РАЗДЕЛ 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация посвящена построению полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела и гиростата. Актуальность исследований по математическому моделированию движений механических систем с помощью методов аналитической механики обусловлена тем, что полученные результаты находят широкое применение в объяснении свойств современных технических объектов (спутников, гироскопических систем, роботов и манипуляторов). Одним из первых ученых Ж. Даламбер [78, 252] изучил модели движения Земли. Л. Эйлер [258] предложил математическую постановку задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. На протяжении более чем 260 лет получены значительные теоретические результаты в динамике твердого тела. Отметим, что и в настоящее время продолжаются новые исследования по объяснению свойств движений механических систем (Кельтского камня [159, 170, 171], твердого тела в безвоздушном пространстве [172]). Требования к математическому исследованию движения системы связанных твердых тел состоят в получении адекватной модели ее программных движений, в создании математического аппарата, который позволил бы не только объяснить существующие особенности движения, но и обеспечил бы корректность постановки задачи.

В диссертации рассмотрены две задачи динамики гиростата: задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Поскольку они являются обобщением классической задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, то анализ литературы будем проводить с учетом математических особенностей уравнений движения в этих задачах и общей проблематики интегрирования уравнений в квадратурах.

Остановимся на механических моделях твердого тела и гиростата. Модель твердого тела использовал Л. Эйлер; она применяется в математическом моделировании движений технических конструкций, для которых допустимо предположение о том, что деформации этих конструкций пренебрежимо малы и их можно не учитывать (космические аппараты, роботы и др.)

Модель гиростата впервые была предложена У. Томсоном [296, 297]. В дальнейшем она видоизменилась в зависимости от свойств внутренних движений. Так, например, Н.Е. Жуковский [91] рассматривал механическую систему «тело+жидкость» в предположении, что вектор циркуляции жидкости постоянен. В.В. Румянцев [180] при исследовании спутников предполагал, что несомые тела динамически и статически уравновешены. Определение гиростата, предложенное П.В. Харламовым [213], равносильно определению В.В. Румянцева [180], так как в модели П.В. Харламова несомые тела динамически симметричны, а центры их масс лежат на оси динамической симметрии. В научной литературе принято называть гиростаты, для которых **гиростатический момент постоянен**, гиростатами Кельвина. Отметим, что используется также модель, именуемая гиростатом Жуковского-Вольтерра. В данной диссертации рассматриваются гиростаты Кельвина (У. Томсона). Отметим, что в литературе изучаются также гиростаты, для которых гиростатический момент зависит от времени (Й. Виттенбург [23, 300], П.В. Харламов [213], А.С. Асланов [7, 8], Г.В. Горр и А.В. Мазнев [60] и другие). Обзор результатов, полученных в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом, дан в монографии Г.В. Горра, А.В. Мазнева, Г.А. Котова [61].

Уравнения движения гиростата, которые рассматриваются в данной диссертации, имеют шестой порядок. Для уравнений движения гиростата в первой задаче имеют место три первых интеграла и поэтому нахождение дополнительного первого интеграла позволяет их интегрировать в квадратурах по Якоби. Задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона описывается уравнениями шестого порядка, которые допускают только два первых интеграла. Следовательно, применить теорию Якоби в этой задаче можно только при получении двух дополнительных первых интегралов.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Пуассона и их обобщения [91, 133, 157, 190, 191, 204, 205, 208, 211, 213, 215, 219, 220, 227, 228, 230, 231, 235, 237, 245, 249, 265. 272, 290, 303, 304] имеют свойства, которые обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши на бесконечном промежутке времени. Ряды А. Пуанкаре [174] могут быть получены для уравнений Эйлера-Пуассона при любых значениях параметров задачи, но они не нашли широкого применения в построении решений уравнений динамики в обобщенных задачах.

Рассмотрим литературу по изучению первых интегралов в динамике твердого тела. Вначале отметим работы Л. Эйлера [257-259], Ж. Лагранжа [151], С.В. Ковалевской [140, 141], в которых получены первые интегралы уравнений Эйлера-Пуассона. Комплексное истолкование решения Л. Эйлера дано Г.В. Горром и Г.А. Котовым [58]. Л. Эйлер получил квадратичный интеграл для задачи о движении свободного твердого тела. Ж. Лагранж [151] при выводе уравнений движения тяжелого твердого тела использовал кинетическую и потенциальную энергию тела, записанные в произвольной системе координат, и выведенные им уравнения. Для случая осесимметричного тяжелого твердого тела он получил новое решение уравнений движения, которое характеризуется линейным первым интегралом. С.В. Ковалевская [140, 141] нашла первый интеграл четвертого порядка (гироскоп С.В. Ковалевской имеет свойство динамической симметрии, а центр масс его находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции). Поскольку решение С.В. Ковалевской оказалось последним из общих случаев интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона, то исследованию данного решения посвящена обширная литература (Г.Г. Аппельрот [3], Н.Б. Делоне [79, 80], Н.Е. Жуковский [89], В.В. Голубев [33], Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко [54], Г.В. Горр и А.Я. Савченко [64], А.И. Докшевич [86], И.Н. Гашененко [26], В.И. Коваль и П.В. Харламов [142], П.Я. Полубаринова-Кочина [173], А.Я. Савченко [181], П.В. Харламов и В.И. Коваль [218], Е.И. Харламова и П.В. Харламов [243], Г.В. Горр и Е.К. Щетинина [73]).

Е. Гюссон [268, 269] доказал две теоремы: в первой теореме при рассмотрении рационального первого интеграла уравнений Эйлера-Пуассона показано его существование только для динамически симметричных тел, а во второй теореме при условии, что первый интеграл является полиномом по основным переменным, доказано его существование только в решениях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Р. Лиувилль [284] рассмотрел случай главных моментов инерции и получил такой результат: дополнительный первый интеграл должен иметь вид однородного многочлена. В работе [285] Р. Лиувилль изучил первый интеграл уравнений Кирхгофа-Пуассона.

А. Пуанкаре [174] рассматривал существование алгебраических интегралов при более общем предположении, чем Е. Гюссон [268, 269].

С.В. Ковалевская [140] нашла свой случай интегрируемости при изучении вопроса о существовании однозначных решений Эйлера-Пуассона.

А.М. Ляпунов [155] обобщил результат С.В. Ковалевской [140] на случай, когда однозначные функции, определяющие решения, имеют особые точки, отличные от полюсов (например, существенно особые точки).

В.В. Козлов [143] рассмотрел более общую задачу – задачу о существовании для уравнений Эйлера-Пуассона аналитических первых интегралов и показал, что дополнительных интегралов такого вида не существует.

Остановимся на результатах, посвященных получению первых интегралов в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в постановке [60, 265, 302, 303], в которой предполагается, что на заряженный и намагниченный гиростат действуют ньютоновские, кулоновские и лоренцевы силы. Поскольку уравнения движения гиростата в такой постановке линейным преобразованием основных переменных приводятся к уравнениям движения твердого тела в жидкости (данная аналогия в частном случае доказана В.А. Стекловым [190] и П.В. Харламовым [204], в общем случае она установлена Х.М. Яхьей [302, 303]), то полученные здесь результаты необходимо описывать в разных механических интерпретациях. Для удобства изложения будем использовать параметры, которые характеризуют первую задачу. Пусть $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\lambda}$ – векторы, определяющие положение центра масс гиростата и его гиростатический момент. В отличие от классической задачи о движении тяжелого твердого тела, в рассматриваемой задаче уравнения движения допускают шесть случаев наличия первых интегралов.

В аналитической механике получение результатов, связанных с аналогией рассматриваемых задач, имеет большое значение. Один из таких результатов рассмотрен выше. В качестве второго результата отметим аналогию Кирхгофа [133], которую успешно использовал А.А. Илюхин [132].

Г. Кирхгоф [275] получил уравнения движения при условиях $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$ и указал линейный первый интеграл. П.В. Харламов [204] обобщил данный интеграл в случае $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$. А. Клебш [249, 250] при $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$ и определенных условиях на параметры доказал существование квадратичного интеграла в двух случаях (первый случай отвечает варианту сферического распределения масс, второй случай имеет место при дополнительных условиях на матрицы, входящие в правые части уравнений). Отметим, что при $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$ обобщение решения А. Клебша невозможно. Решение А. Клебша изучали Г. Вебер [299], Ф. Кеттер [277, 278].

В.А. Стеклов [191, 294, 295] при условии, что $\boldsymbol{s}=n\boldsymbol{\lambda}$ (n – параметр), получил квадратичный первый интеграл уравнений движения, который в дальнейшем был обобщен П.В. Харламовым [204] и В.Н. Рубановским [176, 178] и исследован в работе [278].

А.М. Ляпунов [157] в случае сферического распределения масс твердого тела ($\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$) установил квадратичный первый интеграл по основным переменным задачи. В дальнейшем результаты А.М. Ляпунова обобщили П.В. Харламов [204] и В.Н. Рубановский [176, 178].

В.В. Соколов [187] нашел первый интеграл уравнений движения тела в жидкости, который имеет четвертый порядок (он может быть перенесен в задачу о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил).

Следует отметить, что частные первые интегралы уравнений движения тела в идеальной жидкости получили С.А. Чаплыгин [137, 240] и Х.М. Яхья [245, 306].

Поскольку в статьях [92, 145] доказана неинтегрируемость в квадратурах уравнений Эйлера-Пуассона и уравнений класса Кирхгофа-Пуассона, то актуальной становится задача о построении решений уравнений динамики гиростата в замкнутом виде (в литературе они именуются частными решениями). Свойство неинтегрируемости уравнений движения в другой задаче динамики отмечено А.А. Буровым [19].

Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [276] одними из первых отметили важность построения частных решений в задачах динамики твердого тела. Благодаря применению в задаче о движении тяжелого твердого тела первого метода Ляпунова [156] для исследования окрестности построенных решений, можно сделать вывод о том, что построение частных решений позволяет проводить нелокальное изучение интегрального многообразия уравнений Эйлера-Пуассона.

Весьма важным обстоятельством при построении частных решений является применение геометрических методов для исследования свойств движения тела и гиростата, которые описываются данными решениями. Л. Пуансо [287] не только дал полную картину движения тела в решении Л. Эйлера, представив движение путем качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости, но и сформулировал общую теорему о том, что любое движение тела с неподвижной точкой можно получить качением без скольжения подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному аксоиду этого вектора. Развитие метода Л. Пуансо получено в работах Ж. Дарбу [253-255], К. Якоби [270, 271], Э. Рауса [175, 291] и П.В. Харламова [207], который, используя подход Ж.Дарбу вывел новые уравнения неподвижного годографа. Комплексный подход к истолкованию движения тела предложил Г.В. Горр [38]; этот подход будет изложен ниже при обсуждении геометрических методов истолкования движения гиростата.

На начальном этапе получения частных решений многие авторы применяли некоторые специальные подходы при исследовании условий существования новых решений. Первый подход является полуобратным методом нахождения решений, который заключается в том, чтобы подстановкой решений заданного вида удовлетворить уравнения движения. Второй подход основывается на методе инвариантных соотношений, предложенном Т. Леви-Чевитой [152]. В третьем подходе используется метод инвариантных соотношений, предложенный П.В. Харламовым [214]. Обобщение метода П.В. Харламова на случай неавтономных дифференциальных уравнений выполнено А.М. Ковалевым, Г.В. Горром и В.Н. Неспирным [139]. Его применение его наиболее эффективно для уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом [61]. Перечислим частные решения уравнений Эйлера-Пуассона [257, 288, 289] (случаи существования первых интегралов отмечены выше):

– решение В. Гесса [267];

– решение Д.Н. Горячева [76, 239];

– стационарные решения О. Штауде [293], Б.К. Млодзеевского [165];

– решение, описывающее движение физического маятника [165];

– решение Д.К. Бобылева-В.А. Стеклова [13, 192];

– решение В.А. Стеклова [193];

– решение Н. Ковалевского [279];

– решение Д.Н. Горячева [75];

– решение С.А. Чаплыгина [241, 242];

– решение Д. Гриоли [264];

– решение А.И. Докшевича (при условиях Гесса) [82, 83];

– второе решение А.И. Докшевича [84];

– решение Б.И. Коносевича-Е.В. Поздняковича [146, 147].

Геометрический анализ этих решений и их обобщений на случай гиростата рассмотрен в работах [52, 135-137, 206, 221, 301].

Из данного перечня видно, что большой вклад в нахождение точных решений в последнее время внес А.И. Докшевич, который получил два решения уравнений Эйлера-Пуассона. Наибольшее их количество установлено в классе полиномов (Н. Ковалевский, В.А. Стеклов, Д.Н. Горячев, А.И. Докшевич), они служат базисом для построения в диссертации решений полиномиального вида уравнений обобщенных задач динамики гиростата.

Укажем решения уравнений движения тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку: решение Н.Е. Жуковского [91] (обобщение решения Л. Эйлера); решение Х.М. Яхьи [245] (обобщение решения С.В. Ковалевской); два решения Л.Н. Сретенского [188, 189] (обобщения решений В. Гесса и Д.Н. Горячева-С.А. Чаплыгина); пять решений П.В. Харламова (см. обзор [57]) (первое решение является обобщением решения О. Штауде, второе – обобщением решения Д.К. Бобылева-В.А. Стеклова, третье – обобщением решения В.А. Стеклова, четвертое – обобщением решения Н. Ковалевского, пятое решение – это решение, имеющее место при условиях С.В. Ковалевской); три решения Е.И. Харламовой-Г.В. Мозалевской [230] (два из них характеризуются инвариантными соотношениями четвертого порядка); решение Е.И. Харламовой, которое является обобщением решения А.И. Докшевича, полученного им при условиях Гесса; решение Г.В. Мозалевской [57]; решение Е.И. Харламовой-П.В. Харламова [232] (обобщение решения П.В. Харламова-Л.М. Ковалевой [217]); решение А.И. Докшевича [85, 86].

При анализе литературы по построению решений уравнений динамики, по-видимому, важно указать результаты, которые относятся к проблеме несуществования решений полиномиального вида. В связи с тематикой диссертации приведем два примера, посвященных данной задаче. Первый пример – теорема Г.В. Горра [35] о несуществовании полиномиальных решений класса С.А. Чаплыгина [241]. Второй пример – теорема Д.Н. Ткаченко [196] о существовании полиномиальных решений уравнений движения тяжелого твердого тела. Суть результата Д.Н. Ткаченко состоит в следующем. Известно, что для динамически симметричного тела частный случай [64] решения С.В. Ковалевской относится к полиномиальному решению класса Стеклова-Ковалевского-Горячева, а частный случай [39] решения Д.Н. Горячева [76] – к полиномиальному решению класса С.А. Чаплыгина [239]. В статье [196] проведено исследование полиномиальных решений классов В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева и С.А. Чаплыгина в случае динамически симметричного твердого тела. На основе уравнений Н. Ковалевского показано, что для класса Стеклова-Ковалевского-Горячева имеет место только частный случай решения С.В. Ковалевской, а для класса С.А. Чаплыгина – частный вариант решения Д.Н. Горячева, который характеризуется условием $A_1 = A_2 = 4A_3$ (A_i – главные моменты инерции тела).

Все частные решения уравнений движения гиростата проанализированы в монографии Г.В. Горра и А.М. Ковалева [57].

Рассмотрим частные решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Интегрирование данных уравнений с целью получения новых решений уравнений Кирхгофа-Пуассона проводили С.А. Чаплыгин [235, 237], Д. Гриоли [265], П.В. Харламов [204], Х.М. Яхья [245, 303, 304], Г.В. Горр [40, 60, 95, 183, 184, 197, 198] и его ученики. Результат С.А. Чаплыгина [235] посвящен интегрированию уравнений движения тела в жидкости в случае, когда они допускают три линейных инвариантых соотношения (ИС). Им получены трансцендентные первые интегралы уравнений Пуассона на заданных ИС. Кроме этого, С.А. Чаплыгин провел интегрирование уравнений Кирхгофа-Пуасона в случаях одного и двух ИС в предположении, что гиростатический момент равен нулю. Обобщение результатов С.А. Чаплыгина получено П.В. Харламовым [204].

Так как П.В. Харламов в работе [204] получил только условия существования рассматриваемых линейных инвариантных соотношений, то интегрирование уравнений движения требовалось провести дополнительно. Причем очевидно, что эта задача более сложная, чем задача нахождения условий существования инвариантных соотношений. В работах Г.В. Горра и Е.К. Узбек [70], Е.К. Узбек и Е.А. Данилейко [198] проведено интегрирование уравнений Кирхгофа-Пуассона в случае одного инвариантного соотношения. В работе Г.В. Горра и Е.К. Узбек [68, 69] выполнено интегрирование уравнений Пуассона в случае трех инвариантых соотношений. В работах С.В. Скрыпник [66, 184, 185] рассмотрена задача интегрирования этих уравнений для случая двух инвариантных соотношений.

Большое число частных решений уравнений класса Кирхгофа-Пуассона получено при исследовании полиномиальных решений типов Ковалевского-Стеклова-Горячева, А.И. Докшевича. Первая работа, посвященная изучению данной задачи, опубликована Г.В. Горром и А.В. Зызой [46]. В дальнейшем автору диссертации удалось поставить более общую задачу об исследовании условий существования обобщенных классов решений [103, 104, 110, 113, 127].

В монографии Г.В. Горра [39] дана полная классификация ИС для всех построенных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона. Здесь отметим два решения, которые получены Г.В. Горром, Е.М. Мироновой [62, 63] и Е.К. Узбек [197]. В первом случае решение характеризуется ИС второго порядка по основным переменным, а второе решение – ИС, имеющим дробно-линейную структуру.

Значительное число решений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил получено при исследовании условий существования прецессионных движений относительно вертикали и относительно наклонной оси. Общий метод изучения прецессий гиростата разработал Г.В. Горр [37, 44, 60, 61]. Он ввел новый класс прецессионных движений, которые характеризуются двумя свойствами: прецессией и изоконичностью подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости. Такие движения называются прецессионно-изоконическими движениями. Г.В. Горр нашел новые классы прецессий гиростата, которые не имеют аналогов в классической задаче о движении тяжелого гиростата, и получил ряд важных результатов о единственности прецессий определенного типа [37]. По этой теме опубликовано много статей, посвященных рассмотрению различных классов прецессий в динамике гиростата (А.В. Мазнев [60], Г.В. Горр [44, 60], Г.А. Котов [61]).

В задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [134, 246], как и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, построено значительное количество частных решений [67, 81, 93, 96, 97, 99, 105, 109, 112-114, 121, 125, 126, 128, 130, 144, 183]. Классы ИС для этих решений, а также типы программных движений гиростата аналогичны тем, которые описаны выше. Поэтому отметим только классы полиномиальных решений, которые получены автором диссертации [99, 105, 109, 112-114, 121, 129, 130].

Остановимся на анализе форм дифференциальных уравнений динамики гиростата с неподвижной точкой, так как многие авторы получили новые решения благодаря тому, что они разработали новые формы дифференциальных уравнений. В качестве примеров приведем исследования В. Гесса [267], Н. Ковалевского [279], П.В. Харламова [205, 208, 209, 211], Е.И. Харламовой [222-225, 230], которые установили свои решения на основании редуцированных (новых) типов дифференциальных уравнений.

В задаче о движении тяжелого твердого тела и гиростата первые такие результаты, принадлежат В. Гессу [267], А.Д. Билимовичу [11], Н. Ковалевскому [279], Х.М. Яхье [244].

Уравнения В. Гесса и А.Д. Билимовича не получили широкого применения, а уравнения Н. Ковалевского носят частный характер, так как они получены при определенных ограничениях на параметры уравнений Эйлера-Пуассона. П.В. Харламов [205, 208] предложил новый способ понижения порядка уравнений Эйлера-Пуассона и гиростата. Он основан на использовании специальной системы координат, одна из осей которой содержит центр тяжести тела. Уравнения Эйлера-Пуассона (и их обобщения – уравнения задачи о движении тяжелого гиростата) в работе [208] приведены к системе двух уравнений первого порядка, которая имеет нелинейную структуру относительно переменных. Данную форму дифференциальных уравнений называют первой формой уравнений П.В. Харламова. Вторая форма уравнений П.В. Харламова содержит производные второго порядка от компонент вектора кинетического момента. Она получена путем выражения компонент единичного вектора вертикали из интеграла энергии и двух динамических уравнений и подстановкой найденных функций в уравнения Пуассона. Частными вариантами этих уравнений являются уравнения Н. Ковалевского и С.А. Чаплыгина.

Особый интерес представляет интегродифференциальное уравнение Е.И. Харламовой [230], установленное ею в предположении, что центр масс гиростата принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки. Хотя эта форма представляется достаточно сложной, но тем не менее, благодаря удачной постановке задачи об исследовании алгебраических инвариантных соотношений, Е.И. Харламова не только обобщила [223] решения А.И. Докшевича [86] и Д. Гриоли [264], но и нашла новые решения уравнений движения тяжелого гиростата, которые обсуждены выше.

Определенный интерес представляет дифференциальное уравнение задачи о движении тяжелого твердого тела, которое получил Х.М. Яхья [244]. Данное уравнение является иррациональным дифференциальным уравнением второго порядка для компонент единичного вектора вертикали. Поэтому нахождение его решения весьма затруднительно, хотя и возможно в частном случае (такое решение установлено Г.В. Горром и Е.М. Мироновой [63] для случая сферического распределения масс).

Существуют и другие классические формы уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Здесь, прежде всего, имеем в виду уравнения Ж. Лагранжа [151] и Гамильтона [16, 34, 143, 195]. Первый из этих классов дифференциальных уравнений эффективен при поиске решений в голономных переменных, второй класс используется для топологических методов анализа гамильтоновых систем.

В последние годы также предлагались новые формы дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого гиростата. Отметим три работы по этому направлению: статьи И.Н. Гашененко, Е.И. Харламовой, Г.В. Мозалевской [31, 32], Г.В. Горра, Е.К. Щетininой [72], Г.В. Горра, А.А. Илюхина [50, 51]. Особый интерес представляют две последние статьи, так как они тесно связаны с особыми решениями уравнений движения тяжелого твердого тела и гиростата.

Новые формы уравнений динамики гиростата в настоящее время строятся при исследовании некоторых классов ИС. Они являются дифференциальными уравнениями, полученными в результате редукции исходных уравнений на заданных ИС [61]. В статье Г.В. Горра, Е.К. Щетининой [71] исследована система ИС дифференциальных уравнений в предположении, что ИС принадлежит классу Т. Леви-Чивиты. Ими, в частности, доказано, что если система n дифференциальных уравнений допускает $n-4$ первых интеграла и два ИС, то при условии равенства нулю следа определенной матрицы она интегрируема в квадратурах.

Задачу об интегрировании уравнений динамики на ИС изучал и С.А. Чаплыгин [238]. Он установил, что если уравнения движения допускают определенное количество ИС (по терминологии С.А. Чаплыгина – частных интегралов) и некоторое количество первых интегралов (в совокупности число первых интегралов и ИС равно $n-2$), то при выполнении одного условия уравнения движения интегрируемы по Якоби.

А.В. Мазнев [158] дополнил результат С.А. Чаплыгина, указав другие условия интегрируемости уравнений динамики на ИС класса С.А. Чаплыгина (для них дифференциальные уравнения имеют более общий вид, чем для ИС класса Т. Леви-Чивиты).

Рассмотрим вопрос об исследовании свойств движения гиростата, имеющего неподвижную точку. В связи с применением геометрических методов в динамике твердого тела П.В. Харламов предложил понятие «полного решения» [216, 273, 274], которое подразумевает, что наряду с аналитическим решением уравнений движения гиростата получено геометрическое истолкование движения в течение всего времени его существования. Наиболее наглядным методом истолкования движения тела является метод Л. Пуансо, заключающийся в представлении движения посредством качения без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду этого вектора.

При анализе вклада Л. Пуансо [287] в геометрические исследования движения тяжелого твердого тела П.В. Харламов [208] отметил: «Имея в виду результаты Даламбера, Эйлера и Лагранжа, Пуансо заметил, что во всех этих исследованиях нет ничего кроме вычислений, и наглядное представление о движении твердого тела в них отсутствует. И образцом наглядного представления движения явилось геометрическое решение задачи, которое Пуансо дал телу, движущемуся по инерции. Он показал, что в таком движении неизменно связанный с телом эллипсоид, закрепленный в центре масс, катится без скольжения по неподвижной плоскости. Он ввел в рассмотрение полодию и герполодию, подвижный и неподвижный аксоиды».

Геометрические методы в динамике твердого тела разрабатывали Г. Дарбу [253-255], К. Якоби [270, 271, 282], Э. Раус [175] и другие (обзор результатов по геометрическим методам в динамике изложен в работах [30, 57, 59, 150, 153, 194, 200, 208, 226, 229, 230]). Значение геометрического истолкования в теоретической механике высоко оценивал Н.Е. Жуковский [88]. На основании уравнений неподвижного годографа П.В. Харламова [207], которые получены им при обобщении уравнений Г. Дарбу, к настоящему времени установлены многочисленные свойства при истолковании практически всех решений уравнений тяжелого гиростата. Обзор результатов по данному направлению приведен в монографии И.Н. Гашененко, Г.В. Горра, А.М. Ковалева [30]. Значительное упрощение уравнений П.В. Харламова получил Г.В. Горр [38, 43, 57, 65]. Для полярного угла в этих уравнениях он нашел формулу, в которую не входит производная угловой скорости по времени. Это позволяет значительно упростить анализ свойств неподвижного годографа угловой скорости. Кроме этого Г.В. Горр [38] предложил модифицированный метод Пуансо, состоящий в том, что для истолкования движения тела вводится вектор $\boldsymbol{b}$, который коллинеарен вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ $\left(\boldsymbol{b} = b(t)\boldsymbol{\omega}\right)$. Движение тела представляется качением без скольжения подвижного аксоида вектора $\boldsymbol{b}$ по его неподвижному аксоиду. Этот метод в значительной степени упрощает истолкование движения тела (в статьях [38, 65], например, показано, что движение тела в решении В.А. Стеклова [193] можно представить с помощью качения без скольжения поверхностей, направляющими линиями которых являются эллипсы). В частном случае изложенный подход сводится к задаче Э. Рауса об исследовании сфероконических и эллипсоидоконических сечений. На основании полученной формулы и модифицированного метода, Г.В. Горр предложил комплексный подход в истолковании движения тела с неподвижной точкой [56, 57]. Таким образом, к настоящему времени созданы достаточно наглядные подходы к истолкованию движения гиростата.

При исследовании условий существования полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела следует учитывать смежные проблемы интегрирования уравнений.

Задача о построении полиномиальных классов решений уравнений Н. Ковалевского [279] и их обобщений тесно связана с задачей интегрирования этих уравнений в предположении, что все переменные являются комплексными. Поскольку применяемая в [18] теория степенной геометрии основывается на нахождении комплексных переменных в виде сходящихся рядов, то в частных случаях могут быть получены полиномиальные решения в комплексном виде. Данные решения для динамики твердого тела актуальны только в теоретическом плане, так как для истолкования движения тела необходимы вещественные решения. Тем не менее использование степенной геометрии при исследовании решений уравнений Н. Ковалевского в ряде случаев помогает установить условия существования и вещественности решений данных уравнений [18].

Ранее отмечено, что частные решения играют важную роль в изучении интегрального многообразия уравнений движения гиростата. Поэтому укажем некоторые результаты, полученные в данном направлении.

Асимптотически-маятниковые движения тяжелого твердого тела изучали А.З. Брюм и Г.В. Горр [17], Ю.П. Вархалев и Г.В. Горр [20]. Асимптотически-прецессионные движения относительно вертикали и наклонной оси в задаче о движении тяжелого твердого тела и гиростата рассмотрели Г.В. Горр и Д.Н. Думбай (см. обзор [60]).

В статье [21] изложена общая методика исследования асимптотически-периодических движений в обобщенной задаче динамики гиростата, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона.

А.П. Маркеев [160, 161] получил значительные результаты в проблеме исследования асимптотических решений уравнений Эйлера-Пуассона, так как он в своих работах использовал не только первый метод А.М. Ляпунова, но и методы, основанные на рассмотрении нелинейных уравнений.

В ряде случаев применимы методы топологического анализа интегрального многообразия уравнений движения гиростата и твердого тела [26-28, 195, 201].

М.П. Харламов [201] применил методы топологического анализа для исследования решений уравнений динамики твердого тела и получил компактную форму уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой.

Стационарные движения системы твердых тел находят широкое применение в технике, в небесной механике и в других областях. Поэтому актуальны исследования стационарных решений уравнений движения гиростата. В динамике твердого тела сформировалось отдельное научное направление по исследованию устойчивости этих решений. Теорию устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений развил А.М. Ляпунов [156]. Результаты по исследованию устойчивости стационарных решений уравнений Эйлера-Пуассона получили В.В. Румянцев [179], В.Н. Рубановский [177], А.Я. Савченко [181], А.М. Ковалев и А.М. Киселев [72], О.В. Холостова [234] и многие другие. Б.С. Бардин изучал орбитальную устойчивость маятниковых движений твердого тела в случае Бабылева-Стеклова [9], а также проводил анализ колебания спутника в случае резонанса [10].

Остановимся на задаче о движении тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Этот эффект в научной литературе объясняется следующим образом. Если рассматривать движение нейтрального ферромагнетика в магнитном поле, то необходимо учитывать, что он становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта). Формула для магнитного момента $\boldsymbol{B}$ такова: $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$, где B – некоторый симметричный оператор, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела. При изучении движения сверхпроводящего твердого тела необходимо учитывать эффект Лондона, который может быть определен указанной выше формулой для магнитного момента. Хотя механизм намагничивания твердого тела в указанных задачах различный, эти задачи могут быть описаны одинаковыми дифференциальными уравнениями. Математическая постановка задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона сводится к интегрированию шести обыкновенных дифференциальных уравнений, которые допускают два первых интеграла. Наличие только двух первых интегралов отличает рассматриваемую задачу от классической задачи и задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, уравнения которых имеют три первых интеграла. Дополнительные интегралы уравнений движения тела в магнитном поле были предложены В.В. Козловым [144] и В.А. Самсоновым [182]. Неинтегрируемость в общем случае уравнений движения гиростата обосновывает актуальность построения частных решений этих уравнений. На связь уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона с уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона обратила внимание Л.Е. Веселова [22] при сопоставлении первых интегралов в этих задачах.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта-Лондона исследованы при анализе условий существования инвариантных соотношений уравнений движения гиростата, которые описывают линейные, квадратичные и другие ИС [67, 93, 96, 97, 99, 105, 109, 112-114, 121, 125, 126, 128-130, 162, 163, 183].

Представляет интерес редукция уравнений движения гиростата с учетом эффекта Барнетта-Лондона. В этой задаче, прежде всего, целесообразно использовать метод П.В. Харламова [208]. Как отмечено в работе [53] при обсуждении новых редуцированных форм дифференциальных уравнений В. Гесса [267], А.П. Шиффа [243], П. Штекеля [292] и других, в процессе получения редуцированных уравнений необходимо учитывать появление особых решений уравнений Эйлера-Пуассона, которые характеризуются постоянством модуля момента количества движения тела. Данное обстоятельство учтено при выборе новых форм дифференциальных уравнений в [50, 54, 72]. Автор диссертации совместно с Г.В. Горром показал, что метод П.В. Харламова применим только тогда, когда правые части дифференциальных уравнений движения гиростата не содержат слагаемых, которые характеризуют ньютоновские силы. В статье [47] ими получены редуцированные уравнения задачи о движении тяжелого гиростата, которые включают в себя два дифференциальных уравнения первого порядка и три дифференциальных уравнения второго порядка относительно производных от компонент вектора угловой скорости. Поскольку они имеют весьма сложный вид, то представляют лишь теоретический интерес. Поэтому автор диссертации изучал условия существования полиномиальных решений исходных уравнений движения гиростата с учетом эффекта Барнетта-Лондона для различных классов полиномиальных решений (Ковалевского-Стеклова-Горячева, Докшевича, Коносевича-Поздняковича). Особое внимание уделено исследованию обобщенных классов полиномиальных решений. Результаты, полученные в этих направлениях, опубликованы в статьях [93, 96, 97, 99, 105, 109, 112-114, 121, 125, 126, 128-130].

Таким образом, в данном разделе выполнен полный анализ публикаций по теме диссертации. Указаны все публикации автора и их связь с результатами, полученными другими учеными.