

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"

На правах рукописи

Ткаченко Дмитрий Николаевич

**Полиномиальные решения уравнений динамики
в задачах о движении гиростата с постоянным
и переменным гиростатическим моментом**

01.02.01 — "Теоретическая механика"

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.–мат. наук, доцент,
Мазнев А. В.

Донецк — 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	12
2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ	23
2.1. Уравнения движения гиростата с неподвижной точкой под действием силы тяжести	23
2.2. Редукция уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом	28
2.2.1. Особые решения уравнений движения гиростата	28
2.2.2. Обобщенные уравнения В. Гесса	29
2.2.3. Скалярные уравнения движения гиростата под действием силы тяжести	30
2.2.4. Первая форма уравнений П. В. Харламова	31
2.2.5. Вторая форма уравнений П. В. Харламова	33
2.2.6. Краткий анализ других форм уравнений	37
2.3. Уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гиростатических сил	40
2.4. Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона	43
2.5. Типы полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела	44
2.5.1. Полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского– Горячева и их обобщения П. В. Харламова	44
2.5.2. Полиномиальные решения класса С. А. Чаплыгина	46
2.5.3. Полиномиальные решения, рассмотренные Б. И. Коносевичем и Е. В. Поздняковичем	47

2.5.4. Условия существования и структура полиномиальных классов решений уравнений динамики	48
2.6. Методы интегрирования дифференциальных уравнений динамики	50
2.6.1. Метод К. Якоби	50
2.6.2. Метод инвариантных соотношений	51
2.6.3. Метод степенной геометрии	54
3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ	57
3.1. Полиномиальные решения уравнений Н. Ковалевского	57
3.1.1. Постановка задачи. Уравнения Н. Ковалевского	58
3.1.2. Тестовые примеры решений	61
3.1.3. Анализ разрешимости системы	63
3.2. Уравнения класса Ковалевского–Харламова в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом	67
3.2.1. Постановка задачи. Редукция уравнений	68
3.2.2. Один специальный случай движения несомого гироскопа	73
3.3. Изучение обобщенного класса полиномиальных решений уравнений Ковалевского–Харламова	75
3.3.1. Постановка задачи	76
3.3.2. Семейства точных решений уравнений движения гиростата ...	79
3.3.3. Классификация движений гиростата	83
3.4. Выводы	86
4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В ИССЛЕДОВАНИИ СТЕПЕННЫХ АСИМПТОТИК В РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ	87
4.1. Постановка задачи об исследовании степенных разложений	87

4.2. Степенные разложения решений в случае $p \rightarrow 0$	91
4.3. Степенные разложения решений в случае $p \rightarrow \infty$	108
4.4. Выводы	123
5. РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ.	
ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	
ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА	
БАРНЕТТА-ЛОНДОНА	
	126
5.1. Редукция уравнений движения гиростата под действием	
потенциальных и гироскопических сил	126
5.2. Редукция уравнений движения гиростата в магнитном поле	
с учетом эффекта Барнетта-Лондона	129
5.3. Полиномиальные решения класса А. И. Докшевича	131
5.4. Полиномиальные решения обобщенного класса С. А. Чаплыгина	136
5.5. Выводы	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	144
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	145

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Актуальность математического моделирования движений современных механических систем с помощью методов теоретической механики обусловлена тем, что среди них можно выделить важные конструкции (роботы, манипуляторы, гироскопы), деформацией элементов которых можно пренебречь. Основными моделями в исследовании таких систем являются модель абсолютно твердого тела и модель системы связанных твердых тел класса гиростат.

Механическая модель гиростата использовалась в работах У. Томсона [166], В. Вольтерра [167], Н. Е. Жуковского [57], П. В. Харламова [129] и другие. Наиболее общий класс гиростатов рассмотрен в работе П. В. Харламова [129] так как на основании ее можно моделировать движение системы тел несимметричной формы. В технических задачах также применяется модель гиростата (Н. И. Амелькин [2, 3], Е. П. Евдокименко [55], А. В. Алексеев [1], А. П. Маркеев [84] и другие).

Теоретические аспекты в моделировании движений гиростата исследованы в работах В. Вольтерра [167], Н. Е. Жуковского [57], В. В. Румянцева [93] П. В. Харламова [129] и других. Они базируются на фундаментальных результатах Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Л. Лагранжа, С. В. Ковалевской, К. Якоби, Г. Кирхгофа, А. Клебша, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, С. А. Чаплыгина (см. обзоры [20], [29–31]).

Классическая задача о движении тяжелого твердого тела и ее обобщения описываются системой шести дифференциальных уравнений, допускающей три первых интеграла. Поскольку общая теория Якоби об интегрировании этих уравнений в квадратурах применима только в случае, когда существует дополнительный первый интеграл, то основные исследования по динамике твердого гиростата с неподвижной точкой проводятся в таких направлениях, в которых не предполагается использования теории Якоби. К ним можно отнести задачи об устойчивости стационарных решений, задачи с малым параметром в дифференциальных уравнениях движения и другие.

История развития динамики твердого тела показала, что построение инвариантных множеств уравнений, которые бы отвечали актуальным программным движениям, является весьма важной задачей; они могут служить базовыми элементами в общей теории дифференциальных уравнений; с их помощью можно, на основании теоремы Пуансо, проводить кинематическое истолкование движения гиростата. Обзор результатов по динамике гиростата с неподвижной точкой приведен в монографиях [29–31].

Данная работа посвящена построению полиномиальных решений уравнений движения гиростата в двух задачах: задаче о движении гиростата под действием силы тяжести и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Отметим, что математическая постановка задачи в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона принципиально отличается от математической постановки задачи о движении заряженного и намагниченного гиростата в суперпозиции силовых полей (ньютоновского, электрического и магнитного) и задачи о движении тяжелого гиростата. Это обусловлено тем, что уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона не допускают интеграл энергии, что затрудняет получение решения в квадратурах. Только в некоторых частных случаях В. В. Козлову [71] и В. А. Самсонову [97] удалось найти дополнительные интегралы уравнений движения.

В проблеме построения решений в замкнутой форме для уравнений Эйлера–Пуассона имеет место свойство, что большинство решений получено в случае, когда центр масс гиростата лежит на главной оси эллипсоида инерции. К таким решениям относятся решения В. А. Стеклова [106], Н. Ковалевского [160], Д. Н. Горячева [50]. Обобщение этих решений в задаче о движении гиростата в поле силы тяжести дано П. В. Харламовым [122, 131]. Если еще принять во внимание, что кинематическое истолкование движения тела для полиномиальных решений дало возможность установить новые свойства движения тела, то актуальность исследования условий существования полиномиальных решений становится вполне обоснованной.

Связь с научными программами и планами.

Исследования проводились согласно планам научно-исследовательской работы кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" по следующим государственным темам:

"Метод инвариантных соотношений в построении решений уравнений динамики твердого тела" (N 0101V005722; г. 01/38, 1.01.2000-31.12.2006);

"Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях" (N 0107V001773; г. 07/38, 1.01.2007-31.12.2012).

Сейчас исследования проводятся в рамках государственной темы отдела прикладной механики ГУ "Институт прикладной математики и механики" Министерства образования и науки Донецкой народной республики.

"Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел" (N 0111V000484; N III-6-11, 1.01.2011-31.12.2015); (N 0107V001773; г. 07/38, 1.01.2015-31.12.2017).

Цель и задачи исследования.

Объектом исследования являются три задачи о движении гиростата: задача о движении тяжелого гиростата с постоянным, или с переменным гиростатическим моментом; задача о движении тяжелого гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Предметом исследования являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона, Ковалевского–Харламова, Кирхгофа–Пуассона и уравнения задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Цель исследования – изучение условий существования полиномиальных решений, которые описывают программные движения гиростата в различных силовых полях; построение указанных решений в замкнутом виде и исследование их аналитических и геометрических свойств.

Задачами исследования являются:

1. Исследование условий существования полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата с постоянным гиростатическим момен-

том на основе редукции к уравнениям класса Ковалевского–Харламова.

2. Изучение аналитических и геометрических свойств обобщенного класса полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата.

3. Редукция уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям Ковалевского–Харламова.

4. Применение методов степенной геометрии к исследованиям асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата.

5. Классификация степенных разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата для случаев малых и больших значений проекции вектора угловой скорости на барицентрическую ось.

Методы исследования. В диссертации применены методы инвариантных соотношений [65, 77, 127] построения решений уравнений динамики твердого тела, теория интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах, методы решения обратных задач аналитической механики, метод степенной геометрии [7].

Научная новизна полученных результатов.

1. Получены новые формы редуцированных уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в трех задачах: в задаче о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом, в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

2. Доказано, что полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева–Чаплыгина в задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела имеют место только в частных случаях решений Ковалевской и Горячева.

3. Исследованы аналитические и геометрические свойства обобщенного класса полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата, описываемого случаем интегрируемости Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской.

4. Проведена классификация асимптотических разложений решений урав-

нений движения тяжелого гиростата, полученных П. В. Харламовым. Установлена связь этих решений с полиномиальными разложениями.

5. Получены новые классы асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата, имеющих место при малых и больших значениях проекции вектора угловой скорости на барицентрическую ось.

6. Построены новые полиномиальные решения уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение и практическое применение, которые могут быть использованы в прикладных областях механики.

Результаты исследований могут быть использованы в ГУ "Институт прикладной математики и механики" (г. Донецк) и в ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (г. Донецк) при изучении свойств движения твердого тела с неподвижной точкой, а также при чтении специальных курсов по математическому моделированию движений сложных механических систем.

Личный вклад соискателя. По теме диссертации опубликованы 6 статей в рецензируемых изданиях. Две статьи написаны без соавторства. В [26] автору диссертации принадлежит получение степенных разложений с помощью ЭВМ, И. Н. Гашененко принадлежит классификация степенных разложений в зависимости от типа асимптотики. В статье [25] автору принадлежит результат по исследованию алгебраических условий существования обобщенного полиномиального класса решений уравнений движения гиростата. Г. В. Мозалевской проведен анализ допустимых значений параметров решения. И. Н. Гашененко дано геометрическое истолкование движения гиростата методом Пуансо. В статье [63] автором диссертации получены условия существования полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле и их анализ в случае ньютоновского поля. А. В. Зызе принадлежит постановка задачи о полиномиальных решениях и исследование условий разрешимости системы алгебраических уравнений на параметры задачи. В статье [64] автором проведена редукция исходных уравнений на инвариантных соотношениях, которые характеризуются полиномиальными функциями вспомогательной переменной и получение одного нового решения. А. В. Зызе

принадлежит построение другого частного решения редуцированных уравнений и сведение вспомогательной переменной к гиперэллиптическим функциям времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена применением общепринятых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на

— XI Международной конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела". – Донецк, 2011.

— Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – Воронеж, 2013.

— VIII Международной научно-технической конференции "Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование в рамках III форума "Инновационные перспективы Донбасса" (ИУСМКМ – 2017)". – Донецк, 2017.

— Международной научно-практической конференции "Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение актуальных проблем". – г. Астрахань, – 2017.

— Семинарах отдела прикладной и технической механики ГУ "Институт прикладной математики и механики".

— Семинарах кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет".

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных статьях [25, 26, 63, 64, 108, 109] в журналах, которые рекомендованы ВАК ДНР и в 4 тезисах докладов научных конференций [27, 28, 110, 111].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Объем работы составляет 165 страниц. Диссертация также содержит 6 рисунков, 5 таблиц. Список использованной литературы состоит из 170 источников.

Содержание. В первом разделе выполнен анализ научной литературы

по теме диссертации. Второй раздел посвящен изложению постановки задачи и исследованию задач динамики гиростата с постоянным и переменным гиростатическим моментом.

В третьем разделе рассмотрены условия существования полиномиальных решений класса С. А. Чаплыгина [143] в случае симметричного тела; доказано, что частными случаями решения Д. Н. Горячева [51] и С. В. Ковалевской [48, 70] исчерпываются все решения такого класса. Получены уравнения класса Ковалевского–Харламова в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом, предложено обобщение решений Стеклова, Горячева, Ковалевского [28, 108, 109]. Изучен обобщенный класс полиномиальных решений уравнений Ковалевского–Харламова, который характеризуется тем, что первая компонента вектора угловой скорости является линейной функцией от квадрата вспомогательной переменной, а квадраты других компонент этого вектора – полиномы по вспомогательной переменной. К таким классам относится решение Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской [134], обобщающее решение Б. И. Коносевиича и Е. В. Поздняковича [74, 75]. Даны аналитическое и геометрическое исследование семейства решений указанного класса.

Раздел 4 посвящен применению методов степенной геометрии в задаче о движении тяжелого гиростата, центр масс которого лежит на главной оси эллипсоида инерции. Найдены все степенные разложения решений уравнений П. В. Харламова для двух случаев: когда проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось стремится к нулю и когда эта переменная стремится к бесконечности. Получено 22 семейства степенных разложений решений уравнений Ковалевского–Харламова.

В разделе 5 построены обобщенные классы полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Рассмотрена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям обобщенного класса Ковалевского–Харламова.

Раздел 1

Обзор литературы по теме диссертации

Моделирование движений современных технических конструкций, основанное на предположении малых деформаций, проводится с помощью модели абсолютно твердого тела или системы абсолютно твердых тел. Применение методов динамики твердого тела в практических задачах механики позволило получить новые результаты и объяснить некоторые эффекты (движение кельтского камня [83, 89], эффект Джанибекова [90] в движении тела на орбите и другие). В настоящее время также ведутся исследования конкретных конструкций (Амелькина, Макеева, Асланова); изучены различные задачи о движении двухстепенных гироскопов, гиростатов и других механических систем, которые находят применение на практике.

Теоретические аспекты в моделировании сложных систем рассмотрены в работах У. Томсона, Н. Е. Жуковского, В. В. Румянцева, П. В. Харламова и других. Они базируются на фундаментальных работах Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Л. Пуансо, Г. Дарбу, С. В. Ковалевской, Ж. Лагранжа, Г. Кирхгофа, А. Клебша, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, С. А. Чаплыгина и других. Классические уравнения Л. Эйлера задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой нашли многочисленные обобщения в задачах о движении системы связанных тел в полях сложной структуры (задача о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, задача о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, задача о движении тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и другие). Обзор результатов, полученных в перечисленных задачах изложен в монографиях [17, 29, 31, 71, 97, 105, 123].

Понятие механической модели гиростата впервые появилось в работе У. Томсона [166]. В дальнейших исследованиях оно видоизменялось и корректировалось. Так, в работе Н. Е. Жуковского [57] была рассмотрена модель гиростата, как система "тело+жидкость", в работах В. В. Румянцева [93] и Й. Виттенбурга [17] исследовались системы тел с неподвижной точкой в пред-

положении, что тело-носитель имеет произвольную форму, а несомые тела представляют собой геометрически симметричные тела, вращающиеся относительно осей симметрии. В указанных работах модель описывает системы, распределение масс которых не изменяется. П. В. Харламов [129] предложил обобщенную модель гиростата: систему связанных тел с динамически симметричными несомыми телами. Кроме этого он ввел определение гиростата, имеющее только математический интерес.

Исследование движения гиростата условно можно разделить на три направления: интегрирование дифференциальных уравнений движения; кинематическое истолкование движения гиростата; классификация свойств и устойчивость движения для практического применения.

В классической задаче в рамках **первого направления** большой вклад внесли Л. Эйлер [153], С. В. Ковалевская [70], Г. Г. Аппельрот [4], В. Гесс [156], Д. Н. Горячев [50, 51], Д. Гриоли [154, 155], А. М. Ляпунов [79], В. А. Стеклов [104, 106], С. А. Чаплыгин [142, 143], А. И. Докшевич [53] и другие.

Существенные результаты во **втором направлении** получены Л. Пуансо [163], К. Якоби [158], О. Штауде [165], В. Гессом [156], Ж. Мак-Кулагом [162], П. В. Харламовым [121, 122, 132] и другими [19, 21, 47, 48, 98, 99, 139].

Третье направление исследований задач динамики твердого тела и гиростата связано с задачей о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, а также в силу математической аналогии, и с задачей о движении тела в жидкости. Значительный вклад внесли Г. Кирхгоф [159], А. Клебш [151, 152], А. М. Ляпунов [78], С. А. Чаплыгин [144–146], П. В. Харламов [123, 125], В. Н. Рубановский [91, 92], В. В. Козлов, Д. А. Онищенко [72, 73], Х. М. Яхья [148, 149, 168, 170] и другие.

Для дифференциальных уравнений рассматриваемой математической модели движения твердого тела с неподвижной точкой актуальна задача об интегрировании уравнений Эйлера–Пуассона в квадратурах. Согласно теореме К. Якоби для интегрирования в квадратурах необходимо найти дополнительный первый интеграл исходных уравнений. В задаче о движении тяжелого твердого тела были, кроме случая Эйлера [153], получены случаи Ж. Лагранжа [76] и С. В. Ковалевской [70]. В решении Ж. Лагранжа тело имеет симмет-

ричную форму, а дополнительный интеграл является линейным интегралом (см. работы Пуассона [164], К. Якоби [158], В. Гесса [156] по монографии Г. К. Сулова [107]).

Изучая задачу о существовании решений уравнений Эйлера–Пуассона в предположении, что основные переменные являются однозначными функциями комплексного времени, С. В. Ковалевская [70] показала, что в общем случае уравнения Эйлера–Пуассона не имеют таких решений с пятью произвольными постоянными (кроме решений Лагранжа, Ковалевской).

А. М. Ляпунов [79] изучая вариант, когда однозначные решения имеют особые точки, отличные от точек типа полюсов показал, что новых решений уравнения Эйлера–Пуассона не допускают.

Метод С. В. Ковалевской был исследован Г. Г. Аппельротом [4], который изучал решения уравнений Эйлера–Пуассона с меньшим числом произвольных постоянных. Он получил случай В. Гесса [156] и поэтому иногда в литературе этот случай называют случаем Гесса–Аппельрота.

В работах Е. Гюссона [157], П. Бургатти [150], Р. Лиувилля [161], В. В. Козлова [73] тематика о наличии дополнительного интеграла алгебраической и аналитической структуры получила дальнейшее развитие, но новых случаев интегралов ими не было обнаружено. Неинтегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона доказана С. Л. Зиглиным [58]. Аналогичный результат для уравнений Кирхгофа–Пуассона получен в [72].

Несуществование дополнительных интегралов и неинтегрируемость уравнений динамики твердого тела показало, что актуальным направлением является исследование свойств движения тела с неподвижной точкой, которое основано на построении частных решений уравнений динамики. Достаточно большое количество таких решений позволит провести определенный анализ движения тела в общем случае. Важность построения частных решений уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона связана с тем, что, благодаря применению теоремы Пуансо [163] к исследованию движения тела, появилась возможность классификации движений тела единым методом. Также появилась перспектива исследования окрестности частных решений. Если применить теорию возмущений обыкновенных дифференциальных урав-

нений и первый метод Ляпунова, то можно установить глобальные свойства интегрального многообразия уравнений динамики твердого тела (см. [29, 30, 85, 86]). Частные решения уравнений Эйлера–Пуассона проанализированы в [19, 22, 29, 42, 56, 66, 67, 75, 114–116, 118–120, 135].

После математической постановки задачи о движении твердого тела большое значение имеют новые формы дифференциальных уравнений такого движения. Эти исследования начаты В. Гессом [156], А. Д. Билимовичем [6], Н. Ковалевским [160]. Результаты В. Гесса и А. Д. Билимовича не получили широкого применения, а уравнения Н. Ковалевского носили частный характер, так как получены при определенных ограничениях на параметры уравнений Эйлера–Пуассона. П. В. Харламов [122] применил новый способ понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона. Он основан на использовании специальной системы координат, в которой центр тяжести тела лежит на одной из ее осей. Уравнения Эйлера–Пуассона (и их обобщения – уравнения задачи о движении тяжелого гиростата) в работе [122] приведены к системе двух уравнений первого порядка, которая имеет нелинейную структуру. Данную форму дифференциальных уравнений называют первой формой уравнений П. В. Харламова. В отличие от первой, вторая форма уравнений П. В. Харламова имеет второй порядок относительно компоненты кинетического момента. Она получена путем исключения компонент единичного вектора вертикали из интеграла энергии и двух динамических уравнений и подстановкой найденных функций в уравнения Пуассона. Частными вариантами этих уравнений служат уравнения Н. Ковалевского и С. А. Чаплыгина.

Существуют и другие формы дифференциальных уравнений, которые получены редукцией уравнений Гамильтона [140]. Они находят применение в теории возмущений и при исследовании устойчивости стационарных решений уравнений движения гиростата [73, 141].

Определенный интерес представляют новые формы уравнений Эйлера–Пуассона, предложенные Х. М. Яхьей [149], Г. В. Горром и Е. К. Щетининой [36] и И. Н. Гашененко, Е. И. Харламовой, Г. В. Мозалевской [20]. Однако, на их основе пока не получены новые решения уравнений движения тяжелого твердого тела.

Остановимся на характеристике частных решений уравнений движения гиростата с неподвижной точкой. Стационарные решения относятся к простейшим решениям, поскольку в них компоненты угловой скорости тела постоянны. В задаче о движении тяжелого гиростата конус осей перманентных вращений получил П. В. Харламов [124]. А. М. Ковалев изучил свойства конуса осей равномерных вращений гиростата [69].

Стационарные решения уравнений динамики описывают равномерные движения, которые широко распространены в технике. В динамике твердого тела сформировалось отдельное научное направление по исследованию устойчивости этих решений. Теорию устойчивости решений развил А. М. Ляпунов. Результаты по исследованию устойчивости стационарных решений уравнений Эйлера-Пуассона получили В. В. Румянцев [94], А. П. Маркеев [85, 86], А. Я. Савченко [96], А. М. Ковалев, А. М. Киселев [68], О. В. Холостова [141] и многие другие.

Наибольшее количество частных решений уравнений Эйлера-Пуассона получено в случае, когда центр масс тела лежит на главной оси эллипсоида инерции. В данной диссертации рассмотрен класс частных решений данных уравнений, который характеризуется полиномиальной структурой инвариантных соотношений на компоненты вектора угловой скорости. Редуцированные уравнения для случая, когда центр масс тела лежит на главной оси, можно привести к виду, в котором основными переменными являются квадраты проекций вектора угловой скорости на небарицентрические оси, а вспомогательной переменной служит проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось. Как отмечено выше, уравнения Н. Ковалевского и П. В. Харламова представляют собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Если основные переменные являются многочленами по вспомогательной переменной, то указанные уравнения допускают решения В. А. Стеклова [104], Н. Ковалевского [160], Д. Н. Горячева [50]. Обобщение этих решений на задачу о движении тяжелого гиростата рассмотрено П. В. Харламовым [131]. В статье Г. В. Горра [39] показано, что для динамически несимметричных тел уравнения Н. Ковалевского допускают единственное решение С. А. Чаплыгина [143], которое характеризуется полиномиаль-

ной структурой основных переменных от кубического корня вспомогательной переменной. Анализ частных решений уравнений Эйлера–Пуассона показывает, что для динамически симметричного тела частный случай [48] решения С. В. Ковалевской относится к полиномиальному решению класса Стеклова–Ковалевского–Горячева, а частный случай [35] решения Д. Н. Горячева [50] – к полиномиальному решению класса С. А. Чаплыгина [143]. Первое свойство доказано и в статье П. В. Харламова, Г. В. Мозалевской [133]. В статье [109] проведено исследование полиномиальных решений классов В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева и С. А. Чаплыгина в случае динамического симметричного твердого тела. На основе уравнений Н. Ковалевского показано, что для класса Стеклова–Ковалевского–Горячева имеет место только частный случай решения С. В. Ковалевской, а для класса С. А. Чаплыгина – частный вариант решения Д. Н. Горячева, который характеризуется условием $A_1 = A_2 = 4A_3$ (A_i – главные моменты инерции тела).

Все частные решения уравнений движения гиростата проанализированы в монографии Г. В. Горра и А. М. Ковалева [29].

В процессе получения частных решений уравнений динамики тяжелого гиростата применялись разные подходы. Первый подход является полубратным методом нахождения решений, который заключается в том, чтобы заданное решение удовлетворяло уравнениям движения. Вторым подходом основывается на методе инвариантных соотношений, предложенном Т. Леви-Чивитой [77]. В третьем подходе используется метод инвариантных соотношений, предложенный П. В. Харламовым [126, 127]. Обобщение метода П. В. Харламова на случай неавтономных дифференциальных уравнений выполнено А. М. Ковалевым, Г. В. Горром и В. Н. Неспирным [65]. Применение его наиболее эффективно для уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом (А. В. Мазнев, Г. А. Котов [80–82]).

Построение частных решений в задаче о движении тяжелого гиростата проводилось в тесной связи с применением метода годографов кинематического истолкования движения, предложенного Л. Пуансо. Теорема Пуансо [163] нашла широкое применение в изучении движения тела с неподвижной точкой после того, как П. В. Харламов [121] предложил уравнения неподвиж-

ного годографа, записанные в тех же переменных, что и уравнения движения. Полным решением П. В. Харламов [132] называл такое исследование в динамике гиростата, в котором не только построено новое решение уравнений движения, но и дано истолкование этого движения (отметим некоторые из работ этого направления [18, 19, 21, 114–116, 118, 120, 127, 128, 130, 131, 135, 139]).

В монографии [20] дан анализ литературы, посвященной результатам в исследовании свойств движения тела.

Г. В. Горр [40] получил значительное упрощение уравнений П. В. Харламова [121]. Для полярного угла этих уравнений он нашел такое представление, в котором, в отличие от уравнений П. В. Харламова, не содержатся производные от вектора угловой скорости. В процессе рассмотрения параметров Родрига–Гамильтона Г. В. Горр и А. М. Ковалев [32] при истолковании движения тела предложили алгебраическую форму уравнений неподвижного годографа, которая содержит компоненты угловой скорости и параметры Родрига–Гамильтона. Данные результаты открывают новые возможности в создании комплексного подхода кинематического истолкования движения гиростата [33].

Математическая постановка задачи о движении гиростата описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. Эти уравнения вначале использовались в задаче о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Аналогию задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении твердого тела в жидкости доказал Х. М. Яхья [168, 169]. Частные аналогии указывали В. А. Стеклов [105] и П. В. Харламов [123]. Отметим, что правые части уравнений Кирхгофа–Пуассона содержат векторные параметры: \mathbf{s} , $\boldsymbol{\lambda}$.

В. А. Стеклов [105] и А. М. Ляпунов [78] нашли новые дополнительные первые интегралы для случая $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, которые имеют квадратичную структуру.

В. А. Стеклов, поставив задачу об условиях существования квадратичных интегралов уравнений Кирхгофа и положив $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, доказал теорему: квадратичные интегралы уравнений движения существуют только в случаях Кирхгофа, Клебша, Стеклова. А. М. Ляпунов установил, что ана-

лиз В. А. Стеклова оказался неполным (он пропустил случай сферического распределения масс). В монографии [105] В. А. Стеклов изложил следующие результаты: вывод уравнений движения тела в жидкости как в форме Кирхгофа, так и в форме А. Клебша; случаи А. Клебша; новый случай движения тяжелого твердого тела при условиях, когда тело имеет отверстия и заполнено жидкостью (т.е. при $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$). Таким образом, общие уравнения движения тяжелого твердого тела в жидкости получены В. А. Стекловым. Случай $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ рассматривал С. А. Чаплыгин. Общие результаты С. А. Чапыгина таковы: геометрическая интерпретация движения тела в жидкости в случае Клебша (движение тела в случае Клебша при определенных предположениях может быть представлено качением без скольжения гиперболоида по некоторой винтовой поверхности [31]); решение задачи о движении тела в жидкости для специального вида кинетической энергии; построение решений уравнений движения, которые характеризуются одним, двумя и тремя инвариантными соотношениями [144–146].

П. В. Харламов [123, 125], изучая общий случай $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, обобщил решения Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова; исследовал условия существования одного, двух и трех линейных инвариантных соотношений; предложил новые формы уравнений движения тела в жидкости. Интегралы П. В. Харламова обобщил В. Н. Рубановский (обобщение состояло в учете всех компонент векторов \mathbf{s} , $\boldsymbol{\lambda}$).

В. Н. Рубановский доказал утверждение, обобщающее теорему В. А. Стеклова [91, 92] о квадратичных интегралах уравнений Кирхгофа–Пуассона. Результаты по интегрированию уравнений класса Кирхгофа в случае двух инвариантных соотношений получены С. В. Скрышником [101]; в случае трех инвариантных соотношений – Г. В. Горром и Е. К. Узбек [43]. Результаты Е. К. Узбек [112] и Г. В. Горра, Е. М. Мироновой [37, 46] посвящены построению новых нелинейных полиномиальных решений.

Результат Х. М. Яхьи [168, 169] – обобщает случай интегрируемости [143] С. А. Чаплыгина. Решение Х. М. Яхьи характеризуется дополнительным интегралом четвертого порядка.

Статья В. В. Соколова [102], посвященная построению дополнительно-

го первого интеграла четвертой степени, показала сложность в построении интегралов общего вида. Актуальность построения частных решений уравнений динамики твердого тела обусловлена неинтегрируемостью уравнений Кирхгофа-Пуассона в квадратурах (В. В. Козлов и Д. А. Онищенко [72]).

Дифференциальные уравнения класса Кирхгофа-Пуассона в истолковании уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил рассматривали Д. Гриоли [155] (без учета слагаемых линейного поля сил), Х. М. Яхья [148], Г. В. Горр и его ученики [37, 43, 46, 101, 113, 147].

Наибольшее количество частных решений уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил получено при рассмотрении прецессионных движений гиростата (см. обзор [29, 30]). Этот класс движений представляет практический интерес, так как прецессии являются рабочими режимами многих технических конструкций – гироскопических систем, спутников и других объектов. Результаты [30] отличаются от результатов для решений этого класса в задаче о движении тяжелого гиростата, поскольку в классической задаче существуют только регулярные прецессии гироскопов Лагранжа и Гриоли, полурегулярные прецессии первого типа гироскопа Гесса, прецессии общего вида гироскопа Докшевича. Доказательства этих утверждений приведены в статьях Г. В. Горра [44, 49]. Наглядность в представлении движения гиростата в случае прецессий объясняется применением в исследовании условий существования прецессий углов Эйлера.

Остановимся на задаче о движении тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Этот эффект в научной литературе объясняется следующим образом. Если рассматривать движение нейтрального ферромагнетика в магнитном поле, то необходимо учитывать, что он становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта). Формула для магнитного момента \mathbf{V} такова: $\mathbf{V} = B\boldsymbol{\omega}$, где B – некоторый симметричный оператор. При изучении движения сверхпроводящего твердого тела необходимо учитывать эффект Лондона, который может быть связан с указанной выше формулой для магнитного момента. Хотя механизм намагничивания твердого тела в указанных задачах различный, но эти задачи могут быть описаны одинаковы-

ми дифференциальными уравнениями. Математическая постановка задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона сводится к интегрированию шести обыкновенных дифференциальных уравнений, которые допускают два первых интеграла. Наличие только двух первых интегралов отличает рассматриваемую задачу от классической задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, уравнения которой имеют три первых интеграла. Дополнительные интегралы уравнений движения в магнитном поле были предложены В. В. Козловым [71] и В. А. Самсоновым [95]. Неинтегрируемость в общем случае уравнений движения гиростата обосновывает актуальность построения частных решений этих уравнений. На связь уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона с уравнениями Кирхгофа–Пуассона обратила внимание Л. Е. Веселова [16] при сопоставлении первых интегралов в этих задачах.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта–Лондона исследованы в следующих направлениях: анализ условий существования прецессионных движений гиростата относительно вертикали (оси симметрии магнитного поля); изучение инвариантных соотношений уравнений движения гиростата, которые описывают линейные, квадратичные и нелинейные соотношения относительно переменных задачи. Результаты, полученные в данной задаче, отражены в статьях С. В. Скрыпник [100], Е. А. Данилейко [52], Е. М. Миронова [87], А. В. Зызы [59–61], Д. Н. Ткаченко [64]. В данной диссертации рассмотрены полиномиальные решения обобщенного класса Б. И. Коносевича–Е. В. Поздняковича [74]; построены новые классы решений.

В последние годы в научной литературе интенсивно изучается задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Механическая модель гиростата применяется в многочисленных задачах теоретического и прикладного значения. Уже в работах У. Томпсона [166] была рассмотрена модель, которую он назвал гиростатом. Концептуальная модель гиростата, имеющего неподвижную точку, в случае переменности гиростатического момента приводит к математической постановке задачи, для

которой дифференциальные уравнения движения являются неавтономными (Эти уравнения описаны Ж. Лиувиллем [161], В. Вольтерра [167], Н. Е. Жуковским [57], В. В. Румянцевым [93], П. В. Харламовым [129]).

Моделирование движений систем связанных твердых тел с помощью гиростата применяется и в задачах исследования движения спутников, технических конструкций и других объектов.

На основе подхода, использующего уравнения Лагранжа, В. В. Румянцев [93] вывел уравнения движения спутника в поле ньютоновского притяжения. При этом модель спутника представлена как система тел, в которой ротор предполагается геометрически и физически симметричным, что позволило получить дополнительные первые интегралы уравнений движения.

Исследование стационарных движений тела, несущего двухстепенные гироскопы в предположении, что роторы гироскопов статически уравновешены и динамически симметричны относительно осей их вращения, а каждый гироскоп статически уравновешен и динамически симметричен относительно оси рамки, проведено Н. И. Амелькиным [3].

В данной диссертации изучаются классы полиномиальных решений аналогов уравнений Н. Ковалевского в предположении, что гириостат несет вращающийся маховик, ось вращения которого совпадает с барицентрической осью.

Задача о построении полиномиальных классов решений уравнений Н. Ковалевского [160] и их обобщений тесно связана с задачей интегрирования этих уравнений в предположении, что все переменные являются комплексными. Поскольку, применяемая в [9] теория степенной геометрии основывается на нахождении комплексных переменных в виде сходящихся рядов, то в частных случаях могут быть получены полиномиальные решения в комплексном виде. Данные решения для динамики твердого тела актуальны только в теоретическом плане, так как для истолкования движения тела необходимы вещественные решения. Тем не менее, использование теории степенной геометрии в исследовании решений уравнений Н. Ковалевского в ряде случаев помогает установить условия существования и вещественных решений данных уравнений (см. работы [7–9]).

Раздел 2

Методы исследования движения гиростата, имеющего неподвижную точку

В данном разделе рассмотрены дифференциальные уравнения в моделировании движения гиростата под действием силы тяжести, потенциальных, гироскопических и непотенциальных сил. Приведены уравнения Эйлера–Пуассона, Кирхгофа–Пуассона и уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Выполнен анализ различных форм редуцированных уравнений, том числе уравнений В. Гесса, Н. Ковалевского, С. А. Чаплыгина, П. В. Харламова, Д. Гриоли, Х. М. Яхьи, А. И. Докшевича и других. Исследованы полиномиальные решения класса Стеклова–Горячева–Ковалевского–Чаплыгина и их обобщения в задаче о движении гиростата, полученные П. В. Харламовым. Проведена классификация обобщенных классов полиномиальных решений в задачах динамики твердого тела. Сформулированы метод инвариантных соотношений Т. Леви–Чивиты, метод инвариантных соотношений П. В. Харламова и метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений, предложенный А. М. Ковалевым, Г. В. Горром, В. Н. Неспирым. Приведены основные сведения и результаты из теории степенной геометрии А. Д. Брюно.

2.1. Уравнения движения гиростата с неподвижной точкой под действием силы тяжести

Рассмотрим моделирование движения гиростата S с неподвижной точкой в случае, когда на него действует сила тяжести. Обозначим через O неподвижную точку гиростата, C_0 – центр масс тела-носителя. Подвижную систему координат O_{xyz} тела-носителя S_0 свяжем с ортонормированным базисом $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Единичные векторы неподвижной системы координат $O_{\xi\eta\zeta}$ обозначим через $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

В качестве несомого ротора рассмотрим симметричный гироскоп S_1 , который вращается вокруг оси симметрии l . Положим $\mathbf{r}_0 = \mathbf{O}\mathbf{C}_0$; C_1 – центр масс гироскопа S_1 , $\mathbf{h} = \mathbf{O}\mathbf{C}_1$; m_0 – масса S_0 , m_1 – масса S_1 ; g – модуль ускорения свободного падения. Тогда центр масс гиростата S (системы тел S_0 и S_1) определяется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{h}}{m}, \quad m = m_0 + m_1. \quad (2.1)$$

Будем полагать, что на тело-носитель S_0 действует сила тяжести $m_0g\boldsymbol{\nu}$, на тело S_1 – $m_1g\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, неподвижный в пространстве. Используя теорему об изменении момента количества движения гиростата S , запишем следующие уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{s} = s\mathbf{e}, \quad s = mg|\mathbf{r}_c|, \quad (2.2)$$

где \mathbf{x} – момент количества движения S : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Здесь \mathbf{x}_1 – момент количества движения тела S_0 , \mathbf{x}_2 – момент количества движения тела S_1 . Следуя [122], считаем, что силы трения между S_0 и S_1 не возникают. Пусть единичный вектор оси симметрии тела S_1 обозначен через $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ и имеет разложение

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = l_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + l_2\boldsymbol{\epsilon}_2 + l_3\boldsymbol{\epsilon}_3, \quad (2.3)$$

а вектор $\mathbf{h} = \mathbf{O}\mathbf{C}_1$ представим в виде

$$\mathbf{h} = h_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + h_2\boldsymbol{\epsilon}_2 + h_3\boldsymbol{\epsilon}_3. \quad (2.4)$$

В равенствах (2.3), (2.4) l_i и h_i ($i = \overline{1,3}$) – постоянные. Для анализа относительного движения тела S_1 полагаем, что угол вращения тела S_1 относительно оси l равен κ ; параметр D_1 характеризует момент инерции тела S_1 относительно l ; параметр B_1 характеризует момент инерции тела S_1 относительно оси, ортогональной l .

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела S_0 , тогда угловая скорость S_1 равна $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} + \dot{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$, где $\dot{\kappa} = d\kappa/dt$ – скорость вращения S_1 по

отношению к S_0 .

Выпишем значения моментов количества движения тел S_0 и S_1 [129] относительно точки O в базисе ϵ_i ($i = \overline{1, 3}$)

$$\mathbf{x}_1 = A^{(0)}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x}_2 = m_1\mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + D_1(\omega_1 + \dot{\kappa})\epsilon_1 + B_1(\omega_2\epsilon_2 + \omega_3\epsilon_3). \quad (2.5)$$

В (2.5) $m_1\mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) = \mathbf{x}_2^{(1)}$ – момент количества движения тела S_1 в предположении, что масса S_1 сосредоточена в точке C_1 , а выражение

$$\mathbf{x}_2^{(2)} = D_1(\omega_1 + \dot{\kappa})\epsilon_1 + B_1(\omega_2\epsilon_2 + \omega_3\epsilon_3)$$

определяет момент количества движения тела S_1 относительно центра масс C_1 . Отметим, что $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^{(1)} + \mathbf{x}_2^{(2)}$. Тензор $A^{(0)}$ симметричен и имеет компоненты

$$\begin{aligned} A_{11}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho(y^2 + z^2)dV_0, & A_{22}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho(z^2 + x^2)dV_0, \\ A_{33}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho(x^2 + y^2)dV_0, & A_{12}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho xy dV_0, \\ A_{13}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho xz dV_0, & A_{23}^{(0)} &= \int_{V_0} \rho yz dV_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ρ – плотность тела S_0 , V_0 – объем; x, y, z – координаты точки $M_0 \in S_0$. Величины (2.6) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} A_{ii}^{(0)} &> 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad A_{11}^{(0)} + A_{22}^{(0)} > A_{33}^{(0)}, \quad A_{22}^{(0)} + A_{33}^{(0)} > A_{11}^{(0)}, \\ A_{33}^{(0)} + A_{11}^{(0)} &> A_{22}^{(0)}, \quad |A_{12}^{(0)}| \leq \frac{1}{2}A_{33}^{(0)}, \quad |A_{13}^{(0)}| \leq \frac{1}{2}|A_{22}^{(0)}|, \\ |A_{23}^{(0)}| &\leq \frac{1}{2}|A_{11}^{(0)}|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В статье [129] показано, что если в оси закрепления l отсутствуют силы трения, то выполняется условие $\mathbf{x}_2^{(2)}\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = \text{const}$. Обозначая эту постоянную через $\boldsymbol{\lambda}$, для момента количества движения гиростата S имеем выражение

$$\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \quad (\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}), \quad (2.8)$$

где тензор A симметричен и в силу (2.3)-(2.5) имеет компоненты

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11}^{(0)} + B_1(l_2^2 + l_3^2) + m_1(h_2^2 + h_3^2), \\ A_{23} &= A_{23}^{(0)} - B_1 l_2 l_3 + m h_2 h_3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В формулах (2.9) часть значений тензора A , остальные элементы получим циклической перестановкой цифр 1, 2, 3, на что указывает символ (123), оставляя B_1 , m_1 без изменения.

Значение параметра λ определяем в силу (2.8):

$$\lambda = D_1(\omega_1 + \dot{\kappa})$$

Можно показать, что величины (2.9) тоже удовлетворяют условиям типа (2.7). Распишем равенство из (2.2), используя формулы (2.8) и равенство $d\mathbf{x}/dt = \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$. Тогда

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad (2.10)$$

где точкой над $\boldsymbol{\omega}$ обозначена относительная производная (производная в базисе $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$). В силу того, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ неподвижен в пространстве получим

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.11)$$

Система (2.10), (2.11) описывает движение гиростата S под действием силы тяжести. Она является обобщением уравнений Эйлера–Пуассона классической задачи.

Замечание. Рассмотрим случай переменного гиростатического момента. Запишем уравнение для момента количества движения тела S_1 относительно C_1

$$\frac{d(A^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1)}{dt} = L_1, \quad (2.12)$$

где

$$A^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1 = B_1\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}) + D_1 p_1 \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \quad p_1 = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \dot{\kappa}. \quad (2.13)$$

Подставим (2.13) в уравнение (2.12) и положим, что $L_1 = L_1(t)$, где $L_1(t)$

– известная непрерывная функция переменной t . Тогда получим

$$p_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{L_1(t)}{D_1} dt. \quad (2.14)$$

Обозначим через $\boldsymbol{\lambda}(t)$ вектор-функцию

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = D_1 p_1(t) \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}. \quad (2.15)$$

Момент количества движения гиростата S имеет вид

$$\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t), \quad (2.16)$$

где $A\boldsymbol{\omega}$ принимает значение, совпадающее с первым слагаемым правой части (2.8), а $\boldsymbol{\lambda}(t)$ выражается по формуле (2.15). В силу теоремы об изменении момента количества движения и соотношений (2.14)-(2.16) запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\lambda}(t) = L_1(t), \quad (2.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.18)$$

Отличие уравнений (2.17), (2.18) от уравнений (2.10), (2.11) состоит в том, что уравнения (2.10), (2.11) имеют три первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad (2.19)$$

где k и E - постоянные, а уравнения (2.17), (2.18) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \quad (2.20)$$

2.2. Редукция уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом

2.2.1. Особые решения уравнений движения гиростата

Рассмотрим уравнения (2.10), (2.11) с интегралами (2.19) в переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = A\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad a\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad (2.22)$$

где $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор ($a = A^{-1}$), то есть вектор $\boldsymbol{\omega}$ выражается по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

При проведении редукции уравнений (2.21) с интегралами (2.22) следует учитывать результат статьи Г. В. Горра, А. А. Илюхина, Е. И. Харламовой [38], в которой показано, что рассмотрение только динамического уравнения из (2.21) и интегралов (2.22) недостаточно для получения решения задачи, которое характеризуется условием

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (2.24)$$

Из первого уравнения системы (2.21) при наличии равенства (2.24) следует, что выполняется инвариантное соотношение

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = c_0^2, \quad (2.25)$$

где c_0^2 – постоянная. Когда имеют место соотношения (2.24), (2.25) необходимо рассматривать и уравнение Пуассона из (2.21).

Если модуль момента количества движения не является постоянным, то есть равенство (2.25) не выполняется, тогда уравнение Пуассона из (2.21)

можно не рассматривать.

2.2.2. Обобщенные уравнения В. Гесса

Следуя [156], из интегралов (2.22) определим вектор $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\vartheta - \rho^2} [(k - \mu\rho)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + (\mu\vartheta - k\rho)\mathbf{e} + F^{1/2}(x_1, x_2, x_3)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{e}], \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{e}, \quad \vartheta = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2, \quad \mu = \frac{(\mathbf{x} \cdot a\mathbf{x}) - 2E}{2s}, \\ F(x_1, x_2, x_3) &= (1 - \mu^2)(\vartheta - \rho^2) - (k - \mu\rho)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Подставляя выражение для $\boldsymbol{\nu}$ из (2.26) в первое уравнение из (2.21), получим аналог уравнения В. Гесса [156]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \frac{s}{\vartheta - \rho^2} [(k - \mu\rho)\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + \\ &+ F^{1/2}(x_1, x_2, x_3)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} - \rho\mathbf{e})]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Величины ρ , ϑ , μ из (2.27) называются аналогами инвариантов В. Гесса. Выше показано, что уравнение (2.28) необходимо рассматривать при $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 \neq \text{const}$. Тогда уравнение Пуассона из (2.21) выполняется.

Отметим, что решение В. Гесса уравнений Эйлера-Пуассона получено при наличии инвариантного соотношения $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = 0$. Для этого решение уравнения (2.26) необходимо рассматривать при $\mathbf{x}^2 \neq \text{const}$.

Однако, уравнение В. Гесса [156] и его обобщение (2.28) не нашли применения при построении решений исходных уравнений (2.21). Поскольку вторая форма уравнений В. Гесса также не нашла применения в научных исследованиях уравнений (2.21), то ее рассматривать не будем.

Уравнение (2.26) изучается при условии, что в начальный момент $\vartheta - \rho^2 \neq 0$. Недостатком уравнения (2.26) является наличие в правой части функции $F(x_1, x_2, x_3)$, что приводит к ветвлению (неоднозначности) решения уравнения (2.26).

2.2.3. Скалярные уравнения движения гиростата под действием силы тяжести

Запишем уравнения (2.10), (2.11) в главной системе координат: $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3), \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \quad (2.30)$$

Уравнения (2.29), (2.30) имеют три первых интеграла и являются уравнениями Эйлера-Пуассона. Запишем эти интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k, \\ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если в (2.10), (2.11) учитывать гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, то в скалярной форме они таковы

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3), \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \quad (2.33)$$

Уравнения (2.32), (2.33) допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + (A_3\omega_3 + \lambda_3)\nu_3 = k, \\ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Уравнения (2.10), (2.11) часто используются в переменных x_1, x_2, x_3 – компонентах вектора $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$. Обозначим $A^{-1} = a$, где a – гирационный тензор.

Пусть

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3). \quad (2.35)$$

С учетом (2.35) уравнения (2.10), (2.11) и их интегралы в переменных x_i, ν_i ($i = \overline{1, 3}$) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_3 - a_2)x_2x_3 + a_3\lambda_2x_3 - a_2\lambda_3x_2 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \\ \dot{x}_2 &= (a_1 - a_3)x_3x_1 + a_1\lambda_3x_1 - a_3\lambda_1x_3 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3), \\ \dot{x}_3 &= (a_2 - a_1)x_1x_2 + a_2\lambda_1x_2 - a_1\lambda_2x_1 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad (x_1 + \lambda_1)\nu_1 + (x_2 + \lambda_2)\nu_2 + (x_3 + \lambda_3)\nu_3 = k, \\ a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.4. Первая форма уравнений П. В. Харламова

Следуя [122, 131], положим в (2.21), (2.22)

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2), \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu, \nu_1, \nu_2), \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad (2.39)$$

$$a^* = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\omega = ax + b_1y + b_2z, \quad \omega_1 = b_1x + a_1y, \quad \omega_2 = b_2x + a_2y,$$

Тогда уравнения и интегралы из (2.21), (2.22) примут вид [122]:

$$\dot{x} = (a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2), \quad (2.41)$$

$$\dot{y} = (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(x + \lambda) - s\nu_2, \quad (2.42)$$

$$\dot{z} = -(ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) + (a_1y + b_1x)(x + \lambda) + s\nu_1, \quad (2.43)$$

$$\dot{\nu} = (a_2z + b_2x)\nu_1 - (a_1y + b_1x)\nu_2, \quad (2.44)$$

$$\dot{\nu}_1 = (ax + b_1y + b_2z)\nu_2 - (a_2z + b_2x)\nu, \quad (2.45)$$

$$\dot{\nu}_2 = -(ax + b_1y + b_2z)\nu_1 + (a_1y + b_1x)\nu, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 &= 1, \quad (x + \lambda)\nu + (y + \lambda_1)\nu_1 + (z + \lambda_2)\nu_2 = k, \\ \nu s &= \frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E. \end{aligned} \quad (2.47)$$

В специальных осях, в которых записаны обозначения (2.39), (2.40) νs выражается из последнего соотношения системы (2.47), $\nu_1 s, \nu_2 s$ явно выражаются из уравнений (2.42), (2.43) через x, y, z и производные \dot{y} и \dot{z} . Выпишем $\nu_1 s, \nu_2 s$

$$\nu_1 s = (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1z)(x + \lambda) + \dot{z}, \quad (2.48)$$

$$\nu_2 s = (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(x + \lambda) - \dot{y}. \quad (2.49)$$

Подставим ν из (2.47) и ν_1, ν_2 из (2.48), (2.49) в первые два интеграла системы (2.47)

$$\begin{aligned} (y + \lambda_1)\dot{z} - (z + \lambda_2)\dot{y} + (ax + b_1y + b_2z)[(y + \lambda_1)^2 + \\ + (z + \lambda_2)^2] + (x + \lambda)\left[\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - \right. \\ \left. - E - (y + \lambda_1)(a_1y + b_1x) - (a_2z + b_2x)(z + \lambda_2)\right] - ks = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} [\dot{y} - (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) + (a_2z + b_2x)(x + \lambda)]^2 + \\ + [\dot{z} + (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(x + \lambda)]^2 + \\ + \left[\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E\right]^2 - s^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Уравнения (2.50), (2.51) вместе с уравнением (2.41) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно x, y, z . Для получения системы уравнений первого порядка П. В. Харламов в уравнениях (2.50), (2.51) с помощью уравнения (2.41) переходит к дифференцированию по пе-

ременной x

$$\begin{aligned}
& [(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)][(y + \lambda_1)z' - (z + \lambda_2)y'] + \\
& + (ax + b_1y + b_2z)[(y + \lambda_1)^2 + (z + \lambda_2)^2] + (x + \lambda) \times \\
& \times \left[\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - (a_1y + b_1x)(y + \lambda_1) - \right. \\
& \left. - (a_2z + b_2x)(z + \lambda_2) - E \right] - ks = 0,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
& \{[(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)]y' - (ax + b_1y + b_2z) \times \\
& \times (z + \lambda_2) + (a_2z + b_2x)(x + \lambda)\}^2 + \{[(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - \\
& - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)]z' + (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x) \times \\
& \times (x + \lambda)\}^2 + \left[\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E \right]^2 - s^2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной x . Если из уравнений (2.52), (2.53) определены функции $y = y(x)$, $z = z(x)$, то зависимости от x переменных ν, ν_1, ν_2 получим на основании последнего равенства из (2.47) и равенств (2.48), (2.49) с учетом (2.42), (2.43)

$$\nu s = \frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 s &= (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1z)(x + \lambda) + \\ & + z'[(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)], \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \nu_2 s &= (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_1) - (a_2z + b_2x)(x + \lambda) - \\ & - y'[(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)]. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Зависимость $x(t)$ находится из уравнения (2.41).

2.2.5. Вторая форма уравнений П. В. Харламова

Подставим соотношения (2.54)-(2.56) в уравнения Пуассона (2.44)-(2.46). При подстановке в первое уравнение этой системы получим тождество, а при

подстановке во второе и третье уравнения найдем

$$\begin{aligned}
& y''[(a_2 - a_1)yz + b_2xy - b_1xz + (\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1)x - \lambda_2a_1y + \lambda_1a_2z] + \\
& + y'\{\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1 + b_2y - b_1z + y'[z(a_2 - a_1) + b_2x - \lambda_2a_1] + \\
& + z'[y(a_2 - a_1) - b_1x + \lambda_1a_2]\} = a\lambda_2 - \lambda b_2 - 2b_2x + b_1y'(z + \lambda_2) + \\
& + z'[2b_2z + x(a - a_2) + b_1y + b_2\lambda_2 - \lambda a_2] - [(a_2 - a_1)yz + b_2xy - \\
& - b_1xz + (\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1)x - \lambda_2a_1y + \lambda_1a_2z]^{-1}\{(a_1y + b_1x) \times \\
& \times [\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E] - (ax + b_1y + b_2z) \times \\
& \times [(ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(x + \lambda)] + \\
& + z'(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)\}, \tag{2.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z''[(a_2 - a_1)yz + b_2xy - b_1xz + (\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1)x - \lambda_2a_1y + \lambda_1a_2z] + \\
& + z'\{\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1 + b_2y - b_1z + y'[z(a_2 - a_1) + b_2x - \lambda_2a_1] + \\
& + z'[y(a_2 - a_1) - b_1x + \lambda_1a_2]\} = \lambda b_1 - \lambda_2a + 2b_1x + (a_1 - a)y + \\
& + y'[a_1\lambda_2 - \lambda_2b_1 + (a_1 - a)x - 2b_1y - b_2z] - b_2z'(y + \lambda_2) + \\
& + [(a_2 - a_1)yz + b_2xy - b_1xz + (\lambda_1b_2 - \lambda_2b_1)x - \lambda_2a_1y + \lambda_1a_2z]^{-1} \times \\
& \times \{(ax + b_1y + b_2z)[(ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(x + \lambda)] + \\
& + y'((a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2))\} - \\
& + (a_2z + b_2x)[\frac{1}{2}(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E]\}. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Уравнения (2.57), (2.58) являются уравнениями второго порядка, интегралы данной системы – это уравнения (2.52), (2.53). Система (2.57), (2.58) имеет преимущества перед системой (2.52), (2.53). Например, при исследовании полиномиальных решений.

Рассмотрим случай, когда специальные оси гиростата совпадают с главными осями. Следуя [131], положим, что центр масс гиростата и вектор гиростатического момента принадлежат первой оси. Тогда $b_1 = b_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Пусть компоненты тензора a таковы $1/A_1$, $1/A_2$, $1/A_3$, компоненты вектора момента количества движения имеют вид A_1p , A_2q , A_3r (p, q, r компоненты вектора угловой скорости), а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$: ν_1, ν_2, ν_3 . Уравнения (2.41), (2.52), (2.53) примут вид

$$\dot{p} = \frac{A_2 - A_3}{A_1} qr, \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 A_3 (A_2 - A_3)}{A_1} [q^2 (r^2)' - r^2 (q^2)'] + [A_2 (2A_2 - A_1) q^2 + \\ & + A_3 (2A_3 - A_1) r^2] p - \lambda (A_2 q^2 + A_3 r^2) + A_1^2 p^3 + \lambda A_1 p^2 - \\ & - 2A_1 E p - 2(\lambda E + \kappa s) = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} & r^2 \left[\frac{A_2 (A_2 - A_3)}{2A_1} (q^2)' - (A_1 - A_3) p + \lambda \right]^2 + q^2 \left[\frac{A_3 (A_3 - A_2)}{2A_1} (r^2)' + \right. \\ & \left. + (A_1 - A_2) p + \lambda \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) - E \right]^2 - s^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

После интегрирования уравнений (2.59)-(2.61) компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ определим из уравнений

$$\begin{aligned} \nu_1 s &= \frac{1}{2} (A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) - E, \\ \nu_2 s &= q \left[\frac{A_3 (A_2 - A_3)}{2A_1} (r^2)' + (A_2 - A_1) p - \lambda \right], \\ \nu_3 s &= r \left[\frac{A_2 (A_3 - A_2)}{2A_1} (q^2)' + (A_3 - A_1) p - \lambda \right]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Запишем также уравнения (2.57), (2.58) при указанных выше предположениях

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 (A_2 - A_3)^2}{(A_1)^2} [r^2 (q^2)'' + \frac{1}{2} (q^2)' (r^2)'] - \frac{(A_2 - A_3)}{A_1} \times \\ & \times [(2A_3 - A_1) p - \lambda] (r^2)' + A_2 q^2 + \left[A_3 - \frac{2(A_3 - A_1)(A_2 - A_3)}{A_1} \right] \times \\ & \times r^2 + (3A_1 - 2A_2) p^2 + 2\lambda p - 2E = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_3 (A_3 - A_2)^2}{(A_1)^2} [q^2 (r^2)'' + \frac{1}{2} (q^2)' (r^2)'] - \frac{(A_3 - A_2)}{A_1} \times \\ & \times [(2A_2 - A_1) p - \lambda] (q^2)' + A_3 r^2 + \left[A_2 - \frac{2(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_1} \right] \times \\ & \times q^2 + (3A_1 - 2A_3) p^2 + 2\lambda p - 2E = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

В статье [122] вместо функций $q^2(p)$, $r^2(p)$ введены новые функции $R(p)$, $Q(p)$,

так что

$$\nu_2 s = qQ'(p), \quad \nu_3 s = rR'(p). \quad (2.65)$$

При этом, в силу (2.62), получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{A_2 - A_3}{A_1} A_3 r^2 &= (A_1 - A_2)p^2 + 2\lambda p + 2Q, \\ \frac{A_3 - A_2}{A_1} A_2 q^2 &= (A_1 - A_3)p^2 + 2\lambda p + 2R. \end{aligned} \quad (2.66)$$

На основании формул (2.66) из уравнений (2.60), (2.61), (2.63), (2.64) находим

$$\begin{aligned} &[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2 + 2\lambda p] R'(p) - [2R(p) + (A_1 - A_3)p^2 + 2\lambda p] \times \\ &\times Q'(p) + (A_1 p + \lambda) \left(Q(p) - R(p) + \frac{A_3 - A_2}{A_1} E \right) = \frac{(A_2 - A_3)ks}{A_1}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} &A_2(A_2 - A_3) [2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2 + 2\lambda p] (R'(p))^2 + A_3(A_3 - A_2) \times \\ &\times [2R(p) + (A_2 - A_3)p^2 + 2\lambda p] (Q'(p))^2 + A_1 A_2 A_3 \times \\ &\times \left(Q(p) - R(p) + \frac{A_3 - A_2}{A_1} E \right)^2 = \frac{A_2 A_3 (A_2 - A_3)^2}{A_1} s^2, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} &[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2 + 2\lambda p] Q''(p) + [R'(p) + (A_1 - A_3)p + \lambda] \times \\ &\times Q'(p) + A_2 p R'(p) - \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_2 E = 0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} &[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2 + 2\lambda p] R''(p) + [Q'(p) + (A_1 - A_2)p + \lambda] \times \\ &\times R'(p) + A_3 p Q'(p) - \frac{A_1 A_3}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_3 E = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Если уравнения (2.67)-(2.70) проинтегрированы, то из формул (2.65) найдем $\nu_2(p)$, $\nu_3(p)$, а $\nu_1(p)$ определим из уравнения

$$\nu_1 s = \frac{A_1}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) - E. \quad (2.71)$$

Зависимость $p(t)$ определяется из уравнения (2.59). Уравнения (2.69), (2.70) являются обобщениями уравнений Н. Ковалевского [160]. В работе Л. Н. Сре-тенского [103] приведены уравнения, которые являются аналогом уравнений Н. Ковалевского, и указано, что из них можно получить решение С. В. Ко-валевской.

2.2.6. Краткий анализ других форм уравнений

Обобщенные уравнения А. И. Докшевича. Рассмотрим вначале обобщение уравнений А. И. Докшевича [53], предложенное в [23, 24]. В этой работе предполагается, что вектор центра масс и вектор гиростатического момента лежат в главной плоскости эллипсоида инерции $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$, а гирационный тензор (a_{ij}) содержит две нулевые компоненты $a_{13} = a_{23} = 0$. То есть

$$\boldsymbol{\omega} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2, a_{33}x_3).$$

Вместо вектора \mathbf{x} в работе [24] рассматривается вектор $\mathbf{M} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}$, то есть уравнения движения гиростата и их интегралы таковы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times a \cdot (\mathbf{M} - \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a \cdot (\mathbf{M} - \boldsymbol{\lambda}), \\ \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu} &= k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \\ (a \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) - 2(a \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - a \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) &= 2E. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Обобщения уравнений А. И. Докшевича, полученные в процессе редукции уравнений (2.72), записаны в виде [23]

$$\begin{aligned} U'' + U &= (a_7V' + a_6)V'' + a_5V'^2 + (a_4V + a_3)V' + a_2V^2 + a_1V + a_0, \\ (V' + b_{12}V + b_{11})U' - (2V'' + b_{10}V + b_9)U + b_8V^2V'' + b_{12}V'^3 + \\ &+ (b_7V + b_6)V'^2 + (b_5V + b_4)V' + b_3V^3 + b_2V^2 + b_1V = b_0, \end{aligned} \tag{2.73}$$

где τ – независимая переменная, штрих обозначает дифференцирование по

τ , при этом $d\tau/dt = a_{33}z$ и

$$\begin{aligned}
V &= \frac{a_{33}}{a_{33} - a_{22}}x, \quad U = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 \left[\frac{2a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}} + \frac{3a_{12}^2}{(a_{33} - a_{22})^2} \right], \\
c_1 &= 1 - a_{22}a_{33}^{-1}, \quad c_2 = -a_{12}^2a_{33}^{-2} + (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33})a_{33}^{-2}, \quad c_3 = a_{12}a_{33}^{-1}, \\
b_{12} &= c_3, \quad b_{11} = c_3c_1^{-1}\lambda_1 + (c_1 - 1)c_1^{-1}\lambda_2, \quad b_{10} = 2c_2 - c_1, \\
b_9 &= 2(c_1 - c_2)c_1^{-1}\lambda_1 + 2c_3c_1^{-1}\lambda_2, \quad b_8 = c_1^2 + c_3^2 - b_{10}, \quad 2b_7 = -b_8 + 3c_3^2, \\
2b_6 &= 4b_{11}c_3 - b_9, \quad b_5 = -a_0c_3, \quad b_4 = -a_6b_{11}, \quad 2b_3 = c_1^2c_2 - b_{10}^2, \\
2b_2 &= -(b_9 + 2c_3b_{11})b_{10}, \quad b_1 = \frac{c_1b_9^2}{4} - c_1a_0 - c_2b_{11}^2 - c_3b_9b_{11}, \\
2b_0 &= 2ka_{33}^{-1} + b_0b_{11}^2, \quad a_7 = -3c_3, \quad a_6 = b_9 - b_{11}c_3, \quad 2a_5 = 3c_1 - 2c_2 - 1, \\
a_4 &= (c_2 - 1)c_3, \quad a_3 = (c_2 - 1)b_{11}, \quad 2a_2 = (c_2 - 1)b_{10}, \\
a_1 &= b_0c_2 - b_{11}c_3, \quad 4a_0 = 4Ea_{33}^{-1} + b_0^2 - 2b_{11}^2 - \lambda_1b_9 + 2\lambda_2b_{11}.
\end{aligned}$$

Здесь x, z – компоненты вектора \mathbf{M} , то есть $x = x_1 + \lambda_1, z = z_3$.

После интегрирования уравнений (2.73) из уравнений (2.72) можно найти компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$, а из уравнения $d\tau/dt = a_{33}z$ определяется зависимость переменной τ от времени. Наиболее эффективна система в случае, когда гиростатический момент равен нулю [53].

Форма уравнений, рассмотренная А. И. Докшевичем, Г. В. Мозалевской. Пусть центр масс гиростата лежит на первой главной оси грационного эллипсоида, а гиростатический момент направлен по третьей главной оси [53]. Обозначим $a = \text{diag}(a, b, c)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ и запишем уравнения движения гиростата под действием силы тяжести (x, y, z – компоненты гиростатического момента)

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (c - b)yz - \lambda by, \\
\dot{y} &= (a - c)xz + \lambda ax - \nu_3 s, \quad \dot{z} = (b - a)xy + \nu_2 s, \\
\dot{\nu}_1 &= cz\nu_2 - by\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = ax\nu_3 - cz\nu_1, \quad \nu_3 = by\dot{\nu}_1 - ax\nu_2, \\
\nu_1^2 &+ \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2) - s\nu_1 = E, \\
x\nu_1 &+ y\nu_2 + (z + \lambda)\nu_3 = k.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Компоненты угловой скорости имеют вид

$$\omega_1 = ax, \quad \omega_2 = by, \quad \omega_3 = cz.$$

Следуя А. И. Докшевичу, Г. В. Мозалевская [88] вводит переменную τ по формуле

$$\frac{d\tau}{dt} = 2(c-b)xy, \quad (2.75)$$

а вместо переменных x, y переменные

$$x^2 = u(\tau), \quad y^2 = v(\tau). \quad (2.76)$$

Обозначая дифференцирование по τ штрихом, из уравнений (2.74) получим [88]

$$\begin{aligned} z &= u' + \mu b, \\ \nu_2 s &= xy [2(c-b)u'' + a - b], \\ \nu_3 s &= x [(a-c)u' - (c-b)v' + \mu c(a-b)], \end{aligned} \quad (2.77)$$

где $\mu = \lambda/(c-b)$. Из интеграла энергии, который включен в систему (2.74), следует

$$\nu_1 s = \frac{1}{2} [au + bv + c(u' + \mu b)^2] - E. \quad (2.78)$$

Подставляя (2.76)-(2.78) в интегралы из системы (2.74) получим уравнения движения гиростата в форме, которую использовали А. И. Докшевич, Г. В. Мозалевская [53, 88]:

$$\begin{aligned} 4(c-b)vu'' + (2a-c)u'^2 - 2(c-b)u'v' + 2c\mu(2a-c)u' - \\ - 2(c-b)c\mu v' + au + (2a-b)v + 2(a-b)c^2\mu^2 - h = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} 4(c-b)(2a-c)uu'' - 4(c-b)^2uv'' + [(c-b)(2a-c) - c^2] u'^2 - \\ - 2(c-b)^2u'v' + 2c[a(c-b) - bc]\mu u' + a(2a-3b)u - b^2v + bh = 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где $h = 2E - cb^2\mu^2$, а постоянная площадей k принята равной нулю. Уравнения (2.79), (2.80) использованы при построении решений [53, 88].

Форма уравнений, рассмотренная П. В. Харламовым, А. М. Ковалевым. В работе [128] рассмотрен случай, когда гиростатический момент

направлен по третьей оси, а центр масс принадлежит первой главной оси. Пусть для упрощения записи в уравнениях (2.41)-(2.46) величины a_1 и a_2 обозначены через b и c , вместо x и y введены переменные $x^2 = u(z^*)$, $y^2 = v(z^*)$, $z^* = x + \lambda$. Следуя [128], полагаем $k = 0$. Опустив индекс у λ_2 , запишем два из указанных в [128] уравнений

$$2[(c - b)z^* - c\lambda](2v - z^*v') + u' [au + h + (2a - b)v + (2a - c)z^{*2}] = 0, \quad (2.81)$$

$$2u'^2 [(b - c)z^* + c\lambda] \{2(2a - c)u + [(a - c)z^* + c\lambda] u' + [(b - c)z^* + c\lambda] v'\} + 4u [(b - c)z^* + c\lambda] \{[(b - c)z^* + c\lambda] \times (u'v'' - v'u'') + (b - c)u'v'\} + [a(3b - 2a)u + b^2v + bcz^{*2} - 2bc\lambda z^* + bh] u'^3 = 0, \quad (2.82)$$

где h – постоянная величина, введенная вместо E : $h = c\lambda^2 - 2E$, штрих означает дифференцирование по z^* . С помощью уравнений (2.81), (2.82) найдено решение [128].

2.3. Уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гиростатических сил

Одним из обобщений уравнений движения гиростата в поле силы тяжести являются уравнения движения гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского поля, кулоновского и магнитного поля сил. Запишем эти уравнения в векторной форме

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad (2.83)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.84)$$

где B и C – симметричные матрицы третьего порядка. Матрица B характеризует гироскопические силы, обусловленные силой Лоренца; матрица C –

потенциальные силы, обусловленные силой притяжения и кулоновской силой. Остальные обозначения в (2.83), (2.84) прежние (см. п. 2.1-2.2).

Уравнения (2.83), (2.84) имеют три первых интеграла

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} &= 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \\ A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Интерес уравнений (2.83), (2.84) состоит в том, что линейным преобразованием они преобразуются к уравнениям движения тела в жидкости [168,169]. Поэтому построение решений для уравнений (2.83), (2.84) дает возможность получить и решение уравнений движения тела в жидкости (см. обзоры [29–31]).

Запишем уравнения (2.83), (2.84) в случае

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (e_1, e_2, e_3), \quad A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3), \\ C &= \text{diag}(C_1, C_2, C_3), \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Тогда из (2.83)-(2.85) следует

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \nu_3(\omega_2B_3 + s_2) - \nu_2(\omega_3B_2 + s_3), \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \nu_1(\omega_3B_1 + s_3) - \nu_3(\omega_1B_3 + s_1), \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \nu_2(\omega_1B_2 + s_1) - \nu_1(\omega_2B_1 + s_2), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + \\ &+ (A_3\omega_3 + \lambda_3)\nu_3 - \frac{1}{2}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = k, \\ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) &= 2E. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Уравнения (2.87), (2.88) с интегралами (2.89) имеют свойства, которые отличаются от свойств классических уравнений Эйлера–Пуассона. Например,

уравнения Эйлера–Пуассона имеют три общих случая интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), а уравнения Кирхгофа–Пуассона (2.87)–(2.88) имеют шесть общих случаев интегрируемости (два случая А. Клебша, случаи Г. Кирхгофа, В. А. Стеклова, А. М. Ляпунова, В. В. Соколова). Кроме того, для уравнений (2.83), (2.84) известно значительно большее количество частных решений – большинство из них проанализировано в монографии Г. В. Горра, А. В. Мазнева [30].

Интерес представляет результат по редукции уравнений (2.87), (2.88), указанный в работе [28]. Подробно он будет изложен в разделе 5.

Рассмотрим задачу о движении тела в жидкости. Кинетическая энергия имеет вид [123]

$$2T = (A^{-1}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) + (b\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) + 2(\mathbf{P} \cdot c\mathbf{R}). \quad (2.90)$$

Из монографии [30] следует

$$c = \frac{1}{R_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_1}{2A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_1}{2A_3} \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_1^2}{4A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_1^2}{4A_3} \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Подставим (2.91) в формулу (2.90)

$$2T = \frac{1}{A_1}P_1^2 + \frac{1}{A_2}P_2^2 + \frac{1}{A_3}P_3^2 + \frac{B_1^2}{4R_0^2} \left(\frac{1}{A_2}R_2^2 + \frac{1}{A_3}R_3^2 \right) + B_1 \left(\frac{1}{A_2}P_2R_2 + \frac{1}{A_3}P_3R_3 \right). \quad (2.92)$$

В формулах (2.90), (2.92) P_1, P_2, P_3 – компоненты импульсной пары; R_1, R_2, R_3 – компоненты импульсной силы. Данные векторы в силу аналогии [168, 169] выражаются через векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ уравнений (2.83), (2.84):

$$\mathbf{R} = R_0\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{P} = A\boldsymbol{\omega} - R_0Ac\boldsymbol{\nu}. \quad (2.93)$$

Если будет найдено решение уравнений (2.83), (2.84) при использовании обобщенных уравнений Ковалевского–Харламова, то с помощью формул (2.93) можно выписать решение уравнений задачи о движении тела в жидкости.

2.4. Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона

Гиромагнитные явления играют важную роль в исследовании движений приборов в магнитных полях. Одно из таких явлений обусловлено эффектом Барнетта–Лондона, суть которого состоит в следующем. Если нейтральный ферромагнетик (первоначально ненамагниченный) поместить в магнитное поле и придать ему вращение, то, в силу эффекта Барнетта, он становится намагниченным вдоль оси вращения. Подобное явление имеет место при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона).

Магнитный момент тела $B\boldsymbol{\omega}$ (B – симметричный оператор) при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля. Взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента вокруг вектора напряженности поля.

Рассмотрим движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Уравнения движения такого гиростата с учетом момента ньютоновских сил запишем в векторном виде [71].

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.94)$$

где A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; \mathbf{s} – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными означает относительную производную.

Уравнения (2.94) допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0, \quad (2.95)$$

k_0 – постоянная интеграла площадей.

Отличие уравнений (2.83), (2.84) и (2.94) состоит в структуре слагаемых $\boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu}$ и $B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}$.

Так как изменение полной энергии гиристора определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}))]' = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.96)$$

то уравнения (2.94) не имеют интеграла энергии.

Теоретическое значение имеет редукция уравнений (2.94) на основе (2.95), указанная в работе [28], так как она относится к варианту вырожденной матрицы B .

2.5. Типы полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела

2.5.1. Полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева и их обобщения П. В. Харламова

Рассмотрим полиномиальные решения уравнений (2.67)–(2.70) следующего вида

$$\begin{aligned} Q(p) &= a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m, \\ R(p) &= b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Если найдены решения (2.97), то по формулам (2.66), которые запишем в виде

$$q^2(p) = \frac{A_1}{A_2(A_3 - A_2)} [(A_1 - A_3)p^2 + 2\lambda p + 2R(p)], \quad (2.98)$$

$$r^2(p) = \frac{A_1}{A_3(A_2 - A_3)} [(A_1 - A_2)p^2 + 2\lambda p + 2Q(p)], \quad (2.99)$$

определяются функции $q(p), r(p)$. Функции ν_i находятся по формулам (2.65), (2.71)

$$\nu_1(p) = \frac{1}{s} \left[\frac{A_1}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) - E \right], \quad (2.100)$$

$$\nu_2(p) = \frac{1}{s} q(p) Q'(p), \quad \nu_3(p) = \frac{1}{s} r(p) R'(p). \quad (2.101)$$

П. В. Харламов [122] в предположении, что максимальная степень многочлена $Q(p)$ равна 2, показал, что максимальная степень многочлена $R(p)$ равна 4. Он построил следующие решения

$$1. \quad q^2(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2, \quad r^2(p) = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2, \quad (2.102)$$

$$2. \quad q^2(p) = \alpha_0^* + \alpha_1^* p + \alpha_2^* p^2, \quad r^2(p) = \beta_0^* + \beta_1^* p + \beta_2^* p^2 + \beta_3^* p^3. \quad (2.103)$$

Первое решение (2.102) является обобщением решения В. А. Стеклова [104], второе решение (2.103) – обобщением решение Н. Ковалевского [160]. В [122] установлено, что решение Д. Н. Горячева [50]

$$3. \quad q^2(p) = \widetilde{\alpha}_0^* + \widetilde{\alpha}_2^* p^2, \quad r^2(p) = \widetilde{\beta}_0^* + \widetilde{\beta}_2^* p^2 + \widetilde{\beta}_4^* p^4 \quad (2.104)$$

не обобщается на случай движения гиростата под действием силы тяжести.

В статье [117] приведено уточнение результата [122] и показано, что классами (2.102)-(2.104) не исчерпываются все полиномиальные решения с квадратичным инвариантным соотношением. Указано решение, которое является частным случаем решения С. В. Ковалевской. Запишем его в виде [47]

$$q^2(p) = -\alpha p + \beta p^2, \quad r^2(p) = 4R^2 - p^2, \quad (2.105)$$

где α, β, R – постоянные параметры. Условия на главные моменты инерции таковы: $A_1 = A_2 = 2A_3$.

2.5.2. Полиномиальные решения класса С.А.Чаплыгина

Выполним в уравнениях (2.68)-(2.70) замену переменной p :

$$\sigma = p^{\frac{1}{3}} \quad (2.106)$$

и положим $\lambda = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} & [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \left(\sigma \frac{d^2Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right) + \\ & + \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \left[\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5 \right] + 3A_2\sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \\ & - \frac{9A_1A_2}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_2E\sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} & [2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6] \left(\sigma \frac{d^2R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right) + \\ & + \sigma \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \left[\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_2)\sigma^5 \right] + 3A_3\sigma^6 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \\ & - \frac{9A_1A_3}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_3E\sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} & A_2(A_2 - A_3) [2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6] \left(\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 + \\ & + A_3(A_3 - A_2) [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \left(\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 + \\ & + 9A_1A_2A_3\sigma^4 \left(Q(\sigma) - R(\sigma) + \frac{A_3 - A_2}{A_1} E \right)^2 = \frac{9A_2A_3(A_2 - A_3)^2 s^2}{A_1} \sigma^4. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Решение класса С. А. Чаплыгина таково

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &= a_0 + a_1\sigma + \dots + a_m\sigma^m, \\ R(\sigma) &= b_0 + b_1\sigma + \dots + b_n\sigma^n. \end{aligned} \quad (2.110)$$

В статье Г. В. Горра [39], при $A_1 \neq A_2$ доказано, что $m = 6$, $n = 12$; то есть

$$Q(\sigma) = \sum_{i=0}^6 a_i \sigma_i, \quad R(\sigma) = \sum_{j=0}^{12} b_j \sigma_j. \quad (2.111)$$

Показано [39], что решение (2.111) имеет место только в случае С. А. Чаплыгина [143]

$$\begin{aligned} q^2(p) &= p^{2/3}(\alpha_0 + \alpha_1 p^{4/3}), & r^2(p) &= p^{2/3}(\beta_0 + \beta_1 p^{4/3}), \\ \nu_1(p) &= \varepsilon_2 p^2 + \varepsilon_1 p^{2/3}, & \nu_2(p) &= \delta_1 p + \delta_2 p^{-1/3}, \\ \nu_3(p) &= r(\kappa_1 p + \kappa_2 p^{-1/3}), \end{aligned} \quad (2.112)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i, \delta_i, \kappa_i$ – параметры. В статье [109] завершено доказательство существования решения (2.111) и показано, что в случае $A_1 = A_2 = 4A_3$ (частный случай решения Д. Н. Горячева–С. А. Чаплыгина) уравнения (2.107)–(2.109) допускают решение

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &= \frac{3}{8} A_3 \sigma^2 (k \sigma^2 - 4b^2), \\ R(\sigma) &= -\frac{3}{2} b \sigma^2, \end{aligned} \quad (2.113)$$

где k, b – параметры.

2.5.3. Полиномиальные решения, рассмотренные Б. И. Коносевичем и Е. В. Поздняковичем

Приведем класс полиномиальных решений [74], которые получены для уравнений Эйлера–Пуассона и обобщены в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести [134]. Запишем все переменные задачи

$$\begin{aligned} p &= v^2 + p_0, & q^2 &= \sigma^4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2 + \sigma_1 v + \sigma_0, \\ r^2 &= \kappa_0 v^2 (\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_0), \\ \nu_1 &= \varepsilon_4 \sigma^4 + \varepsilon_3 \sigma^3 + \varepsilon_2 \sigma^2 + \varepsilon_1 \sigma + \varepsilon_0, \\ \nu_2 &= q(\mu_3 \sigma^3 + \mu_2 \sigma^2 + \mu \sigma + \mu_0), \\ \nu_3 &= r(\kappa_2 \sigma^2 + \kappa_1 \sigma + \kappa'_0), \end{aligned} \quad (2.114)$$

где $\sigma_i (i = \overline{0, 4})$, $\kappa_k (k = \overline{0, 2})$, $\mu_j (j = \overline{0, 3})$, κ'_0 – постоянные параметры. Зависимость переменной v от времени находится из уравнения

$$\nu_0 \int \frac{v dv}{\sqrt{q^2(\sigma)r^2(\sigma)}} = t - t_0. \quad (2.115)$$

Обобщенный класс в других задачах динамики исследован в статьях [60, 61].

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{j=0}^n b_j \sigma^j, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1 &= \phi(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, \quad \nu_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \omega_2, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma} \omega_3, \\ \psi(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \kappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j. \end{aligned} \quad (2.116)$$

2.5.4. Условия существования и структура полиномиальных классов решений уравнений динамики

Для наглядности перечислим все классы полиномиальных решений.

1. Класс Стеклова–Ковалевского–Горячева

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3). \\ \lambda &= (\lambda, 0, 0), \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\omega_1 = p, \quad \omega_2^2(p) = Q(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad \omega_3^2(p) = R(p) = \sum_{j=0}^m c_j p^j \quad (2.118)$$

$$\nu_1(p) = \sum_{i=0}^l a_i p^i, \quad \nu_2(p) = \psi(p) \sqrt{Q(p)}, \quad \nu_3(p) = \kappa(p) \sqrt{R(p)}, \quad (2.119)$$

$$\psi(p) = \sum_{j=0}^{n_1} g_j p^j, \quad \kappa(p) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i p^i. \quad (2.120)$$

1.1 *Обобщенный класс.* Условия (2.117) сохраняются. Вид решения (2.118) тоже сохраняется. Остальные компоненты таковы:

$$\nu_1 = \sum_{i=0}^l a_i p^i, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p} \sqrt{Q(p)}, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(p)}{p} \sqrt{R(p)}, \quad (2.121)$$

где $\psi(p), \kappa(p)$ – полиномы вида (2.120).

2. *Класс Коносевиича-Поздняковича.* Условия существования имеют вид

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0). \quad (2.122)$$

Запишем решение (2.114) в новых обозначениях

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2 + p_0, \quad \omega_2^2(\sigma) = Q(\sigma) = \sigma_4 \sigma^4 + \sigma_3 \sigma^3 + \sigma_2 \sigma^2 + \sigma_1 \sigma + \sigma_0, \\ \omega_3^2(\sigma) &= R(\sigma) = \kappa_0 \sigma^2 (\sigma_4 \sigma^2 + \sigma_2 \sigma + \sigma_0), \\ \nu_1 &= \sum_{k=0}^4 \varepsilon_k \sigma^k, \quad \nu_2 = \sqrt{Q(\sigma)} \cdot \sum_{j=0}^3 \mu_j \sigma^j, \quad \nu_3 = \sqrt{R(\sigma)} \cdot \sum_{i=0}^2 (\tilde{\kappa}_i) \sigma^i. \end{aligned} \quad (2.123)$$

2.1 *Обобщенный класс (2.123).* Условия на параметры имеют вид (2.117), а решение:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2 + p_0, \quad \omega_2^2(\sigma) = Q(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k, \quad \omega_3^2(\sigma) = R(\sigma) = \sum_{j=1}^m c_j \sigma^j, \\ \nu_1(\sigma) &= \sum_{i=1}^l a_i \sigma^i, \quad \nu_2(\sigma) = \frac{\sqrt{Q(\sigma)}}{\sigma} \cdot \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \nu_3(\sigma) = \frac{\sqrt{R(\sigma)}}{\sigma} \cdot \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j. \end{aligned}$$

3. *Класс Докшевича.* Условия на параметры:

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, 0). \quad (2.124)$$

Решение таково:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p, \quad \omega_2(p) = Q(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad \omega_3^2(p) = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \\ \nu_1(p) &= \sum_{j=0}^l a_j p^j, \quad \nu_2(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \nu_3(p) = \sqrt{R(p)} = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j. \end{aligned} \quad (2.125)$$

3.1 *Обобщенный класс.* Условия на параметры имеют вид (2.117). Решение таково:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2(\sigma) = Q(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k, \quad \omega_3^2(\sigma) = R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, \quad \nu_2(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \nu_3(\sigma) = \frac{\sqrt{R(\sigma)}}{\sigma} \cdot \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j. \end{aligned} \quad (2.126)$$

4. *Класс Чаплыгина.* Запишем условия на параметры и вид решения

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad (2.127)$$

$$\omega_1 = \sigma^3, \quad \omega_2^2(\sigma) = a_6 \sigma^6 + a_2 \sigma^2, \quad \omega_3^2(\sigma) = b_6 \sigma^6 + b_2 \sigma^2. \quad (2.128)$$

4.1 *Обобщенный класс.* Условие на параметры – равенства (2.117). Решение таково:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \sigma^3, \quad \omega_2(\sigma) = Q(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k, \quad \omega_3(\sigma) = R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, \quad \nu_2(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \nu_3(\sigma) = \frac{\sqrt{R(\sigma)}}{\sigma} \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j. \end{aligned} \quad (2.129)$$

2.6. Методы интегрирования дифференциальных уравнений динамики

2.6.1. Метод К. Якоби

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial X_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.130)$$

Предположим, что система (2.130) допускает $n - 2$ первых интеграла

$$\phi_j(x_1, \dots, x_n) = c_j \quad (j = \overline{1, n-2}), \quad (2.131)$$

для которых якобиан

$$\text{rang}\left(\frac{\partial \phi_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}\right) = n - 2. \quad (2.132)$$

В формуле (2.131) c_j – произвольные постоянные.

Справедливо утверждение [158]: если система (2.130) допускает $n - 2$ первых интеграла, которые удовлетворяют условию (2.132), то система (2.130) допускает дополнительный интеграл и интегрируема в квадратурах (т.е. решение уравнений (2.130) выражается через известные функции и интегралы от этих функций).

Как уже отмечено ранее, для уравнений Эйлера–Пуассона в случае, когда центр масс не совпадает с неподвижной точкой, возможны два варианта существования дополнительного интеграла – интеграл Ж. Лагранжа [76] и интеграл С. В. Ковалевской [70]. В задаче о движении тела в жидкости (и, в силу гидродинамической аналогии, в задаче о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил) имеют место шесть случаев дополнительного интеграла (А. Клебша, В. А. Стеклова, А. М. Ляпунова, В. В. Соколова – см. обзор [30]). В статьях [58, 72] доказана неинтегрируемость в общем случае для уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона. Поэтому для построения решений используется метод инвариантных соотношений [77, 127].

2.6.2. Метод инвариантных соотношений

Существует два метода инвариантных соотношений – метод Т. Леви-Чивиты [77] и метод П. В. Харламова [127].

Определение Т. Леви-Чивиты. Соотношение

$$\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (2.133)$$

для которого выполняются

$$\overline{\text{grad}} \phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) \neq \mathbf{0},$$

на множестве σ , называется инвариантным соотношением дифференциальных уравнений (2.130), если из условия

$$\phi(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = 0, \quad (2.134)$$

вытекает условие

$$\phi(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0, \quad \forall t \in (t_0, \infty). \quad (2.135)$$

В работе [77] показано, что функция $\phi(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \phi(x_1, \dots, x_n)\lambda(x_1, \dots, x_n), \quad (2.136)$$

где $d\phi/dt$ – производная в силу системы (2.130), $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ – аналитическая функция переменных (доказательство основано на условиях (2.134), (2.135)). Уравнение (2.136) носит в основном теоретический характер. На практике для получения условий существования инвариантного соотношения (2.133) необходимо: задать (2.133); вычислить производную от (2.133) в силу уравнений (2.130)

$$\frac{d\phi(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi(c_1, \dots, c_n)}{\partial x_j} X_j(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) \quad (2.137)$$

и рассмотреть равенство

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.138)$$

на множестве σ , т. е. потребовать, чтобы

$$F(x_1, \dots, x_n)|_{\phi(x_1, \dots, x_n)=0} = 0. \quad (2.139)$$

Например, если $\partial\phi(x_1, \dots, x_n)/\partial x_1|_{\phi=0} \neq 0$, то найдем $x_1 = x_1(\phi, x_2, \dots, x_n)$ из (2.133). Подставив эту функцию в равенство (2.136), получим

$$F(x_1, \dots, x_n) = \psi_0(x_2, \dots, x_n) + \psi_1(x_2, \dots, x_n)\phi + \psi_2(x_2, \dots, x_n)\phi^2 + \dots$$

Поскольку для этой функции должно выполняться условие (2.139), то необходимым условием существования инвариантного соотношения служит равенство

$$\psi_0(x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \forall x_2, \dots, x_n. \quad (2.140)$$

Метод инвариантных соотношений (2.133)-(2.139) использовался С. А. Чаплыгиным [145, 146], П. В. Харламовым [123] в задаче о движении тела в жидкости. Обзор результатов по применению метода И. Леви-Чивиты изложен в [34].

Определение П. В. Харламова: Соотношение (2.133) для уравнений (2.130) называется инвариантным соотношением, если не пусто многообразие σ :

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \phi^{(1)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial\phi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \\ \cdot X_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \phi^{(2)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{d\phi^{(1)}}{dt}(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

В [127] показано, что инвариантное соотношение определяется первыми $l < n$ членами (2.141). Поэтому для нахождения условий существования (2.133) для (2.132) необходимо последовательно рассматривать (2.141). Т. е. из первых l соотношений (по предположению они независимы) находятся l функций из x_1, \dots, x_n и полученные значения подставляются в $l + 1$ уравнение из (2.141) и требуется тождественное равенство нулю.

Полученные условия являются условиями существования инвариантного соотношения $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Инвариантные соотношения, которые рассмотрел П. В. Харламов, имеют более общие свойства, чем инвариантные соотношения Т. Леви-Чивиты. Особенности применения теории инвариантных соотношений изложены в монографиях [29, 34].

2.6.3. Метод степенной геометрии

В 1963 году П. В. Харламов показал, что уравнения движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки могут быть записаны в виде системы уравнений Н. Ковалевского:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{d^2\sigma}{dp^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dp}\frac{d\tau}{dp} + a_1 + a_2\sigma + (a_3p + a_0)\frac{d\tau}{dp} + \\
 &+ a_4\tau + a_5p^2 + 2a_0p = 0, \\
 f_2 &= \sigma\frac{d^2\tau}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dp}\frac{d\tau}{dp} + b_1 + b_2\sigma + (b_3p - b_0)\frac{d\sigma}{dp} + \\
 &+ b_4\tau + b_5p^2 + 2b_0p = 0
 \end{aligned} \tag{2.142}$$

при ограничениях

$$B \neq C, \mathbf{s} = (s_1, 0, 0), \lambda = (\lambda_1, 0, 0).$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \frac{d\sigma}{dp}\tau - \sigma\frac{d\tau}{dp} + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3p - b_0)\sigma + (a_3p + a_0)\tau + \\
 &+ \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\
 f_4 &= d_1\left(\frac{d\sigma}{dp}\right)^2\tau + \sigma\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^2 + d_0 + \frac{d\sigma}{dp}\tau(d_2p + d_3) + d_4\sigma^2 + \\
 &+ \sigma\frac{d\tau}{dp}(d_5p + d_6) + (d_7\tau + d_8\tau^2 + d_9p + d_{10})\sigma + d_{11}\tau^2 + \\
 &+ (d_{12}p^2 + d_{13}p + d_{14})\tau + d_{15}p^4 + d_{16}p^2 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.143}$$

где p – независимая переменная, зависимыми переменными являются

$$\sigma = \frac{(B - C)q^2}{A}, \quad \tau = \frac{(B - C)r^2}{A},$$

постоянные a_i, b_i, c_i, d_i – рациональные функции параметров A, B, C, λ_1 , константы энергии h и константы моментов l .

Актуальной является задача поиска решений уравнений движения тяжелого гиростата в виде полиномов по p .

Эту задачу удобно решать, когда уравнения движения тяжелого горостата представлены в виде (2.142). В этом случае можно воспользоваться теорией А.Д.Брюно [7].

Следуя [7–9] можно для решений $\sigma(p)$, $\tau(p)$ системы уравнений (2.142) в случае общего положения при $p \rightarrow 0$ и при $p \rightarrow \infty$ найти: а) все степенные асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^\alpha$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $\sigma_0, \tau_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; б) все степенные разложения вида

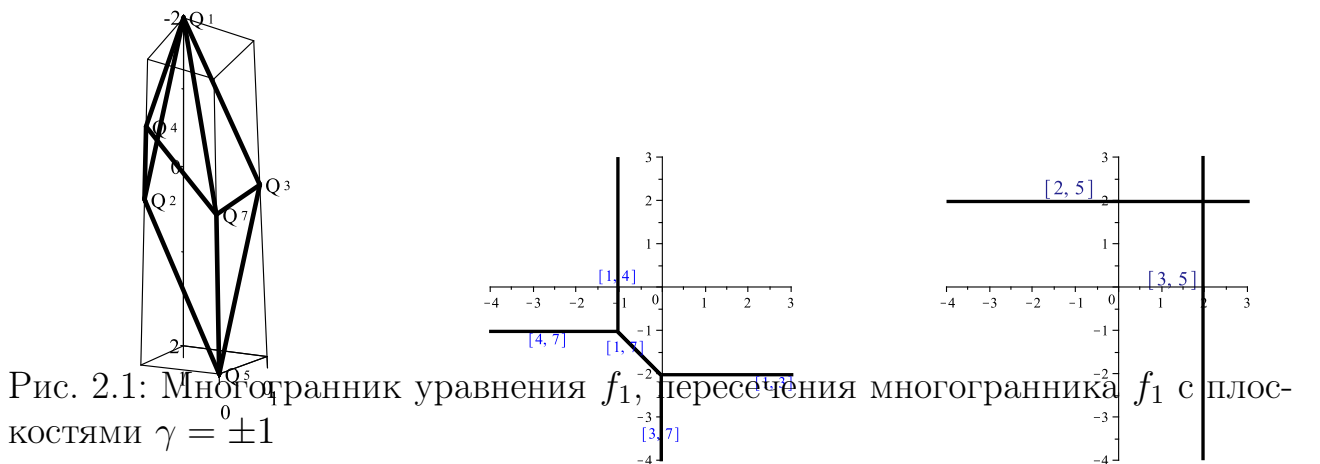
$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s},$$

где $\alpha, \beta, s \in \mathbb{R}$, значения s не имеют точек накопления на \mathbb{R} , постоянные коэффициенты $\sigma_s, \tau_s \in \mathbb{C}$, $\sigma_0 \tau_0 \neq 0$.

В случае $p \rightarrow 0$ или $p \rightarrow \infty$ решения вида $\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \dots$, $\tau = \tau_0 p^\beta + \dots$ имеют асимптотики

$$\sigma = \sigma_0 t^{\omega\alpha} + \dots, \quad \tau = \tau_0 t^{\omega\beta} + \dots, \quad p = t^\omega, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\omega = -1$, если $p \rightarrow 0$ и $\omega = +1$, если $p \rightarrow \infty$. Поэтому степенным решениям системы соответствуют значения показателей $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, p_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega\alpha, \omega\beta, \omega)$ их асимптотик на плоскости $p_3 = -1$ (если $p \rightarrow 0$) и $p_3 = +1$ (если $p \rightarrow \infty$).



Уравнения (2.142) и интегралы (2.143) являются суммами конечного чис-

ла дифференциальных мономов. Согласно методам степенной геометрии каждому моному ставится в соответствие вектор $Q = (q_1, q_2, q_3)$, координаты которого являются показателями степеней монома. Множество векторных показателей мономов уравнения называется *носителем* уравнения. Для каждого из уравнений (2.142) и интегралов (2.143) строятся носители, многогранники, пересечения многогранников с плоскостями $\gamma = \pm 1$ и вычисляются нормальные конусы. Например, выпуклая оболочка носителя первого из уравнений (2.142) $S(f_1) = S_1 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7\}$ образует многогранник Γ_1 , имеющий 6 вершин (рис. 1). Ребру $\{Q_5, Q_7\}$ принадлежит точка Q_6 носителя S_1 . Пересечения многогранника с плоскостями $\gamma = \pm 1$ изображены на рисунке 1.

Построив для каждого уравнения пересечения многогранников с плоскостями $\gamma = \pm 1$ и объединив их, сможем найти нормальные конусы системы (2.142). Вычислив все нормальные конусы системы (2.142), возможно определить степенные асимптотики и шаг разложения. Более подробные рассуждения приведены в Разделе 4.

Раздел 3

Исследование полиномиальных решений уравнений движения гиростата с неподвижной точкой

В разделе изучены полиномиальные решения уравнений Н. Ковалевского для динамически симметричных тел. Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом; выполнена редукция исходных уравнений к уравнениям класса Н. Ковалевского–П. В. Харламова. Изучены свойства обобщенных типов полиномиальных решений в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

3.1. Полиномиальные решения уравнений Н. Ковалевского

Уравнения Эйлера–Пуассона, моделирующие движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, легли в основу формирования новых задач аналитической механики. Обзор результатов, полученных в исследовании классической задачи, отражен в многочисленных монографиях [20, 29–31, 122, 134]. Уравнения Эйлера–Пуассона в общем случае неинтегрируемы в квадратурах [58]. Для изучения свойств движения тела применялись различные методы интегрирования этих уравнений. Среди этих методов особую роль в построении новых решений играют редуцированные уравнения динамики твердого тела [31, 53, 122, 134]. Наибольшее количество частных решений уравнений Эйлера–Пуассона получено в случае, когда центр масс тела лежит на главной оси эллипсоида инерции.

Известно [131], что редуцированные уравнения для случая, когда центр масс тела лежит на главной оси, можно привести к виду, в котором основными переменными являются квадраты проекций вектора угловой скорости на небарицентрические оси, а вспомогательной переменной служит

проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось. Уравнения Н.Ковалевского представляют собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка на указанные переменные. Если основные переменные являются многочленами по вспомогательной переменной, то указанные уравнения допускают решения В. А. Стеклова [104], Н. Ковалевского [160], Д. Н. Горячева [50]. Обобщение этих решений на задачу о движении тяжелого гиристора рассмотрено П. В. Харламовым [122]. В статье Г. В. Горра [39] показано, что для динамически несимметричных тел уравнения Н. Ковалевского допускают единственное решение С. А. Чаплыгина [143], которое характеризуется полиномиальной структурой основных переменных от кубического корня вспомогательной переменной. Анализ частных решений уравнений Эйлера–Пуассона показывает, что для динамически симметричного тела частный случай решения С. В. Ковалевской относится к полиномиальному решению класса Стеклова–Ковалевского–Горячева, а частный случай [35] решения Д. Н. Горячева [50] – к полиномиальному решению класса С. А. Чаплыгина [143]. Первое свойство указано в статье П. В. Харламова, Г. В. Мозалевской [133].

Целью данного пункта является исследование полиномиальных решений классов В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева и С. А. Чаплыгина в случае динамического симметричного твердого тела. Рассмотрен класс частных решений, который характеризуется полиномиальной структурой инвариантных соотношений на компоненты вектора угловой скорости.

3.1.1. Постановка задачи. Уравнения Н. Ковалевского

Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела, центр масс которого лежит на первой главной оси эллипсоида инерции [122]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} &= (A_2 - A_3)qr, & A_2 \dot{q} &= (A_3 - A_1)pr - s\nu_3, \\ A_3 \dot{r} &= (A_1 - A_2)qp + s\nu_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \quad (3.2)$$

В уравнениях (3.1)-(3.2) введены обозначения: p, q, r – компоненты вектора угловой скорости; ν_1, ν_2, ν_3 – компоненты единичного вектора, указывающего на направление силы тяжести; $A_i (i = \overline{1, 3})$ – главные моменты инерции тела; s – произведение массы тела, модуля ускорения свободного падения и расстояния от неподвижной точки до центра масс тела; точка над переменными означает производную по времени t . Уравнения (3.1)-(3.2) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad A_1 p \nu_1 + A_2 q \nu_2 + A_3 r \nu_3 = k, \\ A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 - 2s \nu_1 &= 2E, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где k и E – произвольные постоянные.

Если в качестве независимой переменной принять компоненту p и считать $q = q(p)$, $r = r(p)$, то из уравнений (3.1) и интеграла энергии из (3.3) следует

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{s} \left[\frac{A_1(Q(p) - R(p))}{(A_2 - A_3)} - E \right], \\ \nu_2 &= \frac{1}{s} q Q'(p), \quad \nu_3 = \frac{1}{s} r R'(p), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} Q(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_3(A_2 - A_3)}{A_1} r^2(p) + (A_2 - A_1)p^2 \right], \\ R(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2(A_3 - A_2)}{A_1} q^2(p) + (A_3 - A_1)p^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зависимость $p(t)$ находится из первого уравнения системы (3.1) с учетом значений $q(p)$, $r(p)$, которые определяются из соотношений (3.5).

Подставим выражения (3.4) в уравнения Пуассона (3.2)

$$\begin{aligned} Q''(p)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2] + Q'(p)[R'(p) + (A_1 - A_3)p] + \\ + A_2 p R'(p) - \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_2 E = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R''(p)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2] + R'(p)[Q'(p) + (A_1 - A_2)p] + \\ + A_1 p Q'(p) - \frac{A_1 A_3}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_3 E = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Интегралы уравнений (3.6), (3.7) найдем, внося (3.4), (3.5) в уравнения

(3.3). При интегрировании уравнений (3.6), (3.7) важно использовать геометрический интеграл из (3.3), так как в этом интеграле постоянная фиксирована и отлична от нуля. Запишем результат подстановки выражений (3.4) в соотношение $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$

$$\begin{aligned} & A_2(A_2 - A_3)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2](R'(p))^2 + \\ & + A_3(A_3 - A_2)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2](Q'(p))^2 + \\ & + A_1A_2A_3(Q(p) - R(p) + \frac{A_3 - A_2}{A_1}E)^2 = \frac{A_2A_3(A_2 - A_3)^2}{A_1}s^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следуя статье [39], преобразуем уравнения Н. Ковалевского (3.6)-(3.8), используя новую переменную

$$\sigma = p^{1/3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6](\sigma \frac{d^2Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma}) + \\ & + \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} [\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5] + 3A_2\sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \\ & + \frac{9A_1A_2}{A_2 - A_3}\sigma^5(Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_2E\sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & [2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6](\sigma \frac{d^2R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}) + \\ & + \sigma \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} [\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_2)\sigma^5] + 3A_3\sigma^6 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \\ & + \frac{9A_1A_3}{A_2 - A_3}\sigma^5(Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_3E\sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & A_2(A_2 - A_3)[2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6](\frac{dR(\sigma)}{d\sigma})^2 + A_3(A_3 - A_2) \times \\ & \times [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6](\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma})^2 + 9A_1A_2A_3\sigma^4(Q(\sigma) - R(\sigma) + \\ & + \frac{A_3 - A_2}{A_1}E)^2 = \frac{9A_2A_3(A_2 - A_3)^2s^2}{A_1}\sigma^4. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В статье [39] показано, что максимальные показатели степеней решений

полиномиального вида у уравнений (3.9)-(3.11) таковы:

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &= a_0 + a_1\sigma + \dots + a_6\sigma^6, \\ R(\sigma) &= b_0 + b_1\sigma + \dots + b_{12}\sigma^{12}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В [39] анализ выполнен при $A_1 \neq A_2$. В данном пункте полагаем $A_1 = A_2$. Будем применять полуобратный метод нахождения решения (3.12) уравнений (3.9)-(3.11) при $A_1 = A_2$, то есть потребуем, чтобы при подстановке полиномов (3.12) в (3.9)-(3.11) эти уравнения были тождественны по σ . Уравнение (3.11) служит для определения параметра s , который должен быть отличен от нуля (в противном случае имеем случай Эйлера). После нахождения величин a_i ($i = \overline{0,6}$), b_i ($i = \overline{0,12}$) необходимо провести исследование условий действительности найденного решения, которое состоит в рассмотрении функций $q^2(\sigma)$, $r^2(\sigma)$ из соотношений (3.5) при $A_1 = A_2$

$$q^2(\sigma) = -(\sigma^6 + \frac{2R(\sigma)}{A_1 - A_3}), \quad r^2(\sigma) = \frac{2A_1}{A_3(A_1 - A_3)}Q(\sigma).$$

Отсюда следует, что $Q(\sigma)R(\sigma) \leq 0$, то есть должны существовать такие $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, при которых $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ имеют разные знаки.

3.1.2. Тестовые примеры решений

На известных решениях Д. Н. Горячева и С. В. Ковалевской протестируем полученную систему (3.9)-(3.11) которая, с учетом предположения $A_1 = A_2$, примет вид:

$$\begin{aligned} &[2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6](\sigma \frac{d^2Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma}) + \\ &+ \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} [\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5] + 3A_1\sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \\ &- \frac{9A_1^2}{A_1 - A_3}\sigma^5(Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_1E\sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$2Q(\sigma)\left(\sigma\frac{d^2R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\right) + \sigma\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3A_3\sigma^6\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1A_3}{A_1 - A_3}\sigma^5(Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_3E\sigma^5 = 0, \quad (3.14)$$

$$A_2(A_1 - A_3)2Q(\sigma)\left(\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + A_3(A_3 - A_1)[2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6]\left(\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + 9A_1^2A_3\sigma^4(Q(\sigma) - R(\sigma) + \frac{A_3 - A_1}{A_1}E)^2 = 9A_3(A_1 - A_3)^2s^2\sigma^4. \quad (3.15)$$

Проверим систему (3.13)-(3.15) на совместность в случае С. В. Ковалевской, в котором, при условии $A_1 = A_2 = 2A_3$, решение принимает вид [48]:

$$q^2(p) = -\alpha p + \beta p^2, \quad r^2(p) = 4R^2 - 4p^2.$$

С учетом $A_1 = A_2 = 2A_3$ из (3.5) следует

$$Q(p) = \frac{A_3}{4}r^2(p), \quad R(p) = -\frac{A_3}{2}[q^2(p) + p^2].$$

Тогда, при переходе к вспомогательной переменной σ , данные функции такковы

$$Q(\sigma) = A_3(R^2 - \sigma^6), \quad R(\sigma) = -\frac{A_3}{2}(-\alpha\sigma^3 + (\beta + 1)\sigma^6). \quad (3.16)$$

Подставив функции (3.16) в уравнения (3.13)-(3.15) установим, что система разрешима при $\beta = -1$. Таким образом, уравнения (3.9)-(3.11) допускают частный случай решения С. В. Ковалевской.

Исследуем уравнения (3.13)-(3.15) на разрешимость в частном случае решения Д. Н. Горячева [50]:

$$q^2(p) = p^{2/3}(b - p^{4/3}), \quad r^2(p) = p^{2/3}(kp^{2/3} - 4b^2),$$

при условии $A_1 = A_2 = 4A_3$. В этом случае из (3.5) следует

$$Q(p) = \frac{3}{8}A_3r^2(p), \quad R(p) = -\frac{3}{2}A_3[q^2(p) + p^2].$$

Полагая в этих формулах $\sigma = p^{1/3}$ имеем

$$Q(p) = \frac{3}{8}A_3\sigma^2(k\sigma^2 - 4b^2), \quad R(p) = -\frac{3}{2}A_3b\sigma^2.$$

Анализ уравнений (3.13)-(3.15) показывает, что данные функции являются решением этих уравнений.

3.1.3. Анализ разрешимости системы

Проведем теперь анализ (3.13), (3.14) в общей постановке. Подставив функции (3.12) в исходные уравнения, представим полученные многочлены по степеням σ и потребуем тождественного обращения в нуль рассматриваемых соотношений. Приравнявая нулю все коэффициенты полиномов, с учетом условия $A_i > 0$ ($i = 1, 3$) и $A_1 \neq A_3$ придем к следующей системе:

$$a_0b_1 = 0, \quad b_0a_1 = 0, \quad (3.17)$$

$$4a_0b_2 + 3a_1b_1 = 0, \quad 4a_2b_0 + 3a_1b_1 = 0, \quad (3.18)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0, \quad (3.19)$$

$$8a_0b_4 - a_3b_1 + 3a_1b_3 = 0, \quad 8a_4b_0 - a_1b_3 + 3a_3b_1 = 0, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} 10a_0b_5 + 6a_1b_4 + a_3b_2 + 3a_2b_3 &= 0, \\ 10a_5b_0 + 6a_4b_1 + a_2b_3 + 3a_3b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} -b_{12}(5A_1^2 + 12A_1a_6 - 4A_1A_3 - 12A_3a_6) &= 0, \\ 2(A_3 - A_1)(51a_6b_{11} + 40a_5b_{12}) + 3(11A_3 - 14A_1)A_1b_{11} &= 0, \\ (A_3 - A_1)(96a_6b_{10} + 75a_5b_{11} + 56a_4b_{12}) + 3(10A_3 - 13A_1)A_1b_{10} &= 0, \\ (A_3 - A_1)(90a_6b_9 + 70a_5b_{10} + 52a_4b_{11} + 36a_3b_{12}) + 9(3A_3 - 4A_1) \times \\ \times A_1b_9 &= 0, \\ (A_3 - A_1)(84a_6b_8 + 65a_5b_9 + 48a_4b_{10} + 33a_3b_{11} + 20a_2b_{12}) + \\ + 3(8A_3 - 11A_1)A_1b_8 &= 0, \\ (A_3 - A_1)(78a_6b_7 + 60a_5b_8 + 44a_4b_9 + 30a_3b_{10} + 18a_2b_{11} + 8a_1b_{12}) + \\ + 3(7A_3 - 10A_1)A_1b_7 &= 0, \\ (A_3 - A_1)(72a_6b_6 + 55a_5b_7 + 40a_4b_8 + 27a_3b_9 + 16a_2b_{10} + 7a_1b_{11}) - \\ - 9(4A_3^2 - 8A_1A_3 + 3A_1^2)a_6 + 9(2A_3 - 3A_1)A_1b_6 &= 0, \\ (A_3 - A_1)(33a_6b_5 + 25a_5b_6 + 18a_4b_7 + 12a_3b_8 + 7a_2b_9 + 3a_1b_{10}) - \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
& -(25A_3^2 - 50A_1A_3 + 16A_1^2)a_5 + 3(5A_3 - 8A_1)A_1b_5 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(60a_6b_4 + 45a_5b_5 + 32a_4b_6 + 21a_3b_7 + 12a_2b_8 + 5a_1b_9) - \\
& -(16A_3^2 - 32A_1A_3 + 7A_1^2)a_4 + 3(4A_3 - 7A_1)A_1b_4 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(27a_6b_3 + 20a_5b_4 + 14a_4b_5 + 9a_3b_6 + 5a_2b_7 + 2a_1b_8) + \\
& + 9(2A_1 - A_3)A_3a_3 + 9(A_3 - 2A_1)A_1b_3 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(48a_6b_2 + 35a_5b_3 + 24a_4b_4 + 15a_3b_5 + 8a_2b_6 + 3a_1b_7) - \\
& -(4A_3^2 - 8A_1A_3 - 5A_1^2)a_2 + 3(2A_3 - 5A_1)A_1b_2 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(21a_6b_1 + 15a_5b_2 + 10a_4b_3 + 6a_3b_4 + 3a_2b_5 + a_1b_6) - \\
& -(A_3^2 - 2A_1A_3 - 8A_1^2)a_1 + 3(A_3 - 4A_1)A_1b_1 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(36a_6b_0 + 25a_5b_1 + 16a_4b_2 + 9a_3b_3 + 4a_2b_4 + a_1b_5 + 9A_1E) + \\
& + 9A_1^2(a_0 - b_0) = 0; \\
& -b_{12}(32A_1a_6 + A_1A_3 - 32A_3a_6) = 0, \\
& 2(A_3 - A_1)(121a_6b_{11} + 138a_5b_{12}) - 9A_1A_3b_{11} = 0, \\
& (A_3 - A_1)(200a_6b_{10} + 231a_5b_{11} + 264a_4b_{12}) - 9A_1A_3b_{10} = 0, \\
& 2(A_3 - A_1)(81a_6b_9 + 95a_5b_{10} + 110a_4b_{11} + 126a_3b_{12}) - 9A_1A_3b_9 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(128a_6b_8 + 153a_5b_9 + 180a_4b_{10} + 209a_3b_{11} + 240a_2b_{12}) - \\
& - 9A_1A_3b_8 = 0, \\
& 2(A_3 - A_1)(49a_6b_7 + 60a_5b_8 + 72a_4b_9 + 85a_3b_{10} + 99a_2b_{11} + \\
& + 114a_1b_{12}) - 9A_1A_3b_7 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(72a_6b_6 + 91a_5b_7 + 112a_4b_8 + 135a_3b_9 + 160a_2b_{10} + \\
& + 187a_1b_{11}) - 9A_3(A_1 - 2A_3)a_6 - 9A_1A_3b_6 = 0, \tag{3.23} \\
& 2(A_3 - A_1)(25a_6b_5 + 33a_5b_6 + 42a_4b_7 + 52a_3b_8 + 63a_2b_9 + 75a_1b_{10}) - \\
& - 3A_3(A_1 - 4A_3)a_5 - 9A_1A_3b_5 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(32a_6b_4 + 45a_5b_5 + 60a_4b_6 + 77a_3b_7 + 96a_2b_8 + 117a_1b_9) - \\
& - 3A_3(2A_1 - 5A_3)a_4 - 9A_1A_3b_4 = 0, \\
& 2(A_3 - A_1)(9a_6b_3 + 14a_5b_4 + 20a_4b_5 + 27a_3b_6 + 35a_2b_7 + 44a_1b_8) + \\
& + 9A_3^2a_3 - 9A_1A_3b_3 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(8a_6b_2 + 15a_5b_3 + 24a_4b_4 + 35a_3b_5 + 48a_2b_6 + 63a_1b_7) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3A_3(A_1 - 2A_3)a_2 - 9A_1A_3b_2 = 0, \\
& 2(A_3 - A_1)(a_6b_1 + 3a_5b_2 + 6a_4b_3 + 10a_3b_4 + 15a_2b_5 + 21a_1b_6) - \\
& -3A_3(2A_1 - A_3)a_1 - 9A_1A_3b_1 = 0, \\
& (A_3 - A_1)(a_5b_1 + 4a_4b_2 + 9a_3b_3 + 16a_2b_4 + a_1b_5 + 36a_0b_6 + 9A_3E) - \\
& -9A_1A_3(a_0 - b_0) = 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения системы (3.17) очевидно, что один из параметров (или оба одновременно) равен нулю. Рассмотрим случай, когда $a_0 = 0$. Тогда из первого уравнения системы (3.18) следует, что $a_1b_1 = 0$. Поступим, как и ранее, зафиксировав, например, $a_1 = 0$. Таким образом, мы имеем дерево вариантов с различными значениями параметров. Анализируя каждую ветку получаем последовательно условия на параметры и полный анализ всей системы. Представим результат полного исследования системы (3.17)-(3.23) в виде всех возможных наборов значений параметров решения (3.12) и уравнений (3.13), (3.14):

1) В системе (3.17)-(3.23) со значениями параметров $a_i = 0$ ($i = \overline{0, 3}$) из первых простейших уравнений (3.17)-(3.19) следует, что возможен только вариант

$$a_6 = -A_3, \quad b_3 \in R^1, \quad A_1 = 2A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = 0.$$

2) При условиях $a_i = 0$ ($i = \overline{0, 2}$), $b_1 = 0$, кроме предыдущего случая, возникает дополнительный случай разрешимости данной системы, который соответствует указанному выше варианту решения С. В. Ковалевской и характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned}
a_3 \in R^1, \quad a_6 = -\frac{1}{2} \frac{A_3(2b_3 - a_3)}{b_3}, \quad b_0 = -\frac{1}{2} \frac{a_3b_3^2}{A_3(2b_3 - a_3)}, \\
b_3 \in R^1/\{0\}, \quad A_1 = 2A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{a_3b_3(b_3 - a_3)}{A_3(2b_3 - a_3)}.
\end{aligned}$$

3) В случае, когда значения параметров из уравнений (3.17)-(3.19) равны $a_i = 0$, $b_i = 0$ ($i = \overline{0, 1}$), получим решения

$$3.1. \quad a_2 \in R^1, \quad b_2 \in R^1, \quad A_1 = -\frac{2a_2}{a_2 - 3b_2}A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = 0;$$

$$3.2. \quad a_2 = 2b_2, \quad a_4 \in R^1, \quad b_2 \in R^1, \quad A_1 = 4A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{4a_4b_2}{9A_3}.$$

При рассмотрении уравнения (3.11) случае 3.1 параметр s удовлетворяет условию $s^2 = -\kappa^2$, что невозможно. Вариант 3.2 соответствует изученному выше частному случаю решения Д. Н. Горячева.

4) Анализ системы (3.17)-(3.23) на разрешимость при начальных значениях $a_1 = 0$, $b_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$) дает положительный результат только при недопустимых значениях моментов инерции $A_1 = A_3 = 0$.

5) При значении параметров $a_1 = 0$, $b_i = 0$ ($i = 1, 2, 4, 5$) возникают следующие условия разрешимости системы:

$$5.1. \quad a_0 = \frac{A_1 b_0 + E(A_1 - A_3)}{A_1}, \quad b_0 \in R^1, \quad A_1, A_3 \in R^+, \quad E \in R^1;$$

$$5.2. \quad a_0 = \frac{1}{2} \frac{A_3^2 E a_6 + 3b_3^2 a_6 A_3 + 2b_3^2 a_6^2 + b_3^2 A_3^2}{A_3^2 a_6}, \quad a_3 = \frac{2b_3(A_3 + a_6)}{A_3},$$

$$a_6 \in R^1, \quad b_0 = \frac{1}{2} \frac{b_3^2(A_3 - a_6)}{A_3 a_6}, \quad b_3 \in R^1, \quad A_1 = 2A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E \in R^1;$$

$$5.3. \quad a_0 = \frac{21}{128} \frac{a_3^2}{b_6}, \quad a_3 \in R^1, \quad a_6 = \frac{4}{21} b_6, \quad b_0 = \frac{147}{512} \frac{a_3^2}{b_6}, \quad b_3 = \frac{105}{32} a_3,$$

$$b_6 \in R^1, \quad b_9 = \frac{32}{441} \frac{b_6^2}{a_3}, \quad A_1 = \frac{8}{9} A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{525}{64} \frac{a_3^2}{b_6};$$

$$5.4. \quad a_0 = \frac{8}{15} b_0, \quad a_6 = \frac{7}{15} b_6, \quad b_0 \in R^1, \quad b_6 \in R^1,$$

$$b_{12} = \frac{7}{40} \frac{b_6^2}{b_0}, \quad A_1 = \frac{7}{8} A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = \frac{34}{15} b_0.$$

При указанных значениях параметров в случаях 5.1-5.4 не выполняется условие $Q(\sigma)R(\sigma) < 0$.

6) В случае, когда значения параметров равны $a_j = 0$ ($j = 1, 2$), $b_i = 0$ ($i = 1, 2, 4, 5$) система (3.17)-(3.23) разрешима только при $A_1 = 0$ или $A_3 = 0$, что невозможно в силу механического смысла этих параметров.

7) Вариант разрешимости системы (3.17)-(3.23) со значениями параметров $b_i = 0$ ($i = \overline{0, 5}$) возможен только в указанных выше случаях.

Таким образом, для динамически симметричного тела изучены все возможные случаи выполнения условий существования полиномиальных решений уравнений Н. Ковалевского. Показано, что для класса Стеклова-Ковалевского-Горячева имеет место только случай решения С. В. Ковалевской,

который определяется условием $A_1 = A_2 = 2A_3$, а для класса С. А. Чаплыгина – частный вариант решения Д. Н. Горячева, который характеризуется условием $A_1 = A_2 = 4A_3$.

3.2. Уравнения класса Ковалевского–Харламова в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом

В задачах о движении тяжелого твердого тела и гиростата известны различные формы редуцированных дифференциальных уравнений движения.

Как отмечено в разделе 2, первоначальные результаты в проблеме понижения порядка исходных дифференциальных уравнений указаны В. Гессом [156], А. Д. Билимовичем [6], Н. Ковалевским [160], А. С. Чаплыгиным [143]. П. В. Харламов обобщил результаты указанных выше ученых и предложил новые более общие формы уравнений движения гиростата [122, 131].

Структура этих решений позволила провести исследование условий существования полиномиальных решений класса В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева в задачах о движении гиростата в полях сложной структуры [41, 62]. В пункте 3.1 были изучены полиномиальные решения динамически симметричных тел. В данном пункте рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, с переменным гиростатическим моментом. Уравнения движения в указанной задаче были получены Н. Е. Жуковским [57], П. В. Харламовым [129], Е. Витттенбургом [17]. Наиболее общие уравнения в рассматриваемой задаче указал П. В. Харламов, так как он рассматривал случай, когда механическая система представляет собой систему гиростатов. Исследование решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом ранее проводилось на заданных классах инвариантных соотношений уравнений движения гиростата [45, 80, 82]. В данном пункте в предположении, что центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси эллипсоида инерции гиро-

стата, выполнена редукция уравнений движения к системе трех дифференциальных уравнений. Два из данных уравнений можно интерпретировать как уравнения движения более общего класса, чем уравнения Н. Ковалевского и П. В. Харламова. Дан анализ этих уравнений для одного класса движения несомого тела; для него указан способ нахождения полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата класса В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева, П. В. Харламова.

3.2.1. Постановка задачи. Редукция уравнений

Запишем уравнения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом [129]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad (3.24)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.25)$$

Эти уравнения допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (3.26)$$

где k — произвольная постоянная.

Здесь введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ — вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, коллинеарный вектору силы тяжести; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, характеризующая движение несомых тел; $\mathbf{s} = mg\mathbf{OC}$ (O — неподвижная точка, C — центр масс гиростата, m — масса гиростата, g — модуль ускорения свободного падения); A — тензор инерции гиростата; точка над переменными означает производную по времени t . Будем рассматривать уравнения (3.24), (3.25) и интегралы (3.26) предполагая, что

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)(1, 0, 0), \quad (3.27)$$

то есть центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат бари-

центрической главной оси гиростата. Гиростат представляет собой систему

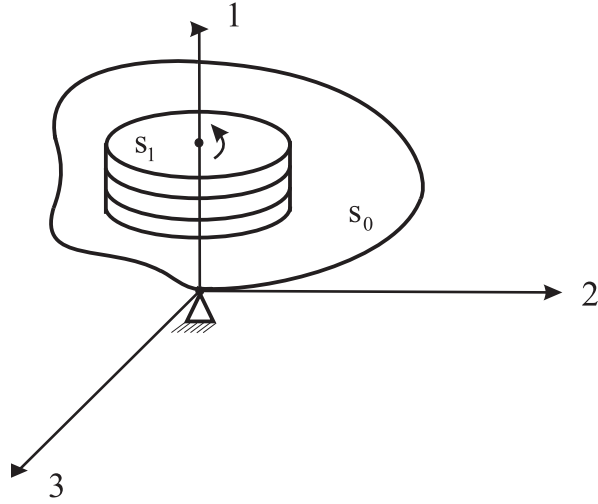


Рис. 3.1: Система S .

S , состоящую из тела-носителя S_0 и вращающегося гироскопа S_1 (рис. 3.1).

Запишем уравнения, вытекающие из (3.24) и (3.25), при предположениях (3.27)

$$(A_1 p + \lambda(t))^\bullet = (A_2 - A_3)qr, \quad (3.28)$$

$$A_2 \dot{q} = [(A_3 - A_1)p - \lambda(t)]r - s\nu_3, \quad (3.29)$$

$$A_3 \dot{r} = [(A_1 - A_2)p + \lambda(t)]q + s\nu_2. \quad (3.30)$$

Представим уравнения Пуассона (3.25) в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= r\nu_2 - q\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= p\nu_3 - r\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= q\nu_1 - p\nu_2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из (3.26) в скалярном виде имеем

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (3.32)$$

$$(A_1 p + \lambda(t))\nu_1 + A_2 q\nu_2 + A_3 r\nu_3 = k. \quad (3.33)$$

Будем полагать, что функция $\lambda(t) = \lambda^*(p(t))$. Тогда $\dot{\lambda}(t) = (\lambda^*(p))' \dot{p}$, где

штрих обозначает дифференцирование по p . Для преобразования уравнений (3.28)-(3.30) выберем в качестве вспомогательной переменной компоненту p . Из уравнения (3.28) следует

$$\dot{p} = \frac{q(p)r(p)(A_2 - A_3)}{u'(p)}, \quad (3.34)$$

где $u(p) = \lambda^*(p) + A_1p$. Перейдем в уравнениях (3.29) и (3.30) к дифференцированию по p . Используя (3.34), получим

$$(q^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_2(A_2 - A_3)}(A_3p - u(p) - \frac{s}{r(p)}\nu_3(p)), \quad (3.35)$$

$$(r^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_3(A_2 - A_3)}(u(p) - A_2p + \frac{s}{q(p)}\nu_2(p)), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \nu_1'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(r(p)\nu_2(p) - q(p)\nu_3(p)), \\ \nu_2'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(p\nu_3(p) - r(p)\nu_1(p)), \\ \nu_3'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(q(p)\nu_1(p) - p\nu_2(p)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (3.35)-(3.37) представляет собой систему дифференциальных уравнений на функции $q^2(p)$, $r^2(p)$, $\nu_1(p)$, $\nu_2(p)$, $\nu_3(p)$, $u(p)$. Данная система является незамкнутой, поэтому необходимо задавать одну из указанных функций как функцию от p . После интегрирования (3.35)-(3.37) зависимость p от t находится из уравнения (3.34). Для редукции уравнений (3.35)-(3.37) найдем ν_1 из интеграла (3.33), а ν_2 , ν_3 из (3.35), (3.36)

$$\begin{aligned} \nu_1(p) &= \frac{k - A_2q(p)\nu_2(p) - A_3r(p)\nu_3(p)}{u(p)}, \\ \nu_2(p) &= \frac{q(p)}{s}[(r^2(p))' \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)], \\ \nu_3(p) &= \frac{r(p)}{s}[(q^2(p))' \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Введем функции $Q(p) = q^2(p)$, $R(p) = r^2(p)$. Тогда из (3.38) имеем

$$\begin{aligned}
\nu_1(p) &= \frac{1}{su(p)} [sk - A_2 Q(p) \left(\frac{A_3(A_2 - A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2 p - u(p) \right) + \\
&+ A_3 R(p) \left(\frac{A_2(A_2 - A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3 p + u(p) \right)], \\
\nu_2(p) &= \frac{q(p)}{s} \left[R'(p) \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2 p - u(p) \right], \\
\nu_3 &= \frac{r(p)}{s} \left[Q'(p) \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3 p + u(p) \right],
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где $q(p) = \sqrt{Q(p)}$, $r(p) = \sqrt{R(p)}$.

Подставим выражения (3.39) во второе и третье уравнения системы (3.31)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} A_3(A_2 - A_3) \frac{R''(p)Q(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4} A_3(A_2 - A_3) \frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} - \frac{1}{2} A_3 R'(p)Q(p) \times \\
&\times \left[\frac{A_2}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u^2(p)} \right] + \frac{1}{2} Q'(p) \left[\frac{A_2 A_3 R}{u(p)} + p A_2 - u(p) \right] + \\
&+ \frac{A_3}{A_2 - A_3} R(p)u'(p) \left[1 - \frac{A_3 p}{u(p)} \right] + Q(p) \left[-\frac{A_2^2}{A_2 - A_3} u'(p)p + \frac{A_2}{A_2 - A_3} u'(p) + \right. \\
&+ A_2 - u'(p) \left. \right] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3} \left[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2 A_3 \right] = 0, \\
&\frac{1}{2} A_2(A_2 - A_3) \frac{Q''(p)R(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4} A_2(A_2 - A_3) \frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} + \frac{1}{2} A_2 Q'(p)R(p) \times \\
&\times \left[\frac{A_3}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u^2(p)} \right] - \frac{1}{2} R'(p) \left[\frac{A_2 A_3 Q(p)}{u(p)} + p A_3 - u(p) \right] + \\
&+ \frac{A_2}{A_2 - A_3} Q(p)u'(p) \left[1 - \frac{A_2 p}{u(p)} \right] + Q(p) \left[-\frac{A_3^2}{A_2 - A_3} u'(p)p + \frac{A_3}{A_2 - A_3} u'(p) - \right. \\
&- A_3 + u'(p) \left. \right] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3} \left[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2 A_2 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Отметим, что при указанной выше подстановке (3.39) в первое уравнение системы (3.31) получим тождество.

С учетом (3.39) геометрический интеграл (3.32) примет вид

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{u(p)} \left[sk - A_2 Q(p) \left(\frac{A_3(A_2 - A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2 p - u(p) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + A_3 R(p) \left(\frac{A_2(A_2 - A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3 p + u(p) \right) \right] \right\}^2 + \\
& + \left\{ q(p) \left[R'(p) \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2 p - u(p) \right] \right\}^2 + \\
& + \left\{ r(p) \left[Q'(p) \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3 p + u(p) \right] \right\}^2 - s^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Соотношение (3.41) является первым интегралом уравнений (3.40).

Система (3.40) является неавтономной системой дифференциальных уравнений на три функции $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$. Так как она не замкнута, то для ее интегрирования необходимо задавать либо одну из функций $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$, либо инвариантное соотношение $f(Q, R, u(p)) = 0$, которое может описывать некоторое программное движение гиростата. После нахождения $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$ зависимость $p(t)$ определяется в силу (3.34) из уравнения

$$\dot{p} = \frac{A_2 - A_3}{u'(p)} \sqrt{Q(p)R(p)} \tag{3.42}$$

путем обращения соответствующего интеграла.

Уравнения (3.40) не являются простым обобщением уравнений Н. Ковалевского и П. В. Харламова, так как они получены на основании интеграла моментов (3.33) и поэтому содержат постоянную k и имеют особенность в знаменателе. Отметим, что уравнения Н. Ковалевского и П. В. Харламова установлены с помощью выражения для ν_1 , которое находится из интеграла энергии (в задаче (3.28)-(3.31) интеграла энергии нет); в силу этого указанные уравнения не имеют особенностей в знаменателе, а вместо постоянной k они содержат постоянную, характеризующую интеграл энергии.

Если в (3.40) положить $u(p) = A_1 p + \lambda_0$, где λ_0 – постоянная, то система (3.40) становится замкнутой. Следовательно, она может быть использована для нахождения решений уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Вариант, когда $u(p) = \text{const}$ на основании (3.34) приводит к условиям, при выполнении которых имеют место инвариантные

соотношения: $q = 0$; $r = 0$. Их исследование требует дополнительного рассмотрения, которое необходимо проводить на основании уравнений (3.28)-(3.31).

3.2.2. Один специальный случай движения несомого гироскопа

Пусть тело-носитель имеет главные моменты инерции $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$. Будем предполагать, что ротор S_1 является симметричным гироскопом и обозначим через D момент инерции S_1 относительно оси вращения, а B – момент инерции S_1 относительно оси ортогональной к оси вращения (рис. 3.1). Пусть $\dot{\kappa}$ – скорость вращения S_1 относительно его оси симметрии. Так как $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости тела-носителя, то абсолютная угловая скорость гироскопа S_1 определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega} + \dot{\kappa} \mathbf{i}_1,$$

где \mathbf{i}_1 – единичный вектор первой главной оси гиростата. Общий момент количества движения гиростата равен:

$$\mathbf{x} = (A_1 \omega_1 + D \dot{\kappa}) \mathbf{i}_1 + A_2 \omega_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \omega_3 \mathbf{i}_3. \quad (3.43)$$

Здесь $A_1 = \tilde{A}_1 + D$, $A_2 = \tilde{A}_2 + m_2(s_2)^2$, $A_3 = \tilde{A}_3 + m_2(s_2)^2$, где s_2 – расстояние от неподвижной точки до центра масс C_2 гироскопа S_1 , m_2 – его масса. Положим, что центр масс C_1 тела-носителя с массой m_1 находится на первой главной оси ($s_1 = OC_1 > 0$). В силу указанных свойств центр масс гиростата C (системы, состоящей из S_0, S_1) лежит на первой координатной оси и выполняется равенство $OC = \frac{1}{m}(m_1 s_1 + m_2 s_2)$. Следовательно, вектор \mathbf{s} в уравнении (3.24) таков

$$\mathbf{s} = (g(m_1 s_1 + m_2 s_2); 0; 0). \quad (3.44)$$

Положим в (3.43) $\dot{\kappa} = \omega_1$ и запишем уравнения движения гиростата, ис-

пользуя теорему об изменении момента количества движения

$$\begin{aligned}\alpha_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - \alpha_1) \omega_3 \omega_1 - s\nu_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (\alpha_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + s\nu_2,\end{aligned}\tag{3.45}$$

где $\alpha_1 = A_1 + D$. Интегралы уравнений (3.45) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \\ \alpha_1 \omega_1 \nu_1 + A_2 \omega_2 \nu_2 + A_3 \omega_3 \nu_3 &= k, \\ \alpha_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2s\nu_1 &= 2E.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Отметим, что для указанного способа вращения гироскопа S_1 уравнения движения допускают аналог интеграла энергии (см. третье соотношение из (3.46)). Проведем сравнительный анализ уравнений (3.45), (3.46) и уравнений движения тяжелого твердого тела, которое состоит из тела-носителя S_0 и невращающегося гироскопа S_1 . Последние уравнения получаются из уравнений (3.45) заменой параметра α_1 параметром A_1 . При этом величины A_1 , A_2 , A_3 удовлетворяют неравенствам треугольника, поэтому уравнения движения (3.45) будем рассматривать при условиях, что α_1 , A_2 , A_3 также удовлетворяют неравенствам треугольника. Из этого требования вытекает следующее условие

$$D < A_2 + A_3 - A_1.$$

Для классических уравнений Эйлера–Пуассона построено значительное количество частных решений (см. [20, 31]). Из приведенного выше сравнения дифференциальных уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом и уравнений Эйлера–Пуассона вытекает, что все указанные частные решения обобщаются как решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом с указанным способом вращения S_1 при условии, что $D < A_2 + A_3 - A_1$. Например, в случае С. В. Ковалевской для уравнений (3.45), (3.46) необходимо положить $\alpha_1 = A_2 = 2A_3$. Примене-

ние данного подхода означает, что если в реальном объекте, рассматриваемом при $\dot{\kappa} = 0$, распределение масс не удовлетворяет условиям Ковалевской, то, с учетом введения вращения гироскопа со скоростью $\omega_1 = p$, можно части этих условий удовлетворить. Аналогичное заключение относится и к полиномиальным решениям класса Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева, П. В. Харламова. Распределение масс этих гироскопов в классическом случае есть функция $f(A_1, A_2, A_3) = 0$. Для обобщения полиномиальных решений указанного класса в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в указанном равенстве $f(A_1, A_2, A_3) = 0$ нужно A_1 заменить на α_1 : $f(\alpha_1, A_2, A_3) = 0$.

Замечание. Полученный выше результат представляет теоретический интерес, так как он установлен на основе формальных аналитических преобразований уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

3.3. Изучение обобщенного класса полиномиальных решений уравнений Ковалевского–Харламова

Под обобщенным классом полиномиальных решений уравнений Ковалевского–Харламова будем понимать решения, которые описываются соотношениями

$$p = v^2 + p_0, \quad Q(v) = \sum_{i=1}^n a_i v^i, \quad R(v) = \sum_{j=1}^m b_j v^j, \quad (3.47)$$

где p , $q(v) = \sqrt{Q(v)}$, $r(v) = \sqrt{R(v)}$ – компоненты угловой скорости (полагаем, что p – проекция на главную барицентрическую ось; q и r – проекции на небарицентрические главные оси), v – вспомогательная переменная. Функциями (3.47) могут быть описаны решения Б. И. Коносевича–Е. В. Поздняковича [74] и Е. И. Харламовой–Г. В. Мозалевской [134].

В данном пункте рассмотрено решение Е. И. Харламовой–Г. В. Моза-

левской. Изучены аналитические и геометрические свойства этого решения. Полное решение получено с использованием теоремы Пуансо и уравнений П. В. Харламова [25]. Оно дополняет полученные ранее результаты по истолкованию движения гиростата в полиномиальных решениях уравнений движения гиростата с неподвижной точкой [75].

3.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (3.48)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя в подвижных осях, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали, $\boldsymbol{\lambda}$ – постоянный гиростатический момент, \mathbf{e} – единичный вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс гиростата, $s = mg|\mathbf{OC}|$ (O – неподвижная точка, C – центр масс тела).

Уравнения (3.48) допускают три первых интеграла:

$$\frac{1}{2} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = h, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \quad (3.49)$$

В [131] показано, что при ограничениях

$$A_2 \neq A_3, \quad \mathbf{r} = (r_1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0) \quad (3.50)$$

уравнения (3.48) могут быть редуцированы к системе уравнений Н. Ковалевского [160]:

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma + (a_3p + a_0)\tau' + a_4\tau + a_5p^2 + 2a_0p = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_1 + b_2\sigma + (b_3p - b_0)\sigma' + b_4\tau + b_5p^2 + 2b_0p = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $p \equiv \omega_1$ – независимая переменная, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dp$, зависимыми переменными являются

$$\sigma = \frac{(A_2 - A_3)\omega_2^2}{A_1}, \quad \tau = \frac{(A_2 - A_3)\omega_3^2}{A_1}.$$

Коэффициенты a_i, b_i – суть рациональные функции параметров A_1, A_2, A_3, λ_1 и постоянной интеграла энергии h :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\lambda_1}{A_2}, \quad a_1 = -\frac{2h}{A_2}, \quad a_2 = b_4 = \frac{A_1}{A_2 - A_3}, \quad a_3 = \frac{A_1 - 2A_3}{A_2}, \\ a_4 &= \frac{2(A_1 - A_3)}{A_2} + \frac{A_1 A_3}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad a_5 = \frac{3A_1 - 2A_2}{A_2}, \quad b_0 = \frac{\lambda_1}{A_3}, \\ b_1 &= -\frac{2h}{A_3}, \quad b_2 = \frac{2(A_2 - A_1)}{A_3} + \frac{A_1 A_2}{A_3(A_2 - A_3)}, \\ b_3 &= \frac{2A_2 - A_1}{A_3}, \quad b_5 = \frac{3A_1 - 2A_3}{A_3}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Дифференциальные уравнения (3.51) имеют симметрию

$$(p, \sigma, \tau, A_1, A_2, A_3, \lambda_1, h) \rightarrow (\bar{p}, -\bar{\tau}, -\bar{\sigma}, \bar{A}_1, \bar{A}_3, \bar{A}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{h}). \quad (3.53)$$

Система уравнений (3.51) допускает два первых интеграла [24], которые, в силу (3.49), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3 p - b_0)\sigma + (a_3 p + a_0)\tau + \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\ f_4 &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 + \sigma (\tau')^2 + d_0 + (d_2 p + d_3)\tau \sigma' + d_4 \sigma^2 + (d_5 p + d_6)\sigma \tau' + \\ &\quad + (d_7 \tau + d_8 p^2 + d_9 p + d_{10})\sigma + d_{11} \tau^2 + (d_{12} p^2 + d_{13} p + d_{14})\tau + \\ &\quad + d_{15} p^4 + d_{16} p^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Как было отмечено в разделах 1, 2, нахождение интегрируемых случаев и частных решений уравнений движения тела вокруг неподвижной точки составляет основу классических исследований по динамике твердого тела. П. В. Харламов в работе [131] выписал условия существования полиномиальных решений уравнений (3.51) и нашел два новых решения, которые обоб-

щают решения В. А. Стеклова и Н. Ковалевского. Новые возможности для изучения уравнений движения твердого тела открывает степенная геометрия. Разработанные А. Д. Брюно общие методы и алгоритмы степенной геометрии получили успешное применение в вычислениях степенных, степенно-логарифмических и более сложных разложений решений систем дифференциальных уравнений Н. Ковалевского. В работах А. Д. Брюно и его учеников при отсутствии гиросtatического момента ($\lambda = \mathbf{0}$) были вычислены все степенные асимптотики и степенные разложения этой системы в случаях, когда независимая переменная p стремилась к нулю, к бесконечности и к отличной от нуля и бесконечности константе [8]. В [10] были найдены все точные решения системы Н. Ковалевского, представляемые конечными суммами рациональных степеней переменной p . Аналогичная проблема нахождения степенных асимптотик и степенных разложений системы уравнений (3.51), описывающих движение гиростата, частично решена в [26].

Несколько семейств частных решений уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки было получено в результате систематического исследования интегродифференциального уравнения Е. И. Харламовой. Подробное описание этих решений можно найти в [134]. Так, например, интегрируемость интегродифференциального уравнения при условиях (3.50) и дополнительном ограничении

$$4(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) + A_2A_3 = 0 \quad (3.55)$$

в классе тригонометрических и экспоненциальных полиномов была доказана в [136, 137]. В случае, когда главные моменты инерции гиростата (системы “тело-носитель+ротор”) удовлетворяют неравенствам треугольника

$$A_1 + A_2 > A_3, \quad A_2 + A_3 > A_1, \quad A_3 + A_1 > A_2, \quad (3.56)$$

в [136] показано, что решения в виде тригонометрических полиномов с двумя

гармониками могут существовать при условиях

$$\frac{A_3}{A_1} \in \left(\frac{17 - \sqrt{17}}{34}, \frac{4}{9} \right] \cup \left[0.4458, \frac{\sqrt{273} - 1}{34} \right) \cup \left(\frac{17 + \sqrt{17}}{34}, \frac{2}{3} \right] \cup [0.6875, 1). \quad (3.57)$$

Имеющее механический смысл частное решение интегродифференциального уравнения с инвариантным соотношением в виде экспоненциального полинома с показателем $n = 2$, как указано в [137], существует при выполнении условия

$$1 < \frac{A_3}{A_1} < \frac{33 + \sqrt{273}}{34} \approx 1.456550342408.$$

Кинематическое представление движения гиростата в рассматриваемом случае интегрируемости обсуждалось в [138], при этом для построения аксоидов использовались компьютерные программы, разработанные А. П. Харламовым.

В этом пункте укажем необходимые и достаточные условия существования найденного в [136, 137] семейства частных решений уравнений (3.48) движения тяжелого гиростата, распределение масс которого подчинено ограничениям (3.50), (3.55), (3.56).

3.3.2. Семейства точных решений уравнений движения гиростата

Свяжем главные моменты инерции соотношением (3.55). При этом ограничении найдем нетривиальные решения следующей задачи.

ЗАДАЧА. Для системы уравнений (3.51) найти условия существования решений вида

$$\begin{aligned} p &= v^2 + p_0, \quad \sigma = \sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2 + \sigma_1 v + \sigma_0, \\ \tau &= \tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где константы $p_0, \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$, и построить соответствующие этим условиям действительные точные решения исходной системы уравнений (3.48).

В дифференциальных уравнениях (3.51) сделаем замену независимой пе-

ременной p , полагая $p = v^2 + p_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} & \tau \frac{d^2\sigma}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\tau}{v} \frac{d\sigma}{dv} + 2a_3v^3 \frac{d\tau}{dv} + 2(a_3p_0 + a_0)v \frac{d\tau}{dv} + 4(a_2\sigma + \\ & + a_4\tau)v^2 + 4(a_5p_0^2 + 2a_0p_0 + a_1)v^2 + 8(a_5p_0 + a_0)v^4 + 4a_5v^6 = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2 \stackrel{\text{def}}{=} & \sigma \frac{d^2\tau}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\sigma}{v} \frac{d\tau}{dv} + 2b_3v^3 \frac{d\sigma}{dv} + 2(b_3p_0 - b_0)v \frac{d\sigma}{dv} + 4(b_2\sigma + \\ & + b_4\tau)v^2 + 4(b_5p_0^2 + 2b_0p_0 + b_1)v^2 + 8(b_5p_0 + b_0)v^4 + 4b_5v^6 = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Подстановкой выражений $\sigma(v), \tau(v)$ из (3.58) в (3.59),(3.60) найдем коэффициенты $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$.

Введем безразмерные параметры $u = A_3/A_1$, $\eta = \lambda_1/A_3$. Приравнявая в (3.59), (3.60) коэффициенты при одинаковых степенях v к нулю, получим уравнение

$$\begin{aligned} & P_7(u)(3u - 2)^2(17u - 8)^4(2u - 1)^6\tau_3^4 - 4P_9(u)(u - 1)(5u - 2) \times \\ & \times (3u - 2)(9u - 4)(17u - 8)^2(2u - 1)^3\tau_3^2\eta + 8P_{10}(u)(9u - 4)^2 \times \\ & \times (u - 1)^2(5u - 2)^3\eta^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

из которого находим

$$\eta = \frac{(P_9(u) + \eta_1)(2u - 1)^3(17u - 8)^2(3u - 2)\tau_3^2}{4(u - 1)(9u - 4)(5u - 2)^2P_{10}(u)}. \quad (3.62)$$

В формулах (3.61),(3.62) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_7 = & 437511u^7 - 1822945u^6 + 3227896u^5 - 3146990u^4 + 1823596u^3 - \\ & - 627920u^2 + 118960u - 9568, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_9 = & 7378782u^9 - 38152199u^8 + 87579879u^7 - 117006116u^6 + \\ & + 100150840u^5 - 56902736u^4 + 21444880u^3 - 5166528u^2 + 721792u - \\ & - 44544, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{10} = & 8282451u^{10} - 47358124u^9 + 123147463u^8 - 191234850u^7 + \\ & + 195844936u^6 - 137850832u^5 + 67386864u^4 - 22548256u^3 + \\ & + 4935424u^2 - 637440u + 36864, \end{aligned}$$

$$\eta_1^2 = 9(9u - 4)(17u^2 - 16u + 4)(3u - 2)^3 P_{12}(u), \quad (3.63)$$

где

$$\begin{aligned} P_{12} = & 489786966u^{12} - 3461790042u^{11} + 11106903321u^{10} - \\ & - 21397924514u^9 + 27581425551u^8 - 25070927914u^7 + \\ & + 16486715988u^6 - 7906718280u^5 + 2745862848u^4 - 673729408u^3 + \\ & + 110908800u^2 - 11002880u + 497664. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Параметр u будем считать основным. Величина η_1 выражается через u и, с учетом (3.63), (3.64), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Переменные исходной системы (3.48) записываются как функции v следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v^2 + p_0, \quad \omega_2^2 = \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2) v^2, \\ \omega_3^2 &= \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0), \\ \gamma_1 \xi &= -\frac{2(2u - 1)}{u(17u^2 - 16u + 4)} (\sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2) + \frac{1}{2u} (v^2 + p_0)^2 - \\ & - \frac{17u - 8}{2(17u^2 - 16u + 4)} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0) - \frac{h}{A_3}, \\ \gamma_2 \xi &= \omega_2 \left(\frac{1}{4v} (4\tau_4 v^3 + 3\tau_3 v^2 + 2\tau_2 v + \tau_1) - \frac{9u - 4}{(17u - 8)u} (v^2 + p_0) - \eta \right), \\ \gamma_3 \xi &= -\omega_3 \left(\frac{2u - 1}{(17u - 8)u} (4\sigma_4 v^2 + 3\sigma_3 v + 2\sigma_2) + \frac{1 - u}{u} (v^2 + p_0) + \eta \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Кроме того, переменные v, t связаны соотношением $\int 2v dv / \sqrt{\sigma\tau} = t + \text{const}$. По формулам (3.65) решения системы (3.51) можно преобразовать в решения уравнений (3.24).

Множество действительных движений гиростата определяется набором следующих условий: положительностью произведения

$$\sigma\tau = v^2(\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2)(\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0)$$

при некоторых значениях $v \in \mathbb{R}$; положительностью правой части равенства

(3.63) при некоторых значениях параметра $u > 0$ и выполнением геометрического тождества

$$\gamma_1^2(v) + \gamma_2^2(v) + \gamma_3^2(v) = 1.$$

Полный анализ этих условий потребовал, в частности, вычисления дискриминантов полиномов второй и четвертой степени от v в виде рациональных функций от u, η_1 . Выражения, полученные в результате компьютерных вычислений, не будем приводить здесь из-за их громоздкости. При этом заметим, что, с учетом принятых обозначений, можно записать все условия вещественности решений в виде неравенств, связывающих переменные u, η_1 :

$$C_1^i(u)\eta_1 + C_2^i(u) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.66)$$

В данной задаче число m не превосходит семи. Привлечение зависимости (3.63) позволяет записать ограничения на u в терминах корней полиномов с целыми коэффициентами. Изучение неравенств (3.66) проведено в общем виде. В случае (3.56) результаты исследования взаимного расположения кор-

Таблица 3.1. Интервалы вещественности решений.

i	u_1^i	u_2^i	n	n_1	n_2	$\tau_4/ \tau_4 $	$\sigma_4/ \sigma_4 $
1	0.378732187482	0.405702942358	4	2	2	-1	-1
2	0.407610887732	0.413171328943	4	2	2	-1	-1
3	0.413171328943	0.421417076192	6	4	2	-1	-1
4	0.421417076192	0.423374638620	4	2	2	-1	-1
5	0.445814591946	0.456550342408	4	2	2	1	-1
6	0.621267812518	0.665060968794	6	4	2	1	1
7	0.665060968794	0.666666666667	4	2	2	1	1
8	0.687566930488	0.810825343356	4	2	2	1	1
9	1	1.024213605612	2	2	0	1	-1
10	1.029716579927	1.101359473321	2	2	0	1	-1
11	0.445814591946	0.445815604395	4	2	2	1	-1
12	1	1.456550342408	2	2	0	1	-1

ней полученных полиномов представлены в табл. 3.1. Рассматриваемого вида решения уравнений (3.51) существуют в случае, когда $u \in \bigcup_{i=1}^{12} (u_1^i, u_2^i)$. При этом $n = n_1 + n_2$ – число действительных корней полинома

$$V_6(v) = (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0)(\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2).$$

Строки 1-10 в таблице соответствуют неравенству $\eta_1 > 0$, строки 11, 12 – неравенству $\eta_1 < 0$. Зависимость v от времени задана дифференциальным уравнением $\dot{v}^2 = V_6(v)$, которое интегрируется посредством одной гиперэллиптической квадратуры. Если u принимает значение $u_3^1 = 2/5$, либо $u_2^7 = 2/3$, то полином $V_6(v)$ содержит только четные степени. При этом гиперэллиптическая квадратура вырождается в эллиптическую. Можно показать, что в этом случае решение [136] сводится к одному из решений П. В. Харламова [131].

3.3.3. Классификация движений гиростата

Для классификации возможных движений гиростата введем следующие обозначения:

$$u_3^2 \approx 0.407868390959, u_3^5 \approx 0.446351051086, u_4^5 \approx 0.447573799631,$$

$$u_5^5 \approx 0.456018242880, u_3^6 \approx 0.665043108290, u_3^8 \approx 0.691087581606.$$

Обозначим через v_i^* , v_i действительные корни уравнений $\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2 = 0$, $\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0 = 0$ соответственно. Тогда допустимые интервалы изменения переменной v зависят от значений параметра u :

- 1) $u \in (u_1^1, u_3^1) \cup (u_3^8, u_2^8) : -\infty < v_2 < v_2^* \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$;
- 2) $u \in (u_3^1, u_2^1) \cup (u_1^2, u_3^2) : -\infty < v_2^* < v_2 \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$;
- 3) $u \in (u_3^2, u_2^2) \cup (u_1^4, u_2^4) : -\infty < v_2^* < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$;
- 4) $u \in (u_1^3, u_2^3) : -\infty < v_2^* < v_4 \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$;
- 5) $u \in (u_1^5, u_3^5) \cup (u_4^5, u_5^5) \cup (u_1^{11}, u_2^{11}) : -\infty < v_2^* \leq v \leq v_2 < v_1^* < v_1 < \infty$;
- 6) $u \in (u_3^5, u_4^5) \cup (u_5^5, u_2^5) : -\infty < v_2^* \leq v \leq v_2 < v_1 \leq v \leq v_1^* < \infty$;
- 7) $u \in (u_1^6, u_3^6) : -\infty < v_4 < v_2^* \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$;
- 8) $u \in (u_3^6, u_2^6) : -\infty < v_4 < v_2^* \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$;
- 9) $u \in (u_1^7, u_2^7) \cup (u_1^8, u_3^8) : -\infty < v_2 < v_2^* \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$;
- 10) $u \in (u_1^9, u_2^9) \cup (u_1^{10}, u_2^{10}) \cup (u_1^{12}, u_2^{12}) : -\infty < v_2 \leq v \leq v_1 < \infty$.

Граничные значения u_i^j соответствуют различным случаям вырождения рассматриваемого решения Харламовой–Мозалевской. В частности, значения

$$u_2^1, u_1^2, u_2^4, u_1^8, u_2^8, u_2^9, u_1^{10}, u_2^{10}, u_2^{11}$$

соответствуют случаям вырождения периодического решения в устойчивое равномерное вращение тела-носителя вокруг неподвижной вертикальной оси.

Для значений

$$u_2^2 = u_1^3, u_2^3 = u_1^4, u_3^5, u_4^5, u_5^5$$

вид решения зависит от начального значения переменной v : либо решение является периодическим, либо стационарным, которое соответствует устойчивому равномерному вращению тела-носителя вокруг вертикали. Наконец, для значений

$$u_3^6, u_2^6 = u_1^7, u_3^8$$

решение, в зависимости от начального значения переменной v , либо является стационарным, либо асимптотически к нему стремится при $t \rightarrow \pm\infty$. В этом случае решение описывает неустойчивое движение, совершаемое гироскопом при возмущении его равномерного вращения.

При условиях (3.50), (3.56), (3.57) уравнений (3.59), (3.60) имеют решения, соответствующие соотношениям $\sigma = \sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2$, $\tau = \tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0$, тогда и только тогда, когда

$$u \in (u_1^1, u_2^1] \cup [u_1^2, u_2^4] \cup [u_1^5, u_2^5] \cup (u_1^6, u_2^7] \cup [u_1^8, u_2^8] \cup (u_1^{12}, u_2^{12}).$$

Нулевые значения переменной η , которые получаем при $\tau_3 = 0$ ($\lambda_1 = 0$), соответствуют двум корням уравнения $P_7(u) = 0$:

$$u_4^2 \approx 0.411904566532, \quad u_4^8 \approx 0.708186361169,$$

в этом случае решение [136] сводится к двум частным решениям уравнений Эйлера–Пуассона, полученным Б. И. Коносевицем и Е. В. Поздняковичем [74].

В качестве геометрической иллюстрации изучаемых движений гиростата вокруг неподвижной точки на рис. 3.2 показаны возможные положения подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости. Периодические движения аксоидов, представленные на рис. 3.2*а,б*, были отмечены А. П. Харламовым. На рис. 3.2*в,г* показаны случаи вырождения частного решения [136] в решение П. В. Харламова [131]. Параметры гиростата при этом таковы:

$$а) u = 1.03454, A_1 = 0.9666, A_2 = 0.431, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 1.0117;$$

$$б) u = 1.03023, A_1 = 0.9707, A_2 = 0.433, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 1.0707;$$

$$в) u = 0.4, A_1 = 2.5, A_2 = 1.6667, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 0.54;$$

$$г) u = 0.66667, A_1 = 1.5, A_2 = 0.6, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = -0.42.$$

Положение центра тяжести гиростата отмечено точкой на главной оси инер-

$$а) u = 1.03454$$

$$б) u = 1.03023$$

$$в) u = 2/5$$

$$г) u = 2/3$$

Рис. 3.2: Качение аксоидов угловой скорости.

ции, вдоль этой же оси направлен вектор гиростатического момента. Подвиж-

ный годограф угловой скорости катится по неподвижному без скольжения.

3.4. Выводы

Рассмотрены условия существования полиномиальных решений уравнений Н. Ковалевского в предположении, что распределение масс тяжелого твердого тела соответствует условиям Ковалевской–Горячева для двух главных моментов инерции. Полиномиальные решения характеризуются многочленами по вспомогательной переменной, которая является корнем кубическим от первой компоненты угловой скорости. Доказано, что частными случаями [47, 48] решения С. В. Ковалевской и частным случаем [35] Д. Н. Горячева исчерпываются все решения уравнений Н. Ковалевского. Изучена задача о движении гиростата S , состоящего из тела-носителя S_0 и симметричного гироскопа S_1 , центры масс которых лежат на главной оси эллипсоида инерции гиростата S . Движение гиростата S рассмотрено под действием силы тяжести. Уравнения движения гиростата редуцированы к системе трех неавтономных дифференциальных уравнений на компоненты угловой скорости и компоненту гиростатического момента. Данная система представляет собой некоторый аналог уравнений Н. Ковалевской, С. А. Чаплыгина и П. В. Харламова, полученных в задаче о движении твердого тела и тяжелого гиростата. Указан пример решения редуцированных уравнений.

Рассмотрены обобщенные классы полиномиальных решений в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой, введенные Е. В. Харламовой и Г. В. Мозалевской. Дан анализ действительности исследуемого решения и приведено истолкование с помощью метода Пуансо.

Раздел 4

Применение полиномиальных решений уравнений движения гиростата в исследовании степенных асимптотик в разложении решений

4.1. Постановка задачи об исследовании степенных разложений

Движение тяжелого гиростата вокруг закрепленной точки описывается системой дифференциальных уравнений [31] (здесь обозначения несколько изменены по сравнению с обозначениями разделов 2, 3, что необходимо в силу связи изучаемой задачи с [26])

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + \lambda_3q - \lambda_2r &= Mg(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} + (A - C)rp + \lambda_1r - \lambda_3p &= Mg(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} + (B - A)pq + \lambda_2p - \lambda_1q &= Mg(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где точка означает дифференцирование по времени t ; $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, M, g, x_0, y_0, z_0$ – вещественные постоянные, при этом A, B, C, M, g положительны. Система (4.1) имеет три общих первых интеграла

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) &= c_1 = \text{const}, \\ (Ap + \lambda_1)\gamma_1 + (Bq + \lambda_2)\gamma_2 + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 &= c_2 = \text{const}, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= c_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где постоянные c_1, c_2 произвольны, а $c_3 = 1$. Без ограничения общности предположим, что $Mg = 1$. Далее в диссертации изучим гиростаты специального вида, характеризуемые условиями

$$B \neq C, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = z_0 = 0. \quad (4.3)$$

Для этого случая П. В. Харламов [131] показал, что уравнения (4.1) могут быть записаны в виде системы уравнений Н. Ковалевского [160]. Следуя результатам [160], будем рассматривать p как независимую переменную и введем новые зависимые переменные по формулам

$$\sigma = \frac{(B - C) q^2}{A}, \quad \tau = \frac{(B - C) r^2}{A}.$$

Тогда система уравнений (4.1) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + a_1 + a_2 \sigma + (a_3 p + a_0) \tau' + a_4 \tau + a_5 p^2 + 2a_0 p = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + b_1 + b_2 \sigma + (b_3 p - b_0) \sigma' + b_4 \tau + b_5 p^2 + 2b_0 p = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где штрих означает дифференцирование по p . При этом

$$\begin{aligned} q^2 &= A\sigma / (B - C), \quad r^2 = A\tau / (B - C), \\ \gamma_1 &= [c_1 - A(B\sigma + C\tau) / (B - C) - Ap^2] / (2x_0), \\ \gamma_2 &= [2(A - B)p - C\tau' + 2\lambda_1] q / (2x_0), \\ \gamma_3 &= [B\sigma' + 2(A - C)p + 2\lambda_1] r / (2x_0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Переменные p, t связаны соотношением $\int dp / \sqrt{\sigma\tau} = t + \text{const}$. При этой замене был использован первый из интегралов (4.2), а два других интеграла принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} f_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3 p - b_0)\sigma + (a_3 p + a_0)\tau + \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\ f_4 &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 + \sigma (\tau')^2 + d_0 + (d_2 p + d_3) \tau \sigma' + d_4 \sigma^2 + (d_5 p + d_6) \sigma \tau' + \\ &\quad + (d_7 \tau + d_8 p^2 + d_9 p + d_{10}) \sigma + d_{11} \tau^2 + (d_{12} p^2 + d_{13} p + d_{14}) \tau + \\ &\quad + d_{15} p^4 + d_{16} p^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что в работе [131] были выписаны дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям (4.4), (4.6), при этом вместо переменных Н. Кова-

левского σ, τ использовались переменные Q, R :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{(B-C)C}{A} &= (A-B)p^2 + 2\lambda_1 p + 2Q, \\ q^2 \frac{(C-B)B}{A} &= (A-C)p^2 + 2\lambda_1 p + 2R. \end{aligned}$$

Введем новые параметры

$$x = A/C, \quad y = B/C, \quad \eta = \lambda_1/C, \quad z = c_1/C, \quad l = c_2/C, \quad \xi = x_0/C, \quad (4.7)$$

тогда постоянные величины a_i, b_i в (4.4) и c_0, d_i в (4.6) суть

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\eta}{y}, \quad a_1 = -\frac{z}{y}, \quad a_2 = \frac{x}{y-1}, \quad a_3 = \frac{x-2}{y}, \quad a_4 = \frac{2xy+2-x-2y}{(y-1)y}, \\ a_5 &= \frac{3x-2y}{y}, \quad b_0 = \eta, \quad b_1 = -z, \quad b_2 = \frac{2y^2+2x-2y-xy}{y-1}, \quad b_3 = 2y-x, \\ b_4 &= \frac{x}{y-1}, \quad b_5 = 3x-2, \quad c_0 = \frac{(z\eta-2l\xi)(y-1)}{xy}, \quad d_0 = \frac{(z^2-4\xi^2)(y-1)}{x}, \\ d_1 &= y^2, \quad d_2 = 4(x-1)y, \quad d_3 = 4y\eta, \quad d_4 = \frac{y^2x}{y-1}, \quad d_5 = 4(y-x), \quad d_6 = -4\eta, \\ d_7 &= \frac{2xy}{y-1}, \quad d_8 = 2(2x^2-3xy+2y^2), \quad d_9 = 8\eta(x-y), \quad d_{10} = 2(2\eta^2-yz), \\ d_{11} &= \frac{x}{y-1}, \quad d_{12} = 2(2x^2-3x+2), \quad d_{13} = 8\eta(x-1), \quad d_{14} = 2(2\eta^2-z), \\ d_{15} &= (y-1)x, \quad d_{16} = 2(1-y)z. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Дифференциальные уравнения (4.4), (4.6) имеют симметрию

$$(p, \sigma, \tau, x, y, \eta, z, l, \xi) \rightarrow \left(\bar{p}, -\bar{\tau}, -\bar{\sigma}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{\eta}}{\bar{y}}, \frac{\bar{z}}{\bar{y}}, \frac{\bar{l}}{\bar{y}}, \frac{\bar{\xi}}{\bar{y}} \right). \quad (4.9)$$

С учетом принятых обозначений имеем

$$x > 0, \quad y > 0, \quad y \neq 1. \quad (4.10)$$

Если гиростат представляет собой систему связанных твердых тел, то пара-

метры x, y удовлетворяют неравенствам

$$x + y > 1, \quad x - y > -1, \quad y - x > -1. \quad (4.11)$$

С другой стороны, если тело-носитель имеет полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью [57], то в общем случае главные моменты инерции системы «тело-жидкость» могут и не удовлетворять неравенствам треугольника. Следовательно, условия (4.11) в задаче о движении гиростата выполняются не всегда.

В изучении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки успехи традиционно связываются с нахождением новых интегрируемых случаев и частных решений. П. В. Харламов в работе [131] исследовал условия существования полиномиальных решений уравнений вида (4.4) и нашел два новых частных решения, которые обобщают решения В. А. Стеклова и Н. Ковалевского. Новые возможности изучения различных уравнений динамики твердого тела дает степенная геометрия. К настоящему времени она систематически применялась для изучения уравнений Н. Ковалевского. Разработанные А. Д. Брюно [7] общие методы и алгоритмы степенной геометрии получили успешное применение в вычислениях степенных, степенно-логарифмических и более сложных (по убывающим степеням $\ln p$) разложений решений систем дифференциальных уравнений вида (4.4). Ранее в работах А. Д. Брюно, В. В. Лунева, И. Н. Гашененко, А. Б. Арансона при отсутствии гиростатического момента ($\eta = 0$) были вычислены все степенные асимптотики и степенные разложения этой системы в случаях, когда независимая переменная p стремилась к нулю, к бесконечности и к отличной от нуля и бесконечности константе [8,9,13–15]. В работах [9,10] были найдены все точные решения системы Н. Ковалевского, представляемые конечными суммами рациональных степеней переменной p . Теперь появилась возможность получить аналогичные результаты и для уравнений (4.4), (4.6), описывающих движение гиростата вокруг неподвижной точки.

Основная цель этого раздела – для решений $\sigma(p), \tau(p)$ системы уравнений (4.4) в случае общего положения при $p \rightarrow 0$ и при $p \rightarrow \infty$ найти: а) все сте-

пенные асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^\alpha$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $\sigma_0, \tau_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; б) все степенные разложения вида

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s},$$

где $\alpha, \beta, s \in \mathbb{R}$, значения s не имеют точек накопления на \mathbb{R} , постоянные коэффициенты $\sigma_s, \tau_s \in \mathbb{C}$, $\sigma_0 \tau_0 \neq 0$.

В случае $p \rightarrow 0$ или $p \rightarrow \infty$ решения вида $\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \dots$, $\tau = \tau_0 p^\beta + \dots$ имеют асимптотики

$$\sigma = \sigma_0 t^{\omega\alpha} + \dots, \quad \tau = \tau_0 t^{\omega\beta} + \dots, \quad p = t^\omega, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\omega = -1$, если $p \rightarrow 0$ и $\omega = +1$, если $p \rightarrow \infty$. Поэтому степенным решениям системы соответствуют значения показателей $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, p_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega\alpha, \omega\beta, \omega)$ их асимптотик на плоскости $p_3 = -1$ (если $p \rightarrow 0$) и $p_3 = +1$ (если $p \rightarrow \infty$).

4.2. Степенные разложения решений в случае $p \rightarrow 0$

1⁰. Вычислим семейство $\mathcal{F}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$ для $P = -(0, 1, 1)$. Пусть $c_0 \neq 0$, тогда укороченная система уравнений и интегралов имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' = 0, & \tilde{f}_{2,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' - b_0 \sigma' = 0, \\ \tilde{f}_{3,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' + c_0 + b_0 \sigma = 0, & \tilde{f}_{4,1} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Соответствующие укороченные решения

$$\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0 p \quad (4.13)$$

являются решениями системы (4.12). Подстановка (4.13) в уравнения (4.12) приводит к тождествам для $\tilde{f}_{1,1}$, $\tilde{f}_{2,1}$, $\tilde{f}_{4,1}$. Из уравнения $\tilde{f}_{3,1} = 0$ получим условие на параметры $b_0 \sigma_0 + c_0 - \sigma_0 \tau_0 = 0$, позволяющее выразить константу

одного из первых интегралов. Например, найдем

$$l = \frac{(\eta - \tau_0)xy\sigma_0}{2(y-1)\xi} + \frac{z\eta}{2\xi}. \quad (4.14)$$

Для вычисления остальных членов разложения будем использовать систему двух независимых уравнений. Подставим первые члены разложения в матрицу производных Фреше, составленную для двух первых уравнений системы (4.12), и умножим результат справа и слева на диагональные матрицы $\text{diag}[p^{s+\omega\alpha}, p^{s+\omega\beta}]$ и $\text{diag}[p^{-s-\omega g_1}, p^{-s-\omega g_2}]$ соответственно, где степени g_1, g_2 вычисляются по формулам [7]. В результате получим характеристическую матрицу

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(2s-1)\tau_0/2 & 0 \\ s(\tau_0 - 2b_0)/2 & s(s+1)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ – характеристический полином укороченной системы. Корни

$$s_1 = -1, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = \frac{1}{2}$$

уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами степенной асимптотики (4.13). Напомним [7], что собственное число s_i называется критическим, если $\omega \text{Res}_i < 0$. В рассматриваемом случае $s_4 = 1/2$ является критическим. Начальное значение s степенного разложения равно $s_0 = 1$. Критическое значение s_4 всегда не опасно, так как $s_4 < s_0$. Решения системы уравнений движения гиростата имеют разложения по возрастающим степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^k, \quad \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{2+k}{2}}, \quad (4.15)$$

где коэффициенты $\sigma_0, \tau_0, \sigma_1$ – произвольны, а

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1(2\eta - \tau_0)}{3\sigma_0}, \quad \sigma_2 = \frac{2z}{y\tau_0} + \frac{(\tau_0 - 2\eta)}{12\tau_0\sigma_0}\sigma_1^2 - \frac{2\eta}{y} - \frac{2x\sigma_0}{(y-1)\tau_0},$$

$$\tau_2 = \frac{x}{2} - y + \frac{[\tau_0(y-1) + 2\eta]z}{2\sigma_0\tau_0y} - \frac{(\eta + 4\tau_0)(2\eta - \tau_0)\sigma_1^2}{24\tau_0\sigma_0^2} - \frac{x\eta}{(y-1)\tau_0} - \frac{(2\eta - \tau_0)\eta}{2y\sigma_0}.$$

Константа z удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & y^2 x (y-1) \tau_0 \sigma_1^2 + 4(y-1)^2 (z^2 - 4\xi^2) - \\ & - 8y \sigma_0 x (y-1) z + 4y^2 x^2 \sigma_0^2 + 4x(2\eta - \tau_0)^2 (y-1) \sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Параметрами разложения (4.15) также являются величины x, y, η . Положим $\sigma_1 = 0$, тогда разложения (4.15) с шагом $\Delta = 1$ представляют двухпараметрическое (по σ_0, τ_0) семейство решений, аналитических по p .

При условии $c_0 = 0$ степенные разложения (4.15) также существуют. А именно, если $c_0 = d_0 = 0$, то из полученных общих формул следуют равенства

$$\begin{aligned} & z = 2\xi, \quad l = \eta, \quad \tau_0 = \eta, \\ & \eta y^2 (y-1) \sigma_1^2 + 4y^2 x \sigma_0^2 + 4(y-1)(\eta^2 - 4y\xi) \sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В этом случае решения образуют однопараметрическое семейство с параметром σ_0 .

3°. Точке $P = (0, 0, -1)$ соответствуют укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{1,3} \stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' = 0, \quad \tilde{f}_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' = 0, \\ & \tilde{f}_{3,3} \stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' = 0, \quad \tilde{f}_{4,3} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 + \sigma (\tau')^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Решение системы (4.18) есть

$$\sigma = \sigma_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0. \quad (4.19)$$

Характеристическая матрица первых двух уравнений из (4.18) записывается в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s-1)\tau_0 & 0 \\ 0 & s(s-1)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Как и в случае $\eta = 0$, система уравнений движения гиростата имеет четырехпараметрическое (по $\sigma_0, \tau_0, \sigma_1, \tau_1$) семейство \mathcal{F}_3 аналитических решений вида

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k p^k, \quad \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k p^k. \quad (4.20)$$

Начальные коэффициенты суть

$$\sigma_2 = -\frac{a_4}{2} - \frac{\tau_1\sigma_1}{4\tau_0} - \frac{a_1 + a_2\sigma_0 + a_0\tau_1}{2\tau_0},$$

$$\tau_2 = -\frac{b_2}{2} + \frac{(2b_0 - \tau_1)\sigma_1}{4\sigma_0} - \frac{b_1 + b_4\tau_0}{2\sigma_0}.$$

Значения констант первых интегралов определены формулами

$$l = \frac{\eta z}{2\xi} + \frac{(y\sigma_0 + \tau_0)x\eta}{2\xi(y-1)} + \frac{(\sigma_1\tau_0 - \sigma_0\tau_1)xy}{2\xi(y-1)}, \quad (4.21)$$

$$(y-1)^2(z^2 - 4\xi^2) - 2x(y-1)(y\sigma_0 + \tau_0)z +$$

$$+ 4x(\tau_0 + \sigma_0)(y-1)\eta^2 + 4x(y-1)(\sigma_1\tau_0y - \sigma_0\tau_1)\eta + \quad (4.22)$$

$$+ x(\sigma_0\tau_1^2y + 2xy\tau_0\sigma_0 + x\tau_0^2 - \sigma_0\tau_1^2 - y^2\sigma_1^2\tau_0 + xy^2\sigma_0^2 + y^3\sigma_1^2\tau_0) = 0.$$

4°. Для точки $P = -(2/3, 2/3, 1)$ найдем семейство $\mathcal{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$, которое существует только при ограничении $c_0 = 0$. Укороченная система уравнений имеет вид

$$\tilde{f}_{1,4} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \quad \tilde{f}_{2,4} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \quad (4.23)$$

$$\tilde{f}_{3,4} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma' - \sigma\tau' = 0, \quad \tilde{f}_{4,4} \stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_0 = 0.$$

Решение

$$\sigma = \sigma_0 p^{2/3}, \quad \tau = \tau_0 p^{2/3} \quad (4.24)$$

удовлетворяет системе (4.23). Характеристическую матрицу первых двух уравнений (4.23) запишем в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s+2/3)\tau_0 & s\sigma_0/3 \\ s\tau_0/3 & s(s+2/3)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа асимптотики (4.24) неположительны: $s_1 = -1$, $s_2 = -1/3$, $s_3 = s_4 = 0$. Начальное значение s равно $s_0 = 1/3$.

Решения системы допускают двухпараметрическое (по σ_0, τ_0) семейство степенных разложений вида

$$\sigma = \sigma_0 p^{2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{\frac{2+k}{3}}, \quad \tau = \tau_0 p^{2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{2+k}{3}}, \quad (4.25)$$

где начальные коэффициенты таковы: σ_0, τ_0 – произвольны,

$$\tau_1 = 3\eta(\tau_0 + 3y\sigma_0)/(4y\sigma_0), \quad \sigma_1 = -3\eta(y\sigma_0 + 3\tau_0)/(4\tau_0 y),$$

$$\tau_2 = 3(4y - 1)z/(10y\sigma_0) + 9\eta^2(5\tau_0 - y\sigma_0)(7\tau_0 + 5y\sigma_0)/(320y^2\sigma_0^2\tau_0),$$

$$\sigma_2 = 3(4 - y)z/(10y\tau_0) - 9\eta^2(\tau_0 - 5y\sigma_0)(5\tau_0 + 7y\sigma_0)/(320y^2\tau_0^2\sigma_0).$$

Константы интегралов l, z связаны с константами σ_0, τ_0 соотношениями

$$l = z\eta/(2\xi), \quad 9(y - 1)(z^2 - 4\xi^2) + 4x\tau_0\sigma_0(y^2\sigma_0 + \tau_0) = 0. \quad (4.26)$$

5°. Для множества точек $P = -(0, \beta, 1)$, где $\beta > 2$, укороченная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,5} &\stackrel{\text{def}}{=} a_2\sigma + a_1 = 0, & \tilde{f}_{2,5} &\stackrel{\text{def}}{=} -b_0\sigma' = 0, \\ \tilde{f}_{3,5} &\stackrel{\text{def}}{=} b_0\sigma + c_0 = 0, & \tilde{f}_{4,5} &\stackrel{\text{def}}{=} d_4\sigma^2 + d_{10}\sigma + d_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Будем искать решение системы (4.27) в виде

$$\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \beta > 2. \quad (4.28)$$

Непосредственной подстановкой (4.28) в уравнения (4.27) находим выражения

$$\sigma_0 = \frac{(y - 1)\xi^2}{x\eta^2}, \quad z = \frac{y\xi^2}{\eta^2}, \quad l = \frac{\xi y}{\eta}. \quad (4.29)$$

Для вычисления следующих членов разложения введем новую переменную $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0$. В этом случае уравнения движения гиростата преобразуются к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0, i = \overline{1, 4}$.

Анализ всех возможных вариантов разложений решений этих уравнений сводится к изучению разложений для множества точек $P_1 = -(1, \beta, 1)$, $\beta > 2$, когда укороченная система

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,5} &\stackrel{\text{def}}{=} a_2\tilde{\sigma} + 2a_0p = 0, & \tilde{f}_{2,5} &\stackrel{\text{def}}{=} -b_0\tilde{\sigma}' + b_2\sigma_0 + b_1 = 0, \\ \tilde{f}_{3,5} &\stackrel{\text{def}}{=} b_0\tilde{\sigma} + (a_1 - b_1 - b_3\sigma_0)p = 0, & \tilde{f}_{4,5} &\stackrel{\text{def}}{=} (d_{10} + 2d_4\sigma_0)\tilde{\sigma} + d_9\sigma_0p = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

имеет решение

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0p, \quad \tau = \tau_0p^\beta, \quad \beta > 2.$$

Это возможно только при условиях

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{2(1-y)\eta}{xy}, \quad \xi^2y(x-y) - \eta^4 = 0. \quad (4.31)$$

Важное ограничение $x > y$ ($A_1 > A_2$), которое существенно упрощает дальнейшее исследование, следует из второго соотношения (4.31). Система (4.30) не содержит τ , поэтому является вырожденной. Введем новую переменную, полагая

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 - \tilde{\sigma}_0p, \quad (4.32)$$

и преобразуем уравнения $f_i(\sigma, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$, к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$. Исследуем степенные разложения решений этих уравнений для множества точек $P_2 = -(\alpha, \beta, 1)$, $\alpha > 1$, $\beta > 2$. Из всех возможных вариантов следует рассмотреть только три:

$$1) \alpha = 2, \beta = 3; \quad 2) \alpha > 2, \beta = 3; \quad 3) \beta = \alpha + 1 \in (2, 3).$$

В остальных случаях решения не имеют степенных разложений. Рассмотрим вариант 3). Тогда коэффициенты $\tilde{\sigma}_0, \tau_0$ удовлетворяют уравнениям

$$x^2y\tilde{\sigma}_0 + (y-1)(1+x-y)\eta\beta\tau_0 = 0, \quad xy(x-y)\tilde{\sigma}_0 + (1-y)\eta\beta\tau_0 = 0.$$

При условиях $xy\beta\eta \neq 0$, $x > y$ эти уравнения имеют лишь нулевое решение.

Доказано, что для системы $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$ показатели суть $\beta = 3$,

$\alpha \geq 2$. Разложения решений исходной системы следует искать в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{2+k}, \quad \tau = \tau_0 p^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{3+k}, \quad (4.33)$$

где

$$\tau_0 = -\frac{2(x-y)^2 x}{((x-y)^2 + 2x-y)\eta}, \quad \tilde{\tilde{\sigma}}_0 = \frac{(1-y)(4y-3x)}{xy} + \frac{6(1-y)(x-y)}{((x-y)^2 + 2x-y)y}.$$

В частном случае возможно равенство $\tilde{\tilde{\sigma}}_0 = 0$, но при этом общие формулы остаются в силе. Характеристическая матрица первых двух уравнений укороченной системы записывается в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} a_2 & (s+3)(x-y+1)\eta/(xy) \\ -(s+2)\eta & (s+3)(s+2)(y-1)\eta^2/[(x-y)xy] \end{pmatrix}.$$

Корни $s_1 = -3$, $s_2 = -2$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами рассматриваемой асимптотики. Начальное значение $s_0 = 1$. Отличных от (4.33) степенных разложений в семействе \mathcal{F}_5 нет.

7°. Уравнениям движения гиростата в точке $P = -(0, 2, 1)$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma = 0, & \tilde{f}_{2,7} &\stackrel{\text{def}}{=} -b_0\sigma' = 0, \\ \tilde{f}_{3,7} &\stackrel{\text{def}}{=} b_0\sigma + c_0 = 0, & \tilde{f}_{4,7} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + d_4\sigma^2 + d_{10}\sigma + d_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Система (4.34) при выполнении условий

$$\sigma_0 = \frac{(y-1)\xi^2}{x\eta^2}, \quad l = \frac{y\xi}{\eta}, \quad z = \frac{y\xi^2}{\eta^2} \quad (4.35)$$

имеет степенное решение $\sigma = \sigma_0$, $\tau = \tau_0 p^2$.

Введем новые переменные $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0$, $\tilde{\tau} = \tau - \tau_0 p^2$ и запишем преобразованные уравнения $f_i(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$. Для этих уравнений исследуем воз-

возможность существования степенных решений с асимптотикой $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^\alpha$, $\tau = \tilde{\tau}_0 p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 2$. Подстановкой асимптотик в уравнение $f_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$ получим, учитывая $\eta \neq 0$, важное ограничение $\alpha \geq 1$.

Если $\tau_0 \neq -1$, то для множества точек $P_1 = -(1, \beta, 1)$, $\beta > 2$, укороченная система преобразованных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 p^2 \tilde{\sigma}'' + \tau_0 p \tilde{\sigma}' + a_2 \tilde{\sigma} + 2a_0(1 + \tau_0)p = 0, \\ \tilde{f}_{2,7} &\stackrel{\text{def}}{=} -b_0 \tilde{\sigma}' + b_1 + (b_2 + 2\tau_0)\sigma_0 = 0, \\ \tilde{f}_{3,7} &\stackrel{\text{def}}{=} b_0 \tilde{\sigma} + [a_1 - b_1 - (b_3 + 2\tau_0)\sigma_0]p = 0, \\ \tilde{f}_{4,7} &\stackrel{\text{def}}{=} (d_{10} + 2d_4\sigma_0)\tilde{\sigma} + (d_9 + 2d_6\tau_0)\sigma_0 p = 0.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Подставим в (4.36) укороченное решение $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 p^\beta$, найдем выражения

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{2(1-y)(\tau_0+1)\eta}{(y\tau_0 - \tau_0 + x)y}, \quad \eta^4 = \frac{(y\tau_0 - \tau_0 + x)(x-y-\tau_0)\xi^2 y}{(\tau_0+1)x}.\tag{4.37}$$

Система (4.36) не содержит τ , потому является вырожденной. С помощью замены переменных

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 - \tilde{\sigma}_0 p, \quad \tilde{\tau} = \tau - \tau_0 p^2\tag{4.38}$$

преобразуем исходные уравнения $f_i(\sigma, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$. Дальнейший анализ всех возможных вариантов сводится к изучению разложений системы уравнений $f_i(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ в точках

$$P_2 = -(\alpha, \alpha + 1, 1), \quad \alpha \in (1, 2); \quad P_3 = -(2, 3, 1); \quad P_4 = -(\alpha, \alpha + 1, 1), \quad \alpha \in (2, 3).$$

Точка P_2 . Для точки P_2 коэффициенты степенных разложений будем находить из системы двух независимых уравнений

$$f_1(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0, \quad f_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0.$$

Соответствующие им укороченные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 p^2 \tilde{\sigma}'' + \tau_0 p \tilde{\sigma}' + a_2 \tilde{\sigma} + (\tilde{\sigma}_0/2 + a_0) \tilde{\tau}' = 0, \\ \tilde{f}_{2,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 \tilde{\tau}'' - b_0 \tilde{\sigma}' = 0.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Подстановкой степенного решения $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^\alpha$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 p^{\alpha+1}$ в систему (4.39) найдем выражение величины $\tilde{\sigma}_0$ через $\tilde{\tau}_0, \alpha$, где

$$\alpha^2 = -\frac{1}{\tau_0} - \frac{(x+1-y)^2}{\tau_0(\tau_0+1)(y-1)}.\tag{4.40}$$

Характеристическую матрицу уравнений (4.39) запишем в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} (s+\alpha)^2 \tau_0 + a_2 & (s+\alpha+1)(\tilde{\sigma}_0/2 + a_0) \\ -b_0(s+\alpha) & (s+\alpha)(s+\alpha+1)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $\nu(s) = \sigma_0 \tau_0 s(s+\alpha+1)(s+\alpha)(s+2\alpha)$ не имеет положительных корней. Постоянная $\tilde{\tau}_0$ – единственная произвольная постоянная в этом разложении. Остальные коэффициенты разложения выражаются через $x, y, \eta, \tilde{\tau}_0$. Итак, если определяемая формулой (4.40) величина α – рациональное число из интервала $(1, 2)$, то в \mathcal{F}_7 существует однопараметрическое (по $\tilde{\tau}_0$) семейство разложений по дробным степеням p . Получены примеры таких разложений с шагом $\Delta = 1/2, 1/3$ и др.

Точка P_3 . Аналогичным образом найдем степенные разложения решений уравнений

$$f_1(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0, \quad f_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$$

для точки $P_3 = -(2, 3, 1)$. Соответствующие точке P_3 укороченные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 p^2 \tilde{\sigma}'' + \tau_0 p \tilde{\sigma}' + a_2 \tilde{\sigma} + (\tilde{\sigma}_0/2 + a_0) \tilde{\tau}' + (a_5 + a_4 \tau_0 + 2a_3 \tau_0) p^2 = 0, \\ \tilde{f}_{2,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 \tilde{\tau}'' - b_0 \tilde{\sigma}' + (2b_0 + b_3 \tilde{\sigma}_0 + b_2 \tilde{\sigma}_0 + 3\tilde{\sigma}_0 \tau_0) p = 0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Для асимптотики $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^2$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 p^3$ вычислим характеристическую матри-

цу уравнений (4.41):

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} (s+2)^2\tau_0 + a_2 & (s+3)(\tilde{\sigma}_0/2 + a_0) \\ -b_0(s+2) & (s+2)(s+3)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами в этом случае являются $s_1 = -3$, $s_2 = -2$,

$$s_3 = -2 - \sqrt{\varphi_1}, \quad s_4 = -2 + \sqrt{\varphi_1}, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{\tau_0} - \frac{(x+1-y)^2}{\tau_0(\tau_0+1)(y-1)}. \quad (4.42)$$

Для всех разложений

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^2 + \sum_s \sigma_s p^{2+s}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \tilde{\tau}_0 p^3 + \sum_s \tau_s p^{3+s}, \quad s > 0, \quad (4.43)$$

имеем начальное значение $s_0 = 1$.

Следовательно, для точки P_3 вид разложений определяется критическим значением $s = s_2$. Решения уравнений движения гиростата могут иметь разложения

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{2+k}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \tilde{\tau}_0 p^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{3+k} \quad (4.44)$$

по целым степеням переменной p . В частности, если $s_2 < 0$, то разложения вида (4.44) существуют и не имеют произвольных коэффициентов.

Если критическое значение $s_2 > 0$ является рациональным, но не целым, то существует однопараметрическое (по σ_{s_2}) семейство разложений по дробным степеням p . Условию $s_2 = 0$ соответствует некоторая поверхность в пространстве параметров $\mathbb{R}^3(x, y, \eta)$. Пусть u, v – две независимые координаты на этой поверхности. Если $y > 1$, то положим

$$\begin{aligned} y &= 1 + v^2, \quad x = v^2 + 3uv/(2 + 2u^2), \quad \tau_0 = -(1 + 4u^2)/(4 + 4u^2), \\ \xi &= 2\eta^2 \left((x + xu^2)/(3(v + 2u)(2uv - 1)vy) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Область изменения координат u, v определена неравенствами

$$x > 0, \quad (v + 2u)(2uv - 1)v > 0. \quad (4.46)$$

При выполнении (4.45),(4.46) имеем $\varphi_1 = 4$, $s_2 = 0$. В случае $y < 1$ положим

$$\begin{aligned} y &= 1 - v^2, \quad x = -v^2 + \frac{3(u^2 - 1)v}{8u}, \quad \tau_0 = \frac{(3u - 1)(u - 3)}{16u}, \\ \xi &= 4\eta^2 \left(\frac{ux}{3(uv - 2u + v + 2)(u + 2v - 2uv + 1)vy} \right)^{1/2}, \\ x &> 0, \quad y > 0, \quad (uv - 2u + v + 2)(u + 2v - 2uv + 1)uv > 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

При этом также имеем $\varphi_1 = 4$, $s_2 = 0$.

Критическое значение $s = s_2$ является опасным, если $s_2 = k$, где k – натуральное число. В этом случае для каждого значения k могут быть выписаны условия разрешимости линейной системы, определяющей коэффициенты σ_{s_2}, τ_{s_2} . При выполнении этих условий существуют разложения (4.44) с одной произвольной константой, например, σ_{s_2} . При невыполнении условий разрешимости степенных разложений вида (4.44) не существует.

Так, например, пусть $\varphi_1 = 9$, $s_2 = 1$. В случае $y > 1$ положим

$$\begin{aligned} y &= 1 + v^2, \quad x = v^2 + \frac{8uv}{3(1 + u^2)}, \quad \tau_0 = -\frac{1 + 9u^2}{9(1 + u^2)}, \\ \xi &= 3\eta^2 \left(\frac{(1 + u^2)x}{8(v + 3u)(3uv - 1)vy} \right)^{1/2}, \\ x &> 0, \quad (v + 3u)(3uv - 1)v > 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

В случае $y < 1$ пусть

$$\begin{aligned} y &= 1 - v^2, \quad x = -v^2 + \frac{2(u^2 - 1)v}{3u}, \quad \tau_0 = \frac{(2u - 1)(u - 2)}{9u}, \\ \xi &= 3\eta^2 \left(\frac{ux}{2(uv - 3u + v + 3)(u + 3v - 3uv + 1)vy} \right)^{1/2}, \\ x &> 0, \quad y > 0, \quad (uv - 3u + v + 3)(u + 3v - 3uv + 1)uv > 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Условия разрешимости линейной системы записываются в виде алгебраического уравнения

$$k_3(u)v^3 + k_2(u)v^2 + k_1(u)v + k_0(u) = 0, \quad (4.50)$$

где $k_i(u)$ – целочисленные полиномы 9-й степени по u . Выписано соответству-

ющее (4.50) алгебраическое уравнение для x, y , которое в случаях (4.48), (4.49) имеет один и тот же вид.

Точка P_4 . Найдем степенные разложения решений уравнений

$$f_1(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0, \quad f_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, p) = 0$$

для точки $P_4 = -(\alpha, \alpha + 1, 1)$, $\alpha \in (2, 3)$. Степенные разложения решений существуют только при условии, что значения x, y удовлетворяют дополнительному алгебраическому уравнению. Пусть τ_0 – независимый параметр, тогда

$$x = \frac{(3 + 2\tau_0)(4\tau_0 + \tau_0^2 + 2)\tau_0}{(1 + \tau_0)(4\tau_0^2 + 7\tau_0 + 2)}, \quad y = \frac{3\tau_0(1 + \tau_0)}{4\tau_0^2 + 7\tau_0 + 2}. \quad (4.51)$$

Заметим, что формулы (4.51) соответствуют нулевому решению $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau} = 0$ системы (4.41).

С учетом (4.51) укороченная система уравнений записывается в виде (4.39). Укороченное решение $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^\alpha$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 p^{\alpha+1}$ удовлетворяет системе (4.39), при этом показатель α находим из (4.40):

$$\alpha^2 = \frac{4\tau_0^5 + 28\tau_0^4 + 73\tau_0^3 + 85\tau_0^2 + 42\tau_0 + 7}{(4\tau_0^2 + 7\tau_0 + 2)(1 + \tau_0)^3}. \quad (4.52)$$

Дальнейшие вычисления показали, что для всех $\tau_0 \in (-0.5, -0.39080)$ имеем $\alpha \in (2, 2.47250)$, а параметры x, y удовлетворяют неравенствам

$$x > 1, \quad y > 3/2, \quad y + 1 > x, \quad x + 1 > y.$$

Характеристический полином, как и для точки P_2 , не имеет положительных корней. Постоянная $\tilde{\tau}_0$ – единственная произвольная постоянная в этом разложении. Если определяемая формулой (4.52) величина α – рациональное число из интервала $(2, 3)$, то в \mathcal{F}_7 существует однопараметрическое (по $\tilde{\tau}_0$) семейство разложений по дробным степеням p .

Случай $\tau_0 = -1$. Уравнения (4.36) были получены при условии $\tau_0 \neq -1$. Теперь пусть $\tau_0 = -1$, $x + 1 - y = 0$, тогда в (4.43) следует положить $\tilde{\sigma}_0 = 0$,

а выражение φ_1 преобразуется к виду

$$\varphi_1^0 = 1 + \frac{\eta^4}{\xi^2 y} > 0. \quad (4.53)$$

Критическое значение $s = s_2$ является опасным, если $s_2 = k$, где k – натуральное число. Для значений $k = \overline{1, 4}$ найдем все точки x, y , в которых линейная система, определяющая коэффициенты σ_{s_2}, τ_{s_2} , имеет решение. Условия разрешимости выполнены в следующих случаях:

$$k = 1, \quad x = \frac{5}{4}, \quad y = \frac{9}{4}; \quad k = 3, \quad x \approx 1.298536, \quad y \approx 2.298536.$$

Для $k = 2, 4$ условия разрешимости не выполнены. Напомним, что при выполнении условий разрешимости существуют разложения (4.44) с одной произвольной константой, например, σ_{s_2} . При невыполнении условий разрешимости степенных разложений вида (4.44) не существует.

9°. Для изучения степенных разложений, соответствующих множеству точек $P = -(0, \beta, 1)$, $\beta \in (1, 2)$, введем новую переменную

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0, \quad \text{где } \sigma_0 = -c_0/b_0.$$

Дальнейший анализ всех возможных вариантов сводится к изучению разложений системы $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, для одной точки $P_1 = -(1/3, 4/3, 1)$. Тогда укороченная система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,9} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \tilde{\sigma}'' + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}' \tau' = 0, & \tilde{f}_{2,9} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 \tau'' - b_0 \tilde{\sigma}' = 0, \\ \tilde{f}_{3,9} &\stackrel{\text{def}}{=} b_0 \tilde{\sigma} - \sigma_0 \tau' = 0, & \tilde{f}_{4,9} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\tilde{\sigma}')^2 + d_0 + d_{10} \sigma_0 + d_4 \sigma_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Подставим в (4.54) укороченное решение $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^{1/3}$, $\tau = \tau_0 p^{4/3}$, получим соотношения

$$3b_0 \tilde{\sigma}_0 - 4\tau_0 \sigma_0 = 0, \quad d_1 \tilde{\sigma}_0^2 \tau_0 + 9(d_4 \sigma_0^2 + d_{10} \sigma_0 + d_0). \quad (4.55)$$

С учетом равенства $\sigma_0 = -c_0/b_0$ из (4.55) найдем выражения:

$$\begin{aligned} 3\tilde{\sigma}_0\eta - 4\tau_0\sigma_0 = 0, \quad xy\sigma_0\eta + (y-1)(z\eta - 2l\xi) = 0, \quad xy^2(y-1)\tilde{\sigma}_0^3\eta + \\ + 48x(y-1)\sigma_0^2\eta^2 - 48\xi^2(y-1)^2\sigma_0 + 12(xy\sigma_0 + z - yz)^2\sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Следовательно, параметры $\sigma_0, \tilde{\sigma}_0, \tau_0$ выражаются через произвольные интегральные постоянные l, z .

Характеристическую матрицу первых двух уравнений (4.54) запишем в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s+1/3)\tau_0 & s\tilde{\sigma}_0/6 \\ -\eta(s+1/3) & (s+4/3)(s+1/3)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Корни $s_1 = -1, s_2 = -2/3, s_3 = -1/3, s_4 = 0$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами рассматриваемой асимптотики. Критических значений $s = s_i$ нет, так как определитель $\det \mathcal{N}(s) \neq 0$ для любого $s > 0$.

Для всех разложений имеем начальное значение $s_0 = 1/3$. Итак, решения системы имеют степенные разложения с шагом $\Delta = 1/3$:

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}_0 p^{1/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{\frac{1+k}{3}}, \quad \tau = \tau_0 p^{4/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{4+k}{3}}. \quad (4.57)$$

Полученное двухпараметрическое (например, по σ_0, τ_0) семейство разложений (4.57) обозначим через \mathcal{F}_9 . Параметры x, y, η, ξ могут быть произвольными величинами, определяемыми лишь физической постановкой задачи.

11°. Для точки $P = -(1/2, 1, 1)$ найдем семейство $\mathcal{F}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$, которое существует только при ограничении $c_0 = 0$. Укороченная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,11} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \quad \tilde{f}_{2,11} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' - b_0\sigma' = 0, \\ \tilde{f}_{3,11} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma' - \sigma\tau' + b_0\sigma = 0, \quad \tilde{f}_{4,11} \stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + d_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Укороченные уравнения (4.58) имеют решение

$$\sigma = \sigma_0 p^{1/2}, \quad \tau = \tau_0 p. \quad (4.59)$$

Найдем характеристическую матрицу двух первых уравнений (4.58) для вы-

числения коэффициентов степенных разложений по возрастающим степеням p :

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s + 1/2)\tau_0 & s\sigma_0/4 \\ 0 & (s + 1)(s + 1/4)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа $s_1 = -1$, $s_2 = -1/2$, $s_3 = -1/4$, $s_4 = 0$ в этом случае неположительны. Начальное значение s равно $s_0 = 1/2$. Решения системы допускают однопараметрическое семейство разложений вида

$$\sigma = \sigma_0 p^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{\frac{1+k}{2}}, \quad \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{2+k}{2}}, \quad (4.60)$$

где σ_0 – произвольная постоянная. Далее находим

$$\tau_0 = 2\eta, \quad \sigma_1 = (9z - yz - 18\eta^2)/(9y\eta), \quad \tau_1 = 8z/(9\sigma_0).$$

Интегральные постоянные связаны с константой σ_0 соотношениями

$$l = z\eta/(2\xi), \quad xy^2\eta\sigma_0^2 + 2(4\xi^2 - z^2)(1 - y) = 0. \quad (4.61)$$

13°. Положим $c_0 = d_0 = 0$. Точка $P = -(1, 1, 1)$ не была рассмотрена нами ранее. Вычислим соответствующее ей семейство степенных разложений $\mathcal{F}_{13} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$. Из условия $d_0 = 0$ находим $z = \pm 2\xi$. Без ограничения общности будем считать $\xi > 0$. Тогда равенство $z = -2\xi$ соответствует наименьшему значению постоянной энергии при устойчивом равновесии гиростата. Из интеграла энергии (первого интеграла (4.2)) сразу находим постоянные значения всех переменных:

$$p = q = r = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 = -1.$$

Таким образом, нам остается изучить решения уравнений движения гиростата при условиях

$$z = 2\xi, \quad l = \eta. \quad (4.62)$$

В этом случае укороченная система уравнений и интегралов имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{1,13} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_0\tau' + a_1 = 0, \\
\tilde{f}_{2,13} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' - b_0\sigma' + b_1 = 0, \\
\tilde{f}_{3,13} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma' - \sigma\tau' + (a_1 - b_1)p + b_0\sigma + a_0\tau = 0, \\
\tilde{f}_{4,13} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_{10}\sigma + d_{14}\tau + d_3\tau\sigma' + d_6\sigma\tau' = 0.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Укороченные решения

$$\sigma = \sigma_0 p, \quad \tau = \tau_0 p \tag{4.64}$$

являются решениями системы (4.63). При этом коэффициенты σ_0, τ_0 найдем из уравнений, полученных подстановкой (4.64) в (4.63):

$$\tau_0 = 2(\sigma_0\eta + 2\xi)/\sigma_0, \quad (\sigma_0\eta + 2\xi)(y\sigma_0 + 2\eta) - 2\sigma_0\xi = 0. \tag{4.65}$$

Запишем характеристическую матрицу первых двух уравнений (4.63):

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)(s+1/2)\tau_0 & -a_1(s+1)/\tau_0 \\ (\tau_0/2 - b_0)(s+1) & (s+1)(s+1/2)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами асимптотики (4.64) являются

$$s_1 = -1/2 - \sqrt{\varphi_3}, \quad s_2 = -1/2 + \sqrt{\varphi_3}, \quad s_3 = s_4 = -1,$$

где $\varphi_3 = (y\sigma_0 + 2\eta)^2/(4y\sigma_0^2) > 0$. Начальное значение s есть $s_0 = 1$.

Степенные разложения рассматриваемого семейства \mathcal{F}_{13} могут быть различных видов. Во-первых, существуют разложения (без произвольных коэффициентов σ_k, τ_k) по целым степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{1+k}, \quad \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{1+k}. \tag{4.66}$$

Критическое значение $s = s_2$ может быть опасным, если $s_2 = k$, где k —

натуральное число. В этом случае для каждого значения k могут быть выписаны специальные условия разрешимости линейной системы, определяющей коэффициенты σ_{s_2}, τ_{s_2} . При выполнении этих условий существуют разложения (4.66) с одной произвольной константой, например, σ_{s_2} . При невыполнении условий разрешимости степенных разложений вида (4.66) не существует. Вычислим опасные кривые для первых значений $s_2 = 1, 2, 3, \dots$

Введем два независимых параметра u, v так, чтобы выполнялись следующие равенства

$$y = u^2, \quad \sqrt{\varphi_3} = v. \quad (4.67)$$

С учетом (4.65) найдем

$$\sigma_0 = \frac{2\eta}{(2v - u)u}, \quad \tau_0 = \frac{2\eta}{1 - 2vu}, \quad \xi = \frac{2v\eta^2}{(2vu - 1)(u - 2v)}. \quad (4.68)$$

Пусть $s_2 = 1$, тогда $v = 3/2$,

$$\xi = \frac{3\eta^2}{(3u - 1)(u - 3)} > 0.$$

Условие разрешимости линейной системы имеет вид $x = (u + 1)^2$. Следовательно, условие выполняется лишь в некоторых точках плоской кривой

$$(x - y + 1)^2 - 4x = 0.$$

Пусть $s_2 = 2$, тогда $v = 5/2$,

$$\xi = \frac{5\eta^2}{(5u - 1)(u - 5)} > 0.$$

Условие разрешимости имеет вид

$$(45u^2 - 174u + 45)x^2 + (128u^3 - 90u^4 + 532u^2 + 128u - 90)x + \\ + (45u^4 - 44u^3 - 258u^2 - 44u + 45)(u + 1)^2 = 0.$$

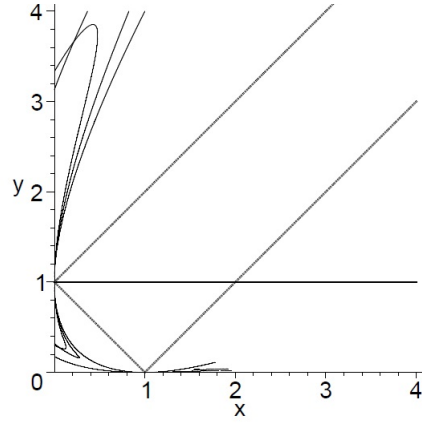


Рис. 4.1: Опасные кривые $s_2 = n$ для семейства F_{13} .

Для значений $s_2 = \overline{1, 3}$ были построены опасные кривые на плоскости x, y . Эти кривые расположены в области (см. рис. 4.1), где неравенства треугольника для главных моментов инерции A_1, A_2, A_3 не выполняются.

Во-вторых, существуют однопараметрические (по σ_{s_2}) разложения по дробным степеням p , если число $s_2 > 0$ рациональное. Например, возможны разложения с шагом $\Delta = 1/2, 1/3, 1/4, \dots$. В-третьих, если s_2 иррационально, то существует однопараметрическое семейство разложений по вещественным степеням p , которые мы не будем здесь рассматривать.

4.3. Степенные разложения решений в случае $p \rightarrow \infty$

14⁰. В точке $P = (\alpha, 2, 1)$, где $\alpha > 2$, укороченная система уравнений (4.4) и их интегралов (4.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,14} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + a_2 \sigma = 0, & \tilde{f}_{2,14} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + b_2 \sigma + b_3 p \sigma' = 0, \\ \tilde{f}_{3,14} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' - b_3 p \sigma = 0, & \tilde{f}_{4,14} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 + d_4 \sigma^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Система (4.69) при выполнении условий

$$\tau_0 = \frac{2y - x}{\alpha - 2}, \quad \alpha = \frac{x \pm \sqrt{\varphi_2}}{2(y - 1)(x - 2y)}, \quad \varphi_2 = x(16y^2 - 8xy + 9x - 16y), \quad (4.70)$$

$$(1 - y)(2y - x) > 0, \quad 16(y - 1)y - (8y - 9)x \geq 0$$

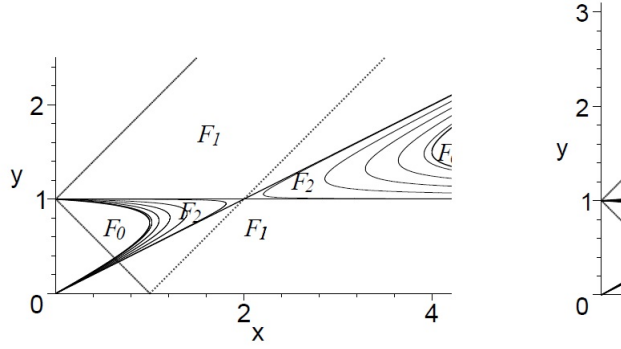


Рис. 4.2: Кривые $\alpha = \text{const}$ для семейств $\mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}$.

имеет степенное решение

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha, \quad \tau = \tau_0 p^2. \quad (4.71)$$

В соответствии со второй формулой (4.70), значение показателя $\alpha > 2$ возможно только в подмножестве

$$F_2 = \{x, y : y < 1, y > x/2, x \geq 16(y-1)y/(8y-9)\} \cup \\ \cup \{x, y : y > 1, y < x/2, 16(y-1)y - (8y-9)x \geq 0\}.$$

При этом в F_2 (см. рис. 4.2) имеется пара корней $\alpha_{1,2} > 2$:

$$\alpha_1 \in (2, 4], \quad \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 - 2} \in [4, \infty).$$

Корни $s_1 = -2 + \alpha/2$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1 - \alpha$, $s_4 = -2\alpha$ характеристического полинома $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ являются собственными числами асимптотики (4.71). Начальное значение $s = s_0$ зависит от значения α :

$$s_0 = \begin{cases} 2 - \alpha, & \text{если } \alpha \in (2, 3); \\ -1, & \text{если } \alpha \geq 3. \end{cases} \quad (4.72)$$

Кстати, в случае $\eta = 0$ соответствующее разложение всегда имело начальное значение $s_0 = 2 - \alpha$, см. выражение (6.7.2) в работе [12]. Взаимное располо-

жение величин s_i зависит от значения показателя α :

$$1) \alpha \in \left(2, \frac{8}{3}\right) \Rightarrow s_4 < s_3 < s_1 < s_0 < s_2 = 0;$$

$$2) \alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow s_4 < s_3 < s_1 = s_0 < s_2 = 0;$$

$$3) \alpha \in \left(\frac{8}{3}, 4\right) \Rightarrow s_4 < s_3 < s_0 < s_1 < s_2 = 0;$$

$$4) \alpha \geq 4 \Rightarrow s_4 < s_3 < s_0 < s_2 = 0 \leq s_1.$$

Семейства разложений \mathcal{F}_{14} в общем случае зависят от трех, либо четырех произвольных постоянных. Корню $s_2 = 0$ соответствует произвольная постоянная σ_0 . Корни s_3, s_4 соответствуют постоянным константам z, l первых интегралов, потому для значений $s = s_{3,4}$ условие разрешимости линейной системы всегда выполнено, и появляются две дополнительные постоянные $\sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$, зависящие от x, y, η, z, l . В соответствии с результатом А. Д. Брюно [8], критическое значение s_1 может быть опасным только если $s_1 = ks_0$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, все опасные значения суть [8, 12]

$$\alpha = 4(k+1)/(2k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.73)$$

т. е. $\alpha = 8/3, 12/5, 16/7, 20/9, 24/11, 28/13, \dots$.

Пусть значение $\alpha \in (2, 4)$ и отлично от (4.73), то в степенных разложениях

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \sum_s \tau_s p^{2+s} \quad (4.74)$$

имеются четыре произвольных коэффициента $\sigma_0, \sigma_{s_1}, \sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$. Четырехпараметрических разложений по целым степеням p в семействе \mathcal{F}_{14} нет.

Пусть значение $\alpha \geq 4$, то в степенных разложениях имеются три произвольных коэффициента $\sigma_0, \sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$. При этом разложения возможны по целым, дробным и по вещественным степеням p .

Пусть значение $\alpha \in (2, 8/3]$ определено формулой (4.73), при этом пара-

метры x, y связаны соотношением

$$x = \frac{2\alpha^2 y(y-1)}{\alpha^2 y - \alpha^2 - \alpha + 2}. \quad (4.75)$$

Только некоторые точки кривых (4.75) с этим значением α могут иметь разложения вида (4.74), в этих точках должны выполняться специальные условия разрешимости. Если условия (4.11) выполняются, то разрешенные точки x, y на опасных кривых совпадают с соответствующими точками, вычисленными в §6.8 препринта А. Д. Брюно, В. В. Лунева [12]. Для первых значений $k = 1, 2, 3, 4, 5$ соответствующие точки были найдены, для них построены четырехпараметрические семейства разложений. Для других значений опасных кривых (4.75) исходная система дифференциальных уравнений не имеет решений в виде степенных разложений.

Семейства разложений $\mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}$ связаны между собой симметричным преобразованием. Совместное расположение кривых (4.75) на плоскости x, y для $\mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}$ показано на рисунке 4.2.

16°. Вычислим степенные разложения, отвечающие точкам $P = (2, \beta, 1)$, где $\beta < 2$. Для этого запишем укороченную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,16} &\stackrel{\text{def}}{=} a_2\sigma + a_5p^2 = 0, & \tilde{f}_{2,16} &\stackrel{\text{def}}{=} b_2\sigma + b_3p\sigma' + b_5p^2 = 0, \\ \tilde{f}_{3,16} &\stackrel{\text{def}}{=} -b_3p\sigma + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 = 0, & \tilde{f}_{4,16} &\stackrel{\text{def}}{=} d_4\sigma^2 + d_8p^2\sigma + d_{15}p^4 = 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^2$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, где $\beta < 2$, являются решениями уравнений (4.76) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$x = y, \quad \sigma_0 = (1 - y)/y. \quad (4.77)$$

Система (4.76) не содержит τ , а потому является вырожденной. С помощью замены переменной $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 p^2$ преобразуем уравнения $f_i(\sigma, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, и исследуем степенные разложения решений этих уравнений для множества точек $P_1 = (\alpha, \beta, 1)$, $\alpha < 2, \beta < 2$.

В результате исследования всех возможных вариантов найдем ограничения: 1) $2 > \beta > 1$, $\beta > \alpha$, либо 2) $\alpha = \beta = 1$. В первом случае укороченная система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,16} &\stackrel{\text{def}}{=} (a_3 + \sigma_0)p\tau' + (a_4 + 2\sigma_0)\tau = 0, & \tilde{f}_{2,16} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 \tau'' + \sigma_0 p \tau' + b_4 \tau = 0, \\ \tilde{f}_{3,16} &\stackrel{\text{def}}{=} -\sigma_0 p^2 \tau' + (a_3 + 2\sigma_0)p\tau = 0, & \tilde{f}_{4,16} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 (\tau')^2 + d_{11} \tau^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Только при условии $\beta = y/(y-1)$, где $y > 2$, уравнения (4.78) имеют степенное решение $\tau = \tau_0 p^\beta$. Система (4.78) не содержит $\tilde{\sigma}$, поэтому также является вырожденной. Найдем линейную комбинацию уравнений $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, чтобы получить уравнение, содержащее $\tilde{\sigma}$. Для этого положим

$$f_5(\tilde{\sigma}, \tau, p) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\tilde{\sigma}, \tau, p)p + \frac{\eta}{y-2} f_1(\tilde{\sigma}, \tau, p) + \frac{1}{y-1} f_3(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0. \quad (4.79)$$

С учетом уравнения (4.79) найдем единственно возможное значение показателя $\alpha = 1$ для асимптотики $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^\alpha$. Точкам $P_2 = (1, y/(y-1), 1)$, $y > 2$, соответствует укороченное уравнение

$$\tilde{f}_{5,16} \stackrel{\text{def}}{=} p\tau\tilde{\sigma}'' + \frac{1}{2}p\tilde{\sigma}'\tau' + \frac{1}{y-1}\tau\tilde{\sigma}' + \frac{(y-3)\eta}{(y-2)y}p\tau' - \frac{1}{y-1}\tilde{\sigma}\tau' + \frac{2\eta}{(y-2)y}\tau = 0,$$

из которого следует $\tilde{\sigma}_0 = -2\eta(y-1)/(y^2-2y)$.

Снова введем новую переменную, полагая

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \tilde{\sigma} - \sigma_0 p^2 - \tilde{\sigma}_0 p. \quad (4.80)$$

Коэффициенты степенных разложений будем находить из системы двух независимых уравнений $f_1(\tilde{\tilde{\sigma}}, \tau, p) = 0$, $f_5(\tilde{\tilde{\sigma}}, \tau, p) = 0$. Соответствующие им укороченные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{1,16} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{y}p\tau' + \frac{1}{y-1}\tau = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{5,16} &\stackrel{\text{def}}{=} p\tau\tilde{\tilde{\sigma}}'' + \frac{1}{2}p\tilde{\tilde{\sigma}}'\tau' + \frac{1}{y-1}\tau\tilde{\tilde{\sigma}}' - \frac{1}{y-1}\tilde{\tilde{\sigma}}\tau' - \frac{2\eta^2}{(y-2)^2}p = 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Система (4.81) имеет укороченное решение

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^{2-\beta}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad (4.82)$$

где

$$\beta = y/(y-1), \quad y > 2, \quad y \neq 4, \quad \tau_0 \tilde{\sigma}_0 y(y-4)(y-2)^2 - 4\eta^2(y-1)^2 = 0.$$

Для степенных разложений по убывающим степеням p на укороченном решении (4.82) вычислим характеристическую матрицу

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -s/y \\ (s+\beta)(s+2-3\beta/2)\tau_0 & (2-3\beta/2)(s+\beta)\tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, степенные разложения из семейства \mathcal{F}_{16} имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\sigma}_0 p^{2-\beta} + \sum_s \sigma_s p^{2-\beta+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s}, \quad s < 0.$$

Корни $s_1 = 3\beta/2 - 2$, $s_2 = 0$, $s_3 = -\beta$, $s_4 = -2\beta$ являются собственными числами асимптотики (4.82). Корни s_3, s_4 являются критическими, они не опасны, так как соответствуют константам z, l двух интегралов. Как следует из выражения (4.79), константа l появляется в коэффициентах разложения при $s = -1$. Произвольная константа σ_{s_3} выражается через коэффициенты, вычисленные при $s < s_3$.

Найдем начальное значение $s = s_0$, оно зависит от y :

$$s_0 = \begin{cases} \beta - 2, & \text{если } y \in (2, 3); \\ 1 - \beta, & \text{если } y \geq 3. \end{cases} \quad (4.83)$$

Изучим взаимное расположение величин s_i в зависимости от значения y :

$$1) \quad y \in (2, 4), \quad \beta \in \left(\frac{4}{3}, 2\right) \Rightarrow s_4 < s_3 < s_0 < s_2 = 0 < s_1;$$

$$2) \quad y \in (4, 6), \quad \beta \in \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow s_4 < s_3 < s_0 < s_1 < s_2 = 0;$$

$$3) \quad y = 6, \quad \beta = \frac{6}{5} \Rightarrow s_4 < s_3 < s_0 = s_1 < s_2 = 0;$$

$$4) y > 6, \beta \in (1, \frac{6}{5}) \Rightarrow s_4 < s_3 < s_1 < s_0 < s_2 = 0.$$

Если число $y \in (2, 4)$ рациональное, то существуют степенные разложения решений по дробным степеням p с тремя произвольными постоянными $\tau_0, \sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$. Если число $y \in (4, 6)$, то критическое значение s_1 будет всегда не опасным ($|s_1| < |s_0|$). Для рациональных значений $y \in (4, 6)$ существует четырехпараметрическое семейство разложений по дробным степеням p с произвольными постоянными $\tau_0, \sigma_{s_1}, \sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$. Если $y = 6$, то критическое значение s_1 является опасным. Тогда условие разрешимости линейной системы не выполнено и, следовательно, степенных разложений в этом случае нет. Если $y > 6$, то критическое значение s_1 может быть опасным только если $s_1 = ks_0, k = 2, 3, 4, 5, \dots$. При этом

$$\beta = \frac{y}{y-1} = \frac{2(k+2)}{2k+3}, \quad y = 2k+4, \quad k = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (4.84)$$

Для первых значений $k = 2, 3, 4$ были проведены вычисления, условия разрешимости в этих случаях оказались не выполнены. Для всех остальных, отличных от (4.84) значений $y > 6$, существует четырехпараметрическое семейство разложений по вещественным степеням p и, в частности, по дробным степеням p для всех рациональных и нечетных целых значений y .

Отметим, что в семействе \mathcal{F}_{16} разложения с шагом $\Delta = 1/2$ существуют только в случае $y = 3$ ($\beta = 3/2, s_0 = -1/2, s_1 > 0$) и зависят от трех произвольных постоянных. Разложения с шагом $\Delta = 1/3$ существуют только в случае $y = 5/2$ ($\beta = 5/3, s_0 = -1/3, s_1 > 0$), они также зависят от трех произвольных постоянных.

18°. В результате замены (4.80) можно найти степенные асимптотики не только для системы (4.81). Так, например, множеству точек $P = (\beta/2, \beta, 1)$, где $\beta = y/(y-1), y \in (2, 4)$, соответствуют укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,18} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{y}p\tau' + \frac{1}{y-1}\tau = 0, \\ \tilde{f}_{5,18} &\stackrel{\text{def}}{=} p\tau\tilde{\sigma}'' + \frac{1}{2}p\tilde{\sigma}'\tau' + \frac{1}{y-1}\tau\tilde{\sigma}' - \frac{1}{y-1}\tilde{\sigma}\tau' = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Система (4.85) имеет укороченное решение

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p^{\beta/2}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta. \quad (4.86)$$

Характеристическая матрица системы уравнений (4.85) имеет вид

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -s/y \\ s(s - 2 + 5\beta/2)\tau_0 & s(1 - 3\beta/4)\tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix}.$$

Корни $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 2 - 5\beta/2$, $s_4 = -2\beta$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами асимптотики (4.86). Найдем скалярные произведения точек носителя уравнения f_1 с вектором $(2 - \beta, \beta, 1)$:

$$\beta, 1, \beta/2, \beta - 1, 3\beta/2 - 2, 0.$$

Скалярные произведения точек носителя уравнения f_5 с вектором $(2 - \beta, \beta, 1)$ имеют вид

$$3\beta/2 - 1, 1, \beta/2, \beta - 1, 3\beta/2 - 2, 0.$$

Следовательно, для всех степенных разложений семейства \mathcal{F}_{18} начальное значение $s_0 = 3\beta/2 - 2$. При этом справедливы неравенства

$$s_4 < s_3 < s_0 < s_2 = s_1 = 0.$$

Можно показать, что показатели s принадлежат сетке \mathbf{k} , которая порождается величинами $s_0 = 3\beta/2 - 2$, $\tilde{s}_0 = \beta/2 - 1$. Рассмотрим несколько возможных вариантов. Если $y \in (2, 3]$, $\beta \in [3/2, 2)$, то возможно равенство $s_0 = k\tilde{s}_0$, где k – натуральное число. В этом случае находим

$$\beta = \frac{2(k+2)}{k+3}, \quad y = \frac{2(k+2)}{k+1}, \quad s_0 = -\frac{k}{k+3}, \quad \tilde{s}_0 = -\frac{1}{k+3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Начальное значение $s = s_0$ уменьшается до $s = \tilde{s}_0$, далее шаг разложения не меняется.

Если $y \in (3, 4)$, $\beta \in (4/3, 3/2)$, то возможно равенство $\tilde{s}_0 = ks_0$, где k –

натуральное число. Тогда находим

$$\beta = \frac{2(k+2)}{3k+1}, \quad y = \frac{2(2k+1)}{k+1}, \quad s_0 = -\frac{1}{3k+1}, \quad \tilde{s}_0 = -\frac{k}{3k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Начальное значение $s = s_0$ не уменьшается, шаг разложения не меняется и равен $\Delta = 1/(3k+1)$. Как правило, при рациональном значении $\beta = n/m$ шаг разложения последовательно уменьшается до $\Delta = 1/(2m)$.

Корни s_3, s_4 являются критическими, они не опасны, так как соответствуют константам z, l двух интегралов. Семейство степенных разложений \mathcal{F}_{18} вида

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^{\beta/2} + \sum_s \sigma_s p^{\beta/2+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s}, \quad s < 0,$$

является четырехпараметрическим (по $\tau_0, \tilde{\tilde{\sigma}}_0, \sigma_{s_3}, \sigma_{s_4}$). В этом семействе нет степенных разложений с шагом $\Delta = 1, 1/2, 1/3$. Для $y = 3$ существует четырехпараметрическое семейство разложений с шагом $\Delta = 1/4$, для $y = 8/3$ — семейство разложений с шагом $\Delta = 1/5$, а для $y = 5/2$ — четырехпараметрическое семейство разложений с шагом $\Delta = 1/6$.

20°. Семейство \mathcal{F}_{20} найдем (как и семейство \mathcal{F}_{16}) в результате исследования укороченной системы (4.76), рассмотренной в п. 16°. Система (4.76) была вырожденной, так как не содержала τ . Поэтому с помощью замены переменной $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 p^2$ мы преобразовали систему $f_i(\sigma, \tau, p) = 0, i = \overline{1, 4}$, к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0, i = \overline{1, 4}$. Ранее были отмечены варианты 1) $2 > \beta > 1, \beta > \alpha$; 2) $\alpha = \beta = 1$. Изучим вариант 2). Пусть выполнены условия (4.77). Исследуем степенные разложения решений уравнений $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0, i = \overline{1, 4}$. Чтобы система уравнений была невырожденной, вместо уравнения $f_3(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$ будем использовать $f_5(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, являющееся (см. (4.79)) линейной комбинацией f_1, f_3 . Случай $y = 2$ будет рассмотрен отдельно.

Случай $y \neq 2$. В точке $P_1 = (1, 1, 1)$ укороченная система уравнений примет вид

$$\tilde{f}_{1,20} \stackrel{\text{def}}{=} (a_3 + \sigma_0)p\tau' + (a_4 + 2\sigma_0)\tau + a_2\tilde{\sigma} + 2a_0p = 0,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{2,20} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 \tau'' + \sigma_0 p \tau' + b_2 \tilde{\sigma} + b_4 \tau + b_3 p \tilde{\sigma}' + 2b_0 p(1 - \sigma_0) = 0, \\
\tilde{f}_{5,20} &\stackrel{\text{def}}{=} -\sigma_0 p^2 \tau' + (a_3 + 2\sigma_0) p \tau - b_3 p \tilde{\sigma} + [a_0 + b_0(\sigma_0 - 1)] p^2 = 0, \\
\tilde{f}_{4,20} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 (\tau')^2 + d_{11} \tau^2 + d_7 \tau \tilde{\sigma} + d_4 \tilde{\sigma}^2 + d_6 \sigma_0 p^2 \tau' + (d_{16} + d_{10} \sigma_0) p^2 = 0.
\end{aligned}$$

После подстановки укороченных решений $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p$, $\tau = \tau_0 p$ приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p , найдем

$$\tilde{\sigma}_0 = -2\eta/y, \quad \tau_0 = 2\eta. \quad (4.87)$$

Характеристическая матрица рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} \frac{y}{y-1} & -\frac{1}{y}s + \frac{1}{y(y-1)} \\ (2y + sy - s - 1)\frac{y}{y-1} & (2y + sy - s - 1)(s + 1 - sy)\frac{1}{y(y-1)} \\ 2\eta s^2 + \frac{(3y-1)}{y-1}\eta s + \frac{y}{y-2}\eta & \frac{y-3}{y(y-1)(y-2)}\eta s + \frac{1}{(y-2)y}\eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ненулевые миноры суть

$$\mu_{13} = s(s+1)(2s+1)\eta/y, \quad \mu_{23} = s(s+1)(2s+1)(2y+sy-s-1)\eta/y.$$

Корни $s_1 = 0$, $s_2 = -1/2$, $s_3 = -1$, $s_4 = (1-2y)/(y-1)$ характеристического полинома являются собственными числами рассматриваемой асимптотики. Коэффициенты разложения будем находить из системы двух уравнений

$$f_1(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0, \quad f_5(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0,$$

так как соответствующий им минор μ_{13} содержит меньшее чем μ_{23} число отрицательных корней s_i .

Для всех разложений семейства \mathcal{F}_{20} начальное значение $s_0 = -1$. Следовательно, критическое значение $s = s_2$ не опасно. Коэффициенты $\sigma_1 = \sigma_{s_2}$, $\tau_1 = \tau_{s_2}$ связаны линейным ограничением

$$2y^2\sigma_1 + (y+1)\tau_1 = 0.$$

Если $|\sigma_1| + |\tau_1| \neq 0$, то дальнейшее разложение решения происходит по сетке с шагом $\Delta = 1/2$. Критическое значение $s = s_3$ является опасным, так как оно лежит в исходной сетке. Для разрешимости вырожденной неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} y^2\sigma_2 + y\tau_2 = z(y-1), \\ 32\eta y^2\sigma_2 + 32\eta y\tau_2 = (32z\eta + 32l\xi(y-2) - (y+1)(y-2)\tau_1^2)(y-1) \end{cases} \quad (4.88)$$

должно выполняться условие совместности

$$32l\xi - \tau_1^2(y+1) = 0. \quad (4.89)$$

Условие (4.89) всегда выполнено, так как l – произвольная постоянная. Подстановка первых членов разложения в уравнение $f_4 = 0$ дает ограничение

$$\tau_1^2 = \frac{32y\xi^2}{(y-1)\eta}. \quad (4.90)$$

Условие (4.90) показывает, что неравенство $|\sigma_1| + |\tau_1| \neq 0$ всегда выполняется, разложений с шагом $\Delta = 1$ в семействе \mathcal{F}_{20} не существует. Произвольными константами являются z, σ_2 .

Итак, в данном случае существует двухпараметрическое семейство разложений с шагом $\Delta = 1/2$ по убывающим степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{\frac{2-k}{2}}, \quad \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{2-k}{2}}. \quad (4.91)$$

Корень s_4 является отрицательным, если $y \in (0, 1/2) \cup (1, \infty)$. Тем не менее, во-первых, при критическом значении $s = s_4$ шаг разложения не уменьшается; во-вторых, критическое значение $s = s_4$ не является опасным. Уравнение

$$\nu_{21}(s_4)\sigma_{s_4} + \nu_{22}(s_4)\tau_{s_4} = g_2,$$

соответствующее $s = s_4$, обращается в тождественный нуль.

Случай $y = 2$. Вместо уравнения (4.79) выберем

$$f_6(\tilde{\sigma}, \tau, p) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\tilde{\sigma}, \tau, p)p + \frac{1}{y-1} f_3(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0 \quad (4.92)$$

в качестве независимого уравнения, устраняющего вырожденность системы $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1, 4}$. При этом укороченное уравнение в точке $P_1 = (1, 1, 1)$ примет вид

$$\tilde{f}_{6,20} \stackrel{\text{def}}{=} p\tilde{\sigma}''\tau + \tilde{\sigma}'\tau - \tau'\tilde{\sigma} + \eta\tilde{\sigma} + \frac{1}{2}p\tilde{\sigma}'\tau' + \frac{1}{2}\eta p\tau' + \frac{1}{2}\eta\tau = 0. \quad (4.93)$$

Зависимости (4.87) остаются в силе. Элементы третьей строки характеристической матрицы $\mathcal{N}(s)$ имеют вид

$$\nu_{31}(s) = \eta(s+2)(2s+1), \quad \nu_{32}(s) = (2s+1)\eta/2.$$

Корни $s_1 = 0$, $s_2 = -1/2$, $s_3 = -1$, $s_4 = -3$ характеристического полинома являются собственными числами рассматриваемой асимптотики при $y = 2$. Коэффициенты разложения будем находить из системы двух уравнений

$$f_1(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0, \quad f_6(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0.$$

Критическое значение $s = s_2$ не опасно. Коэффициенты $\sigma_1 = \sigma_{s_2}$, $\tau_1 = \tau_{s_2}$ связаны линейным соотношением

$$8\sigma_1 + 3\tau_1 = 0.$$

Ограничения (4.89), (4.90) принимают вид

$$32l\xi - 3\tau_1^2 = 0, \quad \tau_1^2 = \frac{64\xi^2}{\eta} \Rightarrow l\eta = 6\xi. \quad (4.94)$$

Таким образом, при $x = y = 2$ также существует двухпараметрическое (по z, σ_2) семейство разложений (4.91).

22°. Уравнениям движения гиростата в точке $P = (2, 2, 1)$ соответствует

укороченная система уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,22} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_2\sigma + a_3p\tau' + a_4\tau + a_5p^2 = 0, \\ \tilde{f}_{2,22} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_2\sigma + b_3p\sigma' + b_4\tau + b_5p^2 = 0.\end{aligned}\quad (4.95)$$

Система (4.95) при выполнении условий

$$\sigma_0 = (x-1)/(x-2y), \quad \tau_0 = (y-x)/(x-2) \quad (4.96)$$

$$x \neq 1, \quad x \neq 2, \quad x \neq 2y, \quad x \neq y, \quad y \neq 1$$

имеет степенное решение $\sigma = \sigma_0 p^2$, $\tau = \tau_0 p^2$. Исследование степенных разложений семейства \mathcal{F}_{22} проводится в соответствии с методикой, разработанной в [11]. При этом все основные результаты, полученные А. Д. Брюно и В. В. Луневым в §8 препринта [11] остаются в силе и в случае $\eta \neq 0$.

Характеристическая матрица асимптотики вычисляется так же, как и при $\eta = 0$. Используя результат [8, 11], находим

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\varphi_4}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\varphi_4}, \quad s_3 = -3, \quad s_4 = -4, \quad (4.97)$$

где $\varphi_4 = (4x^2 - 8xy + 17y - 8x)/(4y)$. Корни s_3, s_4 являются критическими, они не опасны, так как соответствуют константам z, l двух интегралов. Степенные разложения рассматриваемого семейства \mathcal{F}_{22} могут быть различных видов. Во-первых, существуют разложения по целым степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{2-k}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{2-k}, \quad (4.98)$$

где

$$\tau_1 = -\frac{2(x+y^2-3y)\eta}{(2y-x)(x-2)^2}, \quad \sigma_1 = -\frac{2(xy-3y+1)\eta}{(x-2)(2y-x)^2},$$

σ_3, σ_4 — произвольны, остальные коэффициенты однозначно определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Ряд (4.98) содержит две произвольные константы σ_3, σ_4 , и является аналитическим по p^{-1} . Для всех раз-

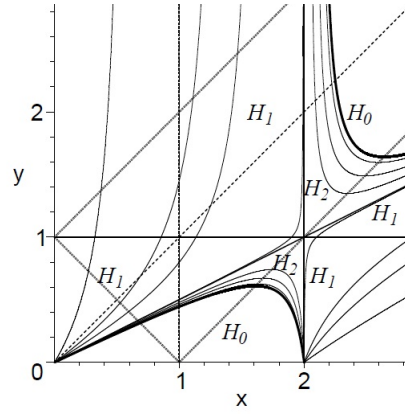


Рис. 4.3: Кривые $s_2 = \text{const}$ для семейства \mathcal{F}_{22} .

ложений семейства \mathcal{F}_{22} начальное значение $s_0 = -1$.

Специальные случаи разложений (4.98) по целым степеням p возможны, когда $s_2 = -k$, $k = 2, 3, 4, \dots$. Тогда константа σ_k является произвольной, а интегральные константы z , l связаны условием разрешимости. Например, $s_2 = -2$ на кривой

$$y = \frac{x(x-2)}{2(x-1)}. \quad (4.99)$$

В этом случае условие разрешимости имеет вид

$$z = \frac{1}{4} \frac{\eta^2(x^2 - 2x + 2)(3x^4 - 19x^3 + 44x^2 - 34x + 8)}{(x-2)^2(x-1)x^2}, \quad (4.100)$$

константы σ_2 , σ_3 — произвольны, интегральная константа l выражается через $x, \eta, \sigma_2, \sigma_3$. Заметим, что соответствующие значениям $s_2 = -k$, $k = 3, 4, \dots$ кривые

$$y = \frac{x(x-2)}{2x + s_2^2 + s_2 - 4} \quad (4.101)$$

принадлежат той области на рис. 4.3, где неравенства (4.11) (неравенства треугольника для главных моментов инерции A, B, C) не выполняются.

Во-вторых, существуют разложения по дробным степеням p , если число $s_2 < 0$ рациональное.

Заметим, что $s_1 + s_2 = -1$, и фиксированному значению s_2 соответствует плоская кривая (4.101). При этом $s_2 = -1$ на двух прямых $x = 2, x = 2y$.

Плоскость (x, y) разделим на области H_0, H_1, H_2 . В любой области H_i имеется i критических значений среди s_1, s_2 . В области H_2 оба отрицательных корня $s_1, s_2 \in (-1, 0)$. В области H_1 на кривых (4.101), где $s_2 = -n/m$, существуют разложения с рациональными показателями:

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{2-\frac{k}{m}}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{2-\frac{k}{m}}, \quad (4.102)$$

константы $\sigma_n, \sigma_{3m}, \sigma_{4m}$ – произвольны, остальные коэффициенты определяются из системы линейных алгебраических уравнений.

Если $(x, y) \in H_2$, то $-1 < s_2 < s_1 < 0$, критическое значение s_1 всегда не опасно, а критическое значение s_2 может быть опасным только если $s_2 = (k+1)s_1$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Это означает, что

$$s_1 = -\frac{1}{k+2}, \quad s_2 = -\frac{k+1}{k+2}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.103)$$

Только некоторые точки кривых (4.101) с этим значением s_2 могут иметь разложения вида (4.102), в этих точках должны выполняться специальные условия разрешимости. Для первых значений $k = 1, 2, 3, 4, 5$ соответствующие точки были найдены. Если условия (4.11) выполняются, то разрешенные точки x, y на опасных кривых совпадают с соответствующими точками, вычисленными в §8.6 препринта А. Д. Брюно, В. В. Лунева [11].

Для всех остальных, отличных от (4.103), критических значений s_1, s_2 существуют разложения вида (4.102) с четырьмя произвольными постоянными σ_i . Например, на кривой $y = 25x(x-2)/(25x-53)/2$ находим $s_2 = -3/5$, $s_1 = -2/5$. Разложения с произвольными константами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{14}, \sigma_{19}$ имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \sigma_1 p^{\frac{8}{5}} + \sigma_2 p^{\frac{7}{5}} + \sigma_3 p^{\frac{6}{5}} + \dots, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \tau_1 p^{\frac{8}{5}} + \tau_2 p^{\frac{7}{5}} + \tau_3 p^{\frac{6}{5}} + \dots \quad (4.104)$$

В-третьих, если s_2 иррационально, то существует четырехпараметрическое семейство разложений по вещественным степеням p , которые мы не будем в этой работе рассматривать отдельно.

Степенные асимптотики с нестепенными разложениями. Урав-

нениям движения гиростата в точке $P = (2, 2, 1)$ отвечает укороченная система уравнений (4.95). Эта система имеет тот же вид, что и соответствующая случаю $\eta = 0$ система (8.1.1) в работе [11]. Подстановкой асимптотик $\sigma = \sigma_0 p^2$, $\tau = \tau_0 p^2$ в систему (8.1.1) в [11] были найдены уравнения для σ_0, τ_0 , имеющие, кроме (4.96), еще три решения:

$$\begin{aligned} 1) \sigma_0 &= -1/2, \quad \tau_0 - \text{любое}, \quad x = y = 2; \\ 2) \sigma_0 &= -\text{любое}, \quad \tau_0 = -1/2, \quad x = 1, \quad y = 1/2; \\ 3) \sigma_0 &= (1-x)/y, \quad \tau_0 = x-y, \quad x \neq 1, \quad x \neq y. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Дальнейший анализ случаев (4.105) показал, что степенные разложения, соответствующие асимптотикам $\sigma = \sigma_0 p^2$, $\tau = \tau_0 p^2$, отсутствуют.

4.4. ВЫВОДЫ

Симметричные семейства $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{21}$ получим из семейств $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{20}$ преобразованием (4.9). Таким образом, получено 22 семейства степенных разложений уравнений Ковалевско–Харламова (4.4), (4.6). Семейства $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_{14} - \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{22}$ и отчасти $\mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{19}$ сохраняют основные свойства степенных разложений, вычисленных А.Д. Брюно и В.В. Луневым для уравнений Н. Ковалевского, подробное изложение см. в [8, 11–14].

Аналоги семейств $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_{10}$ были вычислены в работах [5, 15] для уравнений Н. Ковалевского ($\eta = 0$) в случае, когда независимая переменная p стремится к произвольной константе p_0 .

Табл. 4.1. Степенные асимптотики $F_k : \sigma = \sigma_0 p^\alpha, \tau = \tau_0 p^\beta, p \rightarrow 0$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
α	0	1	0	2/3	0	3	0	2	0	4/3	1/2	1	1
β	1	0	0	2/3	3	0	2	0	4/3	0	1	1/2	1

Табл. 4.2. Степенные асимптотики $F_k : \sigma = \sigma_0 p^\alpha, \tau = \tau_0 p^\beta, p \rightarrow \infty$.

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22
α	$(2, \infty)$	2	2	$(1, 2)$	2	$(4/3, 2)$	2	1	2
β	2	$(2, \infty)$	$(1, 2)$	2	$(4/3, 2)$	2	1	2	2

Табл. 4.3. Собственные числа, произвольные константы и параметры.

k	s_1, s_2, s_3, s_4	s_0	Константы	Параметры
1	$-1, 0, 0, 1/2$	1	σ_0, l, z	x, y, η
3	$0, 0, 1, 1$	1	σ_0, τ_0, l, z	x, y, η
4	$-1, -1/3, 0, 0$	$1/3$	σ_0, z	x, y, η
5	$-3, -2, 0, 0$	1	—	x, y, η
7	$-3, -2, -2 \mp \sqrt{\varphi_1}$	1	σ_{s_2}	x, y, η
9	$-1, -2/3, -1/3, 0$	$1/3$	l, z	x, y, η
11	$-1, -1/2, -1/4, 0$	$1/2$	z	x, y, η
13	$-\frac{1}{2} \mp \sqrt{\varphi_3}, -1, -1$	1	σ_{s_2}	x, y, η
14	$-2 + \frac{1}{2}\alpha, 0, -1 - \alpha, -2\alpha$	$2 - \alpha; -1$	$\sigma_0, \sigma_{s_1}, l, z$	x, y, η
16	$\frac{3}{2}\beta - 2, 0, -\beta, -2\beta$	$2 - \beta; \beta - 1$	$\tau_0, \sigma_{s_1}, l, z$	$x = y, \eta$
18	$0, 0, 2 - \frac{5}{2}\beta, -2\beta$	$2 - \frac{3}{2}\beta$	$\tau_0, \tilde{\sigma}_0, l, z$	$x = y, \eta$
20	$0, -1/2, -1, \frac{1-2y}{y-1}$	-1	σ_{s_3}, z	$x = y, \eta$
22	$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varphi_4}, -3, -4$	-1	$\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, l, z$	x, y, η

Разложения по целым степеням переменной p существуют в семействах $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{22}$. Разложения с шагом $\Delta = 1/2$ существуют в семействах $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{20} - \mathcal{F}_{22}$. Разложения с шагом $\Delta = 1/3$ существуют в семействах $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{13} - \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{22}$. Разложения с шагом $\Delta = 1/4$ (как и с более мелким шагом) существуют в семействах $\mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{13} - \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{22}$.

Согласно общей теории, разработанной А.Д. Брюно [7], формальные разложения из семейств $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{22}$ сходятся для достаточно малых p , если $\omega = -1$, и для достаточно больших $|p|$, если $\omega = 1$. Для остальных семейств разложения могут расходиться.

По формулам (4.5) из любого решения системы (4.4) можно получить решение уравнений (4.1). Разложениям решений системы (4.4) по степеням

p соответствуют разложения решений системы (4.1) по степеням времени t . Если $\alpha + \beta \neq 2$, то характер разложения сохраняется, т.е. степенное разложение по p переходит в степенное по t , а степенно-логарифмическое – в степенно-логарифмическое [8]. В частности, рассмотренные здесь семейства $\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{13}$ являются степенными, но соответствующие им семейства разложений уравнений (4.1) не будут степенными. Для остальных семейств переменная p разлагается по степеням t , а из формул (4.5) следует, что $q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ также разлагаются по степеням t . Показатели Ковалевской семейств разложений системы (4.1) несложно вычислить, зная собственные числа s_i степенных асимптотик.

Табл. 4.4. Опасные значения степенных разложений.

k	7	13	14	16	20	22
s	$s_2 = n$	$s_2 = n$	$s_1 = n(2 - \alpha)$	$s_1 = n(1 - \beta)$	$s_3 = -1$	$s_1 = -\frac{1}{n+2}$

Раздел 5

Редукция уравнений динамики.

Полиномиальные решения уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона

В данном разделе выполнена редукция уравнений движения гиростата к уравнениям класса Ковалевского–Харламова в двух задачах динамики: задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

В задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона построены полиномиальные решения класса А. И. Докшевича и обобщенного класса.

5.1. Редукция уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Рассмотрим редукцию уравнений (2.87), (2.88) и интеграла (2.89) в случае $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, $\lambda = \mathbf{0}$. Из (2.87)-(2.89) получим

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3, \quad (5.1)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + B_1 \omega_3 \nu_1 - s \nu_3, \quad (5.2)$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 - B_1 \omega_2 \nu_1 - s \nu_2, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= \omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\dot{\nu}_3 = \omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2,$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1 \omega_1 \nu_1 + A_2 \omega_2 \nu_2 + A_3 \omega_3 \nu_3 - \frac{1}{2} B_1 \nu_1^2 = k, \quad (5.5)$$

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2s \nu_1 = 2E. \quad (5.6)$$

Применим метод П.В.Харламова, указанный в п. 2.2.4, 2.2.5. Будем полагать

$$\omega_1 = p, \quad \omega_2^2 = \tilde{Q}(p), \quad \omega_3^2 = \tilde{R}(p). \quad (5.7)$$

Из уравнения (5.1) следует

$$\dot{p} = \mu_0^{-1} \sqrt{\tilde{Q}(p)\tilde{R}(p)}, \quad \left(\mu_0 = \frac{A_1}{A_2 - A_3} \right) \quad (5.8)$$

Функцию $\nu_1(p)$ получим из (5.6)

$$\nu_1(p) = \frac{1}{2s} \left(-2E + A_1 p^2 + A_2 \tilde{Q}(p) + A_3 \tilde{R}(p) \right). \quad (5.9)$$

Переходя в уравнениях (5.2), (5.3) (с помощью уравнения (5.8)) к дифференцированию по p , из полученных уравнений найдем

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{\sqrt{\tilde{Q}(p)}}{\varepsilon_2} \left(\tilde{R}'(p) - \mu_2 p + \sigma_2 \nu_1(p) \right), \\ \nu_3 &= \frac{\sqrt{\tilde{R}(p)}}{\varepsilon_1} \left(\mu_1 p + \sigma_1 \nu_1(p) - \tilde{Q}'(p) \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Используя (5.7), подставим выражения (5.9), (5.10) в уравнения (5.5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4s^2} \left(-2E + A_1 p^2 + A_2 \tilde{Q}(p) + A_3 \tilde{R}(p) \right)^2 + \\ & + \frac{\tilde{Q}(p)}{\varepsilon_2^2} \left(\tilde{R}'(p) - \mu_2 p + \sigma_2 \nu_1(p) \right)^2 + \\ & + \frac{\tilde{R}(p)}{\varepsilon_1^2} \left(\mu_1 p + \sigma_1 \nu_1(p) - \tilde{Q}'(p) \right)^2 - 1 = 0, \\ & \frac{A_1 p}{2s} \left(-2E + A_1 p^2 + A_2 \tilde{Q}(p) + A_3 \tilde{R}(p) \right) + \\ & + \frac{A_2 \tilde{Q}(p)}{\varepsilon_2} \left(\tilde{R}'(p) - \mu_2 p + \sigma_2 \nu_1(p) \right) + \\ & + \frac{A_3 \tilde{R}(p)}{\varepsilon_1} \left(\mu_2 p + \sigma_1 \nu_1(p) - \tilde{Q}'(p) \right) - k = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В уравнениях (5.10), (5.11) введены обозначения

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{2A_1(A_3 - A_1)}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_1 = \frac{2A_1B_1}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2A_1s}{A_2(A_2 - A_3)}, \\ \mu_2 &= \frac{2A_1(A_1 - A_2)}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_2 = \frac{2A_1B_1}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2A_1s}{A_3(A_2 - A_3)}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Уравнения (5.11) можно трактовать как обобщение первой формы уравнений П.В.Харламова.

После интегрирования уравнений (5.11) зависимость $p(t)$ находится из уравнения (5.8). Функции $\nu_i(p)$ определяем из (5.9), (5.10), а функции $\omega_2(p)$ и $\omega_3(p)$ – из формул (5.7).

Обобщение второй форм уравнений П.В.Харламова получим подстановкой выражений для ν_i из (5.9), (5.10) в уравнения (5.4), предварительно преобразуя их к переменной p :

$$\begin{aligned}\nu'_1(p) &= \frac{\mu_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left(\varepsilon_1\tilde{R}'(p) + \varepsilon_2\tilde{Q}'(p) - \frac{4sA_1^2}{A_2A_3}p \right), \\ \nu'_2(p) &= \frac{\mu_0}{\sqrt{\tilde{Q}(p)}} (\nu_1(p) - p\phi(p)), \quad \nu'_3(p) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\tilde{R}(p)}} (\nu_1(p) - p\psi(p)).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Тогда имеем уравнения второго порядка на функции $\tilde{Q}(p), \tilde{R}(p)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\phi(p)\tilde{R}'(p) + \frac{1}{\varepsilon_1}\tilde{R}(p) \left[\mu_1 + \mu_0\sigma_1 (\psi(p) - \phi(p)) - \tilde{Q}''(p) \right] - \\ - \mu_0 (\nu_1(p) - p\psi(p)) = 0,\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\psi(p)\tilde{Q}'(p) + \frac{1}{\varepsilon_2}\tilde{Q}(p) \left[\tilde{R}''(p) - \mu_2 + \sigma_2\mu_0 (\psi(p) - \phi(p)) \right] - \\ - \mu_0 (p\phi(p) - \nu_1(p)) = 0,\end{aligned}\quad (5.15)$$

где $\nu_1(p)$ выражается по формуле (5.9), а функции $\psi(p), \phi(p)$ таковы:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\tilde{R}'(p) - \mu_2p + \sigma_2\nu_1(p) \right), \\ \phi(p) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\mu_1p + \sigma_1\nu_1(p) - \tilde{Q}'(p) \right).\end{aligned}\quad (5.16)$$

Для явного представления уравнений (5.14), (5.15) необходимо в них учесть (5.12), (5.13), (5.16).

Если найдено решение $\tilde{Q} = \tilde{Q}(p), \tilde{R} = \tilde{R}(p)$ уравнений (5.14), (5.15), то функции $\nu_1(p), \nu_2(p), \nu_3(p)$ можно определить из (5.9), (5.10), а функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – из (5.7). Зависимость $p(t)$, как и ранее, устанавливается из уравнения (5.8).

5.2. Редукция уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона

Рассмотрим движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Уравнения движения такого гиростата с учетом момента ньютоновских сил запишем в векторном виде [73, 95]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + B\omega \times \nu + \nu \times (C\nu - s), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (5.17)$$

где A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; λ – гиростатический момент; s – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными означает относительную производную.

Уравнения (5.17) допускают два интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu = k_0, \quad (5.18)$$

k_0 – постоянная интеграла площадей.

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \nu) + C(\nu \cdot \nu))]^\bullet = 2(B\omega \times \nu) \cdot \omega, \quad (5.19)$$

поэтому уравнения (5.17) не имеют интеграла энергии.

Рассмотрим случай, когда уравнения (5.17) могут быть редуцированы к уравнениям обобщенного класса Н. Ковалевского. Положим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \\ A &= \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \text{diag}(B_1, 0, 0), \quad C = 0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Учитывая (5.20), из (5.17), (5.18) получим (примем обозначение $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$)

$$A_1 \dot{p} = (A_2 - A_3)qr, \tag{5.21}$$

$$A_2 \dot{q} = (A_3 - A_1)rp - (B_1p + s)\nu_3, \tag{5.22}$$

$$A_3 \dot{r} = (A_1 - A_2)pq + (B_1p + s)\nu_2, \tag{5.23}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - z\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \tag{5.24}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1p\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k_0. \tag{5.25}$$

Введем новые переменные и параметры

$$q^2(p) = Q_*(p), \quad r^2(p) = R_*(p), \tag{5.26}$$

$$\mu_0 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad \mu_1 = \frac{A_2(A_2 - A_3)}{2A_1}, \quad \mu_2 = \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2A_1}, \tag{5.27}$$

Переходя в уравнениях (5.22), (5.23) к дифференцированию с помощью уравнения (5.21) к вспомогательной переменной p и учитывая соотношения (5.26), (5.27), найдем функции

$$\nu_2 = v\sqrt{Q_*(p)}, \quad \nu_3 = u\sqrt{R_*(p)}, \tag{5.28}$$

где

$$\begin{aligned}u(p) &= \frac{1}{B_1p + s} [(A_3 - A_1)p - \mu_1 Q'_*(p)], \\ v(p) &= \frac{1}{B_1p + s} [\mu_2 R'_*(p) - (A_1 - A_2)p]\end{aligned}\tag{5.29}$$

В (5.29) штрихом обозначена производная по переменной p . Подставим значения (5.29) в интеграл моментов из (5.25)

$$\nu_1(p) = \frac{1}{A_1p} (k - Q_*(p)v(p) - R_*(p)u(p).) \tag{5.30}$$

Внесем (5.28), (5.30) в геометрический интеграл из (5.25)

$$Q_*(p)v^2(p) + R_*(p)u^2(p) + \frac{1}{A_1^2 p} (k - Q_*(p)v(p) - R_*(p)u(p))^2 - 1 = 0. \quad (5.31)$$

Для получения второй формы аналога уравнений Н. Ковалевского преобразуем уравнения (5.24) к переменной p

$$\begin{aligned} \mu_0 q r \nu_1'(p) &= r \nu_2 - q \nu_3, \\ \mu_0 q r \nu_2'(p) &= p \nu_3 - r \nu_1, \\ \mu_0 q r \nu_3'(p) &= q \nu_1 - p \nu_2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Если подставить (5.28) - (5.30) в первое уравнение системы (5.32), то получим тождество.

Внесем (5.28) во второе и третье уравнения системы (5.32)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu_0 Q_*'(p)v(p) + \mu_0 Q_*(p)v'(p) + \nu_1(p) - p u(p) &= 0, \\ \frac{1}{2} \mu_0 R_*'(p)u(p) + \mu_0 R_*(p)u'(p) + p v(p) - \nu_1(p) &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Учитывая в (5.33) функции (5.29), устанавливаем в силу (5.30), (5.31) два дифференциальных уравнения на функции $Q_*(p)$, $R_*(p)$, которые имеют второй порядок. Они могут быть отнесены к аналогу второй формы уравнений Н. Ковалевского. После интегрирования уравнений (5.33) переменные $\nu_i(p)$ ($i = \overline{1, 3}$) определяем из (5.28)-(5.30), а переменные $q(p)$, $r(p)$ – из (5.26). Зависимость $p(t)$ находим из уравнения (5.21).

5.3. Полиномиальные решения класса А. И. Докшевича

Запишем уравнения (5.17) и первые интегралы (5.18) в скалярном виде, полагая $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{aligned}
A_1\dot{p} &= (A_2 - A_3)qr + B_2q\nu_3 - B_3r\nu_2 + \lambda_2r + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\
A_2\dot{q} &= (A_3 - A_1)pr + B_3r\nu_1 - B_1p\nu_3 - \lambda_1r - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3, \\
A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + B_1p\nu_2 - B_2q\nu_1 + \lambda_1q - \lambda_2p + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + \\
&+ (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \tag{5.35}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1p + \lambda_1)\nu_1 + (A_2q + \lambda_2)\nu_2 + A_3r\nu_3 = k_0. \tag{5.36}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (5.34), (5.35) решений следующего вида

$$\begin{aligned}
q = Q(p) &= \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \quad \nu_1 = \phi(p) = \sum_{j=0}^l a_j p^j, \\
\nu_2 = \psi(p) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \nu_3 = r\kappa(p), \quad \kappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_i – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (5.37) в уравнения (5.34), (5.35) и геометрический интеграл из (5.36)

$$\dot{p} = \left(\phi'(p)^{-1} (\psi(p) - Q(p)\kappa(p)) \sqrt{R(p)} \right), \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
\psi'(p)(\psi(p) - Q(p)\kappa(p)) &= \phi'(p)(p\kappa(p) - \phi(p)), \\
(R(p)\kappa^2(p))'(p\kappa(p) - \phi(p)) &= 2\psi'(p)\kappa(p)(Q(p)\phi(p) - p\psi(p)),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
A_1(p\kappa(p) - \phi(p)) &= \psi'(p)[Q(p)(A_2 - A_3 + B_2\kappa(p)) + \\
&+ \psi(p)((C_3 - C_2)\kappa(p) - B_3) + s_2\kappa(p) + \lambda_2], \\
A_2Q'(p)(p\kappa(p) - \phi(p)) &= \psi'(p)[(C_1 - C_3)\kappa(p)\phi(p) + B_3\phi(p) - \\
&- B_1p\kappa(p) - s_1\kappa(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1], \\
A_3R'(p)(p\kappa(p) - \phi(p)) &= 2\psi'(p)[(C_2 - C_1)\phi(p)\psi(p) + B_1\psi(p)p + \\
&+ ((A_1 - A_2)p - B_2\phi(p) + \lambda_1)Q(p) - \lambda_2p + s_1\psi(p) - s_2\phi(p)],
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\phi^2(p) - 1 + \psi^2(p) + \kappa^2(p)R(p) = 0. \quad (5.41)$$

Здесь штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной p . Уравнение (5.38) устанавливает зависимость p от времени t .

Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда полиномы из (5.37) имеют вид

$$\begin{aligned} Q(p) &= b_2p^2 + b_1p + b_0, \quad R(p) = c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0, \\ \phi(p) &= a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad \psi(p) = g_3p^3 + g_2p^2 + g_1p + g_0, \quad \kappa(p) = f_1p + f_0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Указанным классом (5.37), (5.42) описывается полиномиальное решение А. И. Докшевича задачи о движении тяжелого гиростата [53].

Подставим полиномы из (5.42) в уравнения (5.39)-(5.41) и потребуем выполнения полученных соотношений при всех p . После преобразований получим систему условий на параметры задачи и решения

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_3, \quad B_3 = B_2, \quad A_3 = A_2, \quad \mu &= (B_2(b_0f_0 - g_0) + s_2f_0 + \lambda_2)A_1^{-1}, \\ g_3 - b_2f_1 &= 0, \quad g_2 - (b_2f_0 + b_1f_1) = 0, \quad g_1 - b_1f_0 - b_0f_1 - 2a_2\mu = 0, \\ B_2(b_0f_1 + b_1f_0 - g_1) + s_2f_1 &= 0, \quad f_1 - a_2 - 3g_3\mu = 0, \quad f_0 - a_1 - 2g_2\mu = 0, \\ g_1\mu + a_0 = 0, \quad g_0 - b_0f_0 - a_1\mu &= 0, \quad 3c_4f_1\mu - b_2a_2 + g_3 = 0, \\ (5c_3f_1 + 4c_4f_0)\mu - 2(b_2a_1 + b_1a_2 - g_2) &= 0, \quad (2c_0f_1 + c_1f_0)\mu - 2b_0a_0 = 0, \\ (4c_2f_1 + 3c_3f_0)\mu - 2(b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2 - g_1) &= 0, \quad B_2a_2 - B_1f_1 = 0, \\ (3c_1f_1 + 2c_2f_0)\mu - 2(b_1a_0 + b_0a_1 - g_0) &= 0, \quad A_2b_1\mu - b_2a_0 + s_1f_0 + \lambda_1 = 0, \\ 2A_2b_2\mu - B_2a_1 + B_1f_0 + s_1f_1 + A_1 - A_2 &= 0, \\ 2A_2c_4\mu - (B_1g_2 - B_2(b_2a_1 + b_1a_2) + (A_1 - A_2)b_2 + s_1g_3) &= 0, \\ 3A_2c_3\mu - 2(B_1g_1 - B_2(b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2) + (A_1 - A_2)b_1 + \lambda_1b_2 + \\ + s_1g_2 - s_2a_2) &= 0, \\ A_2c_2\mu - B_1g_0 + B_2(b_1a_0 + b_0a_1) + (A_2 - A_1)b_0 - \lambda_1b_1 + \lambda_2 - s_1g_1 + s_2a_1 &= 0, \\ A_2c_1\mu - 2(\lambda_1b_0 - s_1g_0 - s_2a_0 - B_2b_0a_0) = 0, \quad a_0^2 - 1 + g_0^2 + c_0f_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Система алгебраических уравнений (5.43) разрешена относительно нену-

левых параметров задачи и решения $A_1, A_2, B_1, B_2, s_2, f_0$. При этом имеем

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_2 = C_3, \quad B_3 = B_2, \quad A_3 = A_2, \quad k = B_1/B_2, \\
b_2 &= \frac{2k(1-k)B_2}{3s_2}, \quad b_1 = \frac{\xi}{3(1-k)f_1s_2}, \quad b_0 = -\frac{3((k-1)f_1s_2)^2 + \alpha - \beta + \delta}{3(k-1)^2B_2f_1^2s_2}, \\
f_1 &= \frac{(3A_1 - (2k+1)A_2)[3k(k-1)B_2f_0 + (k+2)(2k+1)A_1 - k(k+2)^2A_2]}{3(1-k)\sqrt{\eta}}, \\
a_2 &= kf_1, \quad a_1 = \frac{(2k+1)A_1 - k(k+2)A_2 + 2k(k-1)B_2f_0}{(k-1)B_2}, \\
a_0 &= \frac{\alpha - \beta + \gamma}{6k(k-1)^2B_2^2f_1}, \quad g_3 = \frac{2k(1-k)B_2f_1}{3s_2}, \quad g_1 = \frac{-\alpha + \beta - \gamma}{3(k-1)^2B_2f_1s_2}, \\
g_2 &= \frac{k((2k+1)A_1 - k(k+2)A_2 + (k-1)(2k-1)B_2f_0)}{(1-k)s_2}, \tag{5.44} \\
g_0 &= \frac{3(k-1)(k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)(f_1s_2)^2 + 2k(\alpha - \beta + \delta)B_2f_0}{6k(k-1)^2B_2^2f_1^2s_2} \\
c_4 &= -\left(\frac{2k(1-k)B_2}{3s_2}\right)^2, \quad c_3 = -\frac{4k\xi B_2}{9f_1s_2^2}, \quad c_1 = \frac{2(2kB_2a_0b_0 - c_0f_1s_2)}{f_0s_2}, \\
c_2 &= -\frac{k}{(3(k-1)f_1s_2)^2} [3k(k-1)[3(k-1)(f_1s_2)^2 + ((k-1)(8k^2 - 4k - 1) \times \\
&\times B_2f_0 + 6(4k^2 + 2k - 3)A_1 - 2(6k^3 + 13k^2 - 8k - 2)A_2)B_2f_0] + 3(2k+1) \times \\
&\times (10k^2 + 7k - 8)A_1^2 + (k+2)[k(k+2)(17k^2 - 4k - 4)A_2 - \\
&- 2(32k^3 + 15k^2 - 18k - 2)A_1]A_2], \\
c_0 &= \frac{k(1-k)B_2f_0^2 + (k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)f_0 - 3f_1^2b_0(B_2b_0 + s_2)}{3B_2f_1^2}, \\
s_1 &= \frac{3(k+1)A_1 - (k^2 + 7k + 1)A_2 + 3k(k-1)B_2f_0}{3(k-1)f_1}, \\
\lambda_2 &= \frac{(3A_1 - (k+2)A_2)s_2}{2(k-1)B_2}, \\
\lambda_1 &= \frac{1}{6k(k-1)^2B_2f_1} [3(k+2)(2k+1)A_1^2 - k(k+2)(k^2 - 8k - 2)A_2^2 - \\
&- (k^3 + 27k^2 + 24k + 2)A_1A_2 + 3k(k-1)((2k+1)A_1 - 3kA_2)B_2f_0].
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha &= (k+2)(2k+1)(3A_1^2 + k(k+2)A_2^2), \\
\beta &= (7k(k^2+3) + 2(12k^2+1))A_1A_2, \\
\gamma &= 3k(k-1)(2k(k-1)B_2f_0 + (4k+5)A_1 - (2k^2+6k+1)A_2)B_2f_0, \\
\delta &= k(k-1)((k-1)(2k+1)B_2f_0 + 3(2(k+2)A_1) - \\
&\quad -(k^2+4k+1)A_2))B_2f_0, \\
\xi &= k(3(2k+1)A_1 - 3k(k+2)A_2 + (k-1)(4k-1)B_2f_0), \\
\eta &= (2k(k-1)B_2^2)^2 - (k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)^2s_2^2.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Решение (5.37), (5.42) при условиях (5.44) будет действительным, если

$$\eta > 0, \quad c_0 > 0. \tag{5.46}$$

Зависимость p от времени устанавливаем из (5.38)

$$\dot{p} = \mu \sqrt{c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0}. \tag{5.47}$$

Рассмотрим численный пример решения (5.37), (5.42), (5.44)-(5.47) уравнений (5.38), (5.40). Пусть

$$\begin{aligned}
C_1 = C_2 = C_3, \quad A_1 = 7A_2/15, \quad A_3 = A_2 = a, \quad B_1 = B_2/3, \\
B_3 = B_2 = b, \quad s_2 = s, \quad f_0 = -\frac{18a}{25b} \quad (a > 0, b \neq 0, s \neq 0).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Тогда, при помощи (5.44)-(5.47), решение уравнений (5.34), (5.35) примет вид

$$\begin{aligned}
q &= \frac{4b}{27s}p^2 - \frac{5b^2}{27as}p - \frac{s}{b}, \\
r^2 &= R(p) = \frac{1}{9} \left(-\frac{16b^2}{81s^2}p^4 + \frac{40b^3}{81as^2}p^3 - \frac{81a^2s^2 + 25b^2}{81(as)^2}p^2 - 10\frac{b}{a}p + \frac{50b^2}{3a^2} \right), \\
\nu_1 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{6a^2}{25b^2}p^2 + \frac{12a}{5b}p + 1 \right), \quad \nu_2 = -\frac{2}{5s} \left(\frac{4a^2}{75b}p^3 + \frac{a}{5}p^2 - \frac{b}{3}p \right), \\
\nu_3 &= -\frac{18a}{25b} \left(\frac{a}{5b}p + 1 \right) \sqrt{R(p)}, \quad \mathbf{s} = \left(\frac{85b^2}{81a}, s, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{5b}{6}, \frac{7as}{10b}, 0 \right);
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\dot{p} = 3s\sqrt{R(p)}/(2b). \quad (5.50)$$

Решение дифференциального уравнения (5.50) дает зависимость вспомогательной переменной от времени: $p = p(t)$. Это позволяет получить зависимость от времени всех переменных решения (5.48), (5.49) рассматриваемой задачи.

5.4. Полиномиальные решения обобщенного класса С. А. Чаплыгина

Поставим задачу о нахождении условий существования у уравнений (5.17) решений следующей структуры:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2^2 &= Q(\sigma) = \sum_{j=0}^n b_j \sigma^j, & \omega_3^2 &= R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, & \nu_2 &= \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \omega_2, & \nu_3 &= \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma} \omega_3, \\ \psi(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, & \kappa(\sigma) &= \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j, \end{aligned} \quad (5.51)$$

предварительно предположив

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A_1, A_2, A_3), & B &= \text{diag}(B_1, B_2, B_3), & C &= \text{diag}(C_1, C_2, C_3), \\ \lambda_2 &= 0, & \lambda_3 &= 0, & s_2 &= 0, & s_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

В соотношениях (5.51) n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_j, c_i, a_j, g_i, f_i – неизвестные, подлежащие определению.

Подставим выражения (5.51) с учетом предположений (5.52) в уравнения (5.17) и геометрический интеграл из (5.18), получим

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma)\sigma)^{-1} \Phi(\sigma) \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \quad \Phi(\sigma) = \psi(\sigma) - \kappa(\sigma); \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)\psi(\sigma)(\sigma\kappa(\sigma) - \varphi(\sigma)); \\
(R(\sigma)\kappa^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)\kappa(\sigma)(\varphi(\sigma) - \sigma\psi(\sigma)); \\
2\sigma^2 A_1\Phi(\sigma) &= \varphi'(\sigma)[(C_3 - C_2)\psi(\sigma)\kappa(\sigma) + (B_2\kappa(\sigma) - B_3\psi(\sigma))\sigma + \\
&+ (A_2 - A_3)\sigma^2]; \\
A_2 Q'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)[(C_1 - C_3)\varphi(\sigma)\kappa(\sigma) + B_3\varphi(\sigma)\sigma - B_1\kappa(\sigma)\sigma^2 + \\
&+ (A_3 - A_1)\sigma^3 - \lambda_1\sigma - s_1\kappa(\sigma)]; \\
A_3 R'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)[(C_2 - C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma) - B_2\varphi(\sigma)\sigma + B_1\psi(\sigma)\sigma^2 + \\
&+ (A_1 - A_2)\sigma^3 + \lambda_1\sigma + s_1\psi(\sigma)];
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\sigma^2(\varphi^2(\sigma) - 1) + Q(\sigma)\psi^2(\sigma) + R(\sigma)\kappa^2(\sigma) = 0. \tag{5.55}$$

В уравнениях (5.53), (5.54) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ . После интегрирования уравнений (5.54) зависимость σ от времени t устанавливается из дифференциального уравнения (5.53).

Первое новое частное решение уравнений (5.17). Рассмотрим случай когда максимальные степени полиномов из (5.51) таковы: $n = m = 4$, $l = 2$, $n_1 = m_1 = 1$. Тогда, согласно (5.51),

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\
\omega_3^2 &= R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\
\nu_1 &= \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma}\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma}\sqrt{R(\sigma)}, \\
\psi(\sigma) &= g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Подставим предполагаемое решение (5.56) уравнений (5.17) в (5.54), (5.55) и потребуем тождественного выполнения полученных равенств для всех σ при $a_1 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$. В результате получим систему условий на параметры задачи и искомые коэффициенты полиномиальных решений (5.56)

$$\begin{aligned}
& \beta = C_1 - C_3, \quad \mu = B_2 f_1 - B_3 g_1 + A_2 - A_3, \quad C_2 = C_3, \quad B_2 f_0 - B_3 g_0 = 0, \\
& b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \quad A_1(g_1 - f_1) - a_2 \mu = 0, \\
& 2A_1(g_0 - f_0) - a_1 \mu = 0, \quad 4f_1 \mu - A_1(a_2 - g_1) = 0, \quad (3c_3 f_1 + 2c_4 f_0) \mu = 0, \\
& (2c_2 f_1 + c_3 f_0) \mu - 4A_1 a_0 = 0, \quad (2b_2 g_1 + b_3 g_0) \mu + 4A_1 a_0 = 0, \\
& (3b_3 g_1 + 2b_4 g_0) \mu = 4A_1(f_0 - a_1), \quad b_4 g_1 \mu - A_1(f_1 - a_2) = 0, \\
& A_2 \mu b_4 - A_1(\beta a_2 f_1 + B_3 a_2 - B_1 f_1 + A_3 - A_1) = 0, \\
& A_2 b_1 \mu - 4A_1(\beta a_0 f_0 - s_1 f_0) = 0, \tag{5.57} \\
& 3b_3 \mu A_2 - 4A_1(\beta(a_2 f_0 + a_1 f_1) + B_3 a_1 - B_1 f_0) = 0, \\
& A_2 b_2 \mu - 2A_1(\beta(a_1 f_0 + a_0 f_1) + B_3 a_0 - \lambda_1 - s_1 f_1) = 0, \\
& A_3 \mu c_4 - A_1(-\beta a_2 g_1 - B_2 a_2 + B_1 g_1 + A_1 - A_2) = 0, \\
& 3A_3 \mu c_3 - 4A_1(-\beta(a_2 g_0 + a_1 g_1) - B_2 a_1 + B_1 g_0) = 0, \\
& A_3 c_2 \mu - 2A_1(-\beta(a_1 g_0 + a_0 g_1) - B_2 a_0 + \lambda_1 + s_1 g_1) = 0, \\
& A_3 c_1 \mu - 4A_1(s_1 g_0 - \beta a_0 g_0) = 0, \quad a_0^2 - 1 + b_2 g_0^2 + c_2 f_0^2 = 0.
\end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (5.57) разрешима относительно параметров A_1, A_2, A_3, g_1, g_0 . Считая $g_1/f_1 = k$, $A_3/A_1 = m_0$, $A_2/A_1 = p_0$ и обозначая

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= (m_0 - 1)k + 1 - p_0, \quad \mu_1 = -8km_0^2 + ((p_0 - 1)k^2 + 2(5p_0 + 2)k + \\
&+ 5p_0 - 3)m_0 - 2p_0(2(k + 1)p_0 + k - 1), \\
\mu_2 &= -4km_0^2 + ((p_0 - 1)k^2 + (6p_0 + 1)k + p_0)m_0 - p_0((4p_0 - 1)k + 1), \\
\mu_3 &= 4km_0^2 + ((p_0 - 8)k - p_0)m_0 + 3(k - 1) - 4p_0(p_0 - 2), \\
\mu_4 &= 3(1 - k) + 4(m_0 k - p_0), \\
\mu_5 &= 4k(k + 1)m_0^2 + (-(5p_0 + 2)k^2 + 2(1 - 5p_0)k - p_0)m_0 + \\
&+ p_0(4(2p_0 - 1)k + 3k^2 + 1),
\end{aligned}$$

запишем решение системы (5.57) в виде

$$\begin{aligned}
a_2 &= \mu_0 f_1 / (m_0 - p_0), \quad a_1 = 2\mu_0 \mu_2 g_0 / (\mu_1 k (m_0 - p_0)), \quad a_0 = \delta_1 / f_1, \\
B_1 &= -A_1 (4\mu_2 \mu_4 k (k - 1) f_1 (m_0 - p_0))^{-1} [-128k^3 m_0^5 + 8k^2 (3(p_0 - 1)k^3 + \\
&+ 11(p_0 - 1)k^2 + (33p_0 + 23)k + 3(11p_0 - 3))m_0^4 - 2k((19p_0 + 8)(p_0 - 1)k^4 + \\
&+ 4(24p_0 + 5)(p_0 - 1)k^3 + 2(111p_0^2 + 3p_0 + 32)k^2 + 12(18p_0^2 + 11p_0 - 3)k + \\
&+ 3(29p_0 - 17)p_0)m_0^3 + p_0(39(p_0 - 1)k^5 + 3(p_0 - 1)(58p_0 + 9)k^4 + \\
&+ 6(72p_0^2 - 23p_0 + 7)k^3 + 6(74p_0^2 + 23p_0 + 27)k^2 + 3(64p_0^2 + 49p_0 - 49)k + \\
&+ 38p_0^2 - 39p_0 + 9)m_0^2 - p_0(9(p_0 - 1)k^5 + 3(p_0 - 1)(34p_0 - 15)k^4 + \\
&+ 6(44p_0^2(p_0 - 1) + 3(9p_0 - 5))k^3 + 6(44p_0^3 - 2p_0^2 + 7p_0 + 15)k^2 + \\
&+ (88p_0^3 + 152p_0^2 - 27p_0 - 45)k + 24p_0^3 + 22p_0^2 - 39p_0 + 9)m_0 + \\
&+ 8p_0^3(9(p_0 - 1)k^3 + (16p_0^2 - 23p_0 + 16)k^2 + (11p_0 - 5)k + 3p_0 - 2)], \\
B_2 &= \mu_1 (m_0 k - p_0) A_1 / (\mu_0 \mu_4 (k - 1) f_1), \\
B_3 &= -\mu_5 (m_0 k - p_0) A_1 / (\mu_0 \mu_4 k (k - 1) f_1); \tag{5.58} \\
b_0 &= 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \delta_3 / f_1^2, \quad b_4 = -\mu_0 (m_0 - 1) / (k (m_0 - p_0)^2), \\
b_3 &= -2\mu_0 (k - 1) (m_0 - 1) (p_0 - 1) ((k - 1)m_0 - 2p_0) g_0 / (\mu_1 k^2 (m_0 - p_0)^2 f_1); \\
c_0 &= 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \delta_2 / f_1^2, \quad c_4 = \mu_0 (p_0 - 1) / (m_0 - p_0)^2, \\
c_3 &= 2\mu_0 (k - 1) (m_0 - 1) (p_0 - 1) (2km_0 - p_0(k + 1)) g_0 / (\mu_1 k (m_0 - p_0)^2 f_1); \\
\beta &= -3(k - 1) (m_0 - 1) (p_0 - 1) A_1 (4\mu_0 \mu_2 \mu_4 k f_1^2)^{-1} [8k^2 (k + 1) m_0^3 - \\
&- 2k((3p_0 + 2)k^2 + 2(7p_0 - 1)k + 7p_0)m_0^2 + p_0(3k^3 + (14p_0 - 1)k^2 + \\
&+ (28p_0 + 1)k + 3(2p_0 - 1))m_0 - 4p_0^2(2p_0(k + 1) + k - 1)], \\
f_0 &= -\mu_5 g_0 / (\mu_1 k), \quad s_1 = \beta a_0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2A_1} [\mu A_3 c_2 + 2A_1 (\beta a_1 g_0 + B_2 a_0)].
\end{aligned}$$

Здесь $f_1^2 = \delta_1^2 + \delta_2 f_0^2 + \delta_3 g_0^2$,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -\frac{\mu_0 (k - 1) (m_0 - 1) (p_0 - 1) g_0^2}{2\mu_1^2 \mu_3 k^2 (m_0 - p_0) (m_0 k - p_0)} [32k^3 (k + 3) (k + 1) m_0^5 - \\
&- 16k^2 ((5p_0 + 1)k^3 + 2(12p_0 + 1)k^2 + (37p_0 - 3)k + 14p_0)m_0^4 + 2kp_0 \times \\
&\times ((19p_0 + 34)k^4 + 2(118p_0 + 7)k^3 + 2(257p_0 - 19)k^2 + 2(214p_0 + 13)k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 83p_0 - 36)m_0^3 - p_0((36p_0 + 15)k^5 + (166p_0^2 + 148p_0 - 51)k^4 + \\
& + 2(428p_0^2 - 120p_0 + 27)k^3 + 2(514p_0^2 + 120p_0 - 3)k^2 + \\
& + (472p_0^2 - 148p_0 - 21)k + 38p_0^2 - 36p_0 + 9)m_0^2 + p_0^2(9k^5 + 3(24p_0 - 7)k^4 + \\
& + 2(112p_0^2 - 26p_0 - 3)k^3 + 2(296p_0^2 + 38p_0 + 27)k^2 + (384p_0^2 - 28p_0 - 51)k + \\
& + 80p_0^2 - 68p_0 + 15)m_0 - 16p_0^4(3k + 1)((2p_0 + 1)k + 2p_0 - 1)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \frac{\mu_0(m_0 - 1)(p_0 - 1)g_0^2}{\mu_1^2\mu_3k^2(m_0 - p_0)^2(m_0k - p_0)} [-128k^4(k + 1)m_0^6 + \\
& + 32k^3((p_0 - 1)k^3 + 5(2p_0 + 1)k^2 + (25p_0 - 1)k + 3(4p_0 - 1))m_0^5 - \\
& - 8k^2((p_0 - 1)(4p_0 + 5)k^4 + (54p_0^2 + 18p_0 + 13)k^3 + \\
& + (174p_0^2 + 44p_0 - 11)k^2 + (194p_0^2 - 26p_0 + 3)k + p_0(54p_0 - 37))m_0^4 + \\
& + k((p_0 - 1)(5p_0^2 + 35p_0 + 12)k^5 + (243p_0^3 + 198p_0^2 - 51p_0 + 36)k^4 + \\
& + 2(633p_0^3 + 134p_0^2 + 73p_0 - 18)k^3 + 2(13p_0 + 3)(79p_0^2 - 3p_0 + 2)k^2 + \\
& + p_0(1337p_0^2 - 618p_0 - 187)k + p_0(215p_0^2 - 274p_0 + 81))m_0^3 - \\
& - p_0(3(p_0 - 1)(p_0 + 3)k^6 + (33p_0^3 + 151p_0^2 - 95p_0 - 6)k^5 + \\
& + (531p_0^3 + 204p_0^2 - 67p_0 + 69)k^4 + 2(685p_0^3 + 159p_0^2 + 285p_0 - 36)k^3 + \\
& + (1334p_0^3 - 21p_0^2 - 544p_0 - 3)k^2 + (533p_0^3 - 581p_0^2 + 85p_0 + 30)k + \\
& + 39p_0^3 - 74p_0^2 + 45p_0 - 9)m_0^2 + p_0^2(3(5p_0^2 - 2p_0 - 11)k^5 + \\
& + (60p_0^3 + 137p_0^2 - 184p_0 + 81)k^4 + 2(208p_0^3 + 43p_0^2 + 222p_0 - 15)k^3 + \\
& + 2(300p_0^3 + 89p_0^2 - 116p_0 - 33)k^2 + (384p_0^3 - 277p_0^2 - 102p_0 + 63)k + \\
& + 76p_0^3 - 139p_0^2 + 80p_0 - 15)m_0 + p_0^3(9k^5 - 3(2p_0 - 1)(2p_0 - 7)k^4 + \\
& + 2(-16p_0^3 - 8p_0^2 - 52p_0 + 3)k^3 + 2(-48p_0^3 - 36p_0^2 + 20p_0 + 9)k^2 + \\
& + (-96p_0^3 + 48p_0^2 + 40p_0 - 15)k - (2p_0 - 1)(16p_0^2 - 18p_0 + 3))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3 = & \frac{\mu_0(m_0 - 1)(p_0 - 1)g_0^2}{\mu_1^2\mu_3k^3(m_0 - p_0)^2(m_0k - p_0)} [32(k(k + 1))^3m_0^6 - \\
& - 4k^2((19p_0 + 13)k^4 + 12(8p_0 + 1)k^3 + 6(25p_0 - 3)k^2 + 4(26p_0 - 1)k + \\
& + 3(5p_0 - 1))m_0^5 + k((39p_0^2 + 139p_0 + 24)k^5 + (533p_0^2 + 277p_0 - 40)k^4 + \\
& + 2(667p_0^2 - 89p_0 - 20)k^3 + 2(685p_0^2 - 43p_0 + 52)k^2 + \\
& + (531p_0^2 - 137p_0 - 48)k + 3p_0(11p_0 - 5))m_0^4 + (-(74p_0^2 + 80p_0 + 3)k^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-215p_0^3 - 581p_0^2 + 102p_0 + 15)k^5 + (-1337p_0^3 - 21p_0^2 + 232p_0 - 18)k^4 + \\
& + 2(-1027p_0^3 + 159p_0^2 - 222p_0 - 3)k^3 + (-1266p_0^3 + 204p_0^2 + 184p_0 + 21)k^2 + \\
& + (-243p_0^3 + 151p_0^2 + 6p_0 - 9)k + p_0^2(-5p_0 + 3)m_0^3 + p_0(15(3p_0 + 1)k^6 + \\
& + (274p_0^2 + 85p_0 - 63)k^5 + 2(216p_0^3 + 309p_0^2 - 272p_0 + 33)k^4 + \\
& + 2(776p_0^3 - 198p_0^2 + 285p_0 + 15)k^3 + (1392p_0^3 - 268p_0^2 - 67p_0 - 81)k^2 + \\
& + (432p_0^3 - 198p_0^2 - 95p_0 + 33)k + 2p_0(16p_0^2 - 15p_0 + 3)m_0^2 - \\
& - p_0^2(9k^6 + 3(27p_0 - 10)k^5 + (296p_0^2 - 187p_0 + 3)k^4 + \\
& + 2(192p_0^3 + 104p_0^2 + 17p_0 + 36)k^3 + (800p_0^3 - 352p_0^2 + 146p_0 - 69)k^2 + \\
& + (320p_0^3 - 144p_0^2 - 51p_0 + 6)k + 32p_0^3 - 8p_0^2 - 23p_0 + 9)m_0 + \\
& + 4p_0^3(2p_0(k + 1) + k - 1)(4p_0 + 3(k - 1))((4p_0 - 1)k + 1)].
\end{aligned}$$

Зависимость σ от времени t найдем из дифференциального уравнения (5.53)

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu\sigma}{2A_1} \sqrt{(b_4\sigma^2 + b_3\sigma + b_2)(c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2)}. \quad (5.59)$$

Приведем численный пример решения (5.52), (5.56), (5.58), (5.59) уравнений (5.17).

$$\begin{aligned}
A_1 &= 5a, \quad A_2 = 4a, \quad A_3 = 3a, \quad k = \frac{1}{3}, \quad g_0 = g, \quad \gamma = \sqrt{1222}, \quad (a > 0, \quad g > 0) \\
C_2 &= C_3, \quad B_1 = -\frac{198\gamma a}{47g^2}, \quad B_2 = \frac{2916\gamma a}{611g^2}, \quad B_3 = \frac{7290\gamma a}{611g^2}, \\
\beta &= C_1 - C_3 = -\frac{268272a}{611g^4}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{28836a}{611g^2}; 0; 0\right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{19852128\gamma a}{373321g^4}; 0; 0\right), \\
\omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2^2 = \sigma^2 Q^*(\sigma), \quad \omega_3^2 = \sigma^2 R^*(\sigma), \quad (5.60) \\
Q^*(\sigma) &= 2\sigma^2 + \frac{216\gamma}{611g}\sigma - \frac{11016}{611g^2}, \quad R^*(\sigma) = -\frac{1}{3}\sigma^2 - \frac{60\gamma}{611g}\sigma + \frac{108}{611g^2}, \\
\nu_1 &= -\frac{\gamma g^2}{324}\sigma^2 - \frac{3g}{2}\sigma - \frac{74\gamma}{611}, \quad \nu_2 = \left(\frac{\gamma g^2}{324}\sigma + g\right)\sqrt{Q^*(\sigma)}, \\
\nu_3 &= \left(\frac{\gamma g^2}{108}\sigma + \frac{5}{2}g\right)\sqrt{R^*(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ находим из дифференциального уравнения (5.59). Полиномы $Q^*(\sigma)$ и $R^*(\sigma)$ положительны при

$$-\frac{18\sqrt{611}}{611g}(5\sqrt{2} + \sqrt{51}) < \sigma < -\frac{18\sqrt{611}}{611g}(3\sqrt{2} + \sqrt{35}).$$

Зависимость $\sigma = \sigma(t)$ найдем из (5.59) обращением эллиптического интеграла.

Второе новое частное решение уравнений (5.17). Случай $n = m = 4$, $l = 2$, $n_1 = 1$, $m_1 = 0$ Пусть теперь решение (5.51) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2^2 &= Q(\sigma) = b_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 &= R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, & \nu_2 &= \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2, \\ \nu_3 &= \kappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, & \psi(\sigma) &= g_1\sigma + g_0, & \kappa(\sigma) &= f_0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Для нахождения коэффициентов полиномов (5.61) воспользуемся системой условий (5.57) при $m_1 = 0$. Рассматриваемая система алгебраических уравнений будет совместна. Принимая в качестве независимых параметров B_1, B_2, B_3, A_3 запишем решение этой системы

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = 2A_3, & C_2 &= C_3, & \beta &= C_1 - C_3 = -(B_1 + B_2 - 4B_3)B_3/A_3, \\ a_0 &= -((5B_2 - 16B_3 + 2B_1)B_2 + 2(4B_3 - B_1)B_3)f_0^2/(3B_3A_3), \\ a_1 &= 2(B_2 - B_3)f_0/B_3, & a_2 &= -A_3/B_3, \\ b_0 &= b_1 = 0, & b_2 &= -((4B_1 + 7B_2 - 26B_3)B_2 + 4(4B_3 - B_1)B_3)f_0^2/(3A_3^2), \\ b_3 &= 2(B_2 - 2B_3)f_0/A_3, & b_4 &= -1, \\ c_0 &= c_1 = 0, & c_2 &= 2(11B_2^3 + 2(4B_1 - 25B_3)B_2^2 - 4(3B_1 - 13B_3)B_2B_3 + \\ &+ 4(B_1 - 4B_3)B_3^2)f_0^2/(3B_3A_3^2), & c_3 &= -4((2B_1 + 5B_2 - 16B_3)B_2 + \\ &+ 2(4B_3 - B_1)B_3)f_0/(3B_3A_3), & c_4 &= 2(B_2 - 2B_3)/B_3, \\ g_0 &= \frac{B_2f_0}{B_3}, & g_1 &= -A_3/B_3, & f_0 &= \sqrt{6\sqrt{\mu_0}(B_2 - B_3)B_3A_3/(2\sqrt{\mu_0}(B_2 - B_3))} \\ \lambda_1 &= -4(B_2 - B_3)(B_1 + B_2 - 4B_3)f_0^2/(3A_3), & s_1 &= \beta a_0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Здесь $\mu_0 = (B_1 + B_2 + 2B_3)(B_1 + B_2 - 4B_3)$.

Зависимость вспомогательной переменной σ от t установим из уравнения (5.53)

$$\dot{\sigma} = 2^{-1}\sigma\sqrt{(b_4\sigma^2 + b_3\sigma + b_2)(c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2)}. \quad (5.63)$$

Численный пример решения (5.52), (5.53), (5.62), (5.63) уравнений (5.17) таков:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 = 2a, \quad A_3 = a, \quad B_1 = -100b, \quad B_2 = 9b, \quad B_3 = 4b, \\
C_2 &= C_3, \quad \beta = C_1 - C_2 = \frac{428b^2}{a}, \quad (a > 0, b > 0), \\
\boldsymbol{\lambda} &= \left(\frac{2140(f_0b)^2}{3a}; 0; 0 \right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{111601f_0^2b^3}{3a^2}; 0; 0 \right), \\
\omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2 = \sigma\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \\
Q^*(\sigma) &= -\sigma^2 + \frac{2f_0b}{a}\sigma + \frac{2113f_0^2b^2}{3a^2}, \\
R^*(\sigma) &= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1043f_0b}{3a}\sigma - \frac{29717f_0^2b^2}{6a^2}, \\
\nu_1 &= -\frac{a}{4b}\sigma^2 + \frac{5f_0}{2}\sigma + \frac{1043f_0^2b}{12a}, \\
\nu_2 &= \left(-\frac{a}{4b}\sigma + \frac{9}{4}f_0 \right) \sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad \nu_3 = f_0\sqrt{R^*(\sigma)}.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Здесь

$$f_0 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{222025}} \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Вспомогательную переменную $\sigma = \sigma(t)$ найдем из уравнения

$$\dot{\sigma} = 2^{-1}\sigma\sqrt{Q^*(\sigma)R^*(\sigma)}, \tag{5.65}$$

при $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$, где $\sigma_1 = \frac{(10\sqrt{11770} - 1043)f_0b}{3a}$, $\sigma_2 = \frac{(3 + 46\sqrt{3})f_0b}{3a}$

Решение (5.64), (5.65) уравнений (5.17), в отличие от решения (5.59), (5.60), содержит только четыре независимых параметров, а не пять. Оно выражается через эллиптические функции времени.

5.5. ВЫВОДЫ

В данном разделе рассмотрена задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Исследованы полиномиальные решения уравнений движения, которые являются обобщенными классами полиномиальных решений, предложенных А. И. Докшевичем и С. А. Чаплы-

гиным. Получены новые случаи интегрируемости уравнений, характеризующиеся либо элементарными, либо эллиптическими функциями времени. С помощью численных примеров показана действительность найденных решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию и построению полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела.

Проведена классификация обобщенных классов полиномиальных решений в задачах динамики твердого тела.

В задаче о движении тяжелого гиростата установлены новые свойства полиномиальных решений уравнений Н. Ковалевского для динамически симметричных тел. В случае переменного гиростатического момента выполнена редукция исходных уравнений к уравнениям класса Ковалевского–Харламова. Изучены условия существования обобщенного класса полиномиальных решений в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом и истолкование движения методом Пуансо.

При помощи методов степенной геометрии исследована задача о движении тяжелого гиростата, центр масс которого лежит на главной оси эллипсоида инерции. Получено 22 семейства степенных разложений решений уравнений Ковалевского–Харламова в случае, когда проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось стремится к нулю и в случае, когда эта переменная стремится к бесконечности.

Выполнена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям обобщенного класса Ковалевского–Харламова. Построены полиномиальные решения уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Алексеев А. В.* Построение стабилизирующего управления для стационарных движений гиростата с полостью с вязкой жидкостью / А. В. Алексеев, С. П. Безгласный, В. С. Красников // *Механика и машиностроение.* – 2014. – С. 563–567.
2. *Амелькин Н. И.* О резонансных вращениях маятника с вибрирующим подвесом / Н. И. Амелькин // *Прикл. математика и механика.* – 2015. – **79**, вып. 6. – С. 756–767.
3. *Амелькин Н. И.* О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гиростатов / Н. И. Амелькин // *Прикл. математика и механика.* – 2011. – **75**, вып. 3. – С. 355–369.
4. *Аппельрот Г. Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Г. Г. Аппельрот // *Уч. зап. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат.* – 1894. – **2**, вып. 11. – С. 1–112.
5. *Арансон А. Б.* Вычисление степенных разложений решений модифицированной системы ОДУ Н. Ковалевского алгоритмами степенной геометрии / А. Б. Арансон // *Программирование.* – 2011. – N 2. – С. 39–53.
6. *Билимович А. Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – В кн.: *Сборник статей, посвященный Г. К. Суслову / А. Д. Билимович.* // – К. – 1911. – С. 23–74.
7. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
8. *Брюно А. Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы / А. Д. Брюно // *Прикл. матем. и механика.* – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 192–227.

9. Брюно А. Д. Конечные решения уравнений Н. Ковалевского / А. Д. Брюно, И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 31–37.
10. Брюно А. Д. Простые точные решения уравнений Н. Ковалевского / А. Д. Брюно, И. Н. Гашененко // Докл. РАН. — 2006. — 409 N 4. — С. 439–442.
11. Брюно А. Д. Асимптотические разложения модифицированных движений твердого тела / А. Д. Брюно, В. В. Лунев // (Препринт/ ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, N 90). — М., 2001. — 34 с.
12. Брюно А. Д. Локальные разложения модифицированных движений твердого тела / А. Д. Брюно, В. В. Лунев // (Препринт/ ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, N 73). — М., 2001. — 39 с.
13. Брюно А. Д. Свойства разложений модифицированных движений твердого тела / А. Д. Брюно, В. В. Лунев // (Препринт/ ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, N 23). — М., 2002. — 44 с.
14. Брюно А. Д. Семейства степенных разложений модифицированных движений твердого тела / А. Д. Брюно, В. В. Лунев // Докл. РАН. — 2002. — 387, N 3. — С. 297–303.
15. Брюно А. Д. Степенные разложения сдвинутых решений системы Н. Ковалевского / А. Д. Брюно, А. Б. Арансон // (Препринт /Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН, N 48). — М., 2010. — 32 с.
16. Веселова Л. Е. О двух задачах динамики твердого тела / Л. Е. Веселова // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. — 1986. — N 5. — С. 90–91.
17. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. — М.: Мир, 1980. — 288 с.
18. Гашененко И. Н. Исследование одного класса движений гироскопа Чаплыгина / И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. — 1985. — Вып. 17.

- С. 6–9.
19. *Гашененко И. Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса / И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела.* – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.
 20. *Гашененко И. Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
 21. *Гашененко И. Н.* Один частный случай движения гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко, В. Н. Касяник // *Механика твердого тела.* – 1983. – Вып. 15.–С. 31–34.
 22. *Гашененко И. Н.* Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина / И. Н. Гашененко // *Механика твердого тела.* – 1989. – Вып. 21.– С. 9–18.
 23. *Гашененко И. Н.* О редукции уравнений Эйлера–Пуассона / И. Н. Гашененко, Г. В. Мозалевская, Е. И. Харламова // *Механика твердого тела.* – 2007. – Вып. 37.– С. 69–84.
 24. *Гашененко И. Н.* О редукции уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Г. В. Мозалевская, Е. И. Харламова // *Механика твердого тела.* – 2008. – Вып. 38.– С. 3–19.
 25. *Гашененко И. Н.* Об одном решении Харламовой–Мозалевской уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Г. В. Мозалевская, Д. Н. Ткаченко // *Механика твердого тела.* – 2012. – Вып. 42. – С. 37–45.
 26. *Гашененко И. Н.* Степенные разложения решений уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Д. Н. Ткаченко// *Механика твердого тела.* – 2011. – Вып. 41. – С. 11–26.
 27. *Гашененко И. Н.* Асимптотические разложения решений уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Д. Н. Ткаченко// *Сборник трудов*

- Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – М: ФИЗМАТЛИТ, - 2015. – с. 80-83.
28. *Горр Г. В.* Об обобщении уравнений Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / Г. В. Горр, А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции "Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение актуальных проблем". – г. Астрахань, - 2017. – с. 15-19.
 29. *Горр Г. В.* Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев // – Киев: Наукова думка. – 2013. – т. 8, серия "Задачи и методы: математика, механика". – 407 с.
 30. *Горр Г. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
 31. *Горр Г. В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова // – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
 32. *Горр Г. В.* Применение параметров Родрига–Гамильтона при истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. М. Ковалев // Прикладная математика и механика. – 2015. – 79, Вып. 5. – С. 635–643.
 33. *Горр Г. В.* Методы истолкования движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 3–13.
 34. *Горр Г. В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г. В. Горр // – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
 35. *Горр Г. В.* Подвижный годограф вектора угловой скорости решения Д. Н. Горячева // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 95–100.

36. Горр Г. В. Новая форма уравнений в моделировании движения тяжелого твердого тела / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Компьютерные исследование и моделирование. – 2016. – Т. 8, N 6. – С. 873–884.
37. Горр Г. В. Новые решения в задаче о движении тела в поле потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Доповіді НАН України. – 2001. – N 4. – С. 41–48.
38. Горр Г. В. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. / Г. В. Горр, А.А.Илюхин, Е.И.Харламова // Механика твердого тела. – 1974.— Вып. 6.— С. 3 – 9.
39. Горр Г. В. Об алгебраическом инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. / Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 1969.— Вып. 1.— С. 89 – 101.
40. Горр Г. В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой. / Г. В. Горр // Механика твердого тела. – 2012.— Вып. 42.— С. 26 – 36.
41. Горр Г. В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. В. Зыза // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – N 6. – С. 12–21.
42. Горр Г. В. О решении Н. Ковалевского уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, В. К. Козьменко // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 46–53.
43. Горр Г. В. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 418–426.
44. Горр Г. В. Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 3. – С. 46–56.

45. *Горр Г. В.* Об одном классе движений гиростата Жуковского с переменным гиростатическим моментом / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 3–9.
46. *Горр Г. В.* Об одном классе частных решений уравнений движения гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 29–37.
47. *Горр Г. В.* Об одном периодическом движении в решении С. В. Ковалевской / Г. В. Горр, А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 64–69.
48. *Горр Г. В.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С. В. Ковалевской / Г. В. Горр, А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66–73.
49. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 573–587.
50. *Горячев Д. Н.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д. Н. Горячев // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 23–24.
51. *Горячев Д. Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ / Д. Н. Горячев // Мат. сборник. – 1900. – 21, вып. 3. – С. 431–438.
52. *Данилейко Е. А.* Новое частное решение уравнений движения гиростата в магнитном поле / Е. А. Данилейко // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 55–60.
53. *Докшевич А. И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А. И. Докшевич // – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.

54. *Дружинин Э. И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э. И. Дружинин // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
55. *Евдокименко А. П.* Исследование установившихся движений субспутника-гиростата на стержне в центральном гравитационном поле / А. П. Евдокименко // Вестн. Нижегородского ун-та им. Лобачевского. – 2011. – **5**, вып. 4. – С. 2151–2153.
56. *Елфимов В. С.* О геометрическом исследовании движения гироскопа Лагранжа / В. С. Елфимов // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 22–32.
57. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Собр. соч. – Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152. (Изд. 1-е: Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – **17**, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280).
58. *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С. Л. Зиглин // Функц. анализ и его приложения. – 1982. – **16**, N 3. – С. 30–41.
59. *Зыза А. В.* О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А. В. Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61–70.
60. *Зыза А. В.* Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле / А. В. Зыза // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 116–123.
61. *Зыза А. В.* Новые решения уравнений движения гиростата в магнитном поле / А. В. Зыза // Тр. ИПММ МОН ДНР. – 2015. – Т. 29. – С. 51–59.

62. *Зыза А. В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой / А. В. Зыза // Вестник ДонНУ. Сер.А. – 1998. – Вып. 1. – С. 31–36.
63. *Зыза А. В.* Условия существования полиномиального решения Докшевича в одной задаче динамики гиростата / А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Вестник ДонНУ. Сер.А. – 2013. – Вып. 1. – С. 37–41.
64. *Зыза А. В.* Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле / А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 55–63.
65. *Ковалев А. М.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
66. *Ковалев А. М.* Кинематическое истолкование движения тела в решении Гесса / А. М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 1970. – 34, вып. 3. – С. 567–570.
67. *Ковалев А. М.* Кинематическое истолкование движения тела в случае Л. Н. Сретенского / А. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 45–50.
68. *Ковалев А. М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата / А. М. Ковалев, А. М. Киселев // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 36–45.
69. *Ковалев А. М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
70. *Kovalevsky S.* Memoires sur un cas particulier du probleme de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, ce l'integration s'effectue a l'aide

de fonctions ultraelliptiques du temps / S. Kovalevsky. – Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences de l'Institut national de France, Paris. – 1890. – **31**. – P. 1–62.

71. *Козлов В. В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В. В. Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – N 6. – С. 28–33.
72. *Козлов В. В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В. В. Козлов, Д. А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, N 6. – С. 1298–1300.
73. *Козлов В. В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / В. В. Козлов // Прикл. математика и механика. – 1975. – **39**, вып. 3. – С. 407–414.
74. *Коносевиц Б. И.* Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку / Б. И. Коносевиц, Е. В. Позднякович // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 544–548.
75. *Коносевиц Б. И.* Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в двух частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона / Б. И. Коносевиц, Е. В. Позднякович // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 77–80.
76. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика / Ж. Лагранж. – В 2-х т. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1. – 594 с.; – Т. 2. – 440 с.
Lagrange J.L. Mécanique Analytique / J. L. Lagrange. – Paris: M^{me} Ve. Courcier, 1811. – Т. 1; 1815. – Т. 2.
77. *Леви-Чивита Т.* Курс теоретической механики / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale / Nuova Ed / T. Levi-Civita, U. Amaldi. – Bologna: Zanichelli, 1952. – Vol. 2, Parte 2.

78. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости / А. М. Ляпунов // Собр. соч. – М., 1954. – Т. 1. – С. 320–324. (Изд. 1-е: Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2. – 1893. – 4, N 1–2. – С. 81–85).
79. *Ляпунов А. М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ляпунов // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2. – 1894. – 4, N 3. – С. 123–140.
80. *Мазнев А. В.* Об одном классе трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев // Прикладная математика и механика. – 2013. – 77, вып. 2. – С. 263–269.
81. *Мазнев А. В.* Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // XV international conference, DSMSI, май 25-27, 2011. – Киев. – 2011. – С. 296.
82. *Мазнев А. В.* Один класс прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2011. – 22. – С. 143–152.
83. *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью / А. П. Маркеев // М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 336 с.
84. *Маркеев А. П.* О движении связанных маятников / А. П. Маркеев // Нелинейная динамика. – 2013. – 9, вып. 1. – С. 27–38.
85. *Маркеев А. П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, вып. 2. – С. 282–293.

86. *Маркеев А. П.* Об устойчивости прецессии Гриоли / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 556–572.
87. *Миронова Е. М.* Об решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений / Е. М. Миронова // Прикл. механика. – 2001. – Т.37, вып. 2. – С. 105–113.
88. *Мозалевская Г. В.* Частное решение задачи о движении тяжелого гиростата / Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 23–26.
89. *Паскаль М.* Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 46, вып. 2. – С. 321–329.
90. *Петров А. Г.* "Эффект Джанибекова" и законы механики / А. Г. Петров, С. Е. Володин // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 451, N 4. – С. 399–403.
91. *Рубановский В. Н.* О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, вып. 3. – С. 402–414.
92. *Рубановский В. Н.* О некоторых возможных движениях тяжелого твердого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 4. – С. 763–768.
93. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – N 2. – С. 83–96.
94. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 4. – С. 457–458.

95. *Самсонов В. А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984, N. 4. – С. 32–34.
96. *Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской / А. Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 48–51.
97. *Самсонов В. А.* О вращении твердого тела в магнитном поле / В. А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – N 4. – С. 32–34.
98. *Сергеев Е. К.* О движении гиростата в случае А. И. Докшевича / Е. К. Сергеев // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 39–47.
99. *Сергеев Е. К.* Об одном периодическом движении гиростата Докшевича / Е. К. Сергеев // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 10–12.
100. *Скрыпник С. В.* Один класс двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении тела в магнитном поле / С. В. Скрыпник // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С. 175–180.
101. *Скрыпник С. В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С. В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
102. *Соколов В. В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа / В. В. Соколов // Теор. и мат. физика. – 2001. – **129**, вып. 1. – С. 31–36.
103. *Стретенский Л. Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом / Л. Н. Стретенский // Вестн. Моск. ун-та. – 1963. – N 3. – С. 60–71.
104. *Стеклов В. А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 1–3.

105. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости / В. А. Стеклов // – Харьков, 1893. – 234 с.
106. *Стеклов В. А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 19–21.
107. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика / Г. К. Суслов // – М.: Гостехиздат. – 1946. – 655 с.
108. *Ткаченко Д. Н.* О редукции дифференциальных уравнений движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / Д. Н. Ткаченко // Труды ИПММ. – 2016. – Том. 30. – С. 132–139.
109. *Ткаченко Д. Н.* Об одном классе полиномиальных решений уравнений Эйлера–Пуассона / Д. Н. Ткаченко // Вестник ДонНУ. Сер.А. – 2017. – Вып. 3. – С. 98–105.
110. *Ткаченко Д. Н.* О степенных разложениях решений уравнений Ковалевского–Харламова / Д. Н. Ткаченко // Устойчивость, управление и динамика твердого тела: XI Международная конференция, 8-12 июня 2011 г.: Тезисы доклада – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ, – 2011. – с. 111-112.
111. *Ткаченко Д. Н.* Применение теории дифференциальных уравнений в построении полиномиальных решений уравнений Эйлера-Пуассона / Д. Н. Ткаченко // Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование в рамках III форума "Инновационные перспективы Донбасса"(ИУСМКМ – 2017): VIII Международная научно-техническая конференция, 25 мая 2017, г. Донецк: / Донец. национал. техн. ун-т; редкол. Ю.К. Орлов и др. – Донецк: ДонНТУ, 2017. – с. 88–91.
112. *Узбек Е. К.* О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и игроскопических сил /

- Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 6. – С. 964–970.
113. *Узбек Е. К.* Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Е. К. Узбек, Е. А. Данилейко // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 87–94.
114. *Харламов А. П.* Движение гироскопа А. И. Докшевича / А. П. Харламов, Д. Н. Кравчук // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 35–39.
115. *Харламов М. П.* Об одном классе движений гиростата / М. П. Харламов // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 47–56.
116. *Харламов М. П.* Построение полного решения одной задачи динамики твердого тела / М. П. Харламов, Е. К. Сергеев // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 33–38.
117. *Харламов П. В.* Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С. В. Ковалевской / П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 5. – С. 5–24.
118. *Харламов П. В.* Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне / П. В. Харламов, В. И. Коваль // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 38–54.
119. *Харламов П. В.* Движение гироскопа С. В. Ковалевской в случае Б. К. Млодзеевского / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 7. – С. 9–17.
120. *Харламов П. В.* Исследование решения с двумя линейными инвариантными соотношениями задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку (специальные случаи) / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 37–56.
121. *Харламов П. В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика.

- 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
122. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
123. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П. В. Харламов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – N 4. – С. 17–29.
124. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373–375.
125. *Харламов П. В.* О решениях уравнений динамики твердого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 3. – С. 567–572.
126. *Харламов П. В.* Об алгебраических инвариантных соотношениях уравнений движений твердого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 25–33.
127. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
128. *Харламов П. В.* Об одном новом решении задачи о движении тяжелого гиростата / П. В. Харламов, Л. М. Ковалева // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 3–8.
129. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
130. *Харламов П. В.* Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 57–64.

131. *Харламов П. В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.
132. *Харламов П. В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
133. *Харламов П. В.* Исследование подвижного годографа угловой скорости в симметричном решении задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 8–24.
134. *Харламова Е. И.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
135. *Харламова Е. И.* Исследование решения В. А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 194–202.
136. *Харламова Е. И.* Два новых решения задачи о движении тяжелого гиростата / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 61–75.
137. *Харламова Е. И.* Новое решение задачи о движении тяжелого гиростата / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 3–16.
138. *Харламова Е. И.* Движение тяжелого гиростата в одном из случаев интегрируемости / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // – Устойчивость, управление и динамика твердого тела. Тезисы докл. VIII Межд. конф. (3-7 сент. 2002 г., Донецк) – Донецк: ИПММ НАНУ, 2002. – С. 80–81.

139. *Харламова Е. И.* О движении гиростата по инерции / Е. И. Харламова // *Механика твердого тела.* – 1978. – Вып. 10. – С. 34–40.
140. *Харламова Е. И.* О канонических уравнениях движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // *Механика твердого тела.* – 1969. – Вып. 1. – С. 102–107.
141. *Холостова О. В.* Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде / О. В. Холостова. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 128 с.
142. *Чаплыгин С. А.* Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке / С. А. Чаплыгин // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1896. – **9**, вып. 2. – С. 17–21.
143. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / С. А. Чаплыгин // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1904. – **12**, вып. 1. – С. 1–4.
144. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости / С. А. Чаплыгин // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1903. – **11**, вып. 2. – С. 7–10.
145. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая / С. А. Чаплыгин // *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1894. – **6**, вып. 2. – С. 20–42.
146. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С. А. Чаплыгин // *Мат. сб. Кружка любителей мат. наук.* – 1897. – **20**, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.
147. *Щетинина Е. К.* Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента / Е. К. Щетинина, А. А. Возняк // *Компьютерные исследования и моделирование.* – Ижевск, ФГБОУ

- ВПО "Удмуртский государственный университет Институт компьютерных исследований, ФГБУН Институт машиноведения им. А. А. Благодирова РАН, 2014. – **6**, N. 4. – С. 559–568.
148. *Яхья Х. М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата / Х. М. Яхья // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1987. – N 4. – С. 88–90.
149. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки / Х. М. Яхья // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1976. – N 6. – С. 76–79.
150. *Burgatti P.* Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso / P. Burgatti // Rend. Circ. matem. Palermo. – 1910. – **29**. – P. 369–377.
151. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit / A. Clebsch // J. reine und angew. Math. – 1856. – **52**, H. 2. – S. 103–132.
152. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Ann. – Leipzig, 1871. – **3**. – S. 238–262.
153. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de mécanique / L. Euler // Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Berlin. – 1750–1752. – **6**. – P. 185–217.
154. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. S. 4. – 1947. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
155. *Grioli G.* Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi / G. Grioli // Atti. Accad. Naz. Lincei. S. 8. – 1963. – **34**, N 6. – P. 636–641.
156. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann. – 1890. – **37**, H. 2. – S. 153–181.

157. *Husson E.* Sur un théorém de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant / E. Husson // Acta math. – 1908. – **31**. – P. 71–88.
158. *Jacobi C. G. J.* Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe / C. G. J. Jacobi // Gesammelte Werke. – Berlin: G. Reimer, 1882. – **2**. – S. 477–492.
159. *Kirchhoff G. R.* Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit / G. R. Kirchhoff // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – **71**. – S. 237–262.
160. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
161. *Liouville R.* Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points / R. Liouville // Acta Math. – 1896. – **20**. – P. 239–284.
162. *Mac Cullagh J.* On the rotation of a solid body / J. Mac Cullagh // Proc. Roy. Irish Acad. – 1840 – 1844. – **2**. – P. 542–545; 1845 – 1847. – **3**. – P. 370–371.
163. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – **16**. – P. 9–130; P. 289–336.
164. *Poisson S. D.* Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant / S. D. Poisson // Mém. Acad. sci.. – 1832. – **11**. – P. 521–581.
165. *Staude O.* Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O. Staude // J. für reine und angew. Math. – 1894. – **113**, N 4, 5. – S. 318–334.
166. *Thompson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid / W. Thompson // Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1872. – **7**. – P. 668–674.
167. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.

168. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations / H. M. Yehia // J. Méc. Théor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 747–754.
169. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H. M. Yehia // J. Méc. Théor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 755–762.
170. *Yehia H. M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields / H. M. Yehia // J. of the Egyptian Mathematical Society. – 2016. – P. 1–4.