МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГУ «Институт прикладной математики и механики»

На правах рукописи

УДК 531.38

ПИЛПАНИ ЮЛИЯ ЮРЬЕВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

01.02.01 – ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк – 2016

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк.

Научный руководитель (консультант):	Доктор физико-математических наук, доцент **Мазнев Александр Владимирович,** Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», проректор по научно-педагогической и учебной работе.
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор **Илюхин Александр Алексеевич**, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)», профессор кафедры математики, Россия, г.Таганрог.
	Кандидат физико-математических наук, доцент **Игнатова Екатерина Анатольевна**, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «ДонГУЭТ», доцент кафедры высшей и прикладной математики, г.Донецк.
Ведущая организация:	**Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова**

Защита состоится « __ » _________ 2016 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 01.013.01 при Институте прикладной математики и механики по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 309. Телефон: +38 (062) 311 03 91, факс: +38 (062) 311 02 85, e-mail: mtt@iamm.su

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГУ «Институт прикладной математики и механики» по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 209 сайт ГУ «Институт прикладной математики и механики»: www.iamm.su.

Автореферат разослан «___» марта 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 01.013.01 Ю. Кон Ю.Б. Коносевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время развитие исследований задач динамики твердого тела происходит во многих направлениях, так как современные конструкции (роботы, манипуляторы, гироскопические приборы и другие объекты техники) представляют собой сложные системы. Используемая вначале модель абсолютно твердого тела долгое время оставалась основной моделью в описании движений твердого тела с неподвижной точкой. На этой модели основывались работы Ж. Даламбера, Л. Эйлера, Л. Пуансо, Ж. Лагранжа и других ученых. Значительный вклад в динамику твердого тела внесли русские ученые С.В. Ковалевская, Н.Е. Жуковский, А.М. Ляпунов, Д.Н. Горячев, В.А. Стеклов, С.А. Чаплыгин.

Для более полного описания свойств движений механических систем в работах Ж. Лиувилля, У. Томсона, Н.Е. Жуковского, В.В. Румянцева, П.В. Харламова применялась модель гиростата (система тел, состоящая из основного тела произвольной формы и несомых тел симметричной формы). В процесе моделирования движения гиростата учитывались более сложные силовые воздействия (например, потенциальные и гироскопические силы) и более общая среда движения (например, идеальная жидкость). Задачи динамики гиростата в указанных предположениях изучались в работах Г. Кирхгофа, А. Клебша, А.М. Ляпунова, В.А. Стеклова, П.В. Харламова, В.В. Румянцева, В.Н. Рубановского, Х.М. Яхьи, А.М. Ковалева, Г.В. Горра и других.

Развитие геометрических исследований в истолковании движения тела, начало которым положили Л. Пуансо, М. Кулах, В. Гесс, осуществил П.В. Харламов. Под его руководством А.М. Ковалев, Г.В. Горр, М.П. Харламов, Е.И. Харламова, И.Н. Гашененко и другие получили значительные результаты в исследовании свойств движения тела и гиростата. Созданы не только наглядные визуальные средства представления движения (М.П. Харламов, А.П. Харламов), но и были предложены новые формы кинематических уравнений П.В. Харламова в параметрах Родрига–Гамильтона (Г.В. Горр, А.М. Ковалев) и в переменных, которые не содержат производных от угловой скорости (Г.В. Горр).

Большую роль в получении новых свойств интегрируемости уравнений динамики гиростата играют новые формы уравнений (первая и вторая формы уравнений П.В. Харламова, интегро–диференциальное уравнение Е.И. Харламовой, уравнения А.И. Докшевича).

Актуальность построения частных решений уравнений движения гиростата связано не только с тем, что уравненя Эйлера–Пуассона и уравнения Кирхгофа–Пуассона неинтегрируемы в квадратурах (С.Л. Зиглин, В.В. Козлов, Д.А.

Онищенко), но и с возможностью провести изучение интегрального многообразия уравнений движения в окрестности известных решений. Результаты в этом направлении получили Е. Меттлер, Г.В. Горр, А.П. Маркеев. Так, например, Г.В. Горр и его ученики (А.З. Брюм, Ю.П. Вархалев, А.В. Мазнев) установили существование асимптотически–равномерных вращений гиростата, асимптотически–маятниковых движений гироскопа Гесса, асимптотически–прецессионных движений различных типов гироскопов как в задаче о движении тяжелого твердого тела, так и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

В монографиях[1,2] приведены результаты, полученные в динамике твердого тела к настоящему времени. В них изложены все построенные решения уравнений движения гиростата, указаны методы интегрирования уравнений движения, подробно изложен метод инварианных соотношений П.В. Харламова, на основе которого получены многие решения уравнений, обсужден первый метод Ляпунова.

Несмотря на многочисленные результаты, посвященные изучению асимптотических решений уравнений динамики движения гиростата, актуальной является задача построения асимптотических решений, которая отвечает предельным прецессионным движениям. Эти движения находят широкое применение в приложениях.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно–исследовательской работы кафедры высшей математики и методики преподавания математики ДонНУ по следующим госбюджетным темам:

- «Метод инвариантных соотношений в построении решений уравнений динамики твердого тела» (№ 0101U005722, Г– 01/38, 1. 01. 2000 г.–31. 12. 2006 г.);
- «Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях» (№ 0107U001773, Г– 07/38, 1. 01. 2007 г.–31. 12. 2012 г.).

Она проводилась в рамках научных исследований, которые выполнены по госбюджетной теме отдела прикладной механики Института прикладной математики и механики НАН Украины:

[1] Гашененко И.Н., Горр. Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наукова думка, 2012. – 401 с.

[2] Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 407 с.

- «Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел» (№ 0111U000484, № III–6–11, 1. 01. 2011 г.–31. 12. 2015 г.).

Цель и задачи исследования. Объектом исследования является задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предмет исследования – асимптотически–прецессионные решения уравнений класса Кирхгофа–Пуассона. Цель исследования – изучение условий существования асимптотически–равномерных движений относительно наклонной оси гиростата и асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата относительно оси симметрии силового поля.

Методы исследования. В диссертации применен первый метод Ляпунова построения асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теория параметрического резонанса для дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

Задачами исследования являются:

1. Выполнение анализа условий существования равномерных вращений, прецессионных движений различных типов в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.
2. Получение уравнения в возмущениях и в вариациях для исследования окрестности решений, отвечающих равномерным и прецессионным движениям гиростата.
3. Поиск первых интегралов уравнений в вариациях и выполнен анализ характеристичных чисел уравнений в вариацях.
4. Анализ структуры рядов Ляпунова в описании асимптотичсеих решений.

Научная новизна результатов:

1. Проведена редукция уравнений в вариациях, соответствующих асимптотически–равномерным вращениям гиростата к системе третьего порядка. Для значений угла нутации из промежутка $(0,\pi)$ на основе теории параметрического резонанса получены условия существования асимптотически–равномерных движений гироскопа Гесса.
2. Рассмотрены два специальных случая асимптотически–равномерных вращений гиростата; один из которых соответствует варианту, когда ось равномерного вращения является главной осью в гиростате, второй отвечает случаю гироскопа Гесса.
3. Разработана общая схема исследования условий существования асимптотически–прецессионных движений гиростата, на основании которой получена новая форма уравнения Хилла.
4. Найдены условия существования асимптотически–прецессионных движений гиростата для случаев, когда предельное движение является регулярной прецессией относительно вертикали.

5. Изучены условия существования асимптотически–прецессионных движений первого и второго типа. Использованы два подхода: первый подход основан на достаточном условии Ляпунова, а второй – на теории параметрического резонанса для систем второго порядка.

6. Рассмотрены условия существования асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата в случае, когда предельное движение является прецессией общего вида.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации могут быть использованы в ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк), в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», в Московском Государственном университете, в Московком авиационном институте в исследовании свойств движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Применение теории параметрического резонанса для систем второго порядка может быть использовано при чтении специальных курсов по аналитической механике и общих курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений в вузах ДНР и России.

Личный вклад соискателя. Результаты опубликованы в 5 статьях в специализированных журналах. Научные результаты, изложенные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично. Три публикации написаны автором диссертации, две статьи опубликованы в соавторстве с научным руководителем доктором физ.–мат. наук А.В. Мазневым. Научному руководителю принадлежит постановка задачи, а автору диссертации принадлежат результаты, посвященные получению достаточных условий существования асимптотически–равномерных и асимптотически–маятниковых движений гиростата.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. Международная научно–техническая конференция «Моделирование, идентификация, синтез систем управления» (г. Донецк, 2010 г.);

2. XV Международная конференция «Динамические системы моделирования и исследование устойчивости» (г. Киев, 2011 г.);

3. XIV Международная научная конференция им. Академика М. Кравчука (г. Киев, 2012 г.);

4. Международная научная конференция «Сучасні проблеми механіки і математики» (г. Львов, 2013 г.).

В полном объеме диссертационная работа докладывалась и обсуждалась на семинаре отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики (руководитель – академик Украины А.М. Ковалев, г. Донецк), на семинаре «Динамика твердого тела» кафедры высшей математики и методики преподавания математики ДонНУ (руководитель – доктор физ.–мат. наук, профессор Г.В. Горр, г. Донецк).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 статьях в специализированных журналах и в 4 тезисах докладов конференций. Работа [6] опубликована под фамилией Анисимова.

Структура и объем диссертации. Диссертация, объемом 148 страниц, состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Список использованных источников состоит из 158 наименований и расположен на 17 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описывается актуальность темы, формулируется цель и задачи исследования, новизна и научное значение полученных результатов.

В первом разделе проведен анализ литературы по теме диссертации.

Второй раздел посвящен изложению методов исследования. Приведены содержательная и математическая постановки задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Изложены методы интегрирования в квадратурах дифференциальных уравнений движения, метод инвариантных соотношений построения решений, первый метод Ляпунова исследования асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, теория параметрического резонанса уравнений второго порядка.

Рассмотрена теорема Ляпунова для уравнений в возмущениях

$$\dot{y} = p(t)y + P(t,y), \tag{1}$$

где $y = (y_1,...,y_n)^T$, $P(t,y) = (P_1,...,P_n)^T$, $p(t)$– периодическая матрица, $P_j(t,y)$– аналитические по y_i функции. Приведена краткая формулировка: Если система первого приближения $\dot{y} = p(t)y$ является правильной системой, а $\lambda_1,...,\lambda_k$ – положительные характеристичные числа этой системы, то система (1) допускает решение вида

$$y_j = \sum_{\left(\substack{m_1+...+m_k=m \\ m=1}\right)}^{\infty} L_j^{(m_1,...,m_k)}(t)\alpha_1^{m_1}...\alpha_k^{m_k} \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i\right)t, \tag{2}$$

где $L_j^{(m_1,...,m_k)}(t)$ – непрерывные функции t, характеристичные числа которых не менее нуля; $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ – малые произвольные постоянные; $m_1,m_2,...,m_k$ – натуральные числа, или нули; ряды (2) сходятся абсолютно и при $t \to \infty$, $y_j \to \infty$.

Данная теорема, а также доказанное Г.В. Горром свойство, о том, что уравнения в вариациях для предельных периодических решений уравнений Кирхгофа–Пуассона имеют четыре нулевых характеристичных числа, использованы в диссертации при изучении асимптотических движений сферического гиростата.

В третьем разделе изучены условия существования асимптотически–равномерных движений относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены результаты, которые существенно обобщают результаты работы[1], поскольку в диссертации применен не только достаточный признак существования положительного характеристичного числа уравнения класса Хилла, предложенный А.М. Ляпуновым, но и теория параметрического резонанса.

Рассмотрена задача о движении гиростата, которая описывается уравнениями Кирхгофа–Пуассона:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\left(B\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)$ – вектор угловой скорости тела–носителя; $\boldsymbol{\nu} = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$ – единичный вектор вертикали; $A = \left(A_{ij}\right)$ – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$ – гиростатический момент, характеризующий движения носимых тел; $\boldsymbol{s} = \left(s_1, s_2, s_3\right)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = \left(B_{ij}\right)$, $C = \left(C_{ij}\right)$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (3) и (4) допускают интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) + \left(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) = k.$$

Условия существования равномерных вращений гиростата $\left(\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{a}\left(\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}\right)\right)$ относительно наклонной оси выписаны при условии произвольных $a_0 \in \left(-1{,}1\right)$

$$s_2 = s_1 = 0, B_{ij} = 0\,(i \neq j), B_{22} = B_{11}, \lambda_1 = -\omega_0 A_{13}, \lambda_2 = -\omega_0 A_{13}, \omega_0 = -\frac{s_3}{B_{11}} \tag{5}$$

и произвольных значений ω_0: $s_2 = s_1 = 0, \quad A_{ij} = 0\,(i \neq j), \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11},$

$$\lambda_2 = a_0 B_{23}, \quad a_0 = \frac{s_3}{C_{33} - C_{11}}.$$

В диссертации для изучения задачи об условиях существования асимптотически–равномерных вращений, полагается $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma},$ где $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = \left(a_0'\sin\omega_0 t, a_0'\cos\omega_0 t, a_0\right)$, $\boldsymbol{\Omega} = \left(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\right)$ и $\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right)$ – векторы возмущений.

Линейная часть уравнений в возмущениях $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ такова

$$\begin{gathered} A\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_0\left(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\Omega} + A\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\gamma}\right) + \boldsymbol{\gamma}\times\left(C\boldsymbol{\nu}^{(0)} - \boldsymbol{s}\right) + \\ +\boldsymbol{\Omega}\times\left(B\boldsymbol{\nu}^{(0)} - \boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{\nu}^{(0)}\times C\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \omega_0\left(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}\right) + \boldsymbol{\nu}^{(0)}\times\boldsymbol{\Omega}. \end{gathered} \tag{6}$$

---

[1] Вархалев Ю. П. Об асимптотически равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси / Ю. П. Вархалев, В. М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43–48.

Система (6) имеет три первых интеграла

$$\omega_0\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)-\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)+C\boldsymbol{\nu}^{(0)}\cdot\boldsymbol{\gamma}=c_1,$$
$$\omega_0\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)+\boldsymbol{\nu}^{(0)}\cdot A\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma}-B\boldsymbol{\nu}^{(0)}\cdot\boldsymbol{\gamma}=c_2,\quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}^{(0)}=c_3. \tag{7}$$

Здесь c_i – произвольные постоянные.

Изучение характеристичных чисел системы (6) на основании интегралов (7) сведено к анализу характеристичных чисел уравнения Хилла. Приведение к уравнению Хилла проведено в три этапа. На первом этапе получена система

$$\begin{gathered}\dot{u}=g_0(t)\left(g_1(t)u+g_2(t)\upsilon+g_3(t)z\right)+g_5(t)\gamma_3,\\ \dot{\upsilon}=\left(g_0(t)h_2(t)-a_0'B_{11}h_3(t)\right)u+\left(a_0'B_{11}g_3(t)-g_0(t)g_1(t)\right)\upsilon+\\ +\left(g_0(t)h_3(t)-a_0'B_{11}a_{33}\right)z+g_6(t)\gamma_3,\\ \dot{z}=-a_0'B_{11}\left(g_1(t)u+g_2(t)\upsilon+g_3(t)z\right),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{\beta}_1=-a_0\left(g_1(t)u+g_2(t)\upsilon+g_3(t)z\right),\\ \dot{\beta}_2=\left(a_0'h_3(t)-a_0h_2(t)\right)u+\left(a_0g_1(t)-a_0'g_3(t)\right)\upsilon+\left(a_0'a_{33}-a_0h_3(t)\right)z,\\ \dot{\gamma}_3=a_0'\left(g_1(t)u+g_2(t)\upsilon+g_3(t)z\right),\end{gathered} \tag{9}$$

где в силу $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A\Omega}=\left(x,y,z\right)$

$$u=x\sin\omega_0t+y\cos\omega_0t,\quad \upsilon=x\cos\omega_0t-y\sin\omega_0t,$$
$$\beta_1=\gamma_1\sin\omega_0t+\gamma_2\cos\omega_0t,\quad \beta_2=\gamma_1\cos\omega_0t-\gamma_2\sin\omega_0t.$$

$g_0\left(t\right),h_0\left(t\right),f_0\left(t\right)$ – тригонометрические многочлены первого порядка, а $g_1\left(t\right),g_2\left(t\right),h_2\left(t\right),\ h_3\left(t\right),g_3\left(t\right),g_5\left(t\right),g_6\left(t\right)$ – тригонометрические многочлены второго порядка.

На втором этапе с помощью интегралов $z+B_{11}\gamma_3=b_1,\ a_0'\beta_1+a_0\gamma_3=b_2,$ $a_0'u-g_0(t)\gamma_3=b_3$, полученных из (7), система (8), (9) преобразована к системе второго порядка

$$\dot{u}=\frac{G(t)+a_0'g_5(t)}{g_0(t)}u+g_0(t)g_2(t)\upsilon,\quad \dot{\upsilon}=\frac{1}{g_0(t)}\left(H(t)u-G(t)\upsilon\right). \tag{10}$$

$$G(t)=g_0(t)\left(g_0(t)g_1(t)-a_0'B_{11}g_3(t)\right),$$
$$H(t)=g_0^2(t)h_2(t)-2a_0'B_{11}g_0(t)h_3(t)+a_0'^2a_{33}B_{11}^2+a_0'g_6(t).$$

Полагая в (10) $u=w\sqrt{-g_0^2(t)g_2(t)}$ ($g_2(t)<0$), в диссертации получено уравнение

$$\ddot{w}+\left[\frac{\left(g_0^2(t)g_2(t)\right)''}{2g_0^2(t)g_2(t)}-\frac{3\left[\left(g_0^2(t)g_2(t)\right)'\right]^2}{4g_0^4(t)g_2^2(t)}+P(t)\right]w=0. \tag{11}$$

Здесь $P(t)$ имеет вид

$$P(t)=\frac{1}{g_0^3(t)g_2(t)}\Big[\left(g_0^2(t)g_2(t)\right)^{\cdot}\left(G(t)+a_0'g_5(t)\right)-$$

$$-g_0^2(t)g_2(t)\left(G(t)+a_0'g_5(t)\right)^{\cdot}-g_0^3(t)g_2^2(t)H(t)-g_0(t)g_2(t)G(t)\left(G(t)+a_0'g_5(t)\right)\Big].$$

При условиях (5) уравнение (11) упрощается

$$\ddot{w}+\frac{Q(t)}{\beta_0^2\left(c\cos 2\omega_0 t-b\right)^2}w=0, \qquad (12)$$

где $Q(t)$ – тригонометрический многочлен четвертой степени. Анализ решений уравнения (11) проведен при условиях

$$a_{22}=a_{11}, \quad a_{23}=0, \quad s_3+2a_{11}B_{11}\left(a_0B_{33}-\lambda_3-\omega_0A_{33}\right)=0. \qquad (13)$$

С учетом (13), вводя новую независимую переменную $\tau=\omega_0 t \quad (\omega_0>0)$, уравнение (12) преобразовано к виду

$$w''+\lambda^2\left(1+\mu\cos 2\tau\right)w=0, \qquad (14)$$

где штрихом обозначена производная по переменной τ ,а параметры λ^2,μ таковы

$$\lambda^2=\frac{1}{2\omega_0^2}\left[2a_{11}^2\beta_0^2+a_0'^2B_{11}^2\left(2a_{11}a_{33}-a_{13}^2\right)\right], \quad \mu=-\frac{a_0'^2a_{13}^2B_{11}^2}{2a_{11}^2\beta_0^2+a_0'^2B_{11}^2\left(2a_{11}a_{33}-a_{13}^2\right)}.$$

Применяя к уравнению (14) теорию параметрического резонанса, найдены два случая неустойчивости решений уравнения (14) в окрестности натуральных значений по λ^2.

$$4-\frac{1}{3}\mu^2+\ldots\le\lambda^2\le 4+\frac{5}{3}\mu^2+\ldots \qquad (15)$$

$$9+\frac{81}{64}\mu^2-\frac{729}{512}\mu^3+\ldots\le\lambda^2\le 9+\frac{81}{64}\mu^2+\frac{729}{512}\mu^3+\ldots \qquad (16)$$

В примерах (15), (16) уравнение (14) имеет частное решение

$$w(t)=c\varphi(t)\mathrm{e}^{-\alpha_0^2 t}, \qquad (17)$$

где c – произвольная постоянная, $\varphi(t)$ – периодическая функция времени. Если параметры задачи удовлетворяют одному из условий (15), (16), то уравнение (14) допускает решение с положительным характеристичным числом. Системы (8), (9), а также исходная система (6), имеют четыре нулевых характеристичных числа и два характеристичных числа разных знаков.

Рассмотрен случай, когда $\boldsymbol{a}$ принадлежит главной оси. Уравнение (12) преобразовано к виду

$$\ddot{w}+\frac{B_{11}^2}{C^2\xi^2}\left(\xi^3+a_1\xi^2+b_1\xi+c_1\right)w=0, \quad \xi=C\left(b-c\cos 2\omega_0 t\right), \quad C=\frac{1}{a_{33}}. \qquad (18)$$

Уравнение

$$f(\xi)=\xi^3+a_1\xi^2+b_1\xi+c_1=0 \qquad (19)$$

будет иметь один действительный корень, $f\left(\dfrac{C}{A}\right)<0,$ если его дискриминант $D>0$.

На основании (19) показано, что существуют такие значения ω_0, при которых $f(\xi)<0$, то есть одно характеристичное число уравнения (18) положительно. Следовательно, и системы (8), (9) и (6) имеют одно положительное характеристичное число. То есть показано существование асимптотически–равномерных вращений гиростата.

Для особого случая $g_0(t)=0$ получено уравнение

$$\ddot{w}+\left[a_0'^2 a_{13}^2 B_{11}^2 \sin^2\omega_0 t + a_0' a_{13} B_{11}\omega_0 \sin\omega_0 t + a_0'^2\left(B_{11}^2\left(a_{11}a_{33}-a_{13}^2\right)+a_{11}\left(C_{33}-C_{11}\right)\right)\right]w=0,$$

с помощью которого, установлены условия существования положительных характеристичных чисел системы (10).

Четвертый раздел содержит результаты исследования асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата. Выполнен анализ предельных классов прецессионных движений сферического гиростата. Рассмотрены условия существования регулярных прецессий, полурегулярных прецессий двух видов, прецессий общего вида.

Предложен общий метод анализа асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата: $A=\mathrm{diag}\left(\mu,\mu,\mu\right)$. Уравнения (3), (4) записаны в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\mu^{-1}\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(B\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\lambda}\right)+\boldsymbol{v}\times\left(C\boldsymbol{v}-\boldsymbol{s}\right)\right],\quad \dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{20}$$

$$\mu\boldsymbol{\omega}^2+\left(C\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{s}\right)\cdot\boldsymbol{v}=2E,\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=1,\quad \left(\mu\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{2}B\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{v}=k. \tag{21}$$

Прецессионные движения гиростата описываются соотношениями

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=a_0\ \left(a_0=\angle\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\right)\right),\quad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{v},\quad \nu_1=a_0'\sin\varphi,\quad \nu_2=a_0'\cos\varphi,\quad \nu_3=a_0. \tag{22}$$

При наличии равенств (22) уравнения из (20) приведены к виду

$$\mu\left(\ddot{\varphi}+a_0\ddot{\psi}\right)=-\dot{\psi}\left(\boldsymbol{\tau}_3\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)-\left(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right),\quad \mu\left(a_0\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\right)=-\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{\tau}_3\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right), \tag{23}$$

$$a_0'^2\mu\dot{\varphi}\dot{\psi}+\dot{\psi}\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)-\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)+\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_4\right)=0, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1=\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{\tau}_2=\boldsymbol{v}-a_0\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{\tau}_3=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{\tau}_4=\boldsymbol{s}-C\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{\tau}_5=\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{v}.$$

Уравнения (23) интегрируются $\dot{\psi}=\dfrac{1}{\mu}\left(f_2(\varphi)-a_0\mu\dot{\varphi}\right),\quad \dot{\varphi}^2=\dfrac{\mu g_2(\varphi)-f_2^2(\varphi)}{a_0'^2\mu^2}$,

где $f_2(\varphi)$, $g_2(\varphi)$ – тригонометрические многочлены второго порядка.

В диссертации в качестве предельных движений приняты три класса прецессий (регулярные, полурегулярные и прецессии общего вида)

Регулярные прецессии характеризуются условиями $\dot{\psi}=m$, $\dot{\varphi}=n$, где m и n – постоянные. При $\boldsymbol{a}=\left(0,0,1\right)$ из (22) следует

$$\omega_1=ma_0'\sin nt,\ \omega_2=ma_0'\cos nt,\ \omega_3=n+ma_0,\ \nu_1=a_0'\sin nt,\ \nu_2=a_0'\cos nt,\ \nu_3=a_0.$$

Общие условия существования регулярных прецессий гиростата для уравнений (20), (21) получены Г.В. Горром и Н.В. Курганским.

Второй класс предельных движений соответствует полурегулярным прецессиям первого и второго типов. Для полурегулярной прецессии первого типа $\dot{\psi}=m$, где m – постоянная и поэтому имеют место уравнения (23), (24), в которых

$\dot{\psi}=m$ и соотношения $\omega_1=ma_0'\sin\varphi,\quad \omega_2=ma_0'\cos\varphi,\quad \omega_3=\dot{\varphi}+ma_0,\quad \nu_1=a_0'\sin\varphi,$ $\nu_2=a_0'\cos\varphi,\quad \nu_3=a_0.$

Условия существования таких прецессий указаны Н.В. Курганским.

Выделены два случая рассматриваемых движений. В первом случае $a_0=0$ и $\sin\varphi=1-2\,\mathrm{sn}^2(\rho t,k_*),\quad \cos\varphi=-2\,\mathrm{sn}(\rho t,k_*)\,\mathrm{cn}(\rho t,k_*),\quad \dot{\varphi}=\rho\,\mathrm{dn}(\rho t,k_*),$ где $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2},\quad k_*=\sqrt{\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}.$

Во втором случае полурегулярной прецессии полагается $a_0\neq 0$ и $\dot{\varphi}=n_1\sin\varphi+n_0,$ где n_1, n_0 – постоянные параметры. Для применения первого метода Ляпунова (1), (2), следует считать $n_0>0$, $n_0>n_1$, то есть $\varphi(t)$– монотонная функция

$$\varphi=2\,\mathrm{arctg}\frac{n_0\,\mathrm{tg}\,\tau}{\sqrt{n_0^2-n_1^2}-n_1\,\mathrm{tg}\,\tau},\quad \tau=t\sqrt{n_0^2-n_1^2}. \tag{25}$$

Ко второму классу прецессий отнесены и прецессии: $\dot{\varphi}=n,\, n=const$. Они характеризуются соотношениями

$$\begin{gathered}\omega_1=a_0'\dot{\psi}\sin(nt+\varphi_0),\quad \omega_2=a_0'\dot{\psi}\cos(nt+\varphi_0),\quad \omega_3=n+a_0\dot{\psi},\\ \nu_1=a_0'\sin(nt+\varphi_0),\quad \nu_2=a_0'\cos(nt+\varphi_0),\quad \nu_3=a_0.\end{gathered} \tag{26}$$

Условия уществования решений (26) для уравнений (23), (24) изучены А.В. Мазневым. Он получил два варианта решений (26), которые объединяет общая структура функции $\dot{\psi}$: $\dot{\psi}=l_0+l_1\sin(nt+\varphi_0).$ Отметим, что в указанных вариантах условия на параметры имеют разную аналитическую структуру.

Третий класс прецессий соответствует прецессии общего вида сферического гиростата: $\dot{\varphi}\neq const, \dot{\psi}\neq const.$ Решение (22) в случае прецессии общего вида имеет вид

$$\begin{gathered}\omega_1=a_0'\dot{\psi}\sin\varphi,\quad \omega_2=a_0'\dot{\psi}\cos\varphi,\quad \omega_3=\dot{\varphi}+a_0\dot{\psi},\\ \nu_1=a_0'\sin\varphi,\quad \nu_2=a_0'\cos\varphi,\quad \nu_3=a_0.\end{gathered} \tag{27}$$

В диссертации изучены два варианта прецессии общего вида. Для первого случая приняты соотношения

$$\dot{\psi}=\frac{1}{\mu}(\beta_0-a_0\mu\dot{\varphi}),\quad \dot{\varphi}=\tilde{\rho}\,\mathrm{dn}(\tilde{\rho}t,\tilde{k}), \tag{28}$$

где β_0,ρ_0 – параметры, $\tilde{k}$ – модуль эллиптической функции $\mathrm{dn}(\tilde{\rho}t,\tilde{k}).$

Второй случай прецесии общего вида характеризуется формулами

$$\dot{\psi}=\kappa_0+\kappa_1\sin\varphi,\ \dot{\varphi}=b_0\sin\varphi+c_0. \tag{29}$$

Здесь $\kappa_0,\kappa_1,b_0,c_0$ – постоянные параметры (полагается $c_0>b_0>0$). Для случаев (28), (29), $\varphi(t)$ – монотонная функция времени, которая может быть принята за вспомагательную переменную, что позволяет применять первый метод Ляпунова. В диссертации учтено, что решения (28), (29) получены при различных условиях на параметры уравнений Кирхгофа–Пуассона.

В этом разделе изложен общий метод исследования асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата. Введены возмущения $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^*(t) + \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\nu}^*(t) + \boldsymbol{\gamma}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\omega}^*(t), \boldsymbol{\nu}^*(t)$ определяются формулами (22). Уравнения (20), с учетом (30) представим так

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu}\Big[\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + \big(\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}\big) \times B\boldsymbol{\gamma} + \big(\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}\big) \times C\boldsymbol{\gamma}\Big], \tag{31}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \big(\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}\big) \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}. \tag{32}$$

Так как при анализе асимптотически – прецессионных движений использован первый метод Ляпунова, то линейная система, вытекающая из (31), (32), представима в виде

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu}\big(\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\gamma}\big), \tag{33}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}. \tag{34}$$

Уравнения (33), (34) имеют первые интегралы

$$\mu\big(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}\big) - \boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \quad \mu\big(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}\big) + \big(\mu\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\tau}_5\big)\gamma = c_3. \tag{35}$$

Введем новые переменные

$$u_1 = \mu\big(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}\big), u_2 = \mu\big(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu}\big), u_3 = \mu\big(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\tau}_3\big), u_4 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{a}, u_5 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}, u_6 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\tau}_3. \tag{36}$$

Из (35), в силу (22), (36), получено

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{a_0'^2\mu}\big(u_1\boldsymbol{\tau}_1 + u_2\boldsymbol{\tau}_2 + u_3\boldsymbol{\tau}_3\big), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2}\big(u_4\boldsymbol{\tau}_1 + u_5\boldsymbol{\tau}_2 + u_6\boldsymbol{\tau}_3\big). \tag{37}$$

На основании (35)–(37) записана система (33), (34) в переменных x_i : $\boldsymbol{x} = \big(x_1,...,\mathrm{x}_6\big)$, введенных согласно формуле

$$\boldsymbol{x} = q(t)\boldsymbol{u}, \tag{38}$$

где

$$q_{13} = 1, \quad q_{24} = 1, \quad q_{36} = 1, \quad q_{41} = \dot{\varphi}, \quad q_{42} = \dot{\psi}, \quad q_{55} = 1,$$

$$q_{44} = -\frac{\big(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1\big)}{a_0'^2}, \quad q_{45} = -\frac{\big(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2\big)}{a_0'^2}, \quad q_{46} = -\frac{\big(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3\big)}{a_0'^2},$$

$$q_{64} = \big(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1\big), \quad q_{65} = \big(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2\big), \quad q_{66} = \big(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3\big), \quad \boldsymbol{b} = \frac{1}{a_0'^2}\Big[\mu\big(\dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}\big) + \boldsymbol{\tau}_5\Big],$$

а остальные элементы матрицы $q(t)$ из (38) равны нулю. Получено

$$\dot{x}_1 = h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu\big(\ddot{\varphi}\dot{\psi} + \dot{\varphi}\ddot{\psi}\big)}{\dot{\varphi}}x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\mu}x_1 - \dot{\psi}x_3, \tag{39}$$

$$\dot{x}_3 = h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3, \quad \dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0, \tag{40}$$

где $R_i(t)$ периодические функции.

Вид системы (39), (40) принципиально отличается от соответствующей системы, рассмотренной Г.В. Горром, Д.И. Думбаем[1], поскольку система (39), (40) позволяет достаточно просто получить редуцированное уравнение Хилла

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} p(t) = \frac{1}{\mu a_0'^2}\Big\{ & \mu a_0'^2\left(\dot\psi^2 - \dot\varphi^2 - a_0\dot\varphi\dot\psi\right) - \left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_1\right) - a_0'^2\left(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_4\right) - \\ & -\frac{1}{\mu}\left[\left(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)^2 + \left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)^2 - 2a_0\left(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)\right] + \\ & +\dot\varphi\left[\left(\boldsymbol{\tau}_2\cdot B\boldsymbol{\tau}_1\right) - 2a_0'^2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)\right] - \dot\psi\left[\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdot B\boldsymbol{\tau}_1\right) + a_0'^2\left(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5\right)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Для применения уравнения (41) с функцией (42) необходимо учесть, что во всех рассмотренных решениях компоненты матрицы $\boldsymbol{B}$ подчинены условиям $B_{12} = 0,\ \ B_{22} = B_{11}$. С учетом этих равенств функция $p(t)$ имеет представление $p(t) = \dfrac{1}{\mu^2 a_0'^2}\left[a_0'^2\dot\varphi\left(L_1\cos\varphi + L_1'\sin\varphi + L_0\right) + F_2(\varphi)\right]$. Здесь L_1, L_1', L_0 – параметры, а через $F_2(\varphi)$ обозначен тригонометрический многочлен второго порядка.

В диссертации разработана методика применения уравнений (39), (40) для анализа асимптотически–прецессионных движений. Суть ее состоит в том, что требование условия $p(t) \le 0$ в силу результатов Ляпунова позволяет указать общий вид решения уравнения (41) с положительным характеристичным числом: $x_2(t) = \mathrm{e}^{-\beta^2 t}\psi(t)$ ($\psi(t)$ – периодическая функция времени). Тогда в силу (39), (40) $x_3(t) = \dot\varphi(t)\displaystyle\int_t^\infty \frac{h_{32}(t)\psi(t)\mathrm{e}^{-\beta^2 t}}{\dot\varphi(t)}dt,\quad x_1(t) = \mu\left(\dot x_2(t) + \dot\psi(t)x_3(t)\right)$. Так как $x_4 = c_1,\ x_5 = c_2,\ x_6 = c_3$ из (38) определим $\boldsymbol{u} = q^{-1}(t)\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0\right)$, а в силу (37) устанавливаем, что линейная система (33), (34) допускает решение в виде рядов Ляпунова $\Omega_i = \displaystyle\sum_{m_1=1}^{\infty} L_i^{(m_1)}(t)c^{m_1}\mathrm{e}^{-\beta^2 m_1 t},\quad \gamma_i = \sum_{m_2=1}^{\infty} M_i^{(m_2)}(t)c^{m_2}\mathrm{e}^{-\beta^2 m_2 t}$, где c – произвольная постоянная, функции $L_i^{(m_1)}(t),\ M_i^{(m_1)}(t)$ имеют неотрицательные характеристичные числа. Таким образом, движение гиростата обладает свойством асимптотичности. Предельное движение является прецессией гиростата относительно вертикали.

Пятый раздел посвящен исследованию условий существования некоторых класов регулярных, полурегулярных прецессий и прецессий общего вида.

Регулярные прецессии $\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{\nu} = \left(a_0'\sin nt,\ a_0'\cos nt,\ a_0\right)$ изучены при условиях

---

[1] Горр Г.В., Думбай Д.И. Об асимптотически–прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики / Г.В. Горр. Д.И. Думбай // Механика твердого тела. – 1994.– Вып. 26 (I). – С. 20–28.

$$B_{12}=B_{23},\quad B_{11}=B_{22},\quad \boldsymbol{\lambda}=\left(a_0B_{13},\,0,\,a_0B_{33}\right),\boldsymbol{s}=\left(-a_0mB_{13},\,0,\,a_0C_{33}\right),$$
$$a_0C_{11}=m^2\mu+B_{11}\left(a_0m+n\right),\quad C_{12}=C_{23},\quad C_{22}=C_{11}.$$

На основании метода, изложенного выше и уравнений (39), (40), получена система уравнений

$$\dot{x}_1=\frac{1}{\mu}\left[a_0'^2B_{13}^2\sin^2 nt+a_0\mu B_{13}\left(n+ma_0\right)\sin nt+h_0\right]x_2,\quad \dot{x}_2=\frac{1}{\mu}x_1-mx_3,$$
$$\dot{x}_3=\frac{1}{\mu}\left[\mu\left(m-a_0n\right)+a_0'^2B_{11}+a_0a_0'B_{13}\sin nt\right]x_2. \tag{43}$$

При $B_{13}=0$ система (43) становится системой с постоянными коэффициентами, для нее характеристическое уравнение имеет вид $\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{h_0}{\mu^2}-mh_1\right)\right]=0,$ где h_0,h_1 – постоянные параметры. Полагая $\frac{h_0}{\mu^2}-mh_1>0,$ выписано решение системы (43) с положительным характеристичным числом $x_1=-\frac{h_0c}{\mu\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\varepsilon_0t},\quad x_2=c\mathrm{e}^{-\varepsilon_0t},\quad x_3=-\frac{h_1c}{\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\varepsilon_0t},$ где $\varepsilon_0>0.$ Для построения асимптотических решений уравнений в возмущениях для регулярных прецессий в качестве первого приближения рассмотрен вектор $\boldsymbol{x}=\frac{c\mathrm{e}^{-\varepsilon_0t}}{\varepsilon_0}\left(-\frac{h_0}{\mu},c\varepsilon_0,-h_1,0,0,0\right)^T.$ Тогда уравнения (31), (32) имеют решение, описывающее класс асимптотических движений гиростата, предельные движения которых являются регулярными прецессиями.

Если $B_{13}\neq 0,$ то из (43) следует

$$\ddot{x}_2+\frac{1}{\mu}\left[\left(mh_1\mu^2-h_0\right)-a_0'B_{13}^2\sin^2 nt-a_0'nmB_{13}\sin nt\right]x_2=0. \tag{44}$$

В диссертации показано, что при выполнении условия $n^2m^2+4\left(mh_1\mu^2-h_0\right)<0,$ уравнение (44) имеет решение с положительным характеристичным числом, что обеспечивает существование асимптотически – прецессионных движений гиростата.

Рассмотрены два класса движений асимптотически – прецессионных движений первого типа

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}=\left(a_0'\sin\varphi,a_0'\cos\varphi,a_0\right). \tag{45}$$

Первый класс определяется условиями на параметры

$$a_0=0,\quad B_{ij}=0,\quad C_{ij}=0\quad (i\neq j),\quad B_{22}=B_{11},\quad C_{22}=C_{11},$$
$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=0,\quad s_1=0,\quad s_2=-m\lambda_3 \tag{46}$$

и зависимостями

$$\varphi(t) = 2\mathrm{am}\,\tau, \quad \sin\varphi = 2\mathrm{sn}\,\tau\,\mathrm{cn}\,\tau, \quad \cos\varphi = \mathrm{cn}^2\tau - \mathrm{sn}^2\tau,$$
$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0^* + 2s_2}{\mu}}\, t, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{c_0^* + 2s_2}{\mu}}\,\mathrm{dn}\,\tau, \tag{47}$$

где c_0^* – параметр.

Система (39), (40) в диссертации представлена в виде

$$\dot{x}_1 = h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu m\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\mu}x_1 - mx_3, \quad \dot{x}_3 = h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3, \tag{48}$$

которая отличается от аналогичной системы, полученной Г.В. Горром и Д.И. Думбаем. В пятом разделе система (48) редуцирована к уравнению

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \tag{49}$$

для случая (46), (47), $p(t)$ имеет вид

$$p(t) = \frac{1}{a_0'^2\mu}\left[2\lambda_3\sqrt{\frac{c_0^* + 2s_3}{\mu_2}}\mathrm{dn}\,\tau - 3s_2\left(\mathrm{cn}^2\tau - \mathrm{sn}^2\tau\right) + \kappa_0\right], \quad \kappa_0 = const. \tag{50}$$

Поскольку эллиптическая функция $\mathrm{dn}\,\tau$ ограничена и содержит в качестве множителя в равенстве (50) величины λ_3 и $\sqrt{c_0^* + 2s_2}$, то при $\lambda_3 < 0$ выбором достаточно больших значений этого параметра $\sqrt{c_0^* + 2s_2}$, можно добиться условия $p(t) \le 0$. Тогда уравнение (50) будет иметь решение с положительным характеристичным числом β_0^2: $x_2(t) = c\psi(t)\mathrm{e}^{-\beta_0^2 t}$, где c – произвольная постоянная, $\psi(t)$ – периодическая функция с периодом равным периоду функций (47). Функции $x_1(t)$, $x_3(t)$ найдем из второго и третьего уравнений системы (48), а для функций $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ принимаем нулевые значения. Данное первое приближение служит основой для построения рядов Ляпунова.

Второй класс полурегулярных прецессий первого типа характеризуется функцией (25), которая содержится в первом равенстве из (45). В диссертации на основе общего метода получено уравнение Хилла (49), где

$$p(t) = \frac{1}{a_0'^2}\left[-\frac{2a_0'^4\lambda_1^2}{a_0^2}\sin^2\varphi + 3a_0'^3\lambda_1 B_{11}\sin\varphi + a_0'^4\mu\left(C_{22} - C_{33}\right) + B_{11}B_{33}\left(a_0'^4 - a_0^4\right) - a_0'^4 B_{11}^2\right]$$

и указано условие существования у уравнения (49) решения с положительным характеристичным числом.

Рассмотрен класс полурегулярных прецессий второго типа

$$\boldsymbol{\omega}^* = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{v}^*, \quad \boldsymbol{v}^* = \left(a_0'\sin nt, a_0'\cos nt, a_0\right), \tag{51}$$

который для уравнений (20) получен А.В. Мазневым. Показано, что переменные x_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}_1 = h_{12}(t)x_2 + \mu\ddot{\psi}x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\mu}x_1 - \dot{\psi}x_3, \quad \dot{x}_3 = h_{32}(t)x_2. \tag{52}$$

Параметры уравнений Кирхгофа–Пуассона и параметры прецессий (51) приняты в виде

$$B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_1^2 = \mu\left(C_{22} - C_{11}\right), \quad s_3 = a_0\left(C_{33} - C_{22}\right) - nB_{11} - \frac{3n\mu}{\lambda_1}\left(s_1 + \lambda_1 n a_0\right), \tag{53}$$
$$n = -\frac{1}{2\mu}\left[\lambda_3 + a_0\left(B_{11} - B_{33}\right)\right], \quad \dot{\psi} = -\frac{1}{\lambda_1\mu}\left(\mu s_1 + \mu\lambda_1 n a_0 + \lambda_1^2 a_0' \sin nt\right).$$

Из системы (52) получен аналог уравнения (49), где в силу (53) $p(t) = \dfrac{1}{a_0'^2\mu}\left(Q_2 \sin^2 nt + Q_1 \sin nt + Q_0\right)$, $\quad Q_2 = a_0'^2\left(C_{22} - C_{11}\right) > 0.$ Значения параметров Q_1, Q_0 зависят от параметров задачи и, в частности, от величин λ_1, λ_3. Показано, что при условии $C_{33} \geq \max\left\{Q_2 + Q_1 + \tilde{Q}_0, Q_2 - Q_1 + \tilde{Q}_0\right\}$, уравнение (49) имеет решение с положительным характеристичным числом. Система (52) тоже имеет решение с положительным характеристичным числом. Этим же свойством обладает и система (39), (40) и поэтому существуют асимптотически–прецессионные движения гиростата, для которых предельным движением является полурегулярная прецессия второго типа.

В диссертации при исследовании прецессии второго типа применена и теория параметрического резонанса. Рассмотрен случай, аналогичный варианту (53), то есть полагается, что $\dot{\psi} = \gamma_0 + \gamma_1 \sin nt,$ где γ_0, γ_1 – параметры. Получено уравнение Хилла

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \; p(t) = \beta_0 + \beta_1 \sin\left(nt + \varphi_0\right) + \beta_2 \sin^2\left(nt + \varphi_0\right), \tag{54}$$

где β_1– параметры.

Для использования теории параметрического резонанса полагаем, что параметры задачи удовлетворяют условияю $4C_{13}^2 - \left(C_{33} + 3C_{22} - 4C_{11}\right)\left(C_{22} - C_{11}\right) > 0,$ $C_{22} - C_{11} > 0.$ Вводя в (54) малый параметр $\varepsilon = a_0'$ и параметр $\lambda = \dfrac{4C_{13}^2}{n^2\lambda_1^2}$, уравнение из (54) преобразовано к виду
$y'' + \lambda^2\left[1 + \varepsilon\left(\kappa_1 \sin\tau + \varepsilon\kappa_2 \cos\tau + \varepsilon^2\kappa_2' \sin\tau + \varepsilon^4\kappa_4 \cos 2\tau + ...\right)\right]y = 0,$ где κ_i, κ_i' – постоянные параметры. Установлено два случая

$$1-\frac{\kappa_1^2+6\kappa_2}{12}\varepsilon^2+...\le\lambda^2\le 1+\frac{5\kappa_1^2+6\kappa_2}{12}\varepsilon^2+...$$
$$4+\frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2+\left(R-\frac{16}{15}\kappa_1^2\kappa_2\right)\mu^4+...\le\lambda^2\le 4+\frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2+\left(R+\frac{4\kappa_1^3\kappa_2}{3}+2\kappa_2^2\right)\mu^4+..., \qquad (55)$$

$\left(10\kappa_1^3+15\kappa_2+8\kappa_1^2>0\right)$, для которых уравнение из (54) имеет решение с положительным характеристичным числом.

Условия (55) позволяют получить ряды Ляпунова для описания асимптотически–прецессионных движений второго типа.

В заключении пятого раздела исследованы движения, которые отвечают предельным движениям класса прецессии общего вида. Использован общий метод раздела 4. Приняты условия существования прецессий общего вида, полученные А.В. Мазневым

$$B_{ij}=0 \quad (i\ne j),\quad B_{11}=B_{22},\quad C_{12}=0,\quad C_{11}=C_{22},\quad s_1=\frac{C_{13}}{3a_0}\left(3a_0^2-a_0'^2\right),$$
$$s_2=\frac{C_{23}}{3a_0}\left(3a_0^2-a_0'^2\right),\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_1=0,\quad k=2a_0\lambda_3-\frac{3}{2}\left(a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33}\right). \qquad (56)$$

Зависимости $\psi(t),\varphi(t)$ определяются из уравнений

$$\dot\psi=\frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_0-a_0\mu\dot\varphi\right),\quad \dot\varphi^2=\beta_0+\beta_1\cos\varphi, \qquad (57)$$

где $\varepsilon_0,\beta_0,\beta_1$ – постоянные параметры. Из уравнений (57) получено

$$\dot\varphi=2\sigma_0\,\mathrm{dn}\left(\sigma_0 t,k_*\right),\quad \sin\varphi=-1+2\,\mathrm{sn}^2\left(\sigma_0 t,k_*\right),$$
$$\cos\varphi=2\,\mathrm{sn}\left(\sigma_0 t,k_*\right)\mathrm{cn}\left(\sigma_0 t,k_*\right),\quad \dot\psi=\frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_0-2a_0\mu\sigma_0\mathrm{dn}\left(\sigma_0 t,k_*\right)\right), \qquad (58)$$

где σ_0,k_* – параметры.

В силу (58) решение (27) периодическое и оно может быть принято в качестве предельного движения гиростата. Используя условия (56) уравнение Хилла (41), (42) приведено к виду (49), где

$$p(t)=\frac{1}{\mu}\left[2L_0\sigma_0\,\mathrm{dn}\left(\sigma_0 t,k_*\right)+2\mu\sigma_0^2\left(12a_0^2-1\right)\mathrm{dn}^2\left(\sigma_0 t,k_*\right)+S_0\right]. \qquad (59)$$

Здесь $L_0=-2\lambda_3\left(a_0^2+1\right)+a_0a_0'^2B_{11}+a_0\left(3+a_0^2\right)B_{33}$, а параметр S_0 зависит от параметров задачи.

В диссертации показано, что при условиях $\mathrm{arctg}\sqrt{11}\le\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$,

$\lambda_3 > \dfrac{a_0}{2\left(a_0^2+1\right)}\left[a_0'^2 B_{11} + \left(3+a_0^2\right)B_{33}\right]$, уравнение Хилла (49) с функцией (59) имеет решение с положительным характеристичным числом (17). Из системы (48) можно получить $x_1(t)$, $x_3(t)$. Выпишем, например, функцию $x_3(t) = c\,\mathrm{dn}\left(\sigma_0 t, k_*\right)\int\limits_t^\infty \dfrac{h_{32}(t)\varphi_1(t)\mathrm{e}^{-\alpha_0^2 t}}{\mathrm{dn}\left(\sigma_0 t, k_*\right)}dt.$ Характеристичное число этой функции не меньше числа α_0^2. Таким образом, для системы (48) выполнено условие Ляпунова. Тогда нелинейная система (31) допускает асимптотическое решение, описывающее асимптотически–прецессионное движение гиростата.

В диссертации рассмотрен и случай, когда параметр θ_0 удовлетворяет условию $0 < \theta_0 < \arccos\dfrac{1}{\sqrt{12}}$. Для него указаны дополнительные условия существования асимптотически–прецессионных движений гиростата.

В заключении к диссертации сформулированы выводы о полученных результатах и перспективы дальнейших исследований.

ВЫВОДЫ

Диссертация посвящена исследованию асимптотических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Отметим наиболее важные научные результаты, полученные в диссертации.

1. Указаны условия существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси в случаях, когда, либо параметр нутации гиростата принимает произвольное значение из промежутка $(0,\pi)$, либо произвольно значение угловой скорости ω_0.

2. Выполнена редукция уравнений ввариациях,описывающих асимптотически–равномерные движения, к системе третьего порядка. Показано, что из этой системы можно получить уравнение класса Хилла не прибегая к анализу сопряженной системы.

3. Для случая $a_0 \in \left(-1,1\right)$ и условиях на распределение масс гиростата класса Гесса с помощью теории параметрического резонанса выполнен анализ условий существования решений в виде рядов Ляпунова, характеризующих асимптотически–равномерное движение гиростата.

4. Для особого случая $\left(g_0(t)=0\right)$на основе достаточного условия Ляпунова существования решения уравнения Хилла с положительным характеристичным числом, получены условия существования, асимптотических к равномерному вращению движений гиростата.

5. Исследованы условия асимптотически–равномерных вращений гиростата для вариантов, когда ось вращения является главной осью эллипсоида инерции и особого случая $g_0(t)=0$.

6. Установлены условия существования асимптотически–прецессионных движений для случая, когда предельное движение является регулярной прецессией сферического гиростата.

7. Получены два класса асимптотически–прецессионных движений гиростата первого типа. Первый класс характеризуется тем, что предельное движение описывается эллиптическими функциями Якоби. Второй класс предельных движений определяется элементарными функциями времени. Условия существования соответствующих асимптотических движений записаны в виде неравенств на параметры задачи.

8. Исследованы условия существования асимптотически–прецессионных движений второго типа.

9. Найдены новые классы асимптотически–прецессионных движений гиростата, для которых предельным движением служит прецессия общего вида.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мазнев А. В. Асимптотически–равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 2. – С. 237–246.

2. Мазнев А. В. О редукции уравнений в вариациях задачи об асимптотически–прецессионных движениях / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 150–160.

3. Пилпани Ю. Ю. Об одном классе асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю.Ю. Пилпани // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 177 – 183.

4. Пилпани Ю.Ю. Асимптотически–прецессионные движения второго типа сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Вісн. Донецького ун – ту. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 91 – 96.

5. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически–прецессионные движения сферического гиростата в случае прецессии общего вида / Ю. Ю. Пилпани // Вісн. Донецького ун – ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 69 – 74.

6. Мазнев А. В. Асимптотически–равномерные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Анисимова // Моделирование, идентификация, синтез систем управления: сб. тез. 13 Междунар. научно–техн. конф., (12–19 сен. 2010 г.). – Москва–Донецк, 2010. – С. 64.

7. Пилпани Ю. Ю. Об одном классе асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Динамічні системи моделювання та

дослідження стійкості: тези 15 Міжнар. Конф. (м. Київ, 25 – 27 трав. 2011 р.). – Київ, 2011. – С. 115.

8. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически–прецессионные движения второго типа сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю. Ю. Пилпани // Тези 14 Міжнар. конф. ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 19 – 21 квіт. 2012 р.). – Київ, 2012. – С. 348.

9. Пилпани Ю. Ю. Асимптотически–прецессионные движения сферического гиростата в случае прецессии общего вида / Ю. Ю. Пилпани // Сучасні проблеми механіки і математики: тези Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 21–25 трав. 2013 р.). – Львів, 2013. – С. 148.

АННОТАЦИИ

Пилпани Ю.Ю. Ассимптотически–прецессионные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.02.01. – теоретическая механика. – ГУ «Институт прикладной математики и механики», ДНР, Донецк, 2016.

На основе первого метода Ляпунова и теории параметрического резонанса уравнений второго порядка получены новые классы асимптотически–равномерных вращений и асимптотически–прецессионных движений гиростата. При исследовании асимптотитечеси–равномерных вращений гиростата предполагалось, что распределение масс тела–носителя произвольно. Изучение асиптотически–прецессионных движений проведено в случае сферического по распределению масс тела–носителя.

В диссертации предложен новый метод редукции уравнений в вариациях для рассматриваемых классов движений к уравнению Хилла. Преимущество его перед другими методами состоит в том, что в данном методе не используется трудоемкие преобразования к сопряженным системам дифференциальных уравнений, что позволяет находить условия существования характеристичных чисел исходной системы.

Условия существования асимптотически–равномерных вращений произвольного по распределению масс гиростата получены в случаях, когда, либо параметр нутации, либо параметр угловой скорости равномерного вращения произвольны. Подробно рассмотрен данный класс движений для гироскопа Гесса и для тела–носителя специальной формы.

Получены условия существования асимптотически–прецессионных движений сферического гиростата. Рассмотрены три типа предельных прецессий: регулярные прецессии, полурегулярные прецессии двух классов, прецессии общего

вида. Установлено, что все классы асимптотически–прецессионных движений гиростата описываются рядами Ляпунова, которые зависят от одной произвольной постоянной.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, первый метод Ляпунова, параметрическмй резонанс, характеристичное число.

J. Yu. Pilpani. Asymptotically–precession motions of gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces. – Manuscript.

Thesis for a candidate degree (physical and mathematical sciences) by speciality 01.02.01 – the theoretical mechanics. – State Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics" of the Ministry of Education and Science, Donetsk People's Republic, Donetsk, 2016.

On the basis of the first Lyapunov method and the theory of parametric resonance of second–order equations a new classes of asymptotically–uniform rotation and asymptotically–precession motions of gyrostat are got. In the study of asymptotically–uniform rotation of gyrostat it assumed that the distribution of mass of body–media was arbitrarily. Learning asymptotically–precession motions in the case of the spherical distribution of mass of body–carrier is researched.

A new method of reduction of variational equations for class of movement to the Hill equation in thesis is offered. Its advantage over other methods is that this method does not use labor–intensive conversion to the dual system of differential equations that allows us to find conditions of the existence of characteristic numbers of the original system.

Conditions of existence of asymptotically–uniform rotation on arbitrary mass distribution of gyrostat are obtained in cases where a parameter of nutation or parameter of angular velocity of uniform rotation are arbitrary. This class of motions for Hess gyroscope and body carrier of the special form is considered in detail.

The conditions of existence asymptotically–precession motions of spherical gyrostat are got. Three types of limit precession are considered: regular precessions, semiregular precessions of the two classes, the precession of the general form. All classes asymptotically–precession motions of gyrostat described by Lyapunov rows depending on one arbitrary constant are found.

Key words: gyrostat, gyrostatic moment, first Lyapunov method, parametric resonance, discriminating number.