \varphi - 4 \sin \varphi)} + \\ &+ \frac{c_0 [2(12 - 17\sqrt{2}) \cos \varphi + 2(21\sqrt{2} - 16) \sin \varphi]}{8b_0(3 \cos \varphi - 4 \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\lambda(t) = \sqrt{2} \left(\frac{4}{5} b_0 \cos \varphi + \frac{3}{5} b_0 \sin \varphi + k_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} A_{33} \dot{\varphi} \right).$$

В построенных примерах в случае, когда изменение величины гиростатического момента происходит вдоль оси собственного вращения гиростата в зависимости от конфигурации силовых полей скорость собственного вращения может быть отношением тригонометрических полиномов второго порядка (4.17), второго и первого порядков (4.20) или линейной относительно тригонометрических функций (4.19). Угол собственного вращения и функция гиростатического момента в приведенных примерах описываются элементарными функциями времени.

Пример 2. Случай $m = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$ (маятниковые движения)

Система уравнений (4.15) допускает решение

$$\begin{aligned} C_{12} &= 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = \frac{C_{13} B_2'}{B_2}, \quad C_2 = \frac{a_0'^3 A_{33} (B_2 C_{13} + B_2' C_{23})}{2A_1' B_0}, \\ k &= \frac{B_2 [A_{33} (B_2^2 + B_2'^2) + 2B_2 B_1' A_1']}{2A_{33} (B_2^2 + B_2'^2)} - \frac{1}{4} [a_0'^2 (B_{11} + B_{22}) + 2a_0^2 B_{33}], \\ s_3 &= -\frac{a_0}{2} (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) - \frac{a_0' C_{13} \sqrt{B_2^2 + B_2'^2} (B_2 + 2B_0)}{2B_2 B_0}, \\ s_1 &= \frac{a_0 a_0'^2 A_{33}^2 [C_{13} (B_2'^2 - B_2^2) - 2B_2 B_2' C_{23}]}{2A_1'^2 B_0^2} + \frac{a_0 a_0' A_1' C_{13} B_0 - A_{33} B_2 \delta_0}{a_0' A_1' B_0}, \\ s_2 &= \frac{a_0 a_0'^2 A_{33}^2 [C_{23} (B_2'^2 - B_2^2) + 2B_2 B_2' C_{13}]}{2A_1'^2 B_0^2} + \frac{a_0 a_0' A_1' C_{23} B_0 + A_{33} B_2' \delta_0}{a_0' A_1' B_0}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{A_{33} \sqrt{4B_{12}^2 + (B_{22} - B_{11})^2}}{A_{13} (B_{22} - B_{11})}. \quad (4.22)$$

Из соотношений (4.21) следует, что ни одна из величин s_i в общем случае

не равна нулю. Равенство (4.22) показывает, что θ_0 зависит от компонент тензора инерции и величин B_{ij} . Числовой пример зададим в виде:

$$\begin{aligned} A_{33} &= \xi, & A_{13} &= 2\xi, & B_{11} &= 2b_0, & B_{22} &= 3b_0, & B_{33} &= 5b_0, & B_{12} &= -b_0, \\ B_{13} &= 7b_0, & C_{11} &= 5c_0, & C_{33} &= 4c_0, & C_{22} &= 3c_0, & C_{13} &= 4c_0, & C_{23} &= -8c_0, \\ a_0 &= \frac{2}{3}, & a'_0 &= \frac{\sqrt{5}}{3}, & k &= -\frac{1}{9}b_0, & s_1 &= 2c_0, & s_2 &= -\frac{20}{3}c_0, & s_3 &= -6c_0, \end{aligned}$$

где ξ , b_0 и c_0 — числовые независимые параметры. Тогда из (4.13), (4.9) найдем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{U_4(\varphi)}{V_3(\varphi)}, \\ \lambda(t) &= \frac{b_0(5 \cos 2\varphi - 10 \sin 2\varphi + 56\sqrt{5} \sin \varphi + 61)}{24\alpha_3(\sqrt{5} \sin \varphi + 1)} - \frac{\xi \dot{\varphi}}{\alpha_3}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} U_4(\varphi) &= 4c_0 \left[-25 \sin 4\varphi + 10\sqrt{5}(2 \sin 3\varphi - 3 \cos 3\varphi) + 10(11 \sin 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cos 2\varphi) + 38\sqrt{5}(2 \sin \varphi - \cos \varphi) - 80 \right], \\ V_3(\varphi) &= 15b_0 \left[\sqrt{5}(2 \sin 3\varphi - \cos 3\varphi) + 4(\sin 2\varphi + 2 \cos 2\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{5}(6 \sin \varphi - 5 \cos \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Отличительной особенностью решений редуцированных уравнений (4.10) при несовпадении векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и \boldsymbol{a} является вид скорости собственного вращения из (4.23), которая является отношением тригонометрических многочленов четвертого и третьего порядков.

Пример 3. Случай $m \neq 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$ (полурегулярные прецессионные движения первого типа)

Пусть $m \neq 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$. Из системы (4.15) находим

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad C_{13} = -\frac{2(B_0 + a_0^2 m A_{33})(B'_1 C_2 - B_1 C'_2)}{a_0^3 (B_1^2 + B_1'^2)},$$

$$\begin{aligned}
B_2 = 0, \quad B'_2 = 0, \quad C_{23} &= \frac{2(B_0 + a_0'^2 m A_{33})(B_1 C_2 + B_1' C_2')}{a_0'^3 (B_1^2 + B_1'^2)}, \\
s_1 &= a_0(C_{13} + m B_{13}) + \frac{B_1'(a_0 \delta_0 + a_0'^2 m k_0) - a_0^2 (B_1 C_2' - B_1' C_2)}{a_0 a_0' (B_0 + a_0'^2 m A_{33})}, \\
s_2 &= a_0(C_{23} + m B_{23}) + \frac{B_1(a_0 \delta_0 + a_0'^2 m k_0) - a_0^2 (B_1 C_2 + B_1' C_2')}{a_0 a_0' (B_0 + a_0'^2 m A_{33})}. \\
&\left(C_2' (B_1^2 - B_1'^2) - 2C_2 B_1 B_1' \right) \left(a_0'^4 m^2 A_{33}^2 + 2a_0'^2 m A_{33} B_0 - \right. \\
&\left. - a_0^2 (B_1^2 + B_1'^2) + B_0^2 \right) = 0. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай

$$\begin{aligned}
A_{11} = 3\xi, \quad A_{22} = 4\xi, \quad A_{33} = 5\xi, \quad A_{12} = -2\xi, \quad B_{11} = b_0, \\
B_{22} = 7b_0, \quad B_{33} = -5b_0, \quad B_{12} = -12b_0, \quad B_{13} = 8b_0, \quad B_{23} = 5b_0, \tag{4.25} \\
C_{11} = 10c_0, \quad C_{22} = 6c_0, \quad C_{33} = 8c_0, \quad s_3 = c_0, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_0' = \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Если в (4.24) выполнено условие

$$a_0'^4 m^2 A_{33}^2 + 2a_0'^2 m A_{33} B_0 - a_0^2 (B_1^2 + B_1'^2) + B_0^2 = 0,$$

то на основании (4.7) получим квадратное уравнение на скорость прецессии:

$$a_0'^2 (A_{22} - A_{11})^2 m^2 + 2a_0'^2 B_{11} (A_{22} - A_{11}) m - a_0^2 (B_{23}^2 + B_{13}^2) + a_0'^2 B_{11}^2 = 0, \tag{4.26}$$

откуда, с учетом (4.25), найдем два значения для m .

Выберем $m = \left(-1 + \frac{\sqrt{178}}{4}\right) \frac{b_0}{\xi}$. Пусть $C_{12} = 5c_0$, тогда в силу (4.25) имеем

$$\begin{aligned}
C_{13} &= \frac{7b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 164\xi c_0}{4\sqrt{178}\xi}, \quad C_{23} = \frac{3[9b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 160\xi c_0]}{16\sqrt{178}\xi}, \\
s_1 &= \frac{\sqrt{178}[108\xi c_0 - 5b_0^2(745 - 4\sqrt{178}) + 288k_0 b_0(4 - \sqrt{178})]}{2136\xi}, \\
s_2 &= \frac{\sqrt{178}[480\xi c_0 - b_0^2(12077 - 164\sqrt{178}) + 720k_0 b_0(4 - \sqrt{178})]}{8544\xi}.
\end{aligned}$$

Из (4.13), (4.9) следует

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{U_2(\varphi)}{V_1(\varphi)}, \quad \lambda(t) = \frac{2\sqrt{2}b_0}{3}(5 \cos \varphi + 8 \sin \varphi) + 3k_0 - 5\xi\dot{\varphi}, \\
U_2(\varphi) &= 7209\sqrt{2} \left\{ 4 \left[b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 20\xi c_0 \right] \cos 2\varphi + \left[b_0^2(97 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4\sqrt{178}) - 32\xi c_0 \right] \sin 2\varphi \right\} + 4(2\sqrt{178} - 89) \left\{ \left[11664b_0k_0 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 81b_0^2(17\sqrt{178} + 28) - 68(\sqrt{178} + 4)\xi c_0 \right] \cos \varphi + \right. \\
&\quad \left. + \left[-2430b_0k_0 - 27b_0^2(8 + 13\sqrt{178}) - 20(4 + \sqrt{178})\xi c_0 \right] \sin \varphi \right\}, \\
V_1(\varphi) &= 173016\xi b_0(8 \cos \varphi - 5 \sin \varphi).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Если в (4.24) положить $C'_2 = \frac{2C_2B_1B'_1}{B_1^2 - B_1'^2}$, то скорость прецессии может принимать произвольное ненулевое значение. Пусть $m = 3\frac{b_0}{\xi}$, тогда с учетом (4.9), (4.13), (4.25) имеем:

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{2(171b_0^2 + 80c_0\xi)}{39\xi}, \quad C_{23} = \frac{20(9b_0^2 - 4c_0\xi)}{39\xi}, \quad C_{13} = \frac{32(9b_0^2 - 4c_0\xi)}{39\xi}, \\
s_1 &= \frac{-2(456b_0^2 + c_0\xi + 351b_0k_0)}{39\xi}, \quad s_2 = \frac{-5(456b_0^2 + c_0\xi + 351b_0k_0)}{156\xi}, \\
\dot{\varphi} &= \frac{8\sqrt{2}(9b_0^2 - 4c_0\xi)(5 \cos \varphi + 8 \sin \varphi) + 61c_0\xi - 1980b_0^2 - 1053b_0k_0}{468b_0}, \\
\lambda(t) &= \frac{4\sqrt{2}(10c_0\xi - 3b_0^2)(5 \cos \varphi + 8 \sin \varphi)}{117b_0} + \frac{6669b_0k_0 - 305c_0\xi + 9900b_0^2}{468b_0}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

В построенном примере для полурегулярных прецессионных движений первого типа установлено, что скорость собственного вращения может быть линейной относительно тригонометрических функций угла собственного вращения (4.28) или рациональной функцией тригонометрических полиномов второго и первого порядков (4.27). Скорость прецессии может принимать произвольное ненулевое значение или задаваться равенством (4.26). Зависимость функции гиросtatического момента от времени задана в виде (4.27) или (4.28).

4.2 Прецессионно–изоконические движения

Рассмотрим прецессионные движения гиростата в случае, когда подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ симметричны относительно касательной к ним плоскости. Такие движения называются прецессионно-изоконическими и характеризуются соотношением [22]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = 0, \quad (4.29)$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — единичный вектор, неизменный в гиростате. Первый класс прецессионно-изоконических движений возникает в случае $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, тогда из (4.29) следует равенство скоростей прецессии и собственного вращения. Второй класс прецессионно-изоконических движений описывается зависимостью

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\mu_1 \sin \varphi + \mu_0}, \quad \mu_1 = \frac{a'_0 c_1}{c_3 - a_0}, \quad \mu_0 = \frac{1 - a_0 c_3}{c_3 - a_0}, \quad \mu_0^2 = 1 + \mu_1^2$$

при несовпадении векторов \mathbf{c} и \mathbf{a} .

В данной диссертации рассмотрен второй класс прецессионно-изоконических движений гиростата в случаях, когда гиростатический момент изменяется вдоль некоторой оси (раздел 4) и в некоторой плоскости (раздел 5).

4.2.1 Полурегулярные прецессионно-изоконические движения

Рассмотрим класс прецессионно-изоконических движений в случае, когда скорость собственного вращения является постоянной и равна n [79]. Тогда

$$\varphi = nt + \varphi_0, \quad \dot{\psi} = \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi}, \quad \boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \quad (4.30)$$

где φ_0 — постоянная интегрирования, γ_0, γ_1 — постоянные, векторы \mathbf{a} и $\boldsymbol{\nu}$ определены в (3.4).

Пусть величина гиростатического момента во все время движения равна

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin \varphi, \quad (4.31)$$

где λ_0, λ_1 — некоторые постоянные, $\lambda_1 \neq 0$.

Случай $\alpha = \mathbf{a}$, $a_0 = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

Рассмотрим движение гиростата, когда на него действуют потенциальные и гироскопические силы, $\alpha = (0, 0, 1)$, а собственная ось вращения горизонтальна. Уравнения (3.9)–(3.12) с учетом $\lambda_2(t) \equiv 0$, (4.30), (4.31) примут вид

$$\begin{aligned} n\lambda_1 \cos \varphi - (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi) \frac{n^2 \gamma_1 \cos \varphi}{(\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi)^2} + (A_2 \sin 2\varphi - \\ - A'_2 \cos 2\varphi) \frac{n^2}{(\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi)^2} + (B'_2 \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi) \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} + \\ + C'_2 \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi - \varkappa'_1 \cos \varphi + \varkappa_1 \sin \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{n(\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_0)}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} - (A'_2 \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi) \frac{n^2 \gamma_1 \cos \varphi}{(\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi)^2} - \\ - (2A_2 \cos 2\varphi + 2A'_2 \sin 2\varphi - A_{33}) \frac{n^2}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} - n^2(A_1 \cos \varphi + \\ + A'_1 \sin \varphi) + (A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi) \frac{n^2}{(\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi)^2} + n(B_2 \cos 2\varphi + \\ + B'_2 \sin 2\varphi - B_0^*) - (B_1 \cos \varphi + B'_1 \sin \varphi) \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} + \delta_1 \cos \varphi + \\ + \delta'_1 \sin \varphi + \delta_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} n(A_1 \cos \varphi + A'_1 \sin \varphi) + (A_2 \cos 2\varphi + A'_2 \sin 2\varphi + A_0) \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} - \\ - \frac{1}{2}(B_2 \cos 2\varphi + B'_2 \sin 2\varphi + B_0) = k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Потребуем, чтобы уравнения (4.32)–(4.34) были тождествами по φ . Получим следующую систему алгебраических равенств:

$$C_2 = 0, \quad C'_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B'_2 = 0, \quad B_1 = 0, \quad A'_2 = 0, \quad A_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \varkappa_1 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \varkappa_1' - n\lambda_1 = 0, \quad (\gamma_1^2 + 4\gamma_0^2)(\varkappa_1' - n\lambda_1) = 0, \\
& -\gamma_0\gamma_1(\varkappa_1' - n\lambda_1) + n^2(A_2 - \frac{\gamma_1}{2}A_1') = 0, \quad \frac{\gamma_1}{2}\delta_1' + n^2(A_2 - \frac{\gamma_1}{2}A_1') = 0, \\
& -\gamma_0(\gamma_1\delta_1' + n^2(2A_2 - \gamma_1A_1')) + \frac{\gamma_1}{2}(n(\gamma_1B_0^* + B_1' - \lambda_1) - \gamma_1\delta_0) = 0, \\
& \frac{3}{4}(\gamma_1\delta_1' + 2n^2A_2 - n^2\gamma_1A_1') + \gamma_0(n\lambda_1 - nB_1' - 2n\gamma_1B_0^* + 2\gamma_1\delta_0) + \\
& + n^2((1 - \gamma_0^2)A_1' + \gamma_1A_{33}) + \gamma_0^2\delta_1' + n\gamma_1\lambda_0 = 0, \quad \gamma_1(n\lambda_1 - n\gamma_1B_0^* - \\
& - nB_1' + \gamma_1\delta_0) + 2\gamma_0(\gamma_1\delta_1' + n^2(A_{33} - \gamma_1A_1') + n\lambda_0 - n\gamma_0B_0^* + \gamma_0\delta_0) = 0, \\
& 2n\gamma_0A_1' - \gamma_1(2k + B_0) = 0, \quad n\gamma_1A_1' - \gamma_0(2k + B_0) + 2nA_0 = 0.
\end{aligned}$$

Из полученной системы равенств на параметры задачи вытекают условия существования прецессионно-изоконических движений второго типа в задаче о движении гири с переменным гиристатическим моментом:

$$\begin{aligned}
& a_0 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{11}(A_{22} - A_{11}), \\
& B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \\
& \gamma_0 = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{A_{22} - A_{11}}{A_{11}}}, \quad 2k = -B_{22} + 2n\sqrt{A_{11}A_{22}}, \quad (4.35) \\
& s_2 = 0, \quad \lambda_0 = n(A_{22} - A_{11} - A_{33}) - \frac{s_3 + nB_{22}}{n}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \\
& \lambda_1 = \frac{s_1}{n}, \quad n[B_{22}(A_{11} - A_{22}) + B_{13}A_{13}] = s_1A_{13} + s_3(A_{22} - A_{11}).
\end{aligned}$$

Можно показать, что условие $\gamma_0^2 = 1 + \gamma_1^2$ выполнено, равенство $A_{13}^2 = A_{11}(A_{22} - A_{11})$ не противоречит условиям (2.5) на компоненты тензора инерции и накладывает ограничение $A_{22} > A_{11}$. Случай $A_{22} = A_{11}$ приводит к вырождению полурегулярной прецессии в регулярную с равными скоростями прецессии и собственного вращения (первый класс прецессионно-изоконических движений).

Если выполнено условие $B_{22}(A_{11} - A_{22}) + B_{13}A_{13} \neq 0$, то из последнего равенства системы (4.35) следует, что скорость собственного вращения принимает фиксированное значение. В противном случае необходимо требовать равенства $s_1\sqrt{A_{11}} + s_3\sqrt{A_{22} - A_{11}} = 0$. Тогда n принимает произвольное зна-

чение. Следовательно, решение уравнений (3.9), (3.11) с интегралом (3.12) в первом случае зависят от одной произвольной постоянной φ_0 , а во втором случае — от двух произвольных постоянных φ_0, n .

Условиями существования решения уравнений движения гиростата под действием силы тяжести ($B = 0, C = 0$) служат соотношения:

$$a_0 = 0, A_{12} = A_{23} = 0, A_{13}^2 = A_{11}(A_{22} - A_{11}), s_2 = 0, n = \frac{k}{\sqrt{A_{11}A_{22}}},$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{A_{22} - A_{11}}{A_{11}}}, \quad s_1\sqrt{A_{11}} + s_3\sqrt{A_{22} - A_{11}} = 0, \\ \lambda_0 &= \frac{k(A_{22} - A_{11} - A_{33})}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} - \frac{s_3A_{22}}{k}, \quad \lambda_1 = \frac{s_1\sqrt{A_{11}A_{22}}}{k}. \end{aligned}$$

4.2.2 Прецессионно-изоконические движения общего вида

Рассмотрим [62] класс прецессионно-изоконических движений общего вида со скоростями собственного вращения и прецессии в виде

$$\dot{\varphi} = \eta_0 + \eta_1 \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin \varphi} \quad (4.36)$$

где $\eta_0, \eta_1, \gamma_0, \gamma_1$ - некоторые константы.

Пусть величина гиросtatического момента во все время движения задана законом (4.31).

Положим

$$\alpha_2 = 0, A_{12} = A_{23} = 0, B_{12} = B_{23} = 0, C_{12} = C_{23} = 0, s_2 = 0.$$

Уравнения (3.9), (3.11), (3.12) примут вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_3\lambda_1(\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0)^2 - a'_0\alpha_1(\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_0)(\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0) + \eta_1 A_{33}(\gamma_1 \sin \varphi + \\ &+ \gamma_0)^2 + \varepsilon_0(A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33}) + (2A_2 \sin \varphi - a_0 A'_1)(\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) - \\ &- (2B_2 \sin \varphi - a_0 B'_1)(\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0) - \mu(\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0)^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0)^2 (-a'_0 \alpha_1 \lambda_1 \sin^2 \varphi + a'_0 \alpha_1 \lambda_1 - \eta_1 A'_1 \sin^2 \varphi + \eta_1 A'_1 - A'_1 (\eta_1 \sin \varphi + \\
& + \eta_0) \sin \varphi - 2B_2 \sin^2 \varphi + a_0 B'_1 \sin \varphi + a_0'^2 B_{22} + g_1 \sin \varphi + g_0 + (\gamma_1 \sin \varphi + \\
& + \gamma_0) [(a'_0 \lambda_1 \sin \varphi + a'_0 \lambda_0) (a'_0 \alpha_3 - a_0 \alpha_1 \sin \varphi) - (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) (2A_{00} + \\
& + 2a_0 A'_1 \sin \varphi - 4A_2 \sin^2 \varphi) - 2a_0 B_2 \sin^2 \varphi + \varkappa_0 B'_1 \sin \varphi + a_0 (E_0 + B_2)] + \\
& + \varepsilon_0 (1 - \sin^2 \varphi) (-2A_2 \sin \varphi + a_0 A'_1) - (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) (-2a_0 A_2 \sin^2 \varphi + \\
& + \varkappa_0 A'_1 \sin \varphi + a_0 (D_0 + A_2)) = 0,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 a'_0 \sin \varphi + a_0 \alpha_3) (\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_0) + (A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33}) (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \\
& + (h_1 \sin \varphi + h_0) (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) - \frac{1}{2} (-2B_2 \sin^2 \varphi + 2a_0 B'_1 \sin \varphi + \\
& + B_0 + B_2) = k.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

В уравнениях (4.37)–(4.39) использованы обозначения (3.13) и $\varepsilon_0 = \gamma_0 \eta_1 - \eta_0 \gamma_1$, $A_{00} = \frac{a_0'^2}{2} (A_{22} - A_{11} - A_{33})$, μ , h_1 , h_0 , g_1 , g_0 — параметры.

Группируя в уравнениях (4.37)–(4.39) слагаемые по степеням $\sin \varphi$, потребуем, чтобы полученные многочлены обращались в нуль при любых значениях φ . Это требование приводит к следующей системе равенств:

$$\begin{aligned}
& 2C_2 \sin \varphi + \varkappa'_1 = \mu (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0), \\
& (h_1 \sin \varphi + h_0) (\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_0) = -2A_2 \sin^2 \varphi + 2a_0 A'_1 \sin \varphi + A_0 + A_2, \\
& (g_1 \sin \varphi + g_0) (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) = -2a_0 C_2 \sin^2 \varphi + \delta'_1 \sin \varphi + \delta_0 + a_0 C_2, \\
& -2A_2 \gamma_0 + \gamma_1 A'_1 (\gamma_0 - a_0) - \gamma_1^2 a_0 A_{33} = 0, \\
& \gamma_1^2 (a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) - 2\gamma_0^2 A_2 = 2\gamma_1 \gamma_0 a_0 A'_1, \\
& \gamma_1 (\alpha_3 \lambda_1 + \eta_1 A_{33} - \mu) - a'_0 \alpha_1 \lambda_1 - h_1 \eta_1 - 2B_2 = 0, \\
& \gamma_0^2 (\alpha_3 \lambda_1 + \eta_1 A_{33} - \mu) - a'_0 \alpha_1 \lambda_0 \gamma_0 + \varepsilon_0 a_0 A_{33} - a_0 \eta_0 A'_1 + a_0 \gamma_0 B'_1 = 0, \\
& \alpha_1 a'_0 \lambda_1 + \eta_1 A'_1 + h_1 \eta_1 + B_2 = 0, \\
& \alpha_1 a'_0 \lambda_0 + a_0 \alpha_3 \lambda_1 + \eta_0 A'_1 + \eta_1 a_0 A_{33} + h_1 \eta_0 + h_0 \eta_1 - a_0 B'_1 = 0, \\
& a_0 \alpha_3 \lambda_0 + \eta_0 a_0 A_{33} + h_0 \eta_0 - \frac{1}{2} (a_0'^2 B_{22} + a_0^2 B_{33}) - k = 0, \\
& \eta_1 s_3 + a_0 \eta_1 (C_{22} - C_{33}) + \eta_0 a'_0 C_{13} = 0, \\
& -h_1 (a_0 \eta_1 + 2\eta_1 \gamma_0 + 2\gamma_1 \eta_0 + \varepsilon_0) - 4\gamma_0 \eta_1 A'_1 - \gamma_1 \eta_0 A'_1 - 2a_0 \eta_1 A'_1 -
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
& -2B_2(a_0 + 2\gamma_0) + a_0\gamma_1 B'_1 - 4a'_0\alpha_1\lambda_1\gamma_0 - a_0a'_0\alpha_1\lambda_1 + \gamma_1g_1 - a'_0\alpha_1\lambda_0\gamma_1 = 0, \\
& \gamma_1^2(a'_0\alpha_1\lambda_1 + \eta_1A'_1 + g_0 + a_0'^2B_{22}) - 2\gamma_0^2(a'_0\alpha_1\lambda_1 + B_2 + \eta_1A'_1) + 2\gamma_1\gamma_0(g_1 + \\
& + a_0B'_1 - a'_0\alpha_1\lambda_0 - \eta_0A'_1) + \gamma_1(a_0'^2\alpha_3\lambda_1 - 2a_0\eta_0A'_1 - 2\eta_1A_{00} + \varkappa_0B'_1 - \\
& - a_0a'_0\alpha_1\lambda_0) - \gamma_0(2a_0B_2 + 2a_0\eta_1A'_1 - 4\eta_0A_2 + a_0a'_0\alpha_1\lambda_1) - \varepsilon_0a_0A'_1 - \\
& - \varkappa_0\eta_1A'_1 + 2a_0\eta_0A_2 = 0, \\
& \gamma_0^2(a_0B'_1 + g_1 - \eta_0A'_1 - a'_0\alpha_1\lambda_0) + 2\gamma_1\gamma_0(a'_0\alpha_1\lambda_1 + g_0 + \eta_1A'_1 + a_0'^2B_{22}) + \\
& + \gamma_0(a_0'^2\alpha_3\lambda_1 - a_0a'_0\alpha_1\lambda_0 + \varkappa_0B'_1 - 2\eta_1A_{00} - 2a_0\eta_0A'_1) + \gamma_1(a_0'^2\alpha_3\lambda_0 + \\
& + a_0a_0'^2(B_{22} - B_{33}) - 2\eta_0A_{00}) - 2\varepsilon_0A_2 - a_0\eta_1a_0'^2(A_{22} - A_{33}) - \varkappa_0\eta_0A'_1 = 0, \\
& \gamma_0^2(a'_0\alpha_1\lambda_1 + \eta_1A'_1 + g_0 + a_0'^2B_{22}) + \gamma_0(a_0'^2\alpha_3\lambda_0 - 2\eta_0A_{00} + a_0a_0'^2(B_{22} - B_{33})) + \\
& + a_0\varepsilon_0A'_1 - \eta_0a_0a_0'^2(A_{22} - A_{33}) = 0.
\end{aligned}$$

Приведем случай разрешимости системы (4.40).

Положим

$$\begin{aligned}
A_{11} = A_{22} = 4\rho, \quad A_{33} = 5\rho, \quad A_{13} = 2\rho, \quad B_{11} = \xi, \quad B_{22} = 3\xi, \\
B_{33} = 4\xi, \quad C_{11} = 3\tau, \quad C_{22} = 2\tau, \quad C_{33} = \tau, \quad C_{13} = 5\tau,
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2\sqrt{17}}{17}, \quad a'_0 = \frac{\sqrt{221}}{17}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{221}}{34}, \quad \gamma_0 = \frac{9\sqrt{17}}{34}, \quad \alpha_1 = \frac{2\sqrt{85}}{85}, \\
\alpha_3 &= \frac{9\sqrt{85}}{85}, \quad \eta_1 = \frac{2\sqrt{221}\tau}{221\xi}, \quad \eta_0 = \frac{64\tau(13\xi^2 - 4\tau\rho)\sqrt{17}}{221\xi(16\tau\rho + 585\sqrt{13}\xi^2)}, \\
\lambda_1 &= -\frac{(4\tau\rho + 13\xi^2)\sqrt{65}}{26\xi}, \quad B'_1 = \frac{-\xi(28\tau + 65\sqrt{221}\xi\eta_0)\sqrt{221}}{136\xi}, \\
s_1 &= -\frac{\sqrt{17}(13\xi\eta_0\sqrt{17} - 20\tau)}{34}, \quad s_3 = -\frac{4\sqrt{17}\tau + 1105\xi\eta_0}{34}, \\
\lambda_0 &= \frac{(-16\tau\rho + 117\xi^2 - 26\sqrt{17}\rho\xi\eta_0 + 2\sqrt{221}\xi B'_1)\sqrt{5}}{26\xi}, \\
k &= \frac{-288\tau\rho + 1391\xi^2 + 208\xi\rho\eta_0\sqrt{17} + 36\xi B'_1\sqrt{221}}{442\xi}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Таким образом, при выполнении ограничений

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0$$

и условий (4.41) определены скорости собственного вращения и прецессии (4.36) гиростата, направление вектора и величина переменного гиростатического момента (4.31), положение центра масс гиростата.

4.3 Прецессионные движения, описываемые связью

$$\dot{\psi} = \rho_1 \dot{\varphi} + \rho_0$$

Рассмотрим [62] класс прецессионных движений, в котором скорость прецессии и скорость собственного вращения связаны соотношением

$$\dot{\varphi} = \eta_0 + \eta_1 \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \rho_1 \dot{\varphi} + \rho_0, \quad (4.42)$$

где η_0 , η_1 , ρ_0 , ρ_1 - некоторые константы, а $\lambda(t)$ описана законом (4.31).

При условиях

$$A_{23} = 0, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0$$

уравнения (3.12), (3.9), (3.11) соответственно примут вид:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 a'_0 \sin \varphi + a_0 \alpha_3)(\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_0) + (A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33})(\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \\ & + (A_2(1 - 2 \sin^2 \varphi) + 2A'_2 \sin \varphi \cos \varphi + 2a_0 A'_1 \sin \varphi + A_0)(\rho_1(\eta_1 \sin \varphi + \\ & + \eta_0) + \rho_0) - \frac{1}{2} B_2(1 - 2 \sin^2 \varphi) - a_0 B'_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} B_0 - k = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_3 \lambda_1 \cos \varphi (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) - a'_0 \alpha_1 \cos \varphi (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \rho_0) (\lambda_1 \sin \varphi + \\ & + \lambda_0) + A_{33} \eta_1 \cos \varphi (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + (A'_1 \sin \varphi + a_0 A_{33}) \rho_1 \eta_1 \cos \varphi \cdot \\ & \cdot (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + (A_2 \sin 2\varphi - A'_2 \cos 2\varphi - a_0 A'_1 \cos \varphi) (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi + \\ & + \eta_0) + \rho_0)^2 + (-B_2 \sin 2\varphi + a_0 B'_1 \cos \varphi) (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \rho_0) - \\ & - C_2 \sin 2\varphi - \kappa'_1 \cos \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$a'_0 \alpha_1 (1 - \sin^2 \varphi) \lambda_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + a'_0 ((a'_0 \alpha_3 - a_0 \alpha_1 \sin \varphi) (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_0) + \rho_0) - \alpha_1 \sin \varphi (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0)) (\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_0) + A'_1 (1 - \sin^2 \varphi) \cdot \\
& \cdot \eta_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + (A'_2 \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi + a_0 A'_1 \cos \varphi) \cos \varphi \rho_1 \eta_1 \cdot \\
& \cdot (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) - (2A_2 (1 - 2 \sin^2 \varphi) + 2A'_2 \sin 2\varphi + 2a_0 A'_1 \sin \varphi - \\
& - a_0'^2 A_{33}) (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \rho_0) (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) - (a_0 A_2 (1 - 2 \sin^2 \varphi) + \\
& + a_0 A'_2 \sin 2\varphi + \varkappa_0 A'_1 \sin \varphi + a_0 D_0) (\rho_1 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \rho_0)^2 - \\
& - A'_1 \sin \varphi (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0)^2 + (-2B_2 \sin^2 \varphi + a_0 B'_1 \sin \varphi - B_0^* + B_2) \cdot \\
& \cdot (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + (-2a_0 B_2 \sin^2 \varphi + \varkappa_0 B'_1 \sin \varphi + a_0 E_0 + a_0 B_2) (\rho_1 \cdot \\
& \cdot (\eta_1 \sin \varphi + \eta_0) + \rho_0) - 2a_0 C_2 \sin^2 \varphi + \delta'_1 \sin \varphi + \delta_0 + a_0 C_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Уравнения (4.43)–(4.45), в которых приняты обозначения (3.13), должны быть тождествами. Следовательно, из (4.43) находим ограничения $A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22}$ и далее получаем условия существования решений уравнений (4.43)–(4.45) в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 a'_0 \lambda_1 + A'_1 \eta_1 (1 + 2a_0 \rho_1) + B_2 = 0, \\
& \alpha_3 a_0 \lambda_1 + \alpha_1 a'_0 \lambda_0 + A'_1 \eta_0 (1 + 2a_0 \rho_1) + 2a_0 \rho_0 A'_1 + \eta_1 (a_0 A_{33} + A_0 \rho_1) - a_0 B'_1 = 0, \\
& \alpha_3 a_0 \lambda_0 + A_0 \pi + a_0 \eta_0 A_{33} - \frac{1}{2} (B_2 + B_0) - k = 0, \\
& \alpha_1 a'_0 \lambda_1 + A'_1 \eta_1 (a_0 \rho_1 - 1) + 2B_2 = 0, \\
& \alpha_3 \lambda_1 \eta_1 - \alpha_1 a'_0 \rho_1 \eta_1 \lambda_0 - \alpha_1 a'_0 \lambda_1 \pi + \rho_1 \eta_1 A'_1 (\eta_0 - 2a_0 \pi) + A_{33} \eta_1^2 (1 + a_0 \rho_1) - \\
& - 2B_2 \pi + a_0 \rho_1 \eta_1 B'_1 - 2C_2 = 0, \\
& \alpha_3 \lambda_1 \eta_0 - \alpha_1 a'_0 \lambda_0 \pi - a_0 A'_1 \pi^2 + a_0 B'_1 \pi + \eta_1 \eta_0 A_{33} (1 + a_0 \rho_1) - \varkappa'_1 = 0, \\
& 2\alpha_1 a'_0 \lambda_1 + A'_1 \eta_1 (2 + 3a_0 \rho_1) + \varkappa_0 \rho_1^2 \eta_1 A'_1 + 2B_2 + 2a_0 \rho_1 B_2 + a_0 a'_0 \alpha_1 \rho_1 \lambda_1 = 0, \\
& - a'_0 \alpha_1 \lambda_1 (a_0 \pi + 2\eta_0) + a_0'^2 \alpha_3 \rho_1 \eta_1 \lambda_1 - a'_0 \alpha_1 \eta_1 \lambda_0 (1 + a_0 \rho_1) - \eta_1 A'_1 (3\eta_0 + \\
& + 5a_0 \rho_1 \eta_0 + 2a_0 \rho_0 + 2\varkappa_0 \rho_1 \pi) + B'_1 \eta_1 (a_0 + \varkappa_0 \rho_1) - 2B_2 (\eta_0 + a_0 \pi) - \\
& - 2a_0 C_2 + (a_0'^2 A_{33} - a_0 \rho_1 D_0) \rho_1 \eta_1^2 = 0, \\
& \alpha_1 a'_0 \lambda_1 \eta_1 + a_0'^2 \alpha_3 \lambda_1 \pi + a_0'^2 \alpha_3 \rho_1 \eta_1 \lambda_0 - a'_0 \alpha_1 \lambda_0 (\eta_0 + a_0 \pi) + A'_1 (\eta_1^2 (1 + a_0 \rho_1) - \\
& - \varkappa_0 \pi^2 - 2a_0 \eta_0 \pi - \eta_0^2) + B_2 \eta_1 (1 + a_0 \rho_1) + B'_1 (a_0 \eta_0 + \varkappa_0 \pi) + 2\pi \eta_1 (a_0'^2 A_{33} - \\
& - a_0 \rho_1 D_0) - a_0'^2 A_{33} \rho_0 \eta_1 + \eta_1 (a_0 \rho_1 E_0 - B_0^*) + \delta'_1 = 0, \\
& a'_0 \alpha_1 \eta_0 \lambda_1 + a_0'^2 \alpha_3 \lambda_0 \pi + a_0 E_0 \pi + B_2 (\eta_0 + a_0 \pi) - \eta_0 B_0^* + A'_1 \eta_1 \eta_0 (1 + a_0 \rho_1) -
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$-a_0 D_0 \pi^2 + a_0'^2 \eta_0 \pi + A_{33} + a_0 C_2 + \delta_0 = 0,$$

где $\pi = \rho_1 \eta_0 + \rho_0$.

Приведем пример разрешимости системы (4.46):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad A_{11} = A_{22}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \\ B_{22} = B_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_2 = 0; \quad \rho_1 = a_0, \\ \left(A_{11} \eta_1 (a_0' \eta_1 A_{11} - B_{13}) \right) \rho_0^2 + \left(A_{11} \eta_1 (C_{13} - a_0 s_1) - B_{11} \eta_1 (a_0' \eta_1 A_{11} - \right. \\ \left. - B_{13} (1 + a_0^2)) - a_0' C_{13} B_{13} \right) \rho_0 + a_0 a_0' C_{13} (a_0 C_{13} - s_1) + \eta_1 (a_0 s_3 + \\ + a_0^2 (C_{22} - C_{33})) (a_0' \eta_1 A_{11} - B_{13} (1 + a_0^2)) = 0, \\ a_0' A_{11} \eta_1^2 - B_{13} (1 + a_0^2) \eta_1 + a_0' (C_{22} - C_{11}) = 0, \\ \eta_0 = \frac{a_0 C_{13} + a_0 \rho_0 B_{13} - s_1}{a_0' \eta_1 A_{11} - B_{13} (1 + a_0^2)}, \\ \lambda_1 = a_0' B_{13} - \eta_1 (a_0^2 A_{11} + (1 + a_0^2) A_{33}), \\ a_0 \lambda_0 = \frac{1}{2} (a_0^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + k - a_0^2 A_{11} (a_0 \eta_0 + \rho_0) - \\ - a_0 A_{33} (\eta_0 + a_0 (a_0 \eta_0 + \rho_0)), \\ k = A_{11} (a_0 \eta_0 + 2\rho_0) + \frac{a_0' C_{13}}{\eta_1} - \frac{1}{2} (B_{11} (a_0^2 + 3) - a_0^2 B_{33}). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Из (4.47) следует, что оси подвижной системы координат являются главными осями в теле, скорости прецессии и собственного вращения заданы в виде (4.42), являются элементарными функциями времени, параметры η_0 , η_1 , ρ_0 , зависят от конфигурации силовых полей и положения центра масс системы, параметр ρ_1 равен косинусу угла нутации.

Изменение гиросtatического момента происходит вдоль оси собственного вращения гиростата по линейному относительно синуса угла собственного вращения закону.

При угле нутации равном $\frac{\pi}{2}$ прецессия общего вида вырождается в полурегулярную прецессию первого типа ($\dot{\psi} = const$).

4.4 Вывод

В данном разделе с помощью подхода, основанного на использовании базиса векторов \mathbf{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}$, получены решения уравнений класса Кирхгофа-Пуассона движения гиростата с переменным гиростатическим моментом, изменение которого происходит вдоль некоторой неподвижной в теле-носителе оси. При дополнительном условии прецессионности с помощью интеграла момента количества движения удалось исключить неизвестную функцию $\lambda(t)$ и провести редукцию дифференциальных уравнений. На заданных программных движениях приведены примеры разрешимости редуцированных уравнений.

Для полурегулярных прецессионных движений первого типа и маятниковых движений как частного случая прецессий при $\dot{\psi} = 0$ особенностью решений являются вид функции гиростатического момента и скорости собственного вращения, которая представлена отношением тригонометрических многочленов разных порядков.

Во всех описанных в разделе 4 классах движений угол собственного вращения путем решения соответствующих дифференциальных уравнений находится в виде элементарных функций времени.

Раздел 5

Прецессионные движения гиростата с гиростатическим моментом вида

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}$$

В данном разделе рассмотрены условия существования некоторых классов прецессионных движений гиростата в случае, когда вектор гиростатического момента является переменной величиной и состоит из двух компонент, изменение которых происходит вдоль ортогональных постоянных в теле направлений, характеризующихся векторами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Наличие ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ позволяет использовать здесь для исследований базис $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ и подходы, описанные в разделе 3. Ниже будут приведены решения уравнений движений гиростата, соответствующие маятниковым, регулярным, полурегулярным и прецессионно-изоконическим движениям как под действием силы тяжести, так и в силовых полях сложной структуры, представлен анализ этих решений.

5.1 Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

В [12] маятниковые движения гиростата рассматривались при условии, что гиростатический момент ортогонален оси вращения гиростата. Здесь с помощью метода инвариантных соотношений [50] исследованы маятниковые движения не только в случае [12], но и в случае, когда ось вращения одного ротора сонаправлена с осью вращения тела-носителя, а ось второго ротора ортогональна оси вращения гиростата.

Рассмотрим уравнения (3.1), (3.2) движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и интегралы (3.3), в которых гиростатический момент записан в виде $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}$. (см. (2.29))

Известно, что вектор, характеризующий положение оси маятниковых дви-

жений, является неподвижным как в пространстве, так и в теле. В качестве такого вектора возьмем вектор \mathbf{a} . Векторы \mathbf{a} , $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a}. \quad (5.1)$$

Для исследования уравнений (3.1), (3.2) будем использовать базис $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$. Уравнения (3.23) с учетом (5.1) и обозначений (3.17)–(3.22) запишем так [28]

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= \gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_2(t) - d_{0,1} \ddot{\varphi} - A_{0,1} \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi} (h'_{1,1} \sin \varphi + h_{1,1} \cos \varphi + a_0 h_{0,1}) - \\ &\quad - C'_{2,1} \sin 2\varphi - C_{2,1} \cos 2\varphi - \delta'_{1,1} \sin \varphi - \delta_{1,1} \cos \varphi - \delta_{0,1}, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_1(t) - d_{0,2} \ddot{\varphi} - A_{0,2} \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi} (h'_{1,2} \sin \varphi + h_{1,2} \cos \varphi + a_0 h_{0,2}) - \\ &\quad - C'_{2,2} \sin 2\varphi - C_{2,2} \cos 2\varphi - \delta'_{1,2} \sin \varphi - \delta_{1,2} \cos \varphi - \delta_{0,2}, \\ \dot{\varphi} (\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)) &= -d_{0,3} \ddot{\varphi} - A_{0,3} \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi} (h'_{1,3} \sin \varphi + h_{1,3} \cos \varphi + \\ &\quad + a_0 h_{0,3}) - C'_{2,3} \sin 2\varphi - C_{2,3} \cos 2\varphi - \delta'_{1,3} \sin \varphi - \delta_{1,3} \cos \varphi - \delta_{0,3}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В статье [12] рассмотрен случай маятниковых движений, в котором угол собственного вращения задан уравнением $\dot{\varphi} = \sqrt{p_0 + p_1 \cos \varphi}$ ($p_0 > p_1 > 0$), то есть $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2 \operatorname{am} \varkappa_0 t, \quad \dot{\varphi}(t) = 2 \varkappa_0 \operatorname{dn} \varkappa_0 t, \quad \sin \varphi(t) = 2 \operatorname{sn} \varkappa_0 t \operatorname{cn} \varkappa_0 t, \\ \cos \varphi(t) &= \operatorname{sn}^2 \varkappa_0 t - \operatorname{cn}^2 \varkappa_0 t, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{2} \sqrt{p_0 + p_1}, \quad k_*^2 = \frac{2p_1}{p_0 + p_1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Решение [12] уравнений (5.2) имеет место при выполнении условий

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= 0, \quad C_{13} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad s_1 = 0, \\ B_{12} &= 0, \quad B_{11} = 0, \quad B_{22} = 0, \quad a_0 B_{13} = 0, \quad a_0 B_{23} = 0, \\ a_0 s_2 + (a_0'^2 - a_0^2) C_{23} &= 0, \quad s_3 = a_0 (C_{33} - C_{11}), \quad p_1 = \frac{2a_0'}{A_{33}} (s_2 - a_0 C_{23}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Компоненты гиросtatического момента $\boldsymbol{\lambda}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= 2\rho(t)\operatorname{sn}\varkappa_0t \operatorname{cn}\varkappa_0t, & \lambda_2(t) &= \rho(t)(\operatorname{sn}^2\varkappa_0t - \operatorname{cn}^2\varkappa_0t), \\ \rho(t) &= \frac{2a_0'^2 C_{23}}{\varkappa_0 k_*^2} \operatorname{dn}\varkappa_0t + c,\end{aligned}\quad (5.6)$$

где c – произвольная постоянная.

Из (5.4)–(5.6) вытекают следующие свойства: ось маятникового движения является главной осью в теле–носителе; для задачи о движении гиростата под действием силы тяжести ($B_{ij} = 0, C_{ij} = 0, i, j = \overline{1, 3}$), ось вращения горизонтальна ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$); гиросtatический момент принадлежит плоскости, ортогональной оси вращения; для задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил маятниковое движение может происходить не вокруг горизонтальной оси только при $B_{13} = 0, B_{23} = 0$; модуль гиросtatического момента при $C_{23} \neq 0$ изменяется с течением времени, параметр p_1 принимает фиксированное значение; параметр p_0 может принимать произвольные значения, большие p_1 .

5.1.1 Первое решение

Пусть гиросtatический момент принадлежит плоскости, ортогональной оси вращения, т. е. векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ имеют вид (5.4). Тогда из последнего равенства системы (5.2) получим

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{A_{33}}(-C_{2,3} \sin 2\varphi + C'_{2,3} \cos 2\varphi + 2\delta'_{1,3} \cos \varphi - 2\delta_{1,3} \sin \varphi + c_0)}, \quad (5.7)$$

где c_0 – произвольная постоянная и в силу (3.21), (3.22), (5.4) обозначено

$$\begin{aligned}C'_{2,3} &= \frac{1}{2}a_0'^2(C_{11} - C_{22}), & C_{2,3} &= a_0'^2 C_{12}, \\ \delta'_{1,3} &= a_0'(s_2 - a_0 C_{23}), & \delta_{1,3} &= a_0'(a_0 C_{13} - s_1).\end{aligned}$$

Введем вместо $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ переменные u, v :

$$\lambda_1(t) = u \sin v, \quad \lambda_2(t) = u \cos v. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.2) после подстановки соотношений (5.8) примут вид

$$\dot{u} \sin v + u(v - \varphi)' \cos v = F_1, \quad \dot{u} \cos v - u(v - \varphi)' \sin v = F_2, \quad (5.9)$$

где F_1 и F_2 заданы равенствами (3.18) и (3.20) с учетом (5.4). Рассмотрим следующую комбинацию уравнений (5.9)

$$F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi = [u \sin(v - \varphi)]'. \quad (5.10)$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi = 0. \quad (5.11)$$

В силу (5.11), уравнение (5.10) допускает первый интеграл

$$u \sin(v - \varphi) = c^{(0)}, \quad (5.12)$$

где $c^{(0)}$ – произвольная постоянная.

Так как после подстановки F_1 и F_2 в уравнение (5.11) получим равенство

$$P_0(\varphi) + P_1(\varphi)\dot{\varphi} + P_2(\varphi)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (5.13)$$

то для того, чтобы исключить вырождение функции $\varphi(t)$ из (5.7), положим в (5.13) $P_1(\varphi) \equiv 0$. Отсюда получим условия

$$B_{12} = 0, \quad B_{11} = B_{22} = 0, \quad a_0 B_{13} = 0, \quad a_0 B_{23} = 0. \quad (5.14)$$

Внесем в уравнение (5.13) выражение (5.7). Учитывая (5.14), потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной φ . Тогда найдем условия

$$A_{13}(C_{22} - C_{11}) + 2A_{23}C_{12} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& A_{23}(C_{22} - C_{11}) - 2A_{13}C_{12} = 0, \\
& A_{13}(s_1 - a_0C_{13}) + A_{23}(s_2 - a_0C_{23}) - \\
& \quad - A_{33}[2s_3 - a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22})] = 0, \\
& 3A_{13}(s_2 - a_0C_{23}) + 3A_{23}(s_1 - a_0C_{13}) - 2a_0A_{33}C_{12} = 0, \\
& 3A_{13}(s_1 - a_0C_{13}) - 3A_{23}(s_2 - a_0C_{23}) - a_0A_{33}(C_{11} - C_{22}) = 0, \\
& A_{13}c_0 + A_{33}[a_0s_1 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{13}] = 0, \\
& A_{23}c_0 + A_{33}[a_0s_2 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{23}] = 0.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Из равенств (5.15) при условии $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$ вытекает

$$C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad s_1 = a_0C_{13}, \quad s_2 = a_0C_{23}$$

и тогда из (5.7) следует $\dot{\varphi} = \text{const}$, что исключено в силу постановки задачи. Следовательно, в равенствах (5.15) необходимо считать, что $A_{23} = A_{13} = 0$.

Из равенств (5.15) имеем

$$\begin{aligned}
& A_{13} = A_{23} = 0, \quad a_0C_{12} = 0, \quad a_0(C_{22} - C_{11}) = 0, \\
& a_0s_1 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{13} = 0, \quad a_0s_2 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{23} = 0, \\
& 2s_3 = a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22}).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Из уравнений (5.9), в силу интеграла (5.12), получим

$$\begin{aligned}
& u = \frac{c^{(0)}}{\sin(v - \varphi)}, \\
& v = \varphi(t) - \text{arcctg} \left[\frac{a_0'^2}{c^{(0)}} \int_{t_0}^t (C_{23} \sin \varphi(\tau) - C_{13} \cos \varphi(\tau)) d\tau + C' \right],
\end{aligned} \tag{5.17}$$

где C' – произвольная постоянная.

В формулах (5.17) $\varphi(t)$ является эллиптической функцией, которая находится из (5.7) путем обращения интеграла

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\sigma}{\sqrt{-C_{2,3} \sin 2\sigma + C'_{2,3} \cos 2\sigma + 2\delta'_{1,3} \cos \sigma - 2\delta_{1,3} \sin \sigma + c_0}} = \frac{1}{\sqrt{A_{33}}}(t - t_0). \quad (5.18)$$

Компоненты гиросtatического момента можно определить из равенств (5.8), а компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ – из формул (5.1). Построенное решение существует при выполнении равенств (5.14), (5.16).

Решение (5.17) не может служить обобщением решения (5.3), которое имеет место при выполнении условий (5.5). Докажем это свойство, полагая в (5.17) $C_{13} = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2am\kappa_0 t, & u(t) &= \frac{c^{(0)}}{\sin(v - 2am\kappa_0 t)}, \\ v(t) &= 2am\kappa_0 t + \operatorname{arctg} \left(\frac{2a_0'^2 C_{23}}{c^{(0)} \kappa_0 k_*^2} \operatorname{dn} \kappa_0 t + C' \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Уравнения (5.2) при выполнении условий (5.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \dot{\varphi} \lambda_2(t) &= -a_0'^2 C_{23} \sin^2 \varphi, \\ \dot{\lambda}_2(t) + \dot{\varphi} \lambda_1(t) &= -a_0'^2 C_{23} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Перейдем в уравнениях (5.20) к переменным u, v (см. формулы (5.8)):

$$\begin{aligned} \dot{u} \sin v + u(v - \varphi)' \cos v &= -a_0'^2 C_{23} \sin^2 \varphi, \\ \dot{v} \cos v - u(v - \varphi)' \sin v &= -a_0'^2 C_{23} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Рассмотрим две линейные комбинации уравнений (5.21). Первая комбинация является результатом исключения переменной φ в правых частях (5.21):

$$[u \sin(v - \varphi)]' = 0. \quad (5.22)$$

Вторая комбинация получается при умножении первого уравнения из (5.21)

на $\cos v$, а второго уравнения – на $-\sin v$ и сложении правых и левых частей полученных из (5.21) уравнений

$$u(v - \varphi) \cdot = -a_0'^2 C_{23} \sin(v - \varphi) \sin \varphi. \quad (5.23)$$

Так как уравнения (5.22), (5.23) должны быть независимыми, то необходимо считать $v \neq \varphi$ (замена (5.8), в которой $v = \varphi$, является особой). Поэтому решение [12] не является частным случаем решения (5.19), имеющим место при $v \neq \varphi$.

Проведем анализ условий (5.14), (5.16). Из условий $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$ следует, что ось маятникового вращения является главной осью эллипсоида инерции. Если предположим $a_0 \neq 0$, то из (5.14), (5.16) получим

$$\begin{aligned} B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \\ s_1 = \frac{a_0^2 - a_0'^2}{a_0} C_{13}, \quad s_2 = \frac{a_0^2 - a_0'^2}{a_0} C_{23}, \quad s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

При выполнении (5.24) тригонометрический многочлен, входящий в формулу (5.18), будет иметь первый порядок. Очевидно, равенства (5.24) имеют более общий характер, чем равенства (5.5).

Если в равенствах (5.14), (5.16) положить $a_0 = 0$, то должны выполняться равенства $C_{23} = 0$, $C_{13} = 0$, $s_3 = 0$. Уравнения (5.2) упрощаются:

$$u(v - \varphi) \cdot = 0, \quad u \sin \varphi (v - \varphi) = c^{(0)}. \quad (5.25)$$

Полагаем $v = \varphi + v_0$ ($v_0 = \text{const}$). Тогда из (5.25) получим $u = \frac{c^{(0)}}{\sin v_0}$ ($v_0 \neq 0$). Компоненты гиросtatического момента определим из равенств (5.8):

$$\lambda_1(t) = \frac{c^{(0)}}{\sin v_0} \sin(\varphi + v_0), \quad \lambda_2(t) = \frac{c^{(0)}}{\sin v_0} \cos(\varphi + v_0). \quad (5.26)$$

В формулах (5.26) $\varphi(t)$ является функцией времени, которую можно получить в результате обращения интеграла (5.18). При этом тригонометрический многочлен в формуле (5.18) имеет второй порядок. Решение (5.26) не может

быть частным случаем решения (5.6), так как в решении (5.6) указанный выше многочлен имеет первый порядок относительно функций $\cos \varphi$, $\sin \varphi$.

5.1.2 Второе решение

В решениях (5.3), (5.6) и (5.17) гиростатический момент лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{a} . Представляет интерес исследование маятниковых движений в случае, когда вектор гиростатического момента находится в плоскости, содержащей вектор \mathbf{a} . Положим в обозначениях (3.17)–(3.22)

$$\begin{aligned} B_{ij} &= 0, & C_{ij} &= 0, & (i, j &= \overline{1, 3}), \\ \boldsymbol{\alpha} &= (0, \alpha_2, \alpha_3), & \boldsymbol{\beta} &= (0, \beta_2, \beta_3), & \boldsymbol{\gamma} &= (1, 0, 0). \end{aligned} \quad (5.27)$$

В силу (5.27) уравнения (5.2) упрощаются:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -d_{0,1}\ddot{\varphi} - A_{0,1}\dot{\varphi}^2 - \delta'_{1,1} \sin \varphi - \delta_{1,1} \cos \varphi - \delta_{0,1}, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -d_{0,2}\ddot{\varphi} - A_{0,2}\dot{\varphi}^2 - \delta'_{1,2} \sin \varphi - \delta_{1,2} \cos \varphi - \delta_{0,2}, \\ \dot{\varphi}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) &= -d_{0,3}\ddot{\varphi} - A_{0,3}\dot{\varphi}^2 - \delta'_{1,3} \sin \varphi - \delta_{1,3} \cos \varphi - \delta_{0,3}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Решение уравнений (5.28) будем искать в классе функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих уравнению $\dot{\varphi} = \sqrt{p_0 + p_1 \cos \varphi}$. Применяя общий метод решения ИС для неавтономных дифференциальных уравнений [50], найдем следующие условия:

$$a_0 = 0, \quad s_3 = 0, \quad A_{13} = 0. \quad (5.29)$$

Проверкой данного результата может служить запись уравнений (5.28) с учетом (3.17)–(3.22), (5.29):

$$\begin{aligned} \lambda'_1(\varphi) &= \frac{\frac{1}{2}p_1(\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}) \sin \varphi - \alpha_3 s_2 \sin \varphi + \alpha_3 s_1 \cos \varphi}{\sqrt{p_0 + p_1 \cos \varphi}}, \\ \lambda'_2(\varphi) &= \frac{\frac{1}{2}p_1(\beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}) \sin \varphi - \beta_3 s_2 \sin \varphi + \beta_3 s_1 \cos \varphi}{\sqrt{p_0 + p_1 \cos \varphi}}, \\ \beta_3 \lambda_1(\varphi) - \alpha_3 \lambda_2(\varphi) + A_{23} \sqrt{p_0 + p_1 \cos \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

В уравнениях (5.30) штрихом обозначена производная по переменной φ . Производная от третьего соотношения из (5.30), в силу первых двух уравнений равна нулю. Таким образом, в случае (5.27), (5.29) уравнения (5.30) допускают инвариантное соотношение и поэтому имеют решение:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2 \operatorname{am} \varkappa_0 t, \\ \lambda_1(t) &= \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{2} (\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}) p_1 - \alpha_3 s_1 \right] \sin \varphi(\tau) + \alpha_3 s_1 \cos \varphi(\tau) d\tau, \\ \lambda_2(t) &= \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{2} (\beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}) p_1 - \beta_3 s_2 \right] \sin \varphi(\tau) + \beta_3 s_2 \cos \varphi(\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{5.31}$$

где $\sin \varphi(t)$, $\cos \varphi(t)$ описаны в (5.3).

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (5.1) имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2\varkappa_0 \operatorname{dn} \varkappa_0 t) \quad \boldsymbol{\nu} = (\sin \varphi(t), \cos \varphi(t), 0).\tag{5.32}$$

Отметим основные свойства решения (5.31), (5.32): ось маятникового вращения горизонтальна; она может быть неглавной осью эллипсоида инерции; параметры p_0 и p_1 могут принимать произвольные значения; центр масс гири лежит в плоскости, ортогональной \boldsymbol{a} . Данные свойства отличаются от свойств решения (5.3), (5.6). Это связано с тем, что в рассматриваемых решениях расположения роторов в теле-носителе не совпадают.

5.2 Регулярные прецессионные движения тяжелого гири

В случае регулярной прецессии скорости собственного вращения и прецессии постоянны, т.е. $\dot{\varphi}(t) = n$, $\dot{\psi}(t) = m$, где n , m — некоторые константы (см. раздел 2). Тогда $\varphi = nt + \varphi_0$, $\psi = mt + \psi_0$ и выбором начальной фазы движения можно добиться $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$.

Запишем векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ в виде

$$\boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = (a'_0 m \sin nt, a'_0 m \cos nt, n + a_0 m). \quad (5.33)$$

После подстановки $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ из (5.33) в (3.23) получим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t) \left[\gamma_3 n + (a'_0 \gamma_1 \sin nt + a'_0 \gamma_2 \cos nt + a_0 \gamma_3) m \right] + F_1(t) &= 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t) \left[\gamma_3 n + (a'_0 \gamma_1 \sin nt + a'_0 \gamma_2 \cos nt + a_0 \gamma_3) m \right] + F_2(t) &= 0, \\ \lambda_2(t) \left[\alpha_3 n + (a'_0 \alpha_1 \sin nt + a'_0 \alpha_2 \cos nt + a_0 \alpha_3) m \right] - \\ - \lambda_1(t) \left[\beta_3 n + (a'_0 \beta_1 \sin nt + a'_0 \beta_2 \cos nt + a_0 \beta_3) m \right] + F_3(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

В уравнениях (5.34) использованы обозначения (3.17)–(3.22).

5.2.1 Равномерные вращения

Метод исследования уравнений (3.1), (3.2), основанный на использовании векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$, в отличие от векторов \boldsymbol{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}$, допускает коллинеарность направляющих векторов оси прецессии и оси собственного вращения.

Пусть вектор \boldsymbol{a} , фиксированный в теле, совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}$, фиксированным в пространстве [66]. В таком случае $a_0 = 1$, $a'_0 = 0$ и угловая скорость из (5.33) принимает вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{a}, \quad (5.35)$$

где $\omega_0 = n + m$ — параметр. Имеем случай вырождения регулярной прецессии в равномерное вращение относительно вертикали. Учитывая (3.17)–(3.22), (5.35), запишем систему (5.34) и интеграл моментов из (3.3).

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \gamma_3 \lambda_2(t) \omega_0 + (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}) \omega_0^2 + \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2 &= 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) + \gamma_3 \lambda_1(t) \omega_0 + (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}) \omega_0^2 + \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2 &= 0, \\ \omega_0 (-\beta_3 \lambda_1(t) + \alpha_3 \lambda_2(t)) + (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}) \omega_0^2 + \gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2 &= 0, \\ \alpha_3 \lambda_1(t) + \beta_3 \lambda_2(t) + \omega_0 A_{33} &= k. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Последние два уравнения из (5.36) служат для нахождения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Чтобы гиростатический момент оставался переменным потребуем выполнения условия $\omega_0(\alpha_3^2 + \beta_3^2) = 0$. Полагаем $\omega_0 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$. Тогда $\gamma = (0, 0, 1)$ и система (5.36) примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t)\omega_0 + (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})\omega_0^2 + \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2 &= 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t)\omega_0 + (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})\omega_0^2 + \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2 &= 0, \quad k = \omega_0 A_{33},\end{aligned}$$

откуда находим функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{T_2}{\omega_0}, \\ \lambda_2(t) &= -c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{T_1}{\omega_0},\end{aligned}\tag{5.37}$$

где

$$\begin{aligned}T_1 &= (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})\omega_0^2 + \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2, \\ T_2 &= (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})\omega_0^2 + \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2.\end{aligned}$$

При $\omega_0 = 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ из системы (5.36) следует ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= -(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2)t + k_1, \\ \lambda_2(t) &= -(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2)t + k_2.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Таким образом, в случае, когда вектор гиростатического момента лежит в плоскости, ортогональной оси собственного вращения, движение гиростата можно рассматривать как вращение вокруг вертикали с постоянной скоростью, при этом маховики, закон движения которых описывается зависимостями (5.37), выполняют роль стабилизаторов.

При $\omega_0 = 0$ тело-носитель неподвижно в пространстве, функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, характеризующие вращение носимых гироскопов, являются линейными функциями времени. Из вида зависимостей (5.38) следует, что существуют такие положения роторов, что центр масс может не совпадать с неподвижной точкой, при этом тело-носитель будет находиться в покое, а стабилизация

будет осуществлена с помощью двух равномерно вращающихся несомых тел.

5.2.2 Регулярные прецессии с компонентами гиросtatического момента специального вида

Рассмотрим случай, когда оси собственного вращения и прецессии не совпадают [66]. Пусть во все время движения гиростата выполнены зависимости:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= f_1 \cos \varphi + f'_1 \sin \varphi + f_0, \\ \lambda_2(t) &= g_1 \cos \varphi + g'_1 \sin \varphi + g_0,\end{aligned}\tag{5.39}$$

где $f_1, f'_1, f_0, g_1, g'_1, g_0$ — некоторые константы.

После учета обозначений (3.17)–(3.22) и подстановки соотношений (5.39) в систему (5.34), каждое из уравнений (5.34) представляет собой тригонометрический многочлен второго порядка. Требование тождественного равенства этих многочленов нулю приводит к следующей алгебраической системе на параметры задачи:

$$\begin{aligned}a'_0(\gamma_2 g_1 - \gamma_1 g'_1) + 2mA_{2,1} &= 0, \quad a'_0(\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g'_1) + 2mA'_{2,1} = 0, \\ a'_0(\alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1) - (a_0 m + n)(\gamma_3 g_1 + mA_{1,1}) - a'_0 m \gamma_2 g_0 + \\ &+ n f'_1 + m n d'_{1,1} = 0, \\ a'_0(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2) + (a_0 m + n)(\gamma_3 g'_1 + mA'_{1,1}) + a'_0 m \gamma_1 g_0 + \\ &+ n f_1 + m n d_{1,1} = 0, \\ a_0(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2) + A_{0,1} \left((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 m^2 \right) - (a_0 m + n) \gamma_3 g_0 - \\ &- \frac{a'_0 m}{2} (\gamma_2 g_1 + \gamma_1 g'_1) = 0, \\ a'_0(\gamma_2 f_1 - \gamma_1 f'_1) - 2mA_{2,2} &= 0, \quad a'_0(\gamma_2 f'_1 + \gamma_1 f_1) - 2mA'_{2,2} = 0, \\ a'_0(\beta_1 s_3 - \beta_3 s_1) + (a_0 m + n)(\gamma_3 f_1 - mA_{1,2}) + a'_0 m \gamma_2 f_0 + \\ &+ n g'_1 + m n d'_{1,2} = 0,\end{aligned}\tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
& a'_0(\beta_3 s_2 - \beta_2 s_3) + (a_0 m + n)(\gamma_3 f'_1 - m A'_{1,2}) + a'_0 m \gamma_1 f_0 - \\
& - n g_1 - m n d_{1,2} = 0, \\
& a_0(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2) + A_{0,2} \left((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 m^2 \right) + (a_0 m + n) \gamma_3 f_0 + \\
& + \frac{a'_0 m}{2} (\gamma_1 f'_1 + \gamma_2 f_1) = 0, \\
& a'_0(\beta_1 f'_1 - \beta_2 f_1 - \alpha_1 g'_1 + \alpha_2 g_1) - 2m A_{2,3} = 0, \\
& a'_0(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g'_1 - \beta_1 f_1 - \beta_2 f'_1) - 2m A'_{2,3} = 0, \\
& a'_0(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g_1 - \beta_3 f_1 - m A_{1,3}) + a'_0 m (\alpha_2 g_0 - \beta_2 f_0) + \\
& + m n d'_{1,3} = 0, \\
& a'_0(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g'_1 - \beta_3 f'_1 - m A'_{1,3}) + a'_0 m (\alpha_1 g_0 - \beta_1 f_0) - \\
& - m n d_{1,3} = 0, \\
& a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2) + A_{0,3} \left((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 m^2 \right) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g_0 - \beta_3 f_0) + \\
& + \frac{a'_0 m}{2} (\alpha_1 g'_1 + \alpha_2 g_1 - \beta_2 f_1 - \beta_1 f'_1) = 0.
\end{aligned}$$

Так как $a'_0 \neq 0$ и $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ (случай $\gamma = (0, 0, 1)$ рассмотрен в [32]), то из (5.40) находим

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{-2m(\gamma_1 A'_{2,1} + \gamma_2 A_{2,1})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, & g'_1 &= \frac{2m(\gamma_1 A_{2,1} - \gamma_2 A'_{2,1})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \\
f_1 &= \frac{2m(\gamma_1 A'_{2,2} + \gamma_2 A_{2,2})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, & f'_1 &= \frac{2m(\gamma_2 A'_{2,2} - \gamma_1 A_{2,2})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Из (3.40) следует, что α_2 , β_2 , γ_2 одновременно в нуль не обращаются, поэтому рассмотрим линейную комбинацию уравнений из (5.40). Складывая третье равенство из (5.40), умноженное на α_2 , восьмое — на β_2 и тринадцатое — на γ_2 получим

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) A_{12} + \gamma_1 \gamma_2 (A_{22} - A_{11}) + \gamma_3 (\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}) = 0. \tag{5.42}$$

Умножая четвертое уравнение из (5.40) на γ_1 , а третье — на γ_2 и вычитая,

получим

$$\begin{aligned}
& a'_0 m(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)g_0 + a'_0 [\beta_3 s_3 - \alpha_3(\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1)] + (a_0 m + n) [\gamma_3(\gamma_1 g'_1 + \\
& + \gamma_2 g_1) + m(\gamma_1 A'_{1,1} + \gamma_2 A_{1,1})] + n(\gamma_1 f_1 - \gamma_2 f'_1) + \\
& + mn(\gamma_1 d_{1,1} - \gamma_2 d'_{1,1}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Поступая аналогично с восьмым и девятым уравнениями из (5.40) найдем:

$$\begin{aligned}
& a'_0 m(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)f_0 + a'_0 [\alpha_3 s_3 - \beta_3(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2)] + (a_0 m + n) [\gamma_3(\gamma_2 f_1 + \\
& + \gamma_1 f'_1) - m(\gamma_2 A_{1,2} + \gamma_1 A'_{1,2})] + n(\gamma_2 g'_1 - \gamma_1 g_1) + \\
& + mn(\gamma_2 d'_{1,2} - \gamma_1 d_{1,2}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Учитывая, что $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, равенства (5.43), (5.44) являются уравнениями для нахождения g_0 и f_0 соответственно.

Таким образом, на основании формул (5.41) и равенств (5.43), (5.44) полностью определен вид зависимостей $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$.

Исключая g_0 и f_0 из (5.40), получим: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ и

$$\begin{aligned}
& - a'_0 \alpha_3 \gamma_3 s_3 + (a_0 m + n) [\gamma_3(\gamma_2 g'_1 - \gamma_1 g_1) + \\
& + m(\gamma_2 A'_{1,1} - \gamma_1 A_{1,1})] + n(\gamma_1 f'_1 + \gamma_2 f_1) + mn(\gamma_1 d'_{1,1} + \gamma_2 d_{1,1}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
& - a'_0 \beta_3 \gamma_3 s_3 + (a_0 m + n) [\gamma_3(\gamma_1 f_1 - \gamma_2 f'_1) - \\
& - m(\gamma_1 A_{1,2} - \gamma_2 A'_{1,2})] + n(\gamma_1 g'_1 + \gamma_2 g_1) + mn(\gamma_1 d'_{1,2} + \gamma_2 d_{1,2}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

При $\gamma_3 = 0$ из уравнений (5.45), (5.46) имеем

$$\alpha_3(a_0 m + n)(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23}) = 0, \quad \beta_3(a_0 m + n)(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23}) = 0. \tag{5.47}$$

Решением уравнений (5.47) является

$$n = -a_0 m \quad \text{или} \quad \gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} = 0. \tag{5.48}$$

Таким образом, если $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, 0)$, то решением системы (5.40) являются равенства $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, (5.41)–(5.44), (5.48). Следует отметить, что

$n = -a_0 t$ — единственный случай, когда возникает ограничение на скорости собственного вращения и прецессии.

При $\gamma_3 \neq 0$ уравнение (5.45) или (5.46) служат для определения s_3 в зависимости от выполнения неравенств $\alpha_3 \neq 0$ или $\beta_3 \neq 0$. В случае, если $\alpha_3 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ уравнения (5.45) и (5.46) эквивалентны в силу (5.42).

Значит, решение системы (5.40) состоит из следующих равенств: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, (5.41), (5.42), (5.43), (5.44) и, в зависимости от равенства α_3 или β_3 нулю, (5.45) или (5.46).

Из $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ следует, что центр масс гиростата лежит на оси собственного вращения. Далее будет показано, что это свойство сохраняется для регулярных прецессий тяжелого гиростата с компонентами гиростатического момента более сложной структуры при условии, что векторы $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и \mathbf{a} не коллинеарны.

5.2.3 Регулярные прецессии с произвольным переменным гиростатическим моментом

Согласно методу, описанному в разделе 3, функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ могут быть найдены в виде (3.39), а первое уравнение из (3.23) преобразовано к виду

$$\sum_{k=0}^6 (P_k \cos knt + Q_k \sin knt) = 0. \quad (5.49)$$

Поскольку равенство (5.49) должно выполняться для всех t , то приходим к алгебраической системе из 13 уравнений

$$P_0 = 0, \quad P_k = 0, \quad Q_k = 0, \quad k = \overline{1, 6} \quad (5.50)$$

Пусть угол нутации отличен от $\frac{\pi}{2}$, т. е. $a_0 \neq 0$. С учетом обозначений (3.17), (3.18) и соотношений (3.40) равенства $P_6 = 0$, $Q_6 = 0$ из системы (5.50) обратятся в тождества.

Запишем равенства $P_5 = 0$, $Q_5 = 0$.

$$\begin{aligned}\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) &= 0, \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) &= 0.\end{aligned}\quad (5.51)$$

На основании аналогичных преобразований из второго уравнения из (3.23) получим $\sum_{k=0}^6 (P'_k \cos knt + Q'_k \sin knt) = 0$ и приходим к системе

$$P'_0 = 0, \quad P'_k = 0, \quad Q'_k = 0, \quad k = \overline{1, 6}.\quad (5.52)$$

Равенства $P'_5 = 0, Q'_5 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) &= 0, \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) &= 0.\end{aligned}\quad (5.53)$$

Решая уравнения (5.51) (равно как и (5.53)) относительно переменных $\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2$ и $\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1$, запишем главный определитель системы (5.51) (совпадающий с определителем системы (5.53))

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) & \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) & -\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) \end{vmatrix} = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^3,$$

который равен нулю только при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Случай $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ рассмотрен в [32], здесь полагаем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$. Тогда из (5.51) и (5.53) следует

$$\begin{aligned}\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2 &= 0, & \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1 &= 0, \\ \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 &= 0, & \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1 &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая (3.40), получим решение систем уравнений (5.51) и (5.53)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0.\quad (5.54)$$

Таким образом, если плоскость, которой принадлежит вектор гиростати-

ческого момента, не ортогональна вектору \mathbf{a} , то для регулярной прецессии гиростата в поле силы тяжести центр масс принадлежит оси собственного вращения.

Из равенств $P_4 = 0$, $Q_4 = 0$ находим

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)A_{12} + \gamma_1\gamma_2(A_{22} - A_{11}) + \gamma_3(\gamma_1A_{23} - \gamma_2A_{13}) = 0, \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} & [\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)](a_0s_3 + mk) = m^2[\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) \cdot \\ & \cdot (\gamma_1A_{11} + \gamma_2A_{12} + \gamma_3A_{13}) + \beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\gamma_1A_{12} + \gamma_2A_{22} + \gamma_3A_{23})]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

При $\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \neq 0$ равенство (5.56) служит для нахождения параметра s_3 , а соотношение (5.55) устанавливает зависимость между компонентами тензора инерции и направлением вектора гиростатического момента.

Так как в общем случае нахождение решений системы (5.50) затруднительно, то дальнейшие исследования проведем при некоторых дополнительных условиях.

Решение 1. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0)$ и рассмотрим систему (5.49). Из (5.55) получим равенство $A_{12} = 0$, при выполнении которого уравнение (5.56) становится тождеством. Учитывая (5.54), система (5.50) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & A_{23}(n^2 - m^2)(n + a_0m) = 0, \quad A_{23}(n + a_0m)[4n(n + a_0m)(m + a_0n) + \\ & + m((n + a_0m)^2 + 3(m + a_0n)^2)] = 0, \quad m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0, \quad (5.57) \\ & (m^2 + 4n^2 + 6mna_0 + m^2a_0^2)(m^2A_{22} - km - a_0s_3) = 0. \end{aligned}$$

Из системы (5.57) следует условие $m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0$, а двум оставшимся уравнениям можно удовлетворить положив $A_{23} = 0$ или $n + a_0m = 0$. Запишем при условиях

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0$$

выражения для $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ из (3.39).

Если $A_{23} = 0$, то

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= -a'_0 m A_{13} \sin nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0 m)A_{33} - a_0 m^2 A_{22}), \\ \lambda_2(t) &= a'_0 m(A_{22} - A_{11}) \sin nt - (n + a_0 m)A_{13}.\end{aligned}\quad (5.58)$$

При условии $n + a_0 m = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= -a'_0 m(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0 m^2 A_{22}), \\ \lambda_2(t) &= a'_0 m(A_{22} - A_{11}) \sin nt.\end{aligned}\quad (5.59)$$

Таким образом, при $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0)$ координаты центра масс гиростата определяются зависимостями $s_1 = s_2 = 0$, $m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0$, компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями времени, линейными по $\sin nt$ и $\cos nt$. В случае $A_{23} = 0$ вторая ось является главной осью в теле-носителе; в случае $n + a_0 m = 0$ устанавливается зависимость между скоростями прецессии и собственного вращения гиростата, а гиростатический момент не зависит от A_{33} .

Решение 2. Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \boldsymbol{\beta} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right), \quad \boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Из (5.55), (5.56) найдем соответственно:

$$A_{23} = A_{13} - \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad s_3 = \frac{m}{a_0}(m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - k). \quad (5.60)$$

С учетом (5.54) и (5.60) система (5.50) примет вид:

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)K &= 0, \\ (a_0 n^2 + 3mn + 2a_0 m^2)K &= 0, \quad (a_0 n^2 + 2mn + a_0 m^2)K = 0, \\ (12a_0 n m^2 - 15m^3 - mn^2 - 4a_0 n^3 - 3a_0^2 m n^2 + 27a_0^3 m^3)K &= 0, \\ (-84a_0 n m^2 - 51m^3 - 29mn^2 - 20a_0 n^3 - 39a_0^2 m n^2 + 15a_0^3 m^3)K &= 0, \\ (-5a_0 n m^2 - 9a_0 m^3 - a_0^3 m n^2 - 2a_0^2 n^3 + 7a_0^3 m^3 - 6m^2 n)K &= 0,\end{aligned}\quad (5.61)$$

где

$$K = 4a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}) - 4k.$$

Из (5.61) следует равенство $K = 0$, которое приводит к условию

$$k = a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + \frac{a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33})}{4}. \quad (5.62)$$

С учетом (5.54), (5.60), (5.62) зависимости (3.39) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{1}{R_2(t)} \sum_{j=0}^3 (\mu_j \cos(jnt) + \mu'_j \sin(jnt)), \\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{R_2(t)} \sum_{j=0}^3 (\sigma_j \cos(jnt) + \sigma'_j \sin(jnt)), \end{aligned} \quad (5.63)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} R_2(t) &= -\frac{1}{6} [a_0'^2 m \sin 2nt + 2a_0'(n + 2a_0 m)(\sin nt + \cos nt) - \\ &\quad - 2a_0(n + a_0 m) - 5a_0'^2 m], \\ \mu_3 &= \frac{m^2 \sqrt{5}}{60} a_0'^3 (2A_{12} - A_{13}), \quad \mu'_3 = \frac{m^2 \sqrt{5}}{120} a_0'^3 [4A_{12} + 5(A_{11} - A_{22}) + 10A_{13}], \\ \mu_2 &= \frac{m \sqrt{5}}{60} a_0'^2 (n + 2a_0 m) [8(A_{12} + A_{13}) + 5(A_{11} - A_{22})], \\ \mu'_2 &= \frac{m \sqrt{5}}{60} a_0'^2 (n + 3a_0 m) [12A_{13} + 5(A_{11} - A_{22})], \\ \mu_1 &= \frac{a_0' \sqrt{5}}{60} [5(A_{22} - A_{11})(n^2 - a_0^2 m^2 + 5m^2 + 5a_0 mn) + A_{13}(5a_0^2 m^2 - 56a_0 mn - \\ &\quad - 49m^2 - 12n^2) + 2A_{12}(7a_0^2 m^2 - 4a_0 mn - 11m^2)], \\ \mu'_1 &= \frac{a_0' \sqrt{5}}{120} [5(A_{22} - A_{11})(2n^2 - m^2 + 6a_0 mn + 5m^2 a_0^2) - 2A_{13}(5m^2 + 12n^2 + \\ &\quad + 23a_0^2 m^2 + 40a_0 mn) + 4A_{12}(11m^2 + 4a_0 mn - 7m^2 a_0^2)], \\ \mu_0 &= \frac{\sqrt{5}}{120} [2a_0(n + a_0 m)^2 + a_0'^2 m(7n + 9a_0 m)] [12A_{13} + 5(A_{11} - A_{22})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0^3(2A_{13} + A_{12}), & \sigma'_3 &= \frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0^3A_{12}, \\
\sigma_2 &= \frac{m\sqrt{30}}{15}a_0^2(n + 2a_0m)(A_{13} + A_{12}), & \sigma'_2 &= -\frac{m\sqrt{30}}{30}a_0^2(n + 3a_0m)A_{13}, \\
\sigma_1 &= \frac{a_0'\sqrt{30}}{60} [2A_{13}(5a_0^2m^2 + 6a_0mn - m^2 + 2n^2) + A_{12}(7a_0^2m^2 - 4a_0mn - 11m^2)], \\
\sigma'_1 &= \frac{a_0'\sqrt{30}}{60} [4A_{13}(5m^2 + n^2 - a_0^2m^2 + 5a_0mn) + A_{12}(11m^2 + 4a_0mn - 7m^2a_0^2)], \\
\sigma_0 &= \frac{\sqrt{30}}{30}(3a_0^2mn - 9a_0m^2 - 2a_0n^2 - 7mn + 7a_0^3m^2)A_{13}.
\end{aligned}$$

Компоненты гиросtatического момента являются периодическими функциями вида (5.63). Зависимость между компонентами тензора инерции выражается первым равенством из (5.60), а после подстановки (5.62) во второе соотношение из (5.60) получим $s_3 = a_0m^2(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - \frac{m(n + a_0m)}{4}(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33})$.

Отметим, что в силу (5.54) центр масс находится на оси собственного вращения, но, в отличие от предыдущего примера разрешимости, третья координата центра масс зависит только от компонент тензора инерции тела-носителя и скоростей собственного вращения и прецессии и не содержит постоянной моментов k , значение которой в данном примере находится из соотношения (5.62). Компоненты гиросtatического момента представляют собой отношение тригонометрических полиномов третьего и второго порядка, что отличает их от формул (5.39).

Решение 3. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 0)$. Равенства (5.51) обращаются в тождества. Система (5.50) имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_0s_1 &= 0, & a_0s_2 &= 0, & a_0A_{12} &= 0, & a_0(m + 6a_0n + a_0^2m)s_2 &= 0, \\
a_0(m^2A_{11} - km - a_0s_3) &= 0, & a_0A_{12}(12a_0mn + 3m^2 + a_0^2m^2 + \\
&+ 8a_0^2n^2) &= 0, & a_0[s_1(m + 2a_0n + a_0^2m) + (m^2 - n^2)(n + a_0m)A_{13}] &= 0, \\
a_0(m^2 + 8n^2 + 3a_0^2m^2 + 12a_0mn)(m^2A_{11} - km - a_0s_3) &= 0, \\
a_0[4(n + a_0m)A_{13}(m^3 + a_0^2m^3 + 6a_0nm^2 + 3a_0^2mn^2 + 3n^2m + 2a_0n^3) + \\
&+ s_1(3m^2 + 3a_0^4m^2 + 8a_0^3nm + 8a_0nm + 2a_0^2m^2 + 8a_0^2n^2)] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Если положить $a_0 \neq 0$, то решение системы (5.64) представимо в виде

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad m^2 A_{11} - km - a_0 s_3 = 0, \quad A_{13}(n + a_0 m) = 0. \quad (5.65)$$

При $a_0 = 0$, уравнения (5.64) выполняются при произвольных значениях других параметров. Для нахождения решения дифференциальных уравнений (3.23) рассмотрим систему (5.52) при условиях $a_0 = 0$, $a'_0 = 1$.

$$\begin{aligned} s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad mA_{11} - k = 0, \\ -5ms_1 + 4n(n^2 - m^2)A_{13} = 0, \quad 5ms_1 + 2nA_{13}(5n^2 + 3m^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Решение системы (5.66) таково

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad k = mA_{11}. \quad (5.67)$$

Отметим, что в случае $A_{13} = 0$, зависимости (5.67) можно получить из (5.65) положив $a_0 = 0$.

Таким образом, с учетом (5.68) и (5.65), запишем решение уравнений (3.23). При произвольном значении угла θ_0 и $A_{13} = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= a'_0 m (A_{22} - A_{11}) \cos nt - (n + a_0 m) A_{23}, \\ \lambda_2(t) &= -a'_0 m A_{23} \cos nt - \frac{1}{m} (s_3 + m(n + a_0 m) A_{33} - a_0 m^2 A_{11}). \end{aligned}$$

Если же $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ и $n + a_0 m = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= a'_0 m (A_{11} - A_{22}) \cos nt, \\ \lambda_2(t) &= -a'_0 m (A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m} (s_3 - a_0 m^2 A_{11}). \end{aligned}$$

В рассмотренном примере ось закрепления второго ротора ($\beta = (0, 0, 1)$) совпадает с осью собственного вращения. Аналогичная ситуация имеет место в приведенном выше решении 1, в котором ось первого ротора характеризуется вектором $\alpha = (0, 0, 1)$. В обоих случаях нахождение ограничений на па-

раметры задачи из тождеств, в которые обращаются первые два уравнения системы (3.23), распадается на исследование только одной системы (5.50) или (5.52), при этом все уравнения одной из двух систем обращаются в тождество при значении угла нутации $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

5.3 Полурегулярные прецессионные движения второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Положим

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1), \quad \varphi = nt. \quad (5.68)$$

Тогда из (3.39) найдем:

$$\lambda_1(t) = \frac{V_1\ddot{\psi} + V_2\dot{\psi}^2 + V_3\dot{\psi} + V_4}{8a'_0\dot{\psi}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{U_1\ddot{\psi} + U_2\dot{\psi}^2 + U_3\dot{\psi} + U_4}{8a'_0\dot{\psi}}, \quad (5.69)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} V_1 &= 4(a'_0A_{23} \cos 2nt + a'_0A_{13} \sin 2nt + 2a_0A_{33} \cos nt + a'_0A_{23}), \\ V_2 &= 4(a'_0a_0(A_{13} \cos 2nt - A_{23} \sin 2nt) - 2a_0'^2A_{12} \cos nt - \\ &\quad - 2(a_0'^2A_{11} + a_0^2A_{33}) \sin nt - 3a_0a'_0A_{13}), \\ V_3 &= a_0'^2(B_{11} - B_{22}) \sin 3nt + 2a_0'^2B_{12} \cos 3nt + \\ &\quad + 4a'_0n(A_{13} \cos 2nt - A_{23} \sin 2nt) + (a_0'^2(5B_{11} - B_{22}) + 4a_0^2B_{33}) \sin nt + \\ &\quad + 6a_0'^2B_{12} \cos nt + 8(k - a_0nA_{33}) \sin nt + 4a'_0(2a_0B_{13} - nA_{13}), \\ V_4 &= 2a_0'^2(C_{11} - C_{22}) \sin 3nt + 4a_0'^2C_{12} \cos 3nt + 2a_0'^2(C_{11} - C_{22}) \sin nt + \\ &\quad + 4a'_0((s_2 - a_0C_{23}) \sin 2nt - (s_1 - a_0C_{13}) \cos 2nt) + 4a_0'^2C_{12} \cos nt - \\ &\quad + 4a'_0((s_2 - a_0C_{23}) \sin 2nt - (s_1 - a_0C_{13}) \cos 2nt) + 4a_0'^2C_{12} \cos nt - \\ &\quad - 4a'_0(s_1 - a_0C_{13}). \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= -4(a'_0 A_{23} \sin 2nt - a'_0 A_{13} \cos 2nt + 2a_0 A_{33} \sin nt + a'_0 A_{13}), \\
U_2 &= -4(a'_0 a_0 (A_{23} \cos 2nt + A_{13} \sin 2nt) + 2a_0'^2 A_{12} \sin nt + \\
&\quad + 2(a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) \cos nt + 3a_0 a'_0 A_{23}),
\end{aligned} \tag{5.71}$$

$$\begin{aligned}
U_3 &= a_0'^2 (B_{11} - B_{22}) \cos 3nt - 2a_0'^2 B_{12} \sin 3nt - \\
&\quad - 4a_0' n (A_{23} \cos 2nt + A_{13} \sin 2nt) + (a_0'^2 (5B_{22} - B_{11}) + 4a_0^2 B_{33}) \cos nt + \\
&\quad + 6a_0'^2 B_{12} \sin nt + 8(k - a_0 n A_{33}) \cos nt + 4a_0' (2a_0 B_{23} - n A_{23}), \\
U_4 &= 2a_0'^2 (C_{11} - C_{22}) \cos 3nt - 4a_0'^2 C_{12} \sin 3nt - 2a_0'^2 (C_{11} - C_{22}) \cos nt + \\
&\quad + 4a_0' ((s_1 - a_0 C_{13}) \sin 2nt + (s_2 - a_0 C_{23}) \cos 2nt) + 4a_0'^2 C_{12} \sin nt - \\
&\quad - 4a_0' (s_2 - a_0 C_{23}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, при котором в формулах (5.69) возможно избавиться от неизвестной функции $\dot{\psi}$ в знаменателе. Для этого потребуем выполнения равенств $V_1 = V_4 = 0$ и $U_1 = U_4 = 0$, что приводит к ограничениям:

$$a_0 = 0, \quad A_{13} = A_{23} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad s_1 = s_2 = 0. \tag{5.72}$$

Соотношения (5.69) с учетом равенств (5.70)–(5.72) запишутся так

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= -\dot{\psi} (A_{11} \sin nt + A_{12} \cos nt) + \frac{1}{8} (2B_{12} \cos 3nt + (B_{11} - \\
&\quad - B_{22}) \sin 3nt) + \frac{1}{8} (6B_{12} \cos nt + (5B_{11} - B_{22}) \sin nt) + k \sin nt, \\
\lambda_2(t) &= -\dot{\psi} (A_{12} \sin nt + A_{22} \cos nt) + \frac{1}{8} (-2B_{12} \sin 3nt + (B_{11} - \\
&\quad - B_{22}) \cos 3nt) + \frac{1}{8} (6B_{12} \sin nt + (5B_{22} - B_{11}) \cos nt) + k \cos nt.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Подставляя выражение для $\lambda_1(t)$ из (5.73) в первое уравнение системы (3.23), определим функцию $\dot{\psi}$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{n((B_{22} - B_{11}) \cos 2nt + 2B_{12} \sin 2nt - B_{22} - B_{11})}{2(nA_{33} - B_{23} \cos nt - B_{13} \sin nt)} + \\
&\quad + \frac{C_{13} \sin nt + C_{23} \cos nt - s_3}{nA_{33} - B_{23} \cos nt - B_{13} \sin nt}.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\dot{\psi}$ из (5.73) и (5.74) обращают все уравнения системы (3.23) в тождества.

Таким образом, при ограничениях (5.68), (5.72) компоненты гиростатического момента определяются равенствами (5.73), функция $\psi(t)$ находится интегрированием выражения (5.74) и является элементарной функцией времени. Угол нутации равен $\frac{\pi}{2}$, третья ось подвижной системы координат является главной осью, вектор обобщенного центра масс коллинеарен вектору \mathbf{a} и ортогонален плоскости, содержащей гиростатический момент.

5.4 Полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Пусть выполняются условия (5.68), которые характеризуют расположение роторов в теле-носителе. Положим

$$\dot{\psi} = \frac{n}{\mu_1 \sin nt + \mu_0}, \quad (5.75)$$

где μ_1, μ_0 – некоторые константы, причем $\mu_0^2 = 1 + \mu_1^2$. Подставим выражение для скорости прецессии (5.75) в равенства (5.69)

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{n(V_2 - V_1\mu_1 \cos nt)}{8a'_0(\mu_1 \sin nt + \mu_0)} + \frac{V_3n + V_4(\mu_1 \sin nt + \mu_0)}{8a'_0n}, \\ \lambda_2(t) &= \frac{n(U_2 - U_1\mu_1 \cos nt)}{8a'_0(\mu_1 \sin nt + \mu_0)} + \frac{U_3n + U_4(\mu_1 \sin nt + \mu_0)}{8a'_0n}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где V_j и U_j ($j = \overline{1, 4}$) заданы соотношениями (5.70), (5.71). Первое уравнение из (3.23) с учетом (5.75) и (5.76) приводит к уравнению вида

$$\sum_{i=0}^5 H_i \cos int + G_i \sin int = 0,$$

которое должно быть тождеством по t , что приводит к системе равенств на параметры задачи

$$\begin{aligned}
C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad a_0 C_{23} + n B_{23} = 0, \quad 2s_1 \mu_1 + \\
+ a'_0 n (B_{22} - B_{11}) - 2a_0 \mu_1 C_{13} = 0, \quad -s_2 \mu_1 + a'_0 n B_{12} + a_0 \mu_1 C_{23} = 0, \\
(a_0 - 5\mu_0)(2s_1 \mu_1 + a'_0 n (B_{22} - B_{11}) - 2a_0 \mu_1 C_{13}) + a'_0 (2a'_0 \mu_1 C_{13} - \\
- n \mu_0 (B_{22} - B_{11})) = 0, \quad \mu_0 (\mu_0 - 1) (3\mu_1^2 - 4\mu_0^2) (B_{11} - B_{22}) = 0, \\
(a_0 - 5\mu_0) (s_2 \mu_1 - a'_0 n B_{12} - a_0 \mu_1 C_{23}) + a'_0 (a'_0 \mu_1 C_{23} - n \mu_0 B_{12}) = 0, \quad (5.77) \\
- \mu_1^2 [2s_3 + n (B_{11} + B_{22}) + 2a_0 (C_{11} - C_{33})] + \\
+ \mu_0 (B_{22} - B_{11}) (2n \mu_0 - a_0 n) + 2a'_0 \mu_1 (n B_{13} + 2\mu_0 C_{13}) = 0, \\
- 2a_0 \mu_1^2 k - \mu_1^2 [2a'_0 n \mu_1 A_{13} - 2n (1 + a_0 \mu_0) A_{33} - a_0 (a_0'^2 B_{22} - a_0^2 B_{33} - \\
- 2a_0'^2 B_{33})] + a_0'^2 \mu_0^2 (B_{22} - B_{11}) (2\mu_0 - 2 - a_0) + 2a_0'^3 \mu_1 \mu_0 B_{13} = 0.
\end{aligned}$$

Решением алгебраической системы (5.77) являются равенства

$$\begin{aligned}
C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad B_{12} = \frac{C_{23} (B_{11} - B_{22})}{2C_{13}}, \quad B_{23} = \frac{-a_0 C_{23}}{n}, \\
\mu_0 = \frac{2a'_0 C_{13}}{\sqrt{4a_0'^2 C_{13}^2 - n^2 (B_{22} - B_{11})^2}}, \quad \mu_1 = \frac{n (B_{11} - B_{22})}{\sqrt{4a_0'^2 C_{13}^2 - n^2 (B_{22} - B_{11})^2}}, \\
s_1 = \frac{a'_0 n (B_{11} - B_{22})}{2\mu_1} + a_0 C_{13}, \quad s_2 = \frac{C_{23} (a_0 \mu_0 + a_0'^2)}{\mu_0}, \\
s_3 = a_0 (C_{33} - C_{11}) - \frac{1}{2} n (B_{11} + B_{22}) + \frac{n [2a'_0 \mu_1 B_{13} - a_0 \mu_0 (B_{22} - B_{11})]}{2\mu_1^2}, \\
k = \frac{1}{2a_0 \mu_1^2} \left(a_0'^2 \mu_0 [\mu_0 (B_{22} - B_{11}) (2\mu_0 - 2 - a_0) + 2a'_0 \mu_1 B_{13}] + \right. \\
\left. + \mu_1^2 [2n A_{33} (1 + a_0 \mu_0) - 2n a'_0 \mu_1 A_{13}] + a_0 (a_0'^2 B_{22} - a_0^2 B_{33} - 2a_0'^2 B_{33}) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении ограничений (5.68) на расположение роторов в теле-носителе и условий (5.4), связывающих параметры задачи, гири стат совершает прецессионно-изоконические движения с постоянной скоростью собственного вращения, причем $-\left| \frac{2a'_0 C_{13}}{B_{11} - B_{22}} \right| < n < \left| \frac{2a'_0 C_{13}}{B_{11} - B_{22}} \right|$ и скоростью прецессии, заданной в виде (5.75). Положение центра масс и ско-

рость прецессии не зависят от компонент тензора инерции. Компоненты гиростатического момента задаются формулами (5.76) с учетом (5.70), (5.71) и (5.4).

5.5 Вывод

В данном разделе изучены классы движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда в теле-носителе закреплены два ротора, вращение которых зависит от времени. В классе движений, соответствующем маятниковым движениям, предложено представление компонент гиростатического момента с помощью замены, позволяющей использовать для интегрирования уравнений движения метод инвариантных соотношений. На его основе найдено решение уравнений Кирхгофа-Пуассона в эллиптических функциях времени.

В классе регулярных прецессионных движений тяжелого гиростата с двумя роторами найдены решения уравнений движения, редуцированных с помощью первого интеграла. Проведен анализ результатов как в случае гиростатического момента специального вида, так и в случае произвольного переменного гиростатического момента, лежащего в плоскости. Решения найдены в элементарных функциях времени.

В случае прецессионно-изоконических движений показано, что положение центра масс и скорость прецессии не зависят от компонент тензора инерции в случае, когда гиростатический момент находится в горизонтальной плоскости. Решение задается элементарными функциями времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях, когда в теле-носителе закреплены один или два ротора, вращение которых

зависит от времени. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. В задаче о движении гиростата с двумя роторами получены две формы редуцированных уравнений, основанные на различном выборе базиса.

2. Предложены методы исследования условий существования прецессионных движений гиростата. В задаче о движении гиростата с двумя роторами применены два метода: модифицированный метод инвариантных соотношений и метод, основанный на использовании первого интеграла.

3. Получены четыре новых решения уравнений маятниковых движений гиростата. Два решения построены в задаче о движении гиростата с двумя роторами и описываются эллиптическими функциями времени. Два решения найдены в задаче о движении гиростата с одним ротором, они характеризуются рациональными зависимостями скорости собственного вращения от тригонометрических функций угла собственного вращения.

4. Исследованы условия существования регулярных прецессий гиростата с двумя роторами в поле силы тяжести. Установлены два решения уравнений движения, одно из которых описывается тригонометрическими полиномами первого порядка, а второе — отношением тригонометрических полиномов третьего и второго порядков.

5. Рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий первого и второго типов. В случае, когда на теле закреплен один ротор, проведена редукция уравнений Кирхгофа-Пуассона, указаны примеры разрешимости редуцированных уравнений. В случае двух несомых роторов получено решение уравнений движения в элементарных функциях времени.

6. Изучены классы прецессионно-изоконических движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. Построены новые решения уравнений движения гиростата с одним и двумя роторами в обобщенных силовых полях.

7. В указанных решениях выполнен анализ структуры компонент гиростатического момента, проведена их классификация в зависимости от типов прецессий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Алексеев А. В.* Построение стабилизирующего управления для стационарных движений гиростата с полостью с вязкой жидкостью / А. В. Алексеев, С. П. Безгласный, В. С. Красников // *Механика и машиностроение.* – 2014. – С. 563–567.
2. *Амелькин Н. И.* О резонансных вращениях маятника с вибрирующим подвесом / Н. И. Амелькин // *Прикл. математика и механика.* – 2015. – **79**, вып. 6. – С. 756–767.
3. *Амелькин Н. И.* О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гиростатов / Н. И. Амелькин // *Прикл. математика и механика.* – 2011. – **75**, вып. 3. – С. 355–369.
4. *Аппельрот Г. Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Г. Г. Аппельрот // *Уч. зап. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат.* – 1894. – **2**, вып. 11. – С. 1–112.
5. *Асланов В. С.* Интегрируемые случаи и адиабатические инварианты движения гиростатов / В. С. Асланов // *Вестн. Нижегородского ун-та им. Лобачевского.* – 2011. – **5**, вып. 4. – С. 1973–1974.
6. *Батыр Э. И.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // *Совр. матем. Фундамент. направления.* – 2013. – **49**. – С. 5–88.
7. *Билимович А. Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – В кн.: *Сборник статей, посвященный Г. К. Суслову* / А. Д. Билимович. – К. – 1911. – С. 23–74.
8. *Бобылев Д. К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. К. Бобылев // *Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознания.* – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 21–25.

9. *Вархалев Ю. П.* Об асимптотических движениях гироскопа Гриоли / Ю. П. Вархалев, В. М. Ковалев // Применение первого метода Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела. – Донецк, 1991. – С. 61–68. (Препринт АН СССР Ин-т прикладной математики и механики: N 91.07)
10. *Верховод Е. В.* Новые случаи изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой / Е. В. Верховод, Г. В. Горр // Прикл. матем. и механика. – 1993. – **57**, вып. 5. – С. 25–34.
11. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 288 с.
12. *Возняк А. А.* Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Механика твердого тела. - 2013. - Вып. 43. - С. 69-78.
13. *Возняк А. А.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, Г. А. Котов // Вісн. Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. - Донецк. - 2013. - вып. 2. - С. 27 - 36.
14. *Волкова О. С.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // Современные проблемы математики, механики и информатики. - Харьков, 2011. - С. 74-84.
15. *Волкова О. С.* О прецессионных движениях гиростата в случае, когда гиростатический момент принадлежит горизонтальной плоскости / О. С. Волкова // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 57–68.
16. *Гашененко И. Н.* Исследование одного класса движений гироскопа Чаплыгина / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 17. – С. 6–9.

17. *Гашененко И. Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.
18. *Гашененко И. Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
19. *Гашененко И. Н.* Один частный случай движения гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко, В. Н. Касяник // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 31–34.
20. *Гашененко И. Н.* Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 9–18.
21. *Горр Г. В.* Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Наукова думка. – 2013. – т. 8, серия "Задачи и методы: математика, механика". – 407 с.
22. *Горр Г. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
23. *Горр Г. В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
24. *Горр Г. В.* Новые классы прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 36–45.
25. *Горр Г. В.* Новые решения в задаче о движении тела в поле потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Доповіді НАН України. – 2001. – N 4. – С. 41–48.
26. *Горр Г. В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики / Г. В. Горр, А. В. Мазнев

// Нелинейная динамика. – 2012. – 8, N 2. – С. 369–376.

27. Горр Г. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Динамические системы. – 2012. – 2 (30), N 1, 2. – С. 23–32.
28. Горр Г. В. О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора / Г. В. Горр, Г. А. Котов // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40 – 50.
29. Горр Г. В. О решении Н. Ковалевского уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, В. К. Козьменко // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 46–53.
30. Горр Г. В. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, вып. 3. – С. 418–426.
31. Горр Г. В. Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Докл. НАН Украины. – 2007. – N 1. – С. 60–66.
32. Горр Г. В. Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 3. – С. 46–56.
33. Горр Г. В. Об одном классе движений гиростата Жуковского с переменным гиростатическим моментом / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – N 3. – С. 3–9.
34. Горр Г. В. Об одном классе частных решений уравнений движения гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 29–37.

35. Горр Г. В. Об одном периодическом движении в решении С. В. Ковалевской / Г. В. Горр, А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 64–69.
36. Горр Г. В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С. В. Ковалевской / Г. В. Горр, А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66–73.
37. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 573–587.
38. Горр Г. В. Применение параметров Родрига–Гамильтона в истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 2015. – **79**, вып. 5. – С. 635–643.
39. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. Н. Горячев // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 23–24.
40. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ / Д. Н. Горячев // Мат. сборник. – 1900. – **21**, вып. 3. – С. 431–438.
41. Даламбер Ж. Динамика / Ж. Даламбер. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – 343 с.
D'Alembert J. Traité de dynamique / J. D'Alembert. – Paris, 1743. – 341 p.
42. Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А. И. Докшевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
43. Дружинин Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э. И. Дружинин // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.

44. *Евдокименко А. П.* Исследование установившихся движений субспутника-гиростата на стержне в центральном гравитационном поле / А. П. Евдокименко // Вестн. Нижегородского ун-та им. Лобачевского. – 2011. – **5**, вып. 4. – С. 2151–2153.
45. *Елфимов В. С.* О геометрическом исследовании движения гироскопа Лагранжа / В. С. Елфимов // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 22–32.
46. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Собр. соч. – Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152. (Изд. 1-е: Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – **17**, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280).
47. *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С. Л. Зиглин // Функц. анализ и его приложения. – 1982. – **16**, N 3. – С. 30–41.
48. *Илюхин А. А.* Математическая модель замкнутых молекул ДНК / А. А. Илюхин, Д. В. Тимошенко // Изв. Саратовского ун-та. Математика, механика, информатика. – 2008. – **8**, N 3. – С. 32–40.
49. *Ковалев А. М.* Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата / А. М. Ковалев, А. М. Киселев // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 46–48.
50. *Ковалев А. М.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
51. *Ковалев А. М.* Кинематическое истолкование движения тела в решении Гесса / А. М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 3. – С. 567–570.

52. *Ковалев А. М.* Кинематическое истолкование движения тела в случае Л. Н. Сретенского / А. М. Ковалев // *Механика твердого тела.* – 1970. – Вып. 2. – С. 45–50.
53. *Ковалев А. М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата / А. М. Ковалев, А. М. Киселев // *Механика твердого тела.* – 1972. – Вып. 4. – С. 36–45.
54. *Ковалев А. М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // *Мат. физика.* – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
55. *Ковалева Л. М.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалева, А.Е. Позднякович // *Механика твердого тела.* – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
56. *Ковалевская С. В.* Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки, когда интегрирование производится с помощью ультраэллиптических функций времени. – В кн.: *Ковалевская С. В. Научные работы. (Классики науки)* / С. В. Ковалевская. – М. – 1948. – С. 235–244.
Kovalevsky S. Memoires sur un cas particulier du probleme de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, ce l'integration s'effectue a l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps / S. Kovalevsky. – Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences de l'Institut national de France, Paris. – 1890. – **31**. – P. 1–62.
57. *Козлов В. В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В. В. Козлов, Д. А. Онищенко // *Докл. АН СССР.* – 1982. – **266**, N 6. – С. 1298–1300.
58. *Козлов В. В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / В. В. Козлов // *Прикл. математика и механика.* – 1975. – **39**, вып. 3. – С. 407–414.

59. *Колосов Г. В.* Об одном свойстве задачи С. В. Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Г. В. Колосов // Труды отделения физ. наук общества любителей естествознания. – 1901. – **2**, N 1. – С. 5–13.
60. *Коносевиц Б. И.* Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку / Б. И. Коносевиц, Е. В. Позднякович // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 544–548.
61. *Коносевиц Б. И.* Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в двух частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона / Б. И. Коносевиц, Е. В. Позднякович // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 77–80.
62. *Котов Г. А.* О новых классах движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г. А. Котов // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 133 – 140.
63. *Котов Г. А.* Об одном классе прецессионных движений гиростата / Г. А. Котов // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2016: V международная научно-практическая интернет-конференция, 27 мая 2016. – Донецк: ГОУ ВПО "ДонНУЭТ". – 2016. – С. 11 – 12.
64. *Котов Г. А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом / Г. А. Котов // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79 - 89.
65. *Котов Г. А.* Регулярная прецессия гиростата, несущего два ротора / Г. А. Котов // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2015. – **29**. – С. 86 - 94.
66. *Котов Г. А.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа / Г. А. Котов // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59 – 66.

67. *Кравчук Д. Н.* Геометрическое истолкование одного класса движений гиростата по инерции / Д. Н. Кравчук // *Механика твердого тела.* – 1986. – Вып. 18. – С. 15–22.
68. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика / Ж. Лагранж. – В 2-х т. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1. – 594 с.; – Т. 2. – 440 с.
Lagrange J.L. Mécanique Analytique / J. L. Lagrange. – Paris: M^{me} Ve. Courcier, 1811. – Т. 1; 1815. – Т. 2.
69. *Леви-Чивита Т.* Курс теоретической механики / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale / Nuova Ed / T. Levi-Civita, U. Amaldi. – Bologna: Zanichelli, 1952. – Vol. 2, Parte 2.
70. *Лесина М. Е.* О некоторых направлениях исследований в Донецкой школе динамики твердого тела / М. Е. Лесина, Л. В. Кудряшова // *Механика твердого тела.* – 2000. – Вып. 30. – С. 35–68.
71. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости / А. М. Ляпунов // *Собр. соч.* – М., 1954. – Т. 1. – С. 320–324. (Изд. 1-е: *Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2.* – 1893. – 4, N 1–2. – С. 81–85).
72. *Ляпунов А. М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ляпунов // *Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2.* – 1894. – 4, N 3. – С. 123–140.
73. *Мазнев А. В.* Движение твердого тела с некоторыми ограничениями скоростей собственного вращения и прецессии гиростата / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // *Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових співробітників і аспірантів Донецького нац. університету за підсумками н.-д. роботи за період 2007–2008 рр.* – Донецк. – 2009. – т. 1, с. 43.

74. *Мазнев А. В.* О редукции уравнений в вариациях задачи об асимптотически-прецессионных движениях / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 150–160.
75. *Мазнев А. В.* Об одном классе трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев // Прикладная математика и механика. – 2013. – **77**, вып. 2. – С. 263–269.
76. *Мазнев А. В.* Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // XV international conference, DSMSI, май 25-27, 2011. – Киев. – 2011. – С. 296.
77. *Мазнев А. В.* Один класс прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 143–152.
78. *Мазнев А. В.* Один случай трех инвариантных соотношений в задаче о движении неавтономного симметричного гиростата / А. В. Мазнев, Т. В. Белоконь // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 27–33.
79. *Мазнев А. В.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. — Донецк. — 2012. — вып. 1. — С. 79 – 83.
80. *Макеев Н. Н.* Интегралы геометрической теории динамики гиростата / Н. Н. Макеев // Вестн. Пермского ун-та. Математика, механика, информатика. – 2012. – **10**, вып. 2. – С. 26–35.
81. *Маркеев А. П.* О движении связанных маятников / А. П. Маркеев // Нелинейная динамика. – 2013. – **9**, вып. 1. – С. 27–38.

82. *Маркеев А. П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 2. – С. 282–293.
83. *Маркеев А. П.* Об устойчивости прецессии Гриоли / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 556–572.
84. *Мозалевская Г. В.* Частное решение задачи о движении тяжелого гиростата / Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 23–26.
85. *Орешкина Л. Н.* Движение гироскопа Е. И. Харламовой в случае А. И. Докшевича / Л. Н. Орешкина, А. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 57–61.
86. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / П. Я. Полубаринова-Кочина // В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сб., посвящ. памяти С.В. Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 157–186.
87. *Рубановский В. Н.* О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, вып. 3. – С. 402–414.
88. *Рубановский В. Н.* О некоторых возможных движениях тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 4. – С. 763–768.
89. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – N 2. – С. 83–96.
90. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 4. – С. 457–458.

91. *Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской / А. Я. Савченко // *Механика твердого тела.* – 1972. – Вып. 4. – С. 48–51.
92. *Сергеев Е. К.* О движении гиростата в случае А. И. Докшевича / Е. К. Сергеев // *Механика твердого тела.* – 1983. – Вып. 15. – С. 39–47.
93. *Сергеев Е. К.* Об одном периодическом движении гиростата Докшевича / Е. К. Сергеев // *Механика твердого тела.* – 1986. – Вып. 18. – С. 10–12.
94. *Скрышник С. В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С. В. Скрышник // *Механика твердого тела.* – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
95. *Соколов В. В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа / В. В. Соколов // *Теор. и мат. физика.* – 2001. – **129**, вып. 1. – С. 31–36.
96. *Стретенский Л. Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом / Л. Н. Стретенский // *Вестн. Моск. ун-та.* – 1963. – N 3. – С. 60–71.
97. *Стеклов В. А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 1–3.
98. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости / В. А. Стеклов. – Харьков, 1893. – 234 с.
99. *Стеклов В. А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 19–21.
100. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – М.: Гостехиздат. – 1946. – 655 с.

101. *Узбек Е. К.* Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Е. К. Узбек, Е. А. Данилейко // *Механика твердого тела.* – 2004. – Вып. 34. – С. 87–94.
102. *Харламов А. П.* Движение гироскопа А. И. Докшевича / А. П. Харламов, Д. Н. Кравчук // *Механика твердого тела.* – 1983. – Вып. 15. – С. 35–39.
103. *Харламов М. П.* Об одном классе движений гиростата / М. П. Харламов // *Механика твердого тела.* – 1983. – Вып. 15. – С. 47–56.
104. *Харламов М. П.* Построение полного решения одной задачи динамики твердого тела / М. П. Харламов, Е. К. Сергеев // *Механика твердого тела.* – 1982. – Вып. 14. – С. 33–38.
105. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела / М. П. Харламов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
106. *Харламов П. В.* Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне / П. В. Харламов, В. И. Коваль // *Механика твердого тела.* – 1982. – Вып. 14. – С. 38–54.
107. *Харламов П. В.* Движение гироскопа С.В. Ковалевской в случае Б.К. Млодзеевского / П. В. Харламов // *Механика твердого тела.* – 1974. – Вып. 7. – С. 9–17.
108. *Харламов П. В.* Исследование решения с двумя линейными инвариантными соотношениями задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку (специальные случаи) / П. В. Харламов // *Механика твердого тела.* – 1976. – Вып. 8. – С. 37–56.
109. *Харламов П. В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // *Прикл. математика и механика.* – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.

110. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
111. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П. В. Харламов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – N 4. – С. 17–29.
112. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373–375.
113. *Харламов П. В.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа / П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская, М. Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
114. *Харламов П. В.* О решениях уравнений динамики твердого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 3. – С. 567–572.
115. *Харламов П. В.* Об алгебраических инвариантных соотношениях уравнений движений твердого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 25–33.
116. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
117. *Харламов П. В.* Об одном новом решении задачи о движении тяжелого гиростата / П. В. Харламов, Л. М. Ковалева // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 3–8.
118. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
119. *Харламов П. В.* Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Механика

- твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 57–64.
120. Харламов П. В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.
121. Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
122. Харламова Е. И. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
123. Харламова Е. И. Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 194–202.
124. Харламова Е. И. Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С. В. Ковалевской / Е. И. Харламова, П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1969. – **189**, N 5. – С. 967–968.
125. Харламова Е. И. Новое решение задачи о движении тяжелого гиростата / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 3–16.
126. Харламова Е. И. О движении гиростата по инерции / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 10. – С. 34–40.
127. Харламова Е. И. О канонических уравнениях движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 102–107.

128. *Харламова Е. И.* О линейном инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 5–12.
129. *Харламова Е. И.* Об одном частном решении уравнений Эйлера–Пуассона / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1959. – **23**, вып. 4. – С. 681–690.
130. *Харламова Е.И.* Об экспоненциальных решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 90–95.
131. *Харламова Е. И.* Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1966. – **30**, вып. 4. – С. 784–788.
132. *Харламова Е. И.* Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.
133. *Харламова Е. И.* Уравнения движения гиростата в ньютоновском поле сил / Е. И. Харламова, Л. М. Ковалева // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 92–98.
134. *Харламова Е. И.* Условия существования одного класса решений интегродифференциального уравнения движения тяжелого гиростата / Е.И.Харламова, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1984. – Вып. 16. – С. 24–32.
135. *Холостова О. В.* Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде / О. В. Холостова. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 128 с.

136. *Чаплыгин С. А.* Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке / С. А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1896. – **9**, вып. 2. – С. 17–21.
137. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / С. А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1904. – **12**, вып. 1. – С. 1–4.
138. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости / С. А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1903. – **11**, вып. 2. – С. 7–10.
139. *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С. А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1901. – **10**, вып. 2. – С. 32–34.
140. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая / С. А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **6**, вып. 2. – С. 20–42.
141. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С. А. Чаплыгин // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1897. – **20**, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.
142. *Щетинина Е. К.* Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента / Е. К. Щетинина, А. А. Возняк // Компьютерные исследования и моделирование. – Ижевск, ФГБОУ ВПО "Удмуртский государственный университет", Институт компьютерных исследований, ФГБУН Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 2014. – **6**, №. 4. – С. 559–568.
143. *Яхья Х. М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата / Х. М. Яхья // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1987. – N 4. – С. 88–90.

144. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки / Х. М. Яхья // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1976. – N 6. – С. 76–79.
145. *Burgatti P.* Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso / P. Burgatti // Rend. Circ. matem. Palermo. – 1910. – **29**. – P. 369–377.
146. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit / A. Clebsch // J. reine und angew. Math. – 1856. – **52**, H. 2. – S. 103–132.
147. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Ann. – Leipzig, 1871. – **3**. – S. 238–262.
148. *Darboux G.* Sur diverses propositions relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe / G. Darboux // C. r. Acad. sci.. – 1885. – **101**. – P. 119–205.
149. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de mécanique / L. Euler // Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Berlin. – 1750–1752. – **6**. – P. 185–217.
150. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. S. 4. – 1947. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
151. *Grioli G.* Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi / G. Grioli // Atti. Accad. Naz. Lincei. S. 8. – 1963. – **34**, N 6. – P. 636–641.
152. *Halphen G.* Sur le mouvement d'un solide dans un liquide / G. Halphen // J. math. pures et appl. – 1888. – **4**. – P. 28–37.
153. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann. – 1890. – **37**, H. 2. – S. 153–181.

154. *Husson E.* Sur un théorém de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant / E. Husson // Acta math. – 1908. – **31**. – P. 71–88.
155. *Jacobi C. G. J.* Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe / C. G. J. Jacobi // Gesammelte Werke. – Berlin: G. Reimer, 1882. – **2**. – S. 477–492.
156. *Kirchhoff G. R.* Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit / G. R. Kirchhoff // J. für die reine und angew. Math. – 1870. – **71**. – S. 237–262.
157. *Klein F.* The theory of the top. Volume III / F. Klein, A. Sommerfeld // Springer science Business Media, New York. – 2012. – 297 s.
158. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
159. *Kötter F.* Die von Steklow und Liapunow entdecten integralen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit / F. Kötter // Sitzungsber. Königlich Preussishen Acad. Wiss. Berlin. – 1900. – **6**. – S. 79–87.
160. *Liouville R.* Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points / R. Liouville // Acta Math. – 1896. – **20**. – P. 239–284.
161. *Mac Cullagh J.* On the rotation of a solid body / J. Mac Cullagh // Proc. Roy. Irish Acad. – 1840 – 1844. – **2**. – P. 542–545; 1845 – 1847. – **3**. – P. 370–371.
162. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – **16**. – P. 9–130; P. 289–336.
163. *Poisson S. D.* Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant / S. D. Poisson // Mém. Acad. sci.. – 1832. – **11**. – P. 521–581.
164. *Staude O.* Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O. Staude // J. für reine und angew. Math. – 1894. – **113**, N 4, 5. – S. 318–334.

165. *Thompson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid / W. Thompson // Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1872. – **7**. – P. 668–674.
166. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
167. *Weber H.* Anwendund der Thetafunktionen zweiter Veränderlicher und die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeits / H. Weber // Math. Ann. – 1879. – **14**. – S. 143–206.
168. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations / H. M. Yehia // J. Méc. Théor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 747–754.
169. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H. M. Yehia // J. Méc. Théor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 755–762.
170. *Yehia H. M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields / H. M. Yehia // J. of the Egyptian Mathematical Society. – 2016. – P. 1–4.