МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГУ «Институт прикладной математики и механики»

На правах рукописи

УДК 531.38

ДАНИЛЮК ДАНИИЛ АНАТОЛЬЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

01.02.01 — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк – 2016

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в Государственном учреждении «Институт прикладной математики и механики» Министерства образования и науки ДНР, г. Донецк

Научный руководитель (консультант):	Доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины **Ковалев Александр Михайлович,** Государственное учреждение «Институт прикладной математики и механики», директор.
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор, **Илюхин Александр Алексеевич,** Таганрогский институт имени А.П. Чехова, филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)», профессор кафедры математики, Россия, г. Таганрог;
	Кандидат физико-математических наук, доцент, **Зыза Александр Васильевич,** Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики, г. Донецк.
Ведущая организация:	**Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова** (Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»), Россия, г. Москва.

Защита состоится «___»___________ 2016 г. в ___:00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.013.01 при Институте прикладной математики и механики по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 309., Телефон: +38 (062) 311 03 91, факс: +38 (062) 311 02 85, e-mail: mtt@iamm.su

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГУ «Институт прикладной математики и механики» по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 209; на сайте ГУ «Институт прикладной математики и механики»: www.iamm.su .

Автореферат разослан «___» _________ 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 01.013.01 Ю. Кон Ю.Б. Коносевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В диссертации исследованы свойства параметров Родрига–Гамильтона в задачах линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в решениях уравнений Эйлера–Пуассона (Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса и др.) и для прецессионных движений твердого тела.

Математическое моделирование движений объектов современной техники (небесных тел, спутниковых систем, роботов, манипуляторов и др.) в случае, когда их деформациями можно пренебречь, основано на модели абсолютно твердого тела и модели связанных твердых тел.

Динамика твердого тела, имеющего неподвижную точку, сформировалась в работах Ж. Даламбера, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С. Пуассона, Г. Дарбу, Д. Сильвестра, И. Мак–Кулаха, Н.Е. Жуковского и других. Значительный вклад в эту область аналитической механики внесли Ж. Лиувилль, Е. Гюссон, А. Пуанкаре, В. Гесс, К. Якоби, С.В. Ковалевская, Н.Е. Жуковский, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, С.А. Чаплыгин, Н. Ковалевский, Д.Н. Горячев (обзор полученных ими результатов дан в книгах Гашененко И.Н., Горра Г.В., Ковалева А.М.[1,2]

Развитие динамики твердого тела происходило в двух направлениях. Первое направление посвящено созданию аналитических методов интегрирования уравнений, поиску новых форм уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой; второе – разработке геометрических методов кинематического истолкования движения.

Л. Пуансо описал движение тяжелого твердого тела посредством качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости. Он сформулировал общую теорему о том, что движение тела представимо в виде качения без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду.

Получение П.В. Харламовым уравнений неподвижного годографа позволило исследовать методом Пуансо движение тела во многих решениях уравнений динамики (Е.И. Харламова, М.П. Харламов, Г.В. Горр, А.М. Ковалев, И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская и другие)

В практических задачах определения ориентации объектов техники большую роль играет применение параметров Родрига–Гамильтона. Это связано с тем, что в отличие от углов Эйлера они не вырождаются при любом положении тела.

Параметры Родрига–Гамильтона использовались В.Н. Кошляковым в задачах

---

[1] Гашененко И.Н., Горр. Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наукова думка, 2012. – 401 с.

[2] Горр. Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – К. : Наук. думка. – 2013. – 407 с.

ориентации тела, В.В. Козловым при выводе функции Гамильтона, А.А. Илюхиным, А.М. Ковалевым и автором диссертации при исследовании нормальных колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия.

Г.В. Горр и А.М. Ковалев установили аналитические зависимости между параметрами Родрига–Гамильтона и компонентами угловой скорости в неподвижном пространстве, описываемыми уравнениями П.В. Харламова.

Данная диссертация посвящена изучению колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, анализу зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и для прецессий твердого тела относительно вертикали.

Связь с научными планами, темами. Исследования проводились в соответствии с планами научных исследований отдела технической механики Института прикладной математики и механики на 2001–2015 годы по следующим бюджетным темам: «Математические методы исследования задач устойчивости и управления динамических систем и их применение в динамике систем твердых тел». (№ 0101U0001094, 1.1.4.4, 01.01.2001–31.12.2005); «Управление пространственным движением механических систем с учетом существенной анизотропии, рассеяния энергии, неоднородного силового поля» (№ 0102U004563, 1.1.4, 01.01.2002–31.12.2004); «Управление и устойчивость гибридных систем и современные проблемы робототехники» (№ 0106U000044, III–5–06, 01.01.2006–31.12.2010); «Разработка конструктивных методов теории управления и устойчивости с применением к задачам машиностроения» (№ 0111U000483, III–5–11, 01.01.2011–31.12.2015).

Цель и задачи исследования.

Объектом исследования является задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Предмет исследования – параметры Родрига–Гамильтона в изучении движения тяжелого твердого тела. Цель исследования – анализ на основе применения параметров Родрига–Гамильтона в исследовании нормальных линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела, получение зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и в решениях, которые описывают прецессионные движения.

Методы исследования. В диссертации используется метод нормальных форм теории колебаний, аппарат интегрирования гамильтоновых уравнений на основе построения различных разложений функции Гамильтона, теория эллиптических функций Якоби, методы получения прецессионных движений тела и частных решений уравнений Эйлера–Пуассона.

Задачи исследования состоят в следующем:

1. Построение функции Гамильтона для случая, когда параметры Родрига–Гамильтона являются обобщенными координатами.

2. Исследование решений уравнений в вариациях для случая колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия.

3. Вывод формул, которые характеризуют разложения функции Гамильтона в задаче изучения нелинейных колебаний тяжелого твердого тела.

4. Нахождение зависимостей от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и анализ их свойств.

5. Исследование свойств параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Научная новизна полученных результатов:

1. Исследованы линейные колебания тяжелого твердого тела с использованием параметров Родрига–Гамильтона. Получены решения уравнений в вариациях и изучены их свойства.

2. Установлены свойства нелинейных нормальных колебаний тяжелого твердого тела на основе нормализации выражений для разложения функции Гамильтона.

3. Изучены свойства найденных в диссертации функциональных зависимостей параметров Родрига–Гамильтона для частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Определена структура инвариантных соотношений в рассмотренных решениях относительно параметров Родрига–Гамильтона.

4. Найдены параметры Родрига–Гамильтона для прецессионных движений тяжелого твердого тела. Описаны инвариантные соотношения в данных параметрах.

5. Исследованы аналитические свойства параметров Родрига–Гамильтона для прецессионно-изоконических движений тела.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Полученные в диссертации результаты имеют преимущественно теоретическое значение. Результаты диссертационной работы могут быть использованы в научных учреждениях и вузах стран СНГ, проводящих исследования движения сложных механических систем (МАИ, МГУ, ИПМ и других), Донецком национальном университете, при чтении специальных курсов по аналитической механике.

Личный вклад соискателя. Результаты по теме диссертации опубликованы в 6 научных статьях. Статьи [3, 4, 6] написаны соискателем без соавторства. В статьях [1, 2] А.М. Ковалеву принадлежит постановка задачи и анализ результатов, соискателю принадлежит исследования линейных и нелинейных колебаний тяжелого твердого тела. В статье [5] А.М. Ковалеву принадлежит постановка задачи, Г.В. Горру – анализ и классификация прецессионных движений, соискателю принадлежит результат по нахождению параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений.

Апробация результатов. Результаты диссертации представлялись:

− на VIII Международной конференции «Системный анализ и управление» (г. Евпатория, 29 июня – 6 июля 2003г.) [7];

− на X Международной конференции «Системный анализ и управление» (г. Евпатория, 3–10 июля 2005г.) [8];

− на X Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» (г. Донецк, 5–10 июня 2008г.) [9];

− на XI Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» (г. Донецк, 8–12 июня 2011г.) [10];

− на семинаре кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого университета (руководитель профессор Г.В. Горр);

− на семинаре отделов прикладной механики и технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины (руководитель академик А.М. Ковалев);.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из которых 6 [1–6] статей в ведущих тематических журналах, 4 [7–10] работы в сборниках тезисов докладов конференций.

Структура и объем диссертации соответствует целям и задачам исследования, она состоит из введения, основной части из шести разделов, объединяющих 45 параграфов, заключения, списка использованной научной литературы. Общий объем диссертации составляет 124 страниц, из которых 18 страниц занимает список использованной литературы, который состоит из 170 источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении обоснована актуальность и практическое значение темы исследования, определены цели, задачи и предмет исследования, изложена научная новизна полученных результатов, сформулированы выносимые на защиту положения, указана апробация работы

В первом разделе проведен обзор работ по теме исследования. Рассмотрены качественные методы исследования задач динамики тяжелого твердого тела (метод инвариантных соотношений, метод Пуансо кинематического истолкования движения, метод представления решений уравнений движения) и применение различных кинематических параметров (углов Эйлера, параметров Родрига–Гамильтона (Р.–Г.)) в динамике твердого тела.

Во втором разделе приведены первая и вторая форма уравнений движения, изложен метод инвариантных соотношений (ИС) для автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, рассмотрены прецессионные движения тела, приведены основные сведения из теории конечного поворота тела.

В третьем разделе рассмотрены линейные колебания твердого тела с неподвижной точкой. Рассмотрены уравнения Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор: $\mathbf{e} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|}$, где O – неподвижная точка, C – центр тяжести тела; $s = mg|\overline{OC}|$ (m – масса тела, g – ускорение свободного падения); точка над переменными обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = k.$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ – неподвижную систему координат с единичными векторами $\mathbf{i_1}, \mathbf{i_2}, \mathbf{i_3} = \boldsymbol{\nu}$, через $Oxyz$ – подвижную систему координат с единичными векторами $\mathbf{i}'_\mathbf{1}, \mathbf{i}'_\mathbf{2}, \mathbf{i}'_\mathbf{3}$. Вектор этих систем зависит от типа рассматриваемых задач.

Если неподвижную систему координат свяжем с вектором $\mathbf{i_3} = \boldsymbol{\nu}$ (т.е. угол нутации $\theta = \angle(\mathbf{i}'_\mathbf{3}; \boldsymbol{\nu})$), а через φ и ψ обозначим соответственно угол собственного вращения и угол прецессии, то вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ представим в виде $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\mathbf{i}'_\mathbf{3} + \dot\psi\mathbf{i_3} + \dot\theta\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный по линии узлов. Тогда для компонент $\omega_i(t), \nu_i\,(t) (i = \overline{1,3})$ в подвижной системе координат имеем

$$\begin{gathered}\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\,, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\,cos\,\varphi - \dot\theta\sin\varphi\,,\\ \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta\,, \quad \nu_1 = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad \nu_3 = \cos\theta\,.\end{gathered} \tag{2}$$

Если известны функции $\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\nu}(t)$, то углы Эйлера можно определить из равенств

$$\begin{gathered}\theta(t) = \arcsin(\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_3)\,, \quad \varphi(t) = \mathrm{arctg}\frac{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{i}'_\mathbf{2}},\\ \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\frac{(\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{i}'_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}'_3)}{(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}'_3)^2}dt + \psi_0.\end{gathered} \tag{3}$$

Формулы (3) позволяют определить положение тела в любой момент времени с точностью до постоянной ψ_0.

Рассмотрим конечный поворот тела S, имеющего неподвижную точку O, на некоторый угол χ относительно оси OL, пространственная ориентация которой задана единичным вектором $\mathbf{b}$. Пусть до поворота положение какой-либо точки $M \in S$ определено радиус-вектором $\overline{OM} = \mathbf{r}$, а после поворота положение её определяется вектором $\overline{OM}' = \mathbf{r}'$. Вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ называется вектором перемещения. Его значение выражается по формуле Родрига[1,2]

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2}\mathbf{u}\times\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\times\mathbf{r}\right), \quad \mathbf{u} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\cdot\mathbf{b},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}'_1\cos\alpha + \mathbf{i}'_2\cos\beta + \mathbf{i}'_3\cos\gamma\,.$$

---

[1] Кошляков В.Н. Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1994. – 176 с.

[2] Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Вектор $\mathbf{u}$ называется вектором конечного поворота тела. Вектор $\overline{OM'}$ найдем по формуле $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{p}$. Векторы $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ являются базисом в теле и направлены по осям Ox, Oy, Oz, а α, β, γ – углы, образуемые вектором конечного поворота с осями Ox, Oy, Oz.

Вместо u_x, u_y, u_z – компонент вектора $\mathbf{u}$, введем величины λ_k $(k = \overline{1,3})$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_x, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_y, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_0 u_z,$$

а величину λ_0 подчиним условию $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Эти величины имеют значения

$$\lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\alpha, \quad \lambda_2 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\beta \quad \lambda_3 = \sin\frac{\chi}{2}\cos\gamma.$$

Параметры Р.–Г. определяются через углы Эйлера ψ, θ, φ по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Если параметры λ_i $(i = \overline{0,3})$ будут найдены в зависимости от времени, то матрица ориентации может быть определена по известной формуле[1].

Когда известны параметры Р.–Г., то углы Эйлера находятся по формулам

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}, \quad \cos\theta = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2.$$

Запишем формулы (2) в параметрах Родрига–Гамильтона

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ \omega_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ \omega_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \tag{6}$$

Если подставить (6) в скалярные уравнения, которые вытекают из (1), то получим систему уравнений движения тяжелого твердого тела[1,2].

При исследовании колебаний в качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции; ω_i, ν_i, e_i $(i = 1,2,3)$ – проекции на подвижные оси вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, s – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы, выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν'_i вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения: $\nu'_i = -e_i$ $(i = 1,2,3)$. Тогда

---

[1] Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

[2] Кошляков В.Н. Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1994. – 176 с.

$$\nu_1 = e_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) - 2e_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + 2e_3(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3),$$
$$\nu_2 = 2e_1(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) + e_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad (7)$$
$$\nu_3 = -2e_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + 2e_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2) + e_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_0^2).$$

В новой форме записана полная система дифференциальных уравнений, описывающая движение тяжелого твердого тела в поле силы тяжести на основании (5), (7), когда в качестве основных фазовых переменных приняты параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и компоненты вектора угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 -$$
$$-2s[\lambda_0\lambda_1 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_1 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)]$$
$$A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 -$$
$$-2s[\lambda_0\lambda_2 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_2 + \lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)],$$
$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 -$$
$$-2s[\lambda_0\lambda_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)(-\lambda_0 e_3 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)],$$
$$2\dot{\lambda}_0 = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3, \quad 2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,$$
$$2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \quad 2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.$$

Рассмотрены нормальные колебания тела около нижнего положения равновесия и установлена их связь с движениями физического маятника и равномерными вращениями. Введем формулы перехода от λ_i к нормальным координатам β_i: $\beta_i = \sqrt{2A_i}\lambda_i$, $i = 1,2,3$. Нормальные координаты системы соответствуют базису собственных векторов $\mathbf{h_0}, \mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}$ тензора инерции A, имеющей корни μ_i $(i = 0,1,2)$ характеристического уравнения $det(A - \mu E) = 0$. Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $e_1e_2e_3 \neq 0$, $A_1 \neq A_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда линейными нормальными колебаниями твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига–Гамильтона являются равномерное вращение вокруг вектора, расположенного в неподвижном пространстве вертикально вниз, и колебании вокруг двух осей, положение которых в системе $Oxyz$, определяется векторами $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$, $(i = 0,1,2)$.

$$h_{01} = \alpha_0 e_1\sqrt{A_1}, \quad h_{02} = \alpha_0 e_2\sqrt{A_2}, \quad h_{03} = \alpha_0 e_3\sqrt{A_3},$$
$$\alpha_0^{-2} = A_1e_1^2 + A_2e_2^2 + A_3e_3^2,$$
$$h_{i1} = \alpha_i e_1 e_3(1 - \mu_i A_2)\sqrt{A_1}, \quad h_{i2} = \alpha_i e_2 e_3(1 - \mu_i A_1)\sqrt{A_2},$$
$$h_{i3} = \alpha_i[A_1e_1^2(\mu_i A_2 - 1) + A_2e_2^2(\mu_i A_1 - 1)]/\sqrt{A_3},$$
$$\alpha_i^{-2} = e_1^2e_3^2(1 - \mu_i A_2)^2 A_1 + e_2^2e_3^2(1 - \mu_i A_1)^2 A_2 +$$
$$+[A_1e_1^2(\mu_i A_2 - 1) + A_2e_2^2(\mu_i A_1 - 1)]^2/A_3, \quad i = 1,2.$$

Утверждение 2. Пусть центр масс тела находится на главной оси инерции. Тогда главные оси являются осями линейных и нелинейных нормальных колебаний твердого тела около нижнего положения равновесия в параметрах Родрига–Гамильтона. Колебаниям относительно оси, несущей центр масс, соответствуют равномерные вращения тела вокруг вертикали, а колебаниям относительно двух других главных осей инерции соответствуют движения физического маятника. Решения уравнений, соответствующие этим движениям в системе $Oxyz$ имеют вид

$$\mu_0 = 0: \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_{10} = const,$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = \omega_{10} t + \lambda_{10};$$
$$\mu_1 = \frac{1}{A_2}: \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{A_2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20}\right),$$
$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_2 = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{A_2}} + \varphi_{20}\right);$$
$$\mu_2 = \frac{1}{A_3}: \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{A_3}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}\right),$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{A_3}} + \varphi_{30}\right).$$

Утверждение 3. Для твердого тела, центр масс которого расположен в главной плоскости, линейные нормальные колебания представляют собой равномерное вращение вокруг вектора **e**, расположенного вертикально вниз в неподвижном пространстве, и два колебания вокруг осей с единичными векторами $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}$, одна из которых является главной осью эллипсоида инерции, ортогональной вектору **e**, а другая лежит в главной плоскости. Нормальное колебание вокруг главной оси соответствует решению физического маятника уравнений Эйлера–Пуассона и, следовательно, сохраняется и в нелинейном случае.

Записаны уравнения, описывающие движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в поле силы тяжести, где в качестве подвижной системы координат принята специальную систему координат. Это динамические уравнения Харламова[1] и кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона

$$\begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1(ax + b_1 y + b_2 z) - \lambda_2(a_1 y + b_1 x) - \lambda_3(a_2 z + b_2 x),\\
2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0(ax + b_1 y + b_2 z) + \lambda_2(a_2 z + b_2 x) - \lambda_3(a_1 y + b_1 x),\\
2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0(a_1 y + b_1 x) + \lambda_3(ax + b_1 y + b_2 z) - \lambda_1(a_2 z + b_2 x),\\
2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0(a_2 z + b_2 x) + \lambda_1(a_1 y + b_1 x) - \lambda_2(ax + b_1 y + b_2 z),
\end{aligned} \tag{8}$$

допускающие три интеграла: энергии, постоянства кинетического момента и геометрический. В (8) x, y, z – проекции на эти оси векторов кинетического момента, a, a_1, a_2, b_1, b_2 – компоненты гирационного тензора.

Далее в третьем разделе получена функция Гамильтона H в обобщенных координатах $\lambda_i, (i = \overline{0,3})$ и дано ее разложение $H = H_2 + H_3 + H_4$ в окрестности нижнего положения равновесия.

---
[1] Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та, 1965. – 221 с.

$$H_2 = \frac{1}{8}(ap_1^2 + a_1p_2^2 + a_2p_3^2) + \frac{1}{4}(b_1p_1p_2 + b_2p_1p_3) + 2s(\lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$

$$\begin{gathered} H_3 = \frac{1}{4}[\lambda_1p_2p_3(a_1 - a_2) + \lambda_2p_1p_3(a_2 - a) + \lambda_3p_1p_2(a - a_1) + \\ +\lambda_1p_1(b_1p_3 - b_2p_2) + \lambda_2(b_2p_1^2 - b_2p_3^2 - b_1p_2p_3) + \\ +\lambda_3(-b_1p_1^2 + b_1p_2^2 + b_2p_2p_3)], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} H_4 = -\frac{1}{8}[\lambda_1^2(ap_1^2 + (a_1 - a_2)(p_2^2 - p_3^2) + p_1(b_1p_2 + b_2p_3)) + \\ +\lambda_2^2(a_1p_2^2 + (a - a_2)(p_1^2 - p_3^2) + p_1(3b_2p_3 + b_1p_2)) - \\ -\lambda_3^2(a_2p_3^2 + (a - a_1)(p_1^2 - p_2^2) + p_1(3b_1p_2 + b_2p_3)) + \\ +2\lambda_2\lambda_3(ap_2p_3 - p_1(b_2p_2 + b_1p_3)) + \\ +2\lambda_1(p_1(a_2\lambda_2p_2 - a_1\lambda_3p_3) + (\lambda_2p_3 - \lambda_3p_2)(b_1p_3 - b_2p_2))], \end{gathered}$$

где p_i, $i = 1,2,3$ – импульсы, которые связаны с компонентами кинетического момента $x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\omega_j$ $(i = 1,2,3)$ формулами (A_{ij} – компоненты тензора инерции $A = a^{-1}$):

$$2x_1 = \lambda_0p_1 - \lambda_3p_2 + \lambda_2p_3, \quad 2x_2 = \lambda_3p_1 + \lambda_0p_2 - \lambda_1p_3,$$
$$2x_3 = -\lambda_2p_1 + \lambda_1p_2 + \lambda_0p_3$$

С помощью замены $\lambda_0 = 1 + x_4$, $\lambda_1 = x_5$, $\lambda_2 = x_6$, $\lambda_3 = x_7$ записано общее решение системы для линейных колебаний твердого тела в специальной системе координат около нижнего положения равновесия, описывающее малые колебания тела около данного положения:

$$\begin{gathered} x_1 = C_1, \quad x_2 = C_2\cos\sqrt{a_1s}t + C_3\sin\sqrt{a_1s}t - \frac{b_1C_1}{a_1}, \\ x_4 = C_6, \quad x_3 = C_4\cos\sqrt{a_2s}t + C_5\sin\sqrt{a_2s}t - \frac{b_2C_1}{a_2}, \\ x_5 = \frac{b_1}{2\sqrt{a_1s}}\left(C_2\sin\sqrt{a_1s}t - C_3\cos\sqrt{a_1s}t\right) + \\ +\frac{b_2}{2\sqrt{a_2s}}\left(C_4\sin\sqrt{a_2s}t - C_5\cos\sqrt{a_2s}t\right) + \left(a - \frac{b_1^2}{a_1} - \frac{b_2^2}{a_2}\right)C_1t + C_7, \\ x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{s}}\left(C_2\sin\sqrt{a_1s}t - C_3\cos\sqrt{a_1s}t\right), \\ x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{s}}\left(C_4\sin\sqrt{a_2s}t - C_5\cos\sqrt{a_2s}t\right), \end{gathered} \tag{9}$$

где $C_i = const, i = \overline{1,7}$. Из (9) следует, что все функции, за исключением x_5 являются периодическими функциями времени.

Четвертый раздел посвящен исследованию нелинейных колебаний тяжелого твердого тела, движения которого описываются параметрами Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. В качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ главные моменты инерции; ω_i, ν_i, e_i $(i = 1,2,3)$ – проекции на подвижные оси вектора угловой скорости **ω**, единичного вектора вертикали **ν**, направленного вверх, и единичного вектора **e**, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, s – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке, совпадающую в начальный момент с главными осями твердого тела[1], т.е. $\nu'_i = -e_i$, где ν'_i – проекции вектора **ν** на неподвижные оси. Выведем функцию Гамильтона H, когда в качестве обобщенных координат приняты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$H = \frac{1}{8}[\frac{1}{A_1}(\lambda_0 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3)^2 + \frac{1}{A_2}(\lambda_0 p_2 + \lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1)^2 +$$

$$+\frac{1}{A_3}(\lambda_0 p_3 + \lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)^2] + 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2],$$

где p_i $(i = 1,2,3)$ –импульсы.

Построено разложение $H = H_2 + H_3 + H_4 + H_\infty$, где

$$H_2 = \frac{1}{8}(\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \frac{p_3^2}{A_3}) + 2s[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2],$$

$$H_3 = \frac{1}{4}[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3) + \frac{p_2}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1) + \frac{p_3}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)], \qquad (10)$$

$$H_4 = \frac{1}{8}[\frac{1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3)^2 + \frac{1}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1)^2 + \frac{1}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)^2 -$$

$$-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \frac{p_3^2}{A_3})],$$

$$H_\infty = \frac{1}{4}[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3) + \frac{p_2}{A_2}(\lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1) + \frac{p_3}{A_3}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)] \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,5}^k (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^k.$$

Далее, на основании (10), для случая, когда центр масс тела принадлежит главной оси, с помощью канонических преобразований Биркгофа (в комплексных переменных $p_k, \lambda_k \to u_k, v_k$ и $u_k, v_k \to z_k, w_k$ $(k = 1,2,3)$) функция Гамильтона приведена к нормальной форме $\widetilde{H}(u,v) = H_2(u,v) + \widetilde{H}_3(u,v) + \widetilde{H}_4(u,v) + \cdots$, $\widetilde{\widetilde{H}}(z,w) = H_2(z,w) + \widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) + \cdots$. Получено нелинейное приближение нормальных колебаний с точностью до членов четвертого порядка

$$\widetilde{H}_3(u,v) = iu_1(h_{300000}u_1^2 + h_{110010}u_2 v_2 + h_{101001}u_3 v_3),$$

$$\widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) = h_{400000}z_1^4 + h_{210010}z_1^2 z_2 w_2 + h_{201001}z_1^2 z_3 w_3 +$$

$$+h_{020020}z_2^2 w_2^2 + h_{002002}z_3^2 w_3^2 + h_{011011}z_2 w_2 z_3 w_3$$

и найдены указанные коэффициенты h_i.

[1] Ковалев А.М. Нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев // Докл. НАН Украины. – №3 – 2002. – С. 61–65..

Для анализа решений уравнений Гамильтона в случае нелинейных колебаний с точностью до членов четвертого порядка обозначим $\mu^2 = 2|\alpha r_{20} + \beta r_{30}|$, $\alpha, \beta, r_{20}, r_{30}$ – постоянные. В случае $\mu > 0$ решение в новых переменных имеет вид

$$\begin{gathered} q = 2c_1 \sin(\mu t + c_2), \quad p = \mu c_1 \cos(\mu t + c_2), \\ \varphi_2 = (n_2 + \gamma r_{30} + 2\alpha c_1^2)t - \alpha c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{20}, \quad r_2 = r_{20}, \\ \varphi_3 = (n_3 + \gamma r_{20} + 2\beta c_1^2)t - \beta c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{30}, \quad r_3 = r_{30}, \end{gathered} \tag{11}$$

а для $\mu < 0$ решение таково

$$\begin{gathered} q = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}, \quad p = \mu(c_1 e^{\mu t} - c_2 e^{-\mu t}), \\ \varphi_2 = \frac{\alpha}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_2 + \gamma r_{30} + 2\alpha c_1 c_2)t + \varphi_{20}, \quad r_2 = r_{20}, \\ \varphi_3 = \frac{\beta}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_3 + \gamma r_{20} + 2\beta c_1 c_2)t + \varphi_{30}, \quad r_3 = r_{30}, \end{gathered} \tag{12}$$

где γ, c_1, c_2 – произвольные постоянные. В случае (11) движение по переменным q, p, r_j, φ_j $(j = 2{,}3)$ является периодическим, а в случае (12) благодаря наличию экспоненциальных членов, движение стало неустойчивым.

В пятом разделе исследованы частные решения уравнений Эйлера–Пуассона: Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса, Гриоли. Найдены зависимости от времени параметров Р.–Г. в указанных решениях и определен вид инвариантных соотношений, содержащих только данные параметры.

<u>Решение Бобылева–Стеклова.</u> Примем в (1) $A = \mathrm{diag}(2A_2, A_2, A_3)$, пусть χ, H – параметры. Введем функцию $f(\omega_2) = -\frac{A_2^2}{4}\omega_2^4 - A_2(\chi^2 A_2 + H)\omega_2^2 + s^2 - H^2$. Тогда решение Бобылева–Стеклова таково:

$$\omega_1 = \chi, \quad \omega_3 = 0, \quad \nu_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_2}{2}\omega_2^2 + H\right), \quad \nu_2 = -\frac{\chi A_2}{s}\omega_2,$$
$$\nu_3 = \frac{1}{s}\sqrt{f(\omega_2)}, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{1}{A_2}\sqrt{f(\omega_2)},$$

Представив данное решение в эллиптических функциях времени, имеем

$$\cos\theta(t) = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2\left(\tilde{\lambda}_0 t\right), \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{tg}\,\phi(t) = \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} = -\frac{\chi A_2 \tilde{\lambda}_0 \sqrt{2}\,\mathrm{cn}\left(\tilde{\lambda}_0 t\right)}{s\sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}\left(\tilde{\lambda}_0 t\right)\mathrm{sn}\left(\tilde{\lambda}_0 t\right)}, \\ \psi(t) = -\frac{s}{A_2}\int_0^t \frac{d\tau}{1 + \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{ctg}^2\,\phi(\tau)}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\nu_1^{(1)} = \frac{H}{s}$, $\nu_1^{(2,3)} = \frac{1}{s}\left(-\chi^2 A_2 \pm \sqrt{\chi^4 A_2^2 + 2\chi^2 A_2 H + s^2}\right)$, $\tilde{\lambda}_0 = \sqrt{s\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/A_2}$, $-s < H < s$, а переменная ν_1 изменяется в промежутке $\left[\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}\right]$. Зависимость параметров λ_i $(i = \overline{0,3})$ от времени находится из соотношений (4) с учетом формул

(13), (14). Обозначим через $h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\frac{\nu_1^{(2)}-\lambda_0^2-\lambda_3^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}}$. Из (13), (14) получаем ИС на параметры Р.–Г. для случая Бобылева–Стеклова:

$$\begin{gathered} s^2\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)^2\times \\ \times\left(1-k_* h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right)= \\ =2\chi^2A_2^2\lambda_0^2\left(1-h(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right)(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)^2, \end{gathered} \tag{15}$$

где k_* − модуль эллиптических функций. Итак, ИС (15) является многочленом по параметрам Р.–Г. восьмого порядка. ИС для компонент вектора угловой скорости имеет линейный характер.

Решение Лагранжа (сферический случай). Рассмотрим тяжелое твердое тело, эллипсоид инерции которого является сферой: $A_3=A_2=A_1$. Выбором системы координат можно принять $e_2=e_1=0$.

Тогда уравнения Эйлера–Пуассона (1) имеют вид:

$$\dot\omega_1=-\frac{s}{A_1}\nu_2,\quad \dot\omega_2=\frac{s}{A_1}\nu_1,\quad \dot\omega_3=0, \tag{16}$$

$$\dot\nu_1=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\quad \dot\nu_2=\omega_1\nu_3-\omega_3\nu_1,\quad \dot\nu_3=\omega_2\nu_1-\omega_1\nu_2, \tag{17}$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=2(s\nu_3+E)/A_1\,,\quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1, \tag{18}$$

$$\omega_1\nu_1+\omega_2\nu_2+\omega_3\nu_3=k/A_1. \tag{19}$$

Уравнения (16), (17) и интегралы (18), (19) описывают движение гироскопа Лагранжа для случая сферического распределения масс. Учитывая, что $\mathrm{sn}(gt)$ − эллиптическая функция с модулем k_2 и параметром g, имеющими следующиеые значения

$$k_2=\frac{1-\nu_3^{(1)}}{1-\nu_3^{(2)}},\quad \nu_3^{(1,2)}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0\,a_2}}{a_2},\quad g=\sqrt{\frac{s(1-\nu_3^{(2)})}{2A_1}}, \tag{20}$$

где $a_2=2s/A_1\,,\quad a_1=2(s+E)/A_1\,,\quad a_0=2(EA_1-k^2)/A_1^2$. Из (17) получим $\nu_3=1-\left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt)$, где $\nu_3^{(1)}$ можно найти из (20), взяв радикал с плюсом.

Вводя углы Эйлера $\theta,\psi=\varphi$, удовлетворяющие соотношениям (2) имеем

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(\nu_3^{(1)}-1\right)\mathrm{sn}^2(gt)\,,\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(2-\left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt)\right). \tag{21}$$

$$\varphi(t)=\frac{k}{A}\int_0^t\frac{dt}{2-\left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt)}. \tag{22}$$

Таким образом в случае изоконичных движений сферического гироскопа для параметров Р.–Г. получим

$$\lambda_0=\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi\,,\quad \lambda_1=\sin\frac{\theta}{2},\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=\cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \tag{23}$$

где функции $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, находятся из (21), а функция $\varphi(t)$ из (22), в которых необходимо учесть равенства (19). Таким образом для рассматриваемых движений найдены зависимости параметров Р.–Г. от времени − соотношения (23). Из них следует, что одно ИС имеет линейный вид. Другое ИС тоже линейное, но оно линейно по отношению к компоненте ω_3. Следовательно, в случае сферического гиростата для этих уравнений имеем два линейных ИС по отношению к переменным задачи.

Решение Гесса. Для решения Гесса справедливо ИС $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}=0$, которое имеет место для уравнений Эйлера–Пуассона при следующих условиях на гирационный тензор: $a_1=a_2=a_*,\quad b_2=0$. В диссертации получено решение

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0}-\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|\right\}=0,\quad \vartheta-\vartheta_0=\frac{2}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|,\quad \frac{\lambda_3}{\lambda_0}=\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь c, C_0 – параметры. В случае $h\in(-1,1)$ имеем

$$\begin{gathered}\lambda_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{dn}\tau,\quad \lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\kappa\operatorname{sn}\tau,\\ \lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\kappa\operatorname{sn}\tau,\quad \lambda_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\operatorname{dn}\tau,\\ \sigma=c(\varepsilon\arccos\operatorname{dn}\tau-\vartheta_0),\qquad \kappa=\sqrt{(h+1)/2},\\ \varepsilon=\operatorname{sgn}(\operatorname{sn}\tau),\qquad \tau=t-t_0.\end{gathered}\tag{24}$$

где $sn\,\tau, dn\,\tau$ – эллиптические функции с модулем κ, ($|\kappa|<1$). Период функций (24) не зависит от параметров $c\in(0,2]$ и $\vartheta_0\in[0,\infty)$. В диссертации аналогично рассмотрены случаи $h>1$ и $h=1$, в окрестности неустойчивого положения равновесия, при условии, что $\kappa=0$.

Шестой раздел посвящен анализу свойств параметров Р.–Г. для прецессионных движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (маятниковых движений, регулярных и полурегулярных прецессий двух типов, прецессий общего вида и прецессионно-изоконических движений). Исследованы зависимости от времени параметров Р.–Г., удовлетворяемых (4), найдены структура ИС для этих движений.

Пусть ось l_1 с единичным вектором $\mathbf{a}$ и с началом в неподвижной точке неизменна по отношению к телу и составляет постоянный угол θ_0 с осью l_2, которая неподвижна в пространстве. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ − вектор, принадлежащий оси l_2. Для прецессий справедливы кинематические уравнения $\dot{\mathbf{a}}=\mathbf{0},\quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega},\quad \dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=1,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}=1,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}=c_0=\cos\chi_0$. Эти движения характеризуется ИС[1].

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}=a_0,\quad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\mathbf{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{\gamma}.\quad (a_0=\cos\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\gamma})).$$

Параметры Родрига–Гамильтона удовлетворяют (4),где углы θ,ψ,φ − углы Эйлера, введенные на основании неподвижной системы координат, которая связана

[1] Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

с вектором $\boldsymbol{\gamma}$, (но не с вектором $\boldsymbol{\nu}$). Отметим, что эти параметры могут быть введены двумя способами: первый способ основан на углах Эйлера, которые связаны с вектором $\boldsymbol{\nu}$, во втором способе используются углы Эйлера, которые вводятся при исследовании прецессий относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

<u>Решение Д. Гриоли.</u> Показано, что в решении Д. Гриоли имеют место два линейных и одно квадратичное ИС на параметры Р.–Г. Зависимости компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ от параметров Р.–Г. таковы:

$$\begin{gathered} \nu_1 = \sqrt{2}\left(\lambda_3 \cos\chi_0 - \sqrt{2}\lambda_0^2 \sin\chi_0\right), \quad \nu_2 = \sqrt{2}\lambda_0\left(\cos\chi_0 + \sqrt{2}\lambda_3 \sin\chi_0\right), \\ \nu_3 = -\sqrt{2}\sin\chi_0\,\lambda_3, \quad \omega_1 = \sqrt{2}m\lambda_3, \quad \omega_2 = \sqrt{2}m\lambda_0, \quad \omega_3 = m. \end{gathered} \tag{25}$$

Соотношения (25) определяют решение уравнений (1), если в них положить, что компоненты тензора A удовлетворяют равенствам $A_{23} = A_{13} = 0$, $A_{13} \neq 0$, $A_{22} = A_{11}$, а параметр s имеет значение $s = m^2\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}$.

Параметры Р.–Г. получены с учетом $n = m$ и значения параметра $\theta_0 = \pi/2$:

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos mt, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin mt.$$

<u>Решение В. Гесса.</u> Рассмотрим прецессию относительно горизонтали (т.е. прецессию Брессана) Полагая в (4) $\theta = \pi/2$, имеем

$$\lambda_{0,1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi \pm \varphi}{2}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi \mp \varphi}{2}.$$

В диссертации получены соотношения

$$\psi = 2\,\mathrm{am}\,\mu t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t - \mathrm{cn}\,\mu t), \quad \cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t + \mathrm{cn}\,\mu t),$$

где $\mathrm{am}\,\mu t,\ \mathrm{sn}\,\mu t,\ \mathrm{cn}\,\mu t$ – эллиптические функции.

Найдены соотношения

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_3} = \mathrm{sh}\left[\frac{A_{13}}{A_{33}}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right]. \tag{26}$$

Таким образом, в случае прецессии относительно горизонтальной оси гироскопа Гесса для параметров Р.–Г. имеет место два квадратичных ИС и одно ИС трансцендентного вида (26). Следует отметить определенное преимущество метода данного раздела и метода раздела 5, поскольку в данном разделе получено дополнительное ИС (26), аналог которого в разделе 5 не рассматривается.

<u>Для маятниковых движений</u> твердого тела с неподвижной точкой, где β_1 и β_2 – постоянные, с учетом $\beta_1 - \beta_2 > 0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, положено

$$\varphi = 2am\mu_1 t - \frac{\pi}{2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_1 = \sqrt{-\frac{\beta_1}{2\mu_1^2}},$$

где $am\mu_1 t$, $\mathrm{sn}\,\mu_1 t$, $\mathrm{cn}\,\mu_1 t$ – эллиптические функции Якоби, k_1 – модуль этих эллиптических функций. Получены соотношения:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(\operatorname{cn}\mu_1 t + \operatorname{sn}\mu_1 t), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}(\operatorname{cn}\mu_1 t + \operatorname{sn}\mu_1 t),$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t). \tag{27}$$

Следовательно, для маятниковых движений твердого тела с неподвижной точкой зависимость параметров Р.–Г. определяется соотношениями (27), инвариантными соотношениями (4), с учетом $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, и соотношением $\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, вытекающим из (4). Таким образом, из четырех параметров один является независимым.

<u>Для регулярных прецессий</u>, характеризуемых равенствами $\theta = \theta_0$, $\varphi = nt$, $\psi = mt$, где t – время, выписаны соотношения для параметров Родрига–Гамильтона. Имеем два квадратичных ИС

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{28}$$

и соотношение $(m-n)\arccos\left(\lambda_0/\cos\frac{\theta_0}{2}\right) - (m+n)\arccos\left(\lambda_1/\sin\frac{\theta_0}{2}\right) = 0$.

<u>Для регулярных прецессионно-изоконических движений</u>, являющихся частным случаем регулярных прецессий, у которых выполняется условие m=n, имеем два линейных и одно квадратичное ИС

$$\lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2},$$

и имеем соотношения $\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos nt$, $\lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin nt$.

<u>Для полурегулярных прецессий первого типа</u>, характеризуемых равенством $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная, приняв нулевое начальное значение угла прецессии, выписаны соотношения на параметры Р.–Г. и структура ИС, для всех трех вариантов зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

В частности, для второго варианта, <u>полурегулярных прецессионно-изоконических движений первого типа</u>, с условием $b_0^2 = 1 + c_0^2$, выписаны два ИС второго порядка (28) и одно ИС четвертого порядка

$$\frac{1}{2}b_0 c_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\sin\frac{\theta_0}{2} + (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) -$$
$$-c_0(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) -$$
$$-b_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)[(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) + c_0(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3)] = 0$$

<u>Полурегулярные прецессии второго типа</u>, для которых выполнимо равенство $\dot{\varphi} = n$, где n постоянная, принимая начальное значение φ_0 нулевым, рассмотрены три класса данных прецессий, указана структура ИС для параметров Р.–Г. и соотношения на параметры Р.–Г. В частности <u>полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа</u>, для которых скорость прецессии

характеризуется уравнением $\dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt}$ $(b_0^2 = 1 + c_0^2)$, можно описать двумя ИС квадратичного типа (39) и одним ИС, имеющим третий порядок

$$\left(b_0 c_0 G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + c_0^2\right)(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) -$$
$$-\big(c_0 + b_0 G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - c_0 G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\big)(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) = 0,$$

где

$$G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)}{\sin\theta_0}, \quad G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)}{\sin\theta_0}.$$

Функции $\lambda_i(t)$ $(i = \overline{0,3})$ получены в виде

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt + \psi(t)}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt - \psi(t)}{2},$$
$$\lambda_2 = s\mathrm{in}\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t) - nt}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t) + nt}{2}.$$

Для класса прецессионно-изоконических движений общего вида, при котором движение тела обладает свойством прецессионности и свойством изоконичности (подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу), имеют место два варианта:

$$\psi = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}\,; \tag{29}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2), \quad \dot{\varphi} = \alpha + \beta\sin\varphi\,. \tag{30}$$

где $\beta_1, \beta_2, b_0, c_0, \alpha, \beta$ – постоянные, которые для каждой конкретной задачи динамики имеют свои значения. Для случая (29) зависимость параметров Р.–Г. от времени установлена в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 2\cos\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}\,\mu_1 t\,\mathrm{cn}\,\mu_1 t\,, && \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2} = \mathrm{const}, \\ &\lambda_2 = 0, && \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}(\mathrm{sn}^2\,\mu_1 t - \mathrm{cn}^2\,\mu_1 t). \end{aligned} \tag{31}$$

и из (31) следуют два линейных ИС и одно квадратичное ИС на параметры Р.–Г. Для случая (30) указано дополнительное к (28) инвариантное соотношение

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right) &= \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right) \times \\ &\times \left[b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Следовательно, третье ИС (32) имеет иррациональную структуру.

Указанный в данном разделе способ позволяет найти зависимости от времени параметров Р.–Г. в произвольном решении, которое описывает прецессию тела. Указаны классы прецессионных движений в обобщенной задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести. Показано, что ряд типов прецессий возможен только в обобщенных задачах динамики гиростата.

ВЫВОДЫ

В диссертации с помощью параметров Родрига–Гамильтона исследованы свойства движений твердого тела с неподвижной точкой, выполнен анализ полученных результатов. Выписаны различные типы дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, в зависимости от выбора систем координат (подвижной или неподвижной), что определяется типом исследуемых движений (колебания, прецессионные движения, изоконические движения и т.д.).

1. Проведен анализ аналитических методов в динамике твердого тела: представление решений в виде рядов Пуанкаре, метод инвариантных соотношений, метод годографов, теория конечного поворота твердого тела и другие.

2. Рассмотрены линейные колебания тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия. Исследованы особые точки уравнений движения относительно параметров Родрига–Гамильтона. Проведена линеаризация уравнений в возмущениях. С помощью этих уравнений найдено решение линейных уравнений и проведен их анализ.

3. Исследованы нелинейные колебания тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия. Выведена функция Гамильтона и на основании теории возмущений выписаны члены разложения этой функции. Для нелинейной теории колебаний проведены дополнительные преобразования Биркгофа к нормальной форме. С точностью до членов четвертого порядка получены выражения для фазовых переменных уравнения движения.

4. Рассмотрены известные частные случаи интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона (Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гесса), что актуально в силу геометрического смысла параметров Родрига–Гамильтона. В ряде случаев для исследуемых решений найдены инвариантные соотношения, которые содержат только параметры Родрига–Гамильтона.

5. Получены явные зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени с использованием аппарата теории эллиптических функций Якоби, позволившие получить наглядное представление о свойствах параметров Родрига–Гамильтона.

6. Рассмотрены прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой. Изучены следующие классы движений:

– маятниковые движения,

– регулярная прецессия относительно вертикали,

– полурегулярные прецессии первого типа,

– полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа,

– полурегулярные прецессии второго типа,

– прецессии общего вида и их частные случаи, прецессионно-изоконические движения.

В каждом из изученных случаев определены зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени и определена структура инвариантных соотношений, содержащих только указанные параметры.

Диссертационная работа имеет перспективы в исследовании общих свойств параметров Родрига–Гамильтона в других решениях уравнений Эйлера–Пуассона и их обобщениях: уравнениях Кирхгофа–Пуассона.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ковалев А. М. Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.

2. Ковалев А. М. Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.

3. Данилюк Д. А. Колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона в специальных осях / Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 151–156.

4. Данилюк Д. А. Движение гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 39–45.

5. Ковалев А. М. Применение параметров Родрига–Гамильтона для исследования прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, Д. А. Данилюк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 93–101.

6. Данилюк Д. А. Свойства параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений динамики тяжелого твердого тела / А. Д. Данилюк // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – Москва, 2014. – № 8. – С. 124–131.

7. Данилюк Д. А. Исследования колебаний твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк, А. М. Ковалев // Системный анализ и управление : сборник тезисов VIII Междунар. конф. (29 июня – 6 июля 2003г.). – Евпатория, 2003. – С. 131–132.

8. Данилюк Д. А. Исследования колебаний твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / А. М. Ковалев, Д. А. Данилюк // Системный анализ, управление и навигация : тезисы докладов X Междунар. конф. (3–10 июля 2005г.). – Евпатория, 2005. – С. 38.

9. Ковалева Л. М. Колебательные движения гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Л. М. Ковалева, Д. А. Данилюк // Устойчивость, управление и динамика твердого тела : тезисы X Междунар. конф. (5–10 июня 2008г.). – Донецк, 2008.

10.Данилюк Д. А. Точные решения уравнений движения гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона / Д. А. Данилюк // Устойчивость, управление и динамика твердого тела : тезисы XI Междунар. конф. (8–12 июня 2011г.). – Донецк, 2011. – С. 38.

АННОТАЦИИ

Данилюк Д.А. Применение параметров Родрига–Гамильтона в исследовании задач динамики твердого тела. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – ГУ Институт прикладной математики и механики МОН ДНР, Донецк, 2016.

Исследованы нормальные линейные и нелинейные колебания тяжелого твердого тела на основе применения параметров Родрига–Гамильтона. Получены решения уравнений в вариациях для случая колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия и изучены их свойства. Установлены свойства нелинейных нормальных колебаний тяжелого твердого тела с помощью теории нормализации выражений в разложении функции Гамильтона.

Построена функция Гамильтона для случая, когда параметры Родрига–Гамильтона являются обобщенными координатами. Выведены формулы, которые характеризуют разложения функции Гамильтона в задаче изучения нелинейных колебаний тяжелого твердого тела.

Найдены функциональные зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона и описаны их свойства. Определена структура инвариантных соотношений в рассмотренных решениях относительно параметров Родрига–Гамильтона.

Найдены параметры Родрига–Гамильтона в решениях, которые описывают прецессионные движения тела. Исследованы аналитические свойства инвариантных соотношений для параметров Родрига–Гамильтона в случае прецессионно-изоконических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Ключевые слова: параметры Родрига–Гамильтона, колебания, тяжелое твердое тело, неподвижная точка, инвариантное соотношение, прецессия.

Danylyuk Danylo A. Application of Rodrigues-Hamilton parameters in investigation of a rigid body dynamics. – The manuscript.

Thesis for a candidate degree (physical and mathematical sciences) by speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – State Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics" of the Ministry of Education and Science, Donetsk People's Republic, Donetsk, 2016.

Through the use of the Rodrigues-Hamilton parameters, research of normal linear and nonlinear oscillations of a heavy solid body was carried out. Solutions of the variational equations for the case of a heavy rigid body oscillations near the lower equilibrium position were prepared and their properties were obtained. Properties of nonlinear normal oscillations of a heavy rigid body were established by using the theory of normalization of expressions in the decomposition of the Hamiltonian function.

Hamiltonian function was made for the case when Rodrigues–Hamilton parameters are generalized coordinates. The formulas that characterize the decomposition of Hamiltonian function, while investigating of nonlinear oscillations of a rigid body were derived.

Time–depending functionalities of Rodrigues-Hamilton parameters in particular solutions of Euler–Poisson equations were stated and properties of these functionalities were described. The invariant relations in considered solutions were defined concerning Rodrigues-Hamilton parameters.

Rodrigues-Hamilton parameters for precession motions of a heavy rigid body were stated in the solutions that describe the motions.

Research of the analytical properties of invariant relations for Rodrigues–Hamilton parameters was carried out at precession–isoconic motions of a heavy rigid body with fixed point.

Keywords: Rodrigues-Hamilton parameters, oscillations, rigid body, fixed point, invariant relations, precession

«Подписано в печать 04.03.2016. Формат 60х84х1/16
Усл. печ. л. 1,0. Печать ризография. Заказ №33 . Тираж 100 экз.
Отпечатано в ФЛП Насонова И. С.
Донецк, ул. Университетская, 78
тел. (050) 66-29-447, email: vegaprint@ukr.net,
+7 978 081 84 20, email:print.vega@mail.ru»