Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики

ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"

На правах рукописи

Котов Герман Александрович

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Донецк — 2016

Диссертация является рукописью.
Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет", г. Донецк.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, доцент
Мазнев Александр Владимирович,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет", профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики, г. Донецк;

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор
Маркеев Анатолий Павлович,
Государственное бюджетное учреждение науки "Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН", главный научный сотрудник лаборатории механики систем, г. Москва, Россия;

кандидат физико–математических наук, доцент
Игнатова Екатерина Анатольевна,
Государственная организация высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского", доцент кафедры высшей и прикладной математики, г. Донецк;

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)".**

Защита состоится 28 февраля 2017 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.013.01 при ГУ "Институт прикладной математики и механики" по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 309. Телефон +38(062)3110319, факс +38(062)3110285, e-mail: mtt@iamm.su

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГУ "Институт прикладной математики и механики" по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 209, сайт ГУ "Институт прикладной математики и механики": www.iamm.su.

Автореферат разослан "____" _____________ 201 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Ю. Б. Коносевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. При исследовании гироскопических систем, спутников, роботов и манипуляторов с целью стабилизации и управления движением этих объектов используются специальные механические системы, называемые гиростатами, в которых учтено движение составных частей моделируемых объектов (роторов, жидкостей в полостях тела и др.).

Понятие "гиростат" впервые появилось в работах У. Томпсона, В. Вольтерра, Н. Е. Жуковского. В своем курсе по теоретической механике Т. Леви-Чивита и У. Амальди[1] гиростатом называют механическую систему, состоящую из произвольного по распределению масс тела-носителя и присоединенных к нему тел, в результате движения которых распределение масс всей системы не меняется. К таким системам относятся, например, объекты, которые несут на себе закрепленные осью симметричные вращающиеся тела.

П. В. Харламов[2] обобщил понятие "гиростат" указав, что несомые тела могут иметь несимметричную форму, так как для них должно выполняться условие, что центр масс несомого тела должен находиться на оси вращения, которая является главной центральной осью, а моменты инерции его относительно осей, ортогональных оси вращения, равны.

При исследовании движений гиростата возникают две самостоятельные задачи. Первая из них относится к случаю, когда гиростатический момент постоянен. Поскольку для уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом сохраняются три первых интеграла, то в ней путем обобщения были получены многочисленные результаты (например, П.В. Харламов обобщил многие решения задачи о движении тяжелого тела с неподвижной точкой, Л. Н. Сретенский обобщил решение Гесса, Горячева-Чаплыгина и др.)

Вторая задача исследования движения гиростата относится к случаю, когда гиростатический момент зависит от времени. При ее рассмотрении применяются результаты В. Вольтерра, Н. Е. Жуковского, В. В. Румянцева, П. В. Харламова, Й. Виттенбурга и др. Особенно интенсивно вторая задача развивается в настоящее время. В монографиях[3,4] изложены результаты, посвященные изучению задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом неравномерного вращения одного или двух несомых роторов.

Классы технических объектов, которые моделируются гиростатом, рассмотрены в работах Н. И. Амелькина, Е. П. Евдокименко, А. В. Алексеева, А. П. Маркеева и др.

В настоящей работе изучается задача о прецессионных движениях гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях одного и двух несомых роторов.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно–исследовательской работы кафедры высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры:

---

[1] Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики / Т. Леви-Чивита, У.Амальди. – В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.

[2] Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Ч. I / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.

[3] Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

[4] Горр Г. В. Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Наукова думка. – 2013. – Т. 8, серия "Задачи и методы: математика, механика". – 407 с.

"Дослідження нестаціонарних неоднорідних нелінійних та ймовірносних математичних моделей механіки, фізики і економіки" (№ 0109U003034, январь 2009 г. – декабрь 2011 г.);

кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета:

"Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях" (№ 0107U001773, Г-07/38, 01.01.2007 г. – 31.12.2012 г.);

отдела прикладной механики ГУ "Институт прикладной математики и механики":

"Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел" (№ 0111U000484, № III-6-11, 01.01.2011 г. – 31.12.2015 г.).

Цель и задачи работы. *Объектом исследования* является задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Тело-носитель несет либо один вращающийся ротор, либо два вращающихся ротора.

Предметом исследования является система обыкновенных дифференциальных уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающая движение гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Целью данной диссертационной работы является нахождение и изучение условий существования программных движений, характеризующихся свойствами прецессионности и изоконичности, построение решений уравнений Кирхгофа–Пуассона в замкнутом виде. Для этого были решены следующие *задачи*:

1. Редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона для прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом.

2. Анализ условий существования решений редуцированных уравнений Кирхгофа–Пуассона, описывающих заданные программные движения.

3. Построение в замкнутой форме решений уравнений прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях одного и двух несомых тел.

4. Исследование свойств найденных решений в терминах, принятых в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Получение аналитических формул для компонент гиростатического момента, которые могут служить для управления программными движениями.

Методы исследования. В диссертации применены метод инвариантных соотношений построения решений уравнений динамики твердого тела, теория интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах, методы решения обратных задач аналитической механики.

Научная новизна полученных результатов.

1. Проведена редукция уравнений движения гиростата с двумя вращающимися роторами под действием потенциальных и гироскопических сил на инвариантных соотношениях, описывающих прецессионные движения гиростата.

2. С целью получения редуцированной системы уравнений предложены два подхода: первый подход основан на применении базиса, характеризующего прецессионные движения; второй подход заключается в использовании ортонормированного базиса, векторы которого связаны с направлением гиростатического момента.

3. С помощью интеграла момента количества движения при использовании второго подхода уравнения Кирхгофа–Пуассона преобразованы к одному обыкновенному диффе-

ренциальному уравнению третьего порядка на углы прецессии и собственного вращения.

4. Построено новое решение уравнений Кирхгофа–Пуассона, соответствующее маятниковым движениям гиростата первого класса.

5. Второй класс маятниковых движений установлен с помощью введения новых переменных задачи. Он описывается эллиптическими функциями и интегралами от эллиптических функций времени.

6. В задаче о движении гиростата с одним вращающимся ротором под действием потенциальных и гироскопических сил при использовании первого подхода получена новая форма дифференциальных уравнений, описывающих полурегулярные прецессии первого типа. На их основе установлен новый класс прецессий, в котором скорость собственного вращения является отношением тригонометрических полиномов.

7. Показано, что условия существования регулярных прецессий гиростата определяют положение центра масс и направление гиростатического момента, а также устанавливают зависимости компонент гиростатического момента от времени.

8. Рассмотрены условия существования полурегулярных и прецессионно-изоконических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построены новые решения уравнений движения гиростата.

9. Показано, что найденные решения характеризуются новыми классами зависимостей скоростей собственного вращения и прецессии, а также компонент гиростатического момента от времени.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Построены классы точных решений уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента. Они могут быть применены в прикладных областях механики, использующих теорию управления и стабилизации движения. Решения дифференциальных уравнений, полученные в диссертации, дают дополнительную информацию о свойствах решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты диссертации могут быть использованы в ГУ "Институт прикладной математики и механики" (г. Донецк), в ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" в исследованиях движений тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Кроме этого, результаты, полученные в диссертации, могут использоваться при чтении специальных курсов по аналитической механике и математическому моделированию, а также общих курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений в вузах ДНР и России.

Личный вклад соискателя. По теме диссертации опубликованы 7 статей в рецензируемых изданиях. Научные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Из трех совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором самостоятельно. Г. В. Горру и А. В. Мазневу принадлежат постановка задач, указание методов исследования, формулировка некоторых результатов, а также общее руководство. В совместной работе [1] А. А. Возняк принадлежит решение, соответствующее случаю $\boldsymbol{\gamma} = (0,\ 0,\ 1)$, остальные результаты получены автором диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена применением общепринятых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на

— научной конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов Донецкого национального университета по итогам научно-исследовательской работы за период 2007-2008 гг. – Донецк, 2009;

— XV international conference, DSMSI. – Киев, 2011;

— V международной научно–практической интернет–конференции "Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты — 2016". – Донецк, 2016.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 научных статьях в журналах, которые рекомендованы ВАК ДНР и в 3 тезисах докладов научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Объем работы составляет 131 страницу, библиография — 170 источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы и сформулирована цель диссертации, определены задачи исследования, на решение которых направлена данная работа.

В **первом разделе** проведен анализ литературы по теме диссертации.

Во **втором разделе** рассмотрены содержательная и математическая модели движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. В дифференциальных уравнениях движения указано несколько способов формирования тензора инерции гиростата S. В общем случае часть носимых тел S_i подчинена связям, обеспечивающим зависимости $\varkappa_i(t)$ – угол поворота i-го тела вокруг вектора $\boldsymbol{э}_1^{(i)}$, неподвижного относительно тела-носителя S_0, а для остальных тел известна зависимость $L_j = L_j(t)$ – закон движения j-го тела. Момент количества движения гиростата равен вектору $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}(t)$, где[5]

$$A\boldsymbol{\omega} = A^{(0)}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{r}\Big[B_i\ \boldsymbol{э}_1^{(i)} \times\big(\boldsymbol{\omega}\times\ \boldsymbol{э}_1^{(i)}\ \big) + m_i\mathbf{h}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h}_i)\Big] + \sum_{i=r+1}^{n} D_i\big(\boldsymbol{\omega}\cdot\ \boldsymbol{э}_1^{(i)}\ \big)\ \boldsymbol{э}_1^{(i)},$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{r} D_i p_i(t)\ \boldsymbol{э}_1^{(i)} + \sum_{i=r+1}^{n} D_i\dot{\varkappa}_i(t)\ \boldsymbol{э}_1^{(i)}\ .$$

В содержательной постановке задачи учтено влияние на электрически заряженное, намагниченное тело-носитель S_0 стационарных магнитных и электрических полей. Описаны силы Лоренца и Кулона.

Математическая модель движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил описывается уравнениями

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}(t))\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

которые имеют только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}(t))\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

[5] Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Ч. I / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя S_0; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ — дифференцируемые функции времени; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — симметричные постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ обозначает производную по времени t.

Математическая постановка задачи состоит в интегрировании уравнений (1), (2) с первыми интегралами (3). В диссертации рассмотрены два вида задания переменного гиростатического момента

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad |\boldsymbol{\beta}| = 1. \tag{5}$$

Третий раздел диссертационной работы посвящен изучению уравнений (1), (2) с интегралами (3) и переменным гиростатическим моментом вида (5) в случае прецессионных движений гиростата относительно вертикали с постоянным углом нутации θ_0. Данные движения характеризуются инвариантными соотношениями[6]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu},$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — углы Эйлера, вектор $\boldsymbol{a}$ фиксирован в теле S_0. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$ выбраны так: $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{\nu} = (a_0'\sin\varphi,\ a_0'\cos\varphi,\ a_0)$, где $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sqrt{1-a_0^2}$. Уравнение Пуассона (2) обращается в тождество, уравнение (1) имеет вид: ($Sp(A)$ — след матрицы A)

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} + \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\big[Sp(A)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})\big] - \lambda_1(t)\big[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}) +\\
&+\dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu})\big] - \lambda_2(t)\big[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nu})\big] - \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}) +\\
&+\dot{\varphi}(B\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(B\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для исследования уравнения (6) в диссертации предложены два подхода, основанные на использовании базисов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$. В первом подходе уравнения движения (6) в базисе $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}$ таковы

$$\begin{aligned}
&\alpha_3\dot{\lambda}_1(t) + \beta_3\dot{\lambda}_2(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\ddot{\psi} - a_0'\dot{\psi}[\lambda_1(t)(\alpha_1\cos\varphi -\\
&-\alpha_2\sin\varphi) + \lambda_2(t)(\beta_1\cos\varphi - \beta_2\sin\varphi)] + \dot{\psi}^2(A_2\sin 2\varphi - A_2'\cos 2\varphi - a_0A_1'\cos\varphi +\\
&+a_0A_1\sin\varphi) - \dot{\psi}(B_2\sin 2\varphi - B_2'\cos 2\varphi - a_0B_1'\cos\varphi + a_0B_1\sin\varphi) + C_2'\cos 2\varphi -\\
&-C_2\sin 2\varphi + \varkappa_1\sin\varphi - \varkappa_1'\cos\varphi = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}_1(t) + (a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3)\dot{\lambda}_2(t) +\\
&+(A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\ddot{\varphi} + a_0'\dot{\varphi}[\lambda_1(t)(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi) + \lambda_2(t)(\beta_1\cos\varphi -\\
&-\beta_2\sin\varphi)] + \ddot{\psi}(A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0A_1\cos\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi + A_0) +\\
&+2\dot{\varphi}\dot{\psi}(A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0A_1'\cos\varphi - a_0A_1\sin\varphi) + (A_1'\cos\varphi - A_1\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 -\\
&-(B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0B_1'\cos\varphi - a_0B_1\sin\varphi)\dot{\varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

[6]Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

$$
\begin{aligned}
&a_0'\dot\lambda_1(t)(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)+a_0'\dot\lambda_2(t)(\beta_1\cos\varphi-\beta_2\sin\varphi)+a_0'\lambda_1(t)\big[(a_0'\alpha_3-a_0\alpha_1\sin\varphi-\\
&-a_0\alpha_2\cos\varphi)\dot\psi-(\alpha_2\cos\varphi+\alpha_1\sin\varphi)\dot\varphi\big]+a_0'\lambda_2(t)\big[(a_0'\beta_3-a_0\beta_1\sin\varphi-a_0\beta_2\cos\varphi)\dot\psi-\\
&-(\beta_2\cos\varphi+\beta_1\sin\varphi)\dot\varphi\big]+(A_1'\cos\varphi-A_1\sin\varphi)\ddot\varphi+(A_2'\cos2\varphi-A_2\sin2\varphi+a_0A_1'\cos\varphi-\\
&-a_0A_1\sin\varphi)\ddot\psi-\dot\varphi\dot\psi(2A_2\cos2\varphi+2A_2'\sin2\varphi+2a_0A_1\cos\varphi+2a_0A_1'\sin\varphi-a_0'^2A_{33})-\\
&-\dot\varphi^2(A_1\cos\varphi+A_1'\sin\varphi)-\dot\psi^2(a_0A_2\cos2\varphi+a_0A_2'\sin2\varphi+(a_0^2-a_0'^2)A_1\cos\varphi+\\
&+(a_0^2-a_0'^2)A_1'\sin\varphi+a_0D_0)+\dot\varphi(B_2\cos2\varphi+B_2'\sin2\varphi+a_0B_1\cos\varphi+a_0B_1'\sin\varphi-B_0^*)+\\
&+\dot\psi(a_0B_2\cos2\varphi+a_0B_2'\sin2\varphi+(a_0^2-a_0'^2)B_1\cos\varphi+(a_0^2-a_0'^2)B_1'\sin\varphi+a_0E_0)+\\
&+a_0C_2\cos2\varphi+a_0C_2'\sin2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\delta_1'\sin\varphi+\delta_0=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Интеграл момента количества движения из (3) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0'\alpha_2\cos\varphi+a_0\alpha_3)\lambda_1(t)+(a_0'\beta_1\sin\varphi+a_0'\beta_2\cos\varphi+a_0\beta_3)\lambda_2(t)+\\
&+(A_1\cos\varphi+A_1'\sin\varphi+a_0A_{33})\dot\varphi+(A_2\cos2\varphi+A_2'\sin2\varphi+2a_0A_1\cos\varphi+2a_0A_1'\sin\varphi+\\
&+A_0)\dot\psi-\frac{1}{2}(B_2\cos2\varphi+B_2'\sin2\varphi+2a_0B_1\cos\varphi+2a_0B_1'\sin\varphi+B_0)=k,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $A_n,\ A_m',\ B_n,\ B_m',\ B_0^*,\ C_2,\ C_2',\ E_0,\ D_0,\ \varkappa_1,\ \varkappa_1',\ \delta_1,\ \delta_1',\ \delta_0$ ($n=0,1,2;\ m=1,2$) — постоянные параметры, зависящие от $A_{ij},\ B_{ij},\ C_{ij},\ s_i,\ a_0,\ a_0'$, выписанные в диссертации.

При втором подходе, основанном на использовании базиса $\boldsymbol\alpha,\ \boldsymbol\beta,\ \boldsymbol\gamma=\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta$, получена следующая система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot\lambda_1(t)-\lambda_2(t)\big[\gamma_3\dot\varphi+\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi+a_0'\gamma_2\cos\varphi+a_0\gamma_3\big)\dot\psi\big]+F_1=0,\\
&\dot\lambda_2(t)+\lambda_1(t)\big[\gamma_3\dot\varphi+\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi+a_0'\gamma_2\cos\varphi+a_0\gamma_3\big)\dot\psi\big]+F_2=0,\\
&\lambda_2(t)\big[\alpha_3\dot\varphi+\big(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0'\alpha_2\cos\varphi+a_0\alpha_3\big)\dot\psi\big]-\\
&\quad-\lambda_1(t)\big[\beta_3\dot\varphi+\big(a_0'\beta_1\sin\varphi+a_0'\beta_2\cos\varphi+a_0\beta_3\big)\dot\psi\big]+F_3=0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $F_k=P_{1k}^0(\varphi)\ddot\varphi+P_{2k}^1(\varphi)\ddot\psi+P_{3k}^0(\varphi)\dot\varphi^2+P_{4k}^2(\varphi)\dot\psi^2+P_{5k}^2(\varphi)\dot\varphi\dot\psi+P_{6k}^1(\varphi)\dot\varphi+P_{7k}^2(\varphi)\dot\psi+P_{8k}^2(\varphi)$, $P_{nk}^m(\varphi)$ – тригонометрические полиномы порядка $m=0,1,2$; $k=1,2,3$; $n=\overline{1,8}$.

Новая форма записи уравнений (6) в виде (11) представляет интерес в силу того, что последнее уравнение из (11) не содержит производных от неизвестных функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и в таком случае применим модифицированный метод инвариантных соотношений[7]. Например, в случае маятниковых движений тяжелого твердого тела со скоростью собственного вращения $\dot\varphi^2=p_0+p_1\sin\varphi$ уравнения (11) могут быть преобразованы к виду

$$
\begin{aligned}
\lambda_1'=\gamma_3\lambda_2-\frac{F_1}{\sqrt{p_0+p_1\sin\varphi}},\qquad \lambda_2'=-\gamma_3\lambda_1-\frac{F_2}{\sqrt{p_0+p_1\sin\varphi}},\\
\alpha_3\lambda_2-\beta_3\lambda_1+\frac{F_3}{\sqrt{p_0+p_1\sin\varphi}}=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где штрихом обозначена производная по переменной φ. Дифференцируя последнее урав-

[7] Ковалев А. М. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный // Механика твердого тела. — 2013. — Вып. 43. — С. 3–18.

нение системы (12) по φ с учетом λ_1' и λ_2' из первого и второго уравнений, получим

$$-\alpha_3\gamma_3\lambda_1 - \beta_3\gamma_3\lambda_2 + \frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}} + \Big(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}\Big)' = 0.$$

Для второй производной в силу (12) имеем

$$\gamma_3^2(-\alpha_3\lambda_2 + \beta_3\lambda_1) + \gamma_3\frac{\alpha_3 F_1 + \beta_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}} + \Big(\frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}\Big)' + \Big(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}\Big)'' = 0. \quad (13)$$

Таким образом, используя метод инвариантных соотношений, из системы (12) получены два уравнения на неизвестные функции $\lambda_1,\ \lambda_2$. С помощью последнего равенства из (12) в уравнении (13) исключаются переменные λ_1 и λ_2

$$\gamma_3^2\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}} + \gamma_3\frac{\alpha_3 F_1 + \beta_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}} + \Big(\frac{\beta_3 F_1 - \alpha_3 F_2}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}\Big)' + \Big(\frac{F_3}{\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}\Big)'' = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением на $\varphi(t)$, а поскольку программное движение уже задано, то оно должно быть тождеством, из которого находятся ограничения на параметры задачи

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad p_1 = \frac{2\gamma_3 s_1}{\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}}.$$

Система дифференциальных уравнений (1), (2) имеет следующее решение

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu} = (\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0), \quad \boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ \dot\varphi), \quad \dot\varphi^2 = p_0 + p_1\sin\varphi, \\ \lambda_1 = \frac{\dot\varphi(\beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13})}{\gamma_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\dot\varphi(\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})}{\gamma_3}.\end{gathered} \quad (14)$$

Приведенный здесь класс маятниковых движений описывается эллиптическими функциями времени.

Кроме метода инвариантных соотношений уравнения движения (11) допускают способ редукции, основанный на использовании интеграла момента количества движения из (3). Этот метод предложен и описан в диссертационной работе. Из последнего уравнения из (11) и интеграла моментов находятся функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ в виде:

$$\lambda_1(t) = \frac{NF_3 - F_4(\alpha_3\dot\varphi + M\dot\psi)}{\dot\varphi(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot\psi(M^2 + N^2)},\ \lambda_2(t) = -\frac{MF_3 + F_4(\beta_3\dot\varphi + N\dot\psi)}{\dot\varphi(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot\psi(M^2 + N^2)}, \quad (15)$$

где N, M–тригонометрические полиномы первого порядка, F_4 – слагаемые интеграла моментов, не содержащие множителей $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Редукция уравнений (11) с помощью (15) приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, явный вид которого указан в диссертации.

Четвертый раздел диссертационной работы посвящен изучению некоторых классов прецессионных движений гиростата с гиростатическим моментом вида (4) под действием потенциальных и гироскопических сил. Для полурегулярных прецессий первого типа ($\dot\psi =$

$= m = \text{const}$) уравнения (7)–(10) имеют вид[8]

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) - a_0'\alpha_1 m\lambda(t)\cos\varphi + A_{33}\ddot{\varphi} + C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi + \varkappa_1\sin\varphi - \varkappa_1'\cos\varphi = 0, \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}&(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) + a_0'\alpha_1\dot{\varphi}\lambda(t)\cos\varphi + (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\ddot{\varphi} + (A_1'\cos\varphi-\\&- A_1\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(B_2\sin 2\varphi - B_2'\cos 2\varphi + B_1\sin\varphi - B_1'\cos\varphi) = 0,\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}&a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi + a_0'(a_0'\alpha_3 - a_0\alpha_1\sin\varphi)\lambda(t) - a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\sin\varphi + (A_1'\cos\varphi - A_1\sin\varphi)\ddot{\varphi}-\\&- (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0B_1\cos\varphi + a_0B_1'\sin\varphi + B_0)+\\&+ a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + \delta_0 = 0,\end{aligned} \qquad (18)$$

$$\begin{aligned}&(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3)\lambda(t) = \frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0B_1\cos\varphi + a_0B_1'\sin\varphi + k_0-\\&- (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\dot{\varphi},\end{aligned} \qquad (19)$$

где смысл обозначений сохранен, но вместо матриц B, C используются матрицы $B^* = mSp(A)E - 2mA + B$, $C^* = C + mB - m^2A$.

С помощью интеграла (19) проведена редукция уравнений (16)–(18) и, в предположении $A_{23} = 0$, $\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_{13} = 0$, получен явный вид разрешающего тригонометрического полинома.

Первый пример разрешимости редуцированных уравнений соответствует маятниковым движениям (скорость прецессии равна нулю) в случае, когда изменение гиростатического момента происходит вдоль оси, параллельной оси собственного вращения гиростата

$$\begin{aligned}&m = 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ A_{13} = 0,\ C_{13} = C_{23} = 0,\ B_{22} = -B_{11},\\&s_3 = \frac{a_0}{2}(2C_{33} - C_{11} - C_{22}),\ s_1 = \frac{a_0\big[(C_{22} - C_{11})(B_{11}B_{13} - B_{12}B_{23}) - 2C_{12}(B_{11}B_{23} + B_{12}B_{13})\big]}{2(B_{11}^2 + B_{12}^2)},\\&s_2 = \frac{a_0\big[2C_{12}(B_{11}B_{13} - B_{12}B_{23}) - (C_{22} - C_{11})(B_{11}B_{23} + B_{12}B_{13})\big]}{2(B_{11}^2 + B_{12}^2)},\ \operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{B_{11}^2 + B_{12}^2}{B_{13}^2 + B_{23}^2}.\end{aligned}$$

Угол нутации θ_0 зависит только от компонент матрицы $B = (B_{ij})$, которая характеризует гироскопические силы. Приведен числовой пример

$$\begin{aligned}&B_{11} = b_0,\ B_{12} = 2b_0,\ B_{13} = 4b_0,\ B_{23} = -b_0,\ C_{12} = -3c_0,\ C_{11} = c_0,\ C_{22} = 3c_0,\ C_{33} = 6c_0,\\&a_0 = \frac{\sqrt{110}}{22},\ a_0' = \frac{\sqrt{374}}{22},\ s_1 = \frac{27\sqrt{110}}{110}c_0,\ s_2 = -\frac{\sqrt{110}}{10}c_0,\ s_3 = \frac{2\sqrt{110}}{11}c_0,\end{aligned}$$

где b_0 и c_0 — числовые независимые параметры. Из (16)–(19) имеем

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{c_0\big(5610\cos 2\varphi + 1870\sin 2\varphi + \sqrt{41140}(27\cos\varphi + 11\sin\varphi)\big)}{b_0\big(748\sqrt{110}\cos 2\varphi + 374\sqrt{110}\sin 2\varphi + 110\sqrt{374}(\cos\varphi + 4\sin\varphi)\big)},\\ \lambda(t) &= \frac{\sqrt{110}}{5}\Big(\frac{17b_0}{44}(2\sin 2\varphi - \cos 2\varphi) + \frac{\sqrt{85}b_0}{22}(4\sin\varphi - \cos\varphi) + k_0 - \frac{\sqrt{110}A_{33}}{22}\dot{\varphi}\Big).\end{aligned}$$

[8]Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Механика твердого тела. — 2010. — Вып. 40. — С. 91–102.

Второй пример разрешимости для маятниковых движений ($\dot\psi = m = 0$) построен в случае, когда изменение гиростатического момента происходит вдоль оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$. Числовой пример задан в виде:

$$A_{33} = \xi, \quad A_{13} = 2\xi, \quad B_{11} = 2b_0, \quad B_{22} = 3b_0, \quad B_{33} = 5b_0, \quad B_{12} = -b_0, \quad B_{23} = 0,$$
$$B_{13} = 7b_0, \quad C_{11} = 5c_0, \quad C_{33} = 4c_0, \quad C_{22} = 3c_0, \quad C_{13} = 4c_0, \quad C_{23} = -8c_0, \quad C_{12} = 0,$$
$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_0' = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad k = -\frac{1}{9}b_0, \quad s_1 = 2c_0, \quad s_2 = -\frac{20}{3}c_0, \quad s_3 = -6c_0,$$

где ξ, b_0 и c_0 — числовые независимые параметры. Из (16)–(19) следует

$$\dot\varphi = \frac{U_4(\varphi)}{15b_0(\sqrt{5}(2\sin 3\varphi - \cos 3\varphi) + 4(\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi) - \sqrt{5}(6\sin\varphi - 5\cos\varphi))},$$
$$\lambda(t) = \frac{b_0\big(5\cos 2\varphi - 10\sin 2\varphi + 56\sqrt{5}\sin\varphi + 61\big)}{24\alpha_3(\sqrt{5}\sin\varphi + 1)} - \frac{\xi\dot\varphi}{\alpha_3},$$
$$U_4(\varphi) = 4c_0\big[-25\sin 4\varphi + 10\sqrt{5}(2\sin 3\varphi - 3\cos 3\varphi) + 10(11\sin 2\varphi + 8\cos 2\varphi) +$$
$$+ 38\sqrt{5}(2\sin\varphi - \cos\varphi) - 80\big].$$

В построенных решениях угол собственного вращения и функция $\lambda(t)$ являются элементарными функциями времени. Особенностью указанных классов маятниковых движений является структура скорости собственного вращения.

Получены условия существования полурегулярных прецессий гиростата первого типа ($\dot\psi = m \neq 0$). При значениях параметров

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ A_{13} = 0,\ A_{23} = 0,\ A_{11} = 3\xi,\ A_{22} = 4\xi,\ A_{33} = 5\xi,\ A_{12} = -2\xi,$$
$$B_{11} = b_0,\ B_{22} = 7b_0,\ B_{33} = -5b_0,\ B_{12} = -12b_0,\ B_{13} = 8b_0,\ B_{23} = 5b_0,$$
$$C_{11} = 10c_0,\ C_{22} = 6c_0,\ C_{33} = 8c_0,\ C_{12} = 5c_0,\ s_3 = c_0,\ a_0 = \frac{1}{3},\ a_0' = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$
$$C_{13} = \frac{\sqrt{178}\big[7b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 164\xi c_0\big]}{712\xi},\ C_{23} = \frac{3\sqrt{178}\big[9b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 160\xi c_0\big]}{2848\xi},$$
$$s_2 = \frac{\sqrt{178}\big[480\xi c_0 - b_0^2(12077 - 164\sqrt{178}) + 720k_0b_0(4 - \sqrt{178})\big]}{8544\xi},$$
$$s_1 = \frac{\sqrt{178}\big[108\xi c_0 - 5b_0^2(745 - 4\sqrt{178}) + 288k_0b_0(4 - \sqrt{178})\big]}{2136\xi},\ m = (-1 + \frac{\sqrt{178}}{4})\frac{b_0}{\xi},$$

решение уравнений (16)–(19) записано в виде

$$\dot\varphi = \frac{U_2(\varphi)}{173016\xi b_0(8\cos\varphi - 5\sin\varphi)}, \quad \lambda(t) = \frac{2\sqrt{2}b_0}{3}(5\cos\varphi + 8\sin\varphi) + 3k_0 - 5\xi\dot\varphi,$$
$$U_2(\varphi) = 7209\sqrt{2}\Big\{4\Big[b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 20\xi c_0\Big]\cos 2\varphi + \Big[b_0^2(97 - 4\sqrt{178}) - 32\xi c_0\Big]\sin 2\varphi\Big\} +$$
$$+ 4(2\sqrt{178} - 89)\Big\{\Big[11664b_0k_0 + 81b_0^2(17\sqrt{178} + 28) - 68(\sqrt{178} + 4)\xi c_0\Big]\cos\varphi +$$
$$+ \Big[-2430b_0k_0 - 27b_0^2(8 + 13\sqrt{178}) - 20(4 + \sqrt{178})\xi c_0\Big]\sin\varphi\Big\}.$$

В диссертации в предположении, что функция гиростатического момента является тригонометрическим многочленом первого порядка $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin\varphi$ ($\lambda_1,\ \lambda_0$ — постоянные, подлежащие определению), исследованы два класса прецессионно-изоконических движений и класс движений, характеризующийся связью $\dot\psi = \rho_1\dot\varphi + \rho_0$.

Первый класс описывается полурегулярными прецессионно-изоконическими движениями гиростата второго типа со скоростью собственного вращения $\dot\varphi = n$ и прецессии $\dot\psi = \dfrac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi}$, где $\gamma_1,\ \gamma_0$ – некоторые константы, удовлетворяющие условию $\gamma_0^2 = 1+\gamma_1^2$. Для этого класса найдены следующие ограничения на параметры задачи:

$$A_{12} = A_{23} = 0,\ B_{12} = B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{13} = C_{23} = s_2 = 0,\ A_{13}^2 = A_{11}(A_{22} - A_{11}),\ B_{11} = B_{22},$$
$$C_{11} = C_{22},\ a_0 = 0,\ \gamma_0 = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}},\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{A_{22} - A_{11}}{A_{11}}},\ \lambda_0 = n(A_{22} - A_{11} - A_{33}) - \frac{\gamma_0(s_3 + nB_{22})}{n},$$
$$\lambda_1 = \frac{s_1}{n},\quad 2k = -B_{22} + 2n\sqrt{A_{11}A_{22}},\ n[B_{22}(A_{11} - A_{22}) + B_{13}A_{13}] = s_1A_{13} + s_3(A_{22} - A_{11}).$$

Второй класс характеризуется прецессионно-изоконическими движениями гиростата общего вида со скоростью собственного вращения $\dot\varphi = \eta_0 + \eta_1 \sin\varphi$ и прецессии $\dot\psi = \dfrac{\dot\varphi}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi}$, где $\eta_0,\ \eta_1$ – некоторые константы. При значениях параметров

$$\alpha_2 = 0,\ A_{12} = A_{23} = 0,\ B_{12} = B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{23} = s_2 = 0,\ A_{11} = A_{22} = 4\rho,\ A_{33} = 5\rho,$$
$$A_{13} = 2\rho,\ B_{11} = \xi,\ B_{22} = 3\xi,\ B_{33} = 4\xi,\ C_{11} = 3\tau,\ C_{22} = 2\tau,\ C_{33} = \tau,\ C_{13} = 5\tau$$

получено

$$a_0 = \frac{2\sqrt{17}}{17},\ a_0' = \frac{\sqrt{221}}{17},\ \gamma_1 = \frac{\sqrt{221}}{34},\ \gamma_0 = \frac{9\sqrt{17}}{34},\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{85}}{85},\ \alpha_3 = \frac{9\sqrt{85}}{85},\ \eta_1 = \frac{2\sqrt{221}\tau}{221\xi},$$
$$\eta_0 = \frac{64\tau(13\xi^2 - 4\tau\rho)\sqrt{17}}{221\xi(16\tau\rho + 585\sqrt{13}\xi^2)},\ \lambda_1 = -\frac{(4\tau\rho + 13\xi^2)\sqrt{65}}{26\xi},\ B_1' = \frac{-\xi(28\tau + 65\sqrt{221}\xi\eta_0)\sqrt{221}}{136\xi},$$
$$s_1 = -\frac{\sqrt{17}(13\xi\eta_0\sqrt{17} - 20\tau)}{34},\ \lambda_0 = \frac{(-16\tau\rho + 117\xi^2 - 26\sqrt{17}\rho\xi\eta_0 + 2\sqrt{221}\xi B_1')\sqrt{5}}{26\xi},$$
$$s_3 = -\frac{4\sqrt{17}\tau + 1105\xi\eta_0}{34},\ k = \frac{-288\tau\rho + 1391\xi^2 + 208\xi\rho\eta_0\sqrt{17} + 36\xi B_1'\sqrt{221}}{442\xi}.$$

Третий класс движений является прецессионным движением общего вида в случае, когда скорость собственного вращения описывается тригонометрическим полиномом первого порядка $\dot\varphi = \eta_0 + \eta_1 \sin\varphi$, а скорость прецессии характеризуется зависимостью $\dot\psi = \rho_1\dot\varphi + \rho_0$, где $\rho_0,\ \rho_1$ - некоторые константы. Получены следующие ограничения на параметры задачи

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ s_2 = 0,\ A_{11} = A_{22},\ A_{12} = A_{23} = A_{13} = 0,\ B_{22} = B_{11},\ B_{12} = B_{23} = 0,$$
$$C_{12} = C_{23} = 0,\ \rho_1 = a_0,\ a_0'A_{11}\eta_1^2 - B_{13}(1 + a_0^2)\eta_1 + a_0'(C_{22} - C_{11}) = 0,\ \lambda_1 = a_0'B_{13} -$$
$$-\eta_1\big(a_0'^2A_{11} + (1 + a_0^2)A_{33}\big),\ \eta_0 = \frac{a_0C_{13} + a_0\rho_0B_{13} - s_1}{a_0'\eta_1A_{11} - B_{13}(1 + a_0^2)},\ \big(A_{11}\eta_1(a_0'\eta_1A_{11} - B_{13})\big)\rho_0^2 +$$
$$+ \big(A_{11}\eta_1(C_{13} - a_0s_1) - B_{11}\eta_1\big(a_0'\eta_1A_{11} - B_{13}(1 + a_0^2)\big) - a_0'C_{13}B_{13}\big)\rho_0 + a_0a_0'C_{13}(a_0C_{13} - s_1) +$$
$$+ \eta_1\big(a_0s_3 + a_0^2(C_{22} - C_{33})\big)\big(a_0'\eta_1A_{11} - B_{13}(1 + a_0^2)\big) = 0,$$

$$a_0\lambda_0=\frac{1}{2}\big(a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33}\big)+k-a_0'^2A_{11}(a_0\eta_0+\rho_0)-a_0A_{33}\big(\eta_0+a_0(a_0\eta_0+\rho_0)\big),$$
$$k=A_{11}(a_0\eta_0+2\rho_0)+\frac{a_0'C_{13}}{\eta_1}-\frac{1}{2}\big(B_{11}(a_0^2+3)-a_0^2B_{33}\big).$$

В **пятом разделе** с помощью второго подхода рассмотрена задача об условиях существования некоторых классов прецессий гиростата, несущего два ротора. Регулярная прецессия изучена в предположении, что на гиростат действует только сила тяжести. Маятниковые движения, полурегулярные прецессии второго типа, прецессионно-изоконические движения гиростата исследованы в случае, когда на гиростат действуют потенциальные и гироскопические силы.

При исследовании маятниковых движений со скоростью собственного вращения $\dot\varphi^2=$ $=p_0+p_1\cos\varphi$ использованы новые представления компонент гиростатического момента. Вводя вместо $\lambda_1(t),\lambda_2(t)$ переменные u,v:

$$\lambda_1(t)=u\sin v,\quad \lambda_2(t)=u\cos v, \tag{20}$$

первые два уравнения системы (11) записываем в виде

$$\dot u\sin v+u(v-\varphi)^{\boldsymbol\cdot}\cos v=F_1,\qquad \dot u\cos v-u(v-\varphi)^{\boldsymbol\cdot}\sin v=F_2,$$

и рассмотриваем следующую комбинация уравнений: $F_1\cos\varphi-F_2\sin\varphi=[u\sin(v-\varphi)]^{\boldsymbol\cdot}$. При выполнении требования $F_1\cos\varphi-F_2\sin\varphi=0$ найден первый интеграл

$$u\sin(v-\varphi)=c^{(0)}, \tag{21}$$

где $c^{(0)}$ – произвольная постоянная. Ограничения на параметры задачи таковы

$$\begin{aligned}&\boldsymbol\alpha=(1,0,0),\quad \boldsymbol\beta=(0,1,0),\quad \boldsymbol\gamma=(0,0,1),\\&A_{13}=A_{23}=0,\ a_0C_{12}=0,\ a_0(C_{22}-C_{11})=0,\ a_0s_1+(a_0'^2-a_0^2)C_{13}=0,\\&a_0s_2+(a_0'^2-a_0^2)C_{23}=0,\ 2s_3=a_0(2C_{33}-C_{11}-C_{22}).\end{aligned}$$

Функции $u,\ v$, в силу интеграла (21), имеют вид

$$u=\frac{c^{(0)}}{\sin(v-\varphi)},\quad v=\varphi(t)-\operatorname{arcctg}\left[\frac{{a_0'}^2}{c^{(0)}}\int\limits_{t_0}^{t}\big(C_{23}\sin\varphi(\tau)-C_{13}\cos\varphi(\tau)\big)d\tau+C'\right],$$

где C' – произвольная постоянная.

Функция $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени и находится путем обращения интеграла $\displaystyle\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sigma_1\sin2\varphi-\sigma_2\cos2\varphi+2\sigma_3\sin\varphi-2\sigma_4\cos\varphi+c_0}}=\frac{1}{\sqrt{A_{33}}}(t-t_0)$, где σ_i – постоянные, зависящие от параметров задачи.

Компоненты гиростатического момента определены в (20).

Второе решение имеет вид

$$\varphi=2\,\mathrm{am}\varkappa_0t,\ \sin\varphi(t)=2\,\mathrm{sn}\varkappa_0t\,\mathrm{cn}\varkappa_0t,\ \cos\varphi(t)=\mathrm{sn}^2\varkappa_0t-\mathrm{cn}^2\varkappa_0t,\ \varkappa_0=\frac{1}{2}\sqrt{p_0+p_1},$$

$$\lambda_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (\Big[\frac{1}{2}(\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33})p_1 - \alpha_3 s_1\Big] \sin\varphi(\tau) + \alpha_3 s_1 \cos\varphi(\tau))d\tau,$$

$$\lambda_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Big[\frac{1}{2}(\beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33})p_1 - \beta_3 s_2\Big] \sin\varphi(\tau) + \beta_3 s_2 \cos\varphi(\tau)d\tau.$$

Оно получено при ограничениях

$$B = 0,\ C = 0,\ a_0 = 0,\ s_3 = 0,\ A_{13} = 0,\ \boldsymbol{\alpha} = (0, \alpha_2, \alpha_3),\ \boldsymbol{\beta} = (0, \beta_2, \beta_3),\ \boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 0).$$

Рассмотренный класс маятниковых движений гиростата с двумя роторами под действием как силы тяжести, так и под действием потенциальных и гироскопических сил описывается эллиптическими функциями времени и интегралами от эллиптических функций. Это свойство существенно отличает класс исследованных здесь маятниковых движений от класса (14), построенного в третьем разделе.

Для регулярных ($\dot\varphi = n,\ \dot\psi = m$) прецессий гиростата в поле силы тяжести показано, что в случаях, когда гиростатический момент не лежит в плоскости, ортогональной оси собственного вращения, центр масс находится на третьей оси подвижной системы координат. Равенство $(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)A_{12} + \gamma_1\gamma_2(A_{22} - A_{11}) + \gamma_3(\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}) = 0$ устанавливает зависимость между направлением гиростатического момента и компонентами тензора инерции.

Первое решение уравнений движения тяжелого гиростата в случае регулярных прецессий построено при условиях

$$\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1),\ \boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0),\ s_1 = s_2 = 0,\ A_{12} = 0,\ m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0.$$

Определены компоненты гиростатического момента для случаев $A_{23} = 0$

$$\lambda_1(t) = -a_0' m A_{13} \sin nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0 m)A_{33} - a_0 m^2 A_{22}),$$

$$\lambda_2(t) = a_0' m(A_{22} - A_{11}) \sin nt - (n + a_0 m)A_{13}$$

и для $n + a_0 m = 0$

$$\lambda_1(t) = -a_0' m(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0 m^2 A_{22}), \quad \lambda_2(t) = a_0' m(A_{22} - A_{11}) \sin nt.$$

Компоненты гиростатического момента являются тригонометрическими многочленами первого порядка. Следующий пример показывает, что $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ могут иметь более сложную структуру. Пусть выполнены условия

$$\boldsymbol{\alpha} = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),\ \boldsymbol{\beta} = (\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}),\ \boldsymbol{\gamma} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}),$$

$$A_{23} = A_{13} - \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}),\ s_1 = s_2 = 0,\quad s_3 = \frac{m}{a_0}\big(m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - k\big),$$

$$k = a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + \frac{1}{4}a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}).$$

Тогда из (15) следует

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{R_2(t)} \sum_{j=0}^{3} \big(\mu_j \cos(jnt) + \mu'_j \sin(jnt)\big),\ \lambda_2(t) = \frac{1}{R_2(t)} \sum_{j=0}^{3} \big(\sigma_j \cos(jnt) + \sigma'_j \sin(jnt)\big),$$

где $R_2(t) = -\frac{1}{6}\big[a_0'^2 m \sin 2nt + 2a'_0(n+2a_0 m)(\sin nt + \cos nt) - 2a_0(n+a_0 m) - 5a_0'^2 m\big]$, $\mu_j, \mu'_j, \sigma_j, \sigma'_j$ – параметры, выписанные в диссертации, зависящие от компонент тензора инерции, угла нутации, скоростей собственного вращения и прецессии.

В общем случае регулярных прецессий числители компонент гиростатического момента в силу (15) не могут быть тригонометрическими многочленами порядка выше третьего, а знаменатели — выше второго. Приведенный пример представляет максимальную комбинацию многочленов.

Полурегулярные прецессионные движения второго типа ($\dot\varphi = n$) в диссертации рассмотрены при ограничениях

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0),\ \boldsymbol{\beta} = (0,1,0),\ \boldsymbol{\gamma} = (0,0,1),$$
$$a_0 = 0,\ A_{13} = A_{23} = 0,\ s_1 = s_2 = 0,\ C_{12} = 0,\ C_{11} = C_{22}.$$

Компоненты гиростатического момента из (15) имеют вид

$$\lambda_1(t) = -\dot\psi(A_{11}\sin nt + A_{12}\cos nt) + \frac{1}{8}(2B_{12}\cos 3nt + (B_{11} - B_{22})\sin 3nt) + \frac{1}{8}(6B_{12}\cos nt +$$
$$+ (5B_{11} - B_{22})\sin nt) + k\sin nt, \qquad \lambda_2(t) = -\dot\psi(A_{12}\sin nt + A_{22}\cos nt) + \frac{1}{8}(-2B_{12}\sin 3nt +$$
$$+ (B_{11} - B_{22})\cos 3nt) + \frac{1}{8}(6B_{12}\sin nt + (5B_{22} - B_{11})\cos nt) + k\cos nt.$$

Функция $\dot\psi$ определена из системы (11)

$$\dot\psi = \frac{n\big((B_{22} - B_{11})\cos 2nt + 2B_{12}\sin 2nt - B_{22} - B_{11}\big)}{2(nA_{33} - B_{23}\cos nt - B_{13}\sin nt)} + \frac{C_{13}\sin nt + C_{23}\cos nt - s_3}{nA_{33} - B_{23}\cos nt - B_{13}\sin nt}.$$

Особенностью данного решения является структура скорости прецессии и тот факт, что компоненты гиростатического момента являются тригонометрическими полиномами третьего порядка. Зависимости $\psi(t),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ описываются элементарными функциями времени.

Для полурегулярных ($\dot\varphi = n$) прецессионно-изоконических движений, которые характеризуются условиями

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0,1,0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0,0,1)$$

решением системы дифференциальных уравнений (11) являются функции

$$\varphi = nt,\ \dot\psi = \frac{n}{\mu_1 \sin nt + \mu_0},\ \lambda_1(t) = \frac{V_1\ddot\psi + V_2\dot\psi^2 + V_3\dot\psi + V_4}{8a'_0\dot\psi},\ \lambda_2(t) = \frac{U_1\ddot\psi + U_2\dot\psi^2 + U_3\dot\psi + U_4}{8a'_0\dot\psi},$$

где $V_1,\ V_2,\ U_1,\ U_2$ – тригонометрические полиномы второго порядка, $V_3,\ V_4,\ U_3,\ U_4$ –

третьего порядка. Ограничения на параметры задачи таковы

$$C_{12}=0,\ C_{11}=C_{22},\ B_{12}=\frac{C_{23}(B_{11}-B_{22})}{2C_{13}},\ B_{23}=\frac{-a_0C_{23}}{n},\ s_1=\frac{a_0'n(B_{11}-B_{22})}{2\mu_1}+a_0C_{13},$$

$$s_2=\frac{C_{23}(a_0\mu_0+a_0'^2)}{\mu_0},\ s_3=a_0(C_{33}-C_{11})-\frac{1}{2}n(B_{11}+B_{22})+\frac{n\big[2a_0'\mu_1B_{13}-a_0\mu_0(B_{22}-B_{11})\big]}{2\mu_1^2},$$

$$\mu_0=\frac{2a_0'C_{13}}{\sqrt{4a_0'^2C_{13}^2-n^2(B_{22}-B_{11})^2}},\quad \mu_1=\frac{n(B_{11}-B_{22})}{\sqrt{4a_0'^2C_{13}^2-n^2(B_{22}-B_{11})^2}}.$$

В **заключении** к диссертации сформулированы выводы о полученных результатах.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случаях, когда в теле-носителе закреплены один или два ротора, вращение которых зависит от времени. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. В задаче о движении гиростата с двумя роторами получены две формы редуцированных уравнений, основанные на различном выборе базиса.

2. Предложены методы исследования условий существования прецессионных движений гиростата. В задаче о движении гиростата с двумя роторами применены два метода: модифицированный метод инвариантных соотношений и метод, основанный на использовании первого интеграла.

3. Получены четыре новых решения уравнений маятниковых движений гиростата. Два решения построены в задаче о движении гиростата с двумя роторами и описываются эллиптическими функциями времени. Два решения найдены в задаче о движении гиростата с одним ротором, они характеризуются рациональными зависимостями скорости собственного вращения от тригонометрических функций угла собственного вращения.

4. Исследованы условия существования регулярных прецессий гиростата с двумя роторами в поле силы тяжести. Установлены два решения уравнений движения, одно из которых описывается тригонометрическими полиномами первого порядка, а второе — отношением тригонометрических полиномов третьего и второго порядков.

5. Рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий первого и второго типа. В случае, когда на теле закреплен один ротор, проведена редукция уравнений Кирхгофа-Пуассона, приведены примеры разрешимости редуцированных уравнений. В случае двух несомых роторов получено решение уравнений движения в элементарных функциях времени.

6. Изучены классы прецессионно-изоконических движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. Построены новые решения уравнений движения гиростата с одним и двумя роторами в обобщенных силовых полях.

7. Выполнен анализ зависимости компонент гиростатического момента от времени и проведена их классификация в зависимости от типов прецессий.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Возняк А. А. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, Г. А. Котов // Вісн. Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. — Донецк. — 2013. — Вып. 2. — С. 27 – 36.

2. Горр Г. В. О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора / Г. В. Горр, Г. А. Котов // Механика твердого тела. — 2015. — Вып. 45. — С. 40 – 50.

3. Котов Г. А. О новых классах движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г. А. Котов // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2012. — Т. 25. — С. 133 – 140.

4. Котов Г. А. Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом / Г. А. Котов // Механика твердого тела. — 2013. — Вып. 43. — С. 79 – 89.

5. Котов Г. А. Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа / Г. А. Котов // Механика твердого тела. — 2014. — Вып. 44. — С. 59 – 66.

6. Котов Г. А. Регулярная прецессия гиростата, несущего два ротора / Г. А. Котов // Тр. ИПММ. — 2015. — Т. 29. — С. 86 – 94.

7. Мазнев А. В. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. — Донецк. — 2012. — Вып. 1. — С. 79 – 83.

8. Мазнев А. В. Движение твердого тела с некоторыми ограничениями скоростей собственного вращения и прецессии гиростата / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // Матеріали наукової конференції професорсько–викладацького складу, наукових співробітників і аспірантів Донецького нац. університету за підсумками н.–д. роботи за період 2007–2008 рр. — Донецк. — 2009. — Т. 1. — С. 43.

9. Мазнев А. В. Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // XV international conference, DSMSI, май 25-27, 2011. — Киев. — 2011. — С. 296.

10. Котов Г. А. Об одном классе прецессионных движений гиростата / Г. А. Котов // Современные тнденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2016: V международная научно-практическая интернет–конференция, 27 мая 2016. — Донецк: ГОУ ВПО "ДонНУЭТ". — 2016. — С. 11 – 12.

АННОТАЦИЯ

Котов Г.А. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", ДНР, Донецк, 2016.

В диссертации рассмотрены прецессионные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда на теле-носителе закреплены один или два ротора, вращение которых зависит от времени. Предложены два подхода в исследовании решений дифференциальных уравнений класса Кирхгофа-Пуассона, основанные на использовании базиса, связанного с характерными векторами прецессий, и базиса, определяющего направление гиростатического момента.

На основании первого подхода исследованы классы движений гиростата с одним ротором. Особенностями построенных решений является структура скорости собственного вращения и функции гиростатического момента.

Во втором подходе при изучении движений гиростата с двумя вращающимися роторами получена новая форма дифференциальных уравнений, допускающая применение метода инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений. Построенные классы прецессионных движений описываются элементарными или эллиптическими функциями времени, интегралами от эллиптических функций.

Ключевые слова: гиростат, прецессия, переменный гиростатический момент.

G.A. Kotov. Precession motions of a gyrostat with variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces. – Manuscript.

Thesis for a candidate degree (physical and mathematical sciences) by speciality 01.02.01 – the theoretical mechanics. – Donetsk National University, DPR, Donetsk, 2016.

Precession motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces in the case where the body carries one or two rotors which rotation depends on time were considered in this thesis. Two methods for the investigation of the Kirchhoff-Poison differential equations solutions were suggested. These methods based on using basis of characteristic vectors of precession and basis setting direction of gyrostatic moment.

On the base of the first method classes of motions of a gyrostat with one rotor were investigated. The features of obtained solutions are the structure of self-rotation velocity and function of gyrostatic moment.

The new form of differential equations of motions of a gyrostat with two rotors were obtained on the base of second method. This form accepts the method of invariant relations for nonautonomous differential equations. Builded classes are described by elementary and elliptic functions of time and by integrals of elliptic functions.

keywords gyrostat, precession, variable gyrostatic moment.