

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"

На правах рукописи

Ткаченко Дмитрий Николаевич

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ
В ЗАДАЧАХ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА С ПОСТОЯННЫМ
И ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ**

01.02.01 — "Теоретическая механика"

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк — 2018

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет" Министерства образования и науки ДНР, г. Донецк.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Мазнев Александр Владимирович,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет", профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики, г. Донецк;

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Илюхин Александр Алексеевич
Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)", профессор кафедры математики, г. Таганрог, Россия;

кандидат физико-математических наук, доцент
Игнатова Екатерина Анатольевна
Государственная организация высшего профессионального образования "Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила Туган-Барановского", доцент кафедры высшей математики и прикладной математики, г. Донецк;

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)".**

Защита состоится "22" мая 2018 г. в часов 15:00 на заседании диссертационного совета Д 01.013.01 при ГУ "Институт прикладной математики и механики" по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 309. Телефон +38(062)3110319, факс +38(062)3110285, e-mail: mtt@iamm.su

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГУ "Институт прикладной математики и механики" по адресу: 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 209, сайт ГУ "Институт прикладной математики и механики": www.iamm.su

Автореферат разослан «___» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета (Д 01.013.01)

Ю.Б. Коносевиц

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена построению и исследованию полиномиальных решений уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, непотенциальных сил класса Лоренца.

Актуальность темы исследования. Актуальность математического моделирования движений современных механических систем с помощью методов теоретической механики обусловлена тем, что среди них можно выделить важные конструкции (роботы, манипуляторы, гироскопы), деформацией элементов которых можно пренебречь. Основными моделями в исследовании таких систем являются модель абсолютно твердого тела и модель системы связанных твердых тел класса гириостат.

Механическая модель гириостата разработана в работах У. Томсона, В. Вольтерра, А. Грея, Н. Е. Жуковского, П. В. Харламова. Практические исследования моделей гириостатов проводились Н. И. Амелкиным, Е. П. Евдокименко, А. В. Алексеевым, А. П. Маркеевым и другими.

Теоретические аспекты в моделировании движений гириостата исследованы в работах В. Вольтерра, Н. Е. Жуковского, В. В. Румянцева, П. В. Харламова и других. Они базируются на фундаментальных результатах Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Л. Лагранжа, С. В. Ковалевской, К. Якоби, Г. Кирхгофа, А. Клебша, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, С. А. Чаплыгина^{1,2}.

Построение инвариантных соотношений, которые бы отвечали актуальным программным движениям, является важной задачей. Эти соотношения могут служить базовыми решениями, с помощью которых, на основании теоремы Пуансо, можно проводить кинематическое истолкование движения гириостата.

Математическая постановка задачи о движении гириостата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона принципиально отличается от математической постановки задачи о движении заряженного и намагниченного гириостата в суперпозиции силовых полей и задачи о движении тяжелого гириостата. Это обусловлено тем, что в первой задаче действующие на гириостат силы не являются гироскопическими. Поэтому указанные уравнения не допускают интеграл энергии.

Большинство решений уравнений Эйлера–Пуассона получено в случае, когда центр масс тела лежит на главной оси эллипсоида инерции. К таким решениям относятся решения В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева и другие¹. Обобщение этих решений в задаче о движении гириостата в поле силы тяжести рассмотрено П. В. Харламовым. Как показал А. Д. Брюно, данные решения могут быть использованы при изучении интегрального многообразия уравнений Эйлера–Пуассона на основе степенной геометрии.

Актуальность исследований задач динамики гириостата подтверждена применением полученных результатов в моделировании конкретных механических явлений (устойчивости Кельтского камня, эффекта космонавта Джанибекова, гироскопического эффекта и других).

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательской работы кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" по следующим госбюджетным темам:

"Метод инвариантных соотношений в построении решений уравнений динамики твердого тела" (N0101V005722; Г-01/38, 1.01.2000-31.12.2006);

"Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях" (N0107V001773; Г-07/38, 1.01.2007-31.12.2012).

¹И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев Классические задачи о движении гириостата. – Киев: Наукова думка, 2012. – 401 с.

²Г. В. Горр, А. М. Ковалев Движение гириостата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 407 с.

Сейчас исследования проводятся в рамках госбюджетной темы отдела прикладной механики ГУ "Институт прикладной математики и механики" Донецкой народной республики:

"Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел" (N0111V000484; N III-6-11, 1.01.2011-31.12.2015); (N0107V001773; г. 07/38, 1.01.2015-31.12.2017).

Цель и задачи исследования.

Объектом исследования являются три задачи о движении гиростата: задача о движении тяжелого гиростата с постоянным или с переменным гиростатическим моментом; задача о движении тяжелого гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Предметом исследования являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона, Ковалевского–Харламова, Кирхгофа–Пуассона и уравнения задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Цель исследования – изучение условий существования полиномиальных решений, которые описывают программные движения гиростата в различных силовых полях; построение указанных решений в замкнутом виде и исследование их аналитических и геометрических свойств.

Задачами исследования являются:

1. Исследование условий существования полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата с постоянным гиростатическим моментом на основе редукции к уравнениям класса Ковалевского–Харламова.
2. Изучение аналитических и геометрических свойств обобщенного класса полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата.
3. Редукция уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям Ковалевского–Харламова.
4. Применение методов степенной геометрии к исследованиям асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата.
5. Классификация степенных разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата для случаев малых и больших значений проекции вектора угловой скорости на барицентрическую ось.

Методы исследования. В диссертации применены методы инвариантных соотношений построения частных решений уравнений динамики твердого тела (Т. Леви-Чивиты³; П. В. Харламова⁴), метод степенной геометрии (А. Д. Брюно⁵), метод годографов Л. Пуансо кинематического истолкования движения.

Научная новизна полученных результатов.

1. Получены новые формы редуцированных уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в трех задачах: в задаче о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом, в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

2. Доказано, что полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева–Чаплыгина в задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела имеют место только в частных случаях решений Ковалевской и Горячева.

³Т. Леви-Чивита, У. Амальди. Курс теоретической механики – В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.

⁴П. В. Харламов Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

⁵А. Д. Брюно Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

3. Исследованы аналитические и геометрические свойства обобщенного класса полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата, описываемого случаем интегрируемости Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской.

4. Проведена классификация асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата, полученных П. В. Харламовым. Установлена связь этих решений с полиномиальными разложениями.

5. Получены новые классы асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата, имеющих место при малых и больших значениях проекции вектора угловой скорости на барицентрическую ось.

6. Построены новые полиномиальные решения уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение и практическое применение, они могут быть использованы в прикладных областях механики.

Результаты исследований могут быть использованы в ГУ "Институт прикладной математики и механики" (г. Донецк) и в ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (г. Донецк) при изучении свойств движения твердого тела с неподвижной точкой, а также при чтении специальных курсов по математическому моделированию движений сложных механических систем.

Личный вклад соискателя. По теме диссертации опубликованы 6 статей в рецензируемых изданиях. Две статьи написаны без соавторства. В [3] автору диссертации принадлежит получение степенных разложений с помощью ЭВМ, И. Н. Гашененко принадлежит классификация степенных разложений в зависимости от типа асимптотики. В статье [2] автору принадлежит результат по исследованию алгебраических условий существования обобщенного полиномиального класса решений уравнений движения гиростата. Г. В. Мозалевской проведен анализ допустимых значений параметров решения. И. Н. Гашененко дано геометрическое истолкование движения гиростата методом Пуансо. В статье [6] автором диссертации получены условия существования полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле и их анализ в случае ньютоновского поля. А. В. Зызе принадлежит постановка задачи о полиномиальных решениях и исследование условий разрешимости системы алгебраических уравнений на параметры задачи. В статье [5] автором проведена редукция исходных уравнений на инвариантных соотношениях, которые характеризуются полиномиальными функциями вспомогательной переменной, и получение одного нового решения. А. В. Зызе принадлежит построение другого частного решения редуцированных уравнений и сведение вспомогательной переменной к гиперэллиптическим функциям времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена применением общепринятых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на:

— XI Международной конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела". – Донецк, 2011;

— Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – Воронеж, 2013;

— VIII Международной научно-технической конференции "Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование" в рамках III форума "Инновационные перспективы Донбасса (ИУСМКМ – 2017)". – Донецк, 2017;

— Международной научно-практической конференции "Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение актуальных проблем". – г. Астрахань, 2017;

— семинарах отдела прикладной и технической механики ГУ "Институт прикладной математики и механики";

— семинарах кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет".

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных статьях в журналах, которые рекомендованы ВАК МОН ДНР и в 4 тезисах докладов научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Объем работы составляет 151 страницу. Диссертация также содержит 6 рисунков, 5 таблиц. Список использованной литературы состоит из 170 источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, формулируются цели и задачи исследования, научная новизна и значение полученных результатов.

В **первом разделе** проведен анализ литературы по теме диссертации.

Второй раздел посвящен рассмотрению уравнений движения гиростата в трех задачах динамики. Выполнен анализ различных форм редуцированных уравнений движения (В. Гесса, П. В. Харламова, А. И. Докшевича). Приведена классификация полиномиальных решений класса Стеклова–Ковалевского–Горячева–Чаплыгина–Харламова и их обобщений в задачах динамики твердого тела. Сформулированы методы интегрирования дифференциальных уравнений динамики (метод К. Якоби, метод инвариантных соотношений Т. Леви-Чивиты, метод П. В. Харламова).

Перед анализом содержания третьего раздела остановимся на описании задач, которые рассматриваются в диссертации.

Первая задача – о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda(t) \cdot \alpha) \times \omega - \dot{\lambda}(t) \cdot \alpha + s \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda(t) \cdot \alpha) \cdot \nu = k, \quad (2)$$

где k – произвольная постоянная.

В уравнениях (1), (2) обозначено: $A\omega$ – момент количества движения гиростата относительно неподвижной точки; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; ω – вектор угловой скорости; $\lambda = \lambda(t)\alpha$ – переменный гиростатический момент, $\lambda(t)$ – дифференцируемая функция времени, α – единичный вектор, неподвижный в теле; s – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; ν – единичный вектор, неподвижный в пространстве и характеризующий направление силы тяжести. Точкой обозначена относительная производная.

Система (1) при $\dot{\lambda}(t) = 0$ переходит в уравнения движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + s \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (3)$$

Уравнения (3) в отличие от (1) допускают три интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2s(e \cdot \nu) = 2E, \quad (4)$$

где E – постоянная.

Вторая задача является обобщением задачи о движении гиростата в поле силы тяжести. Уравнения движения гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского поля, кулоновского и магнитного поля сил можно записать в векторной форме

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + (s \times \nu) + \nu \times C\nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где B и C – симметричные матрицы третьего порядка. Матрица B характеризует гироскопические силы, обусловленные силой Лоренца; матрица C – потенциальные силы, обусловленные силой притяжения и кулоновской силой. Остальные обозначения прежние, как в (1), (2). λ – постоянный гиростатический момент.

Уравнения (5) имеют три первых интеграла

$$\begin{aligned} \nu \cdot \nu &= 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu) = k, \\ A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \nu) &= 2E, \end{aligned} \quad (6)$$

где k , E – произвольные постоянные.

Третья задача – о движении гиростата в магнитном поле. Гиромагнитные явления играют важную роль в исследовании движений приборов в магнитных полях. Одно из таких явлений обусловлено эффектом Барнетта–Лондона, суть которого состоит в следующем. Если нейтральный ферромагнетик (первоначально ненамагниченный) поместить в магнитное поле и придать ему вращение, то в силу эффекта Барнетта он становится намагниченным вдоль оси вращения. Подобное явление имеет место при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона).

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона можно записать в векторном виде

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + B\omega \times \nu + \nu \times (C\nu - s), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (7)$$

где ν – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка.

Уравнения (7) допускают два интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu = k_0, \quad (8)$$

где k_0 – постоянная интеграла площадей.

В **третьем разделе** изучены полиномиальные решения уравнений Н. Ковалевского для динамически симметричных тел. Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом; выполнена редукция исходных уравнений к уравнениям класса Ковалевского–Харламова. Изучены свойства обобщенных типов полиномиальных решений в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

Целью **пункта 3.1** является исследование полиномиальных решений классов В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева и С. А. Чаплыгина в случае динамически симметричного твердого тела.

Уравнения движения тяжелого твердого тела, центр масс которого лежит на первой главной оси эллипсоида инерции, таковы

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} &= (A_2 - A_3)qr, \quad A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)pr - s\nu_3, \\ A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)qp + s\nu_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \quad (10)$$

Здесь p, q, r – компоненты вектора угловой скорости; ν_1, ν_2, ν_3 – компоненты единичного вектора, указывающего направление силы тяжести; $A_i (i = \overline{1, 3})$ – главные моменты инерции тела; s – произведение массы тела, модуля ускорения свободного падения и расстояния от неподвижной точки до центра масс тела. Уравнения (9), (10) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \quad A_1 p \nu_1 + A_2 q \nu_2 + A_3 r \nu_3 = k, \\ A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 - 2s \nu_1 &= 2E, \end{aligned} \quad (11)$$

где k и E – произвольные постоянные.

Если в качестве независимой переменной принять компоненту p и считать $q = q(p)$, $r = r(p)$, то из уравнений (9) и интеграла энергии из (11) следует

$$\nu_1 = \frac{1}{s} \left[\frac{A_1(Q(p) - R(p))}{(A_2 - A_3)} - E \right], \quad \nu_2 = \frac{1}{s} q Q'(p), \quad \nu_3 = \frac{1}{s} r R'(p), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} Q(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_3(A_2 - A_3)}{A_1} r^2(p) + (A_2 - A_1) p^2 \right], \\ R(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2(A_3 - A_2)}{A_1} q^2(p) + (A_3 - A_1) p^2 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

а штрихом обозначена производная по переменной p .

При подстановке выражений (12) во второе и третье уравнения системы (10) имеем

$$\begin{aligned} Q''(p)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2] + Q'(p)[R'(p) + (A_1 - A_3)p] + \\ + A_2 p R'(p) - \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_2 E = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} R''(p)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2] + R'(p)[Q'(p) + (A_1 - A_2)p] + \\ + A_1 p Q'(p) - \frac{A_1 A_3}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_3 E = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу (12) из $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ следует

$$\begin{aligned} A_2(A_2 - A_3)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2](R'(p))^2 + A_3(A_3 - A_2)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2] \times \\ \times (Q'(p))^2 + A_1 A_2 A_3 (Q(p) - R(p) + \frac{A_3 - A_2}{A_1} E)^2 = \frac{A_2 A_3 (A_2 - A_3)^2}{A_1} s^2. \end{aligned} \quad (16)$$

После интегрирования уравнений (14)-(16) зависимость $p(t)$ устанавливаем из первого уравнения системы (9). Уравнения Н. Ковалевского (14)-(16) преобразуем к новой независимой переменной σ :

$$\sigma = p^{1/3}. \quad (17)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \left(\sigma \frac{d^2 Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \left[\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5 \right] + \\ + 3A_2 \sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1 A_2}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_2 E \sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6] \left(\sigma \frac{d^2 R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \left[\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_2)\sigma^5 \right] + \\ + 3A_3 \sigma^6 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1 A_3}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(\sigma) - R(\sigma)) + 9A_3 E \sigma^5 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& A_2(A_2 - A_3)[2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6]\left(\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + A_3(A_3 - A_2) \times \\
& \times [2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6]\left(\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + 9A_1A_2A_3\sigma^4(Q(\sigma) - R(\sigma) + \\
& + \frac{A_3 - A_2}{A_1}E)^2 = \frac{9A_2A_3(A_2 - A_3)^2s^2}{A_1}\sigma^4.
\end{aligned} \tag{20}$$

Г. В. Горр исследовал условия существования у уравнений (18)-(20) решений полиномиального вида по σ :

$$Q(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \dots + a_m\sigma^m, \quad R(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + \dots + b_n\sigma^n. \tag{21}$$

Он показал, что максимальные значения m и n таковы: $m = 6$, $n = 12$, то есть

$$Q(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \dots + a_6\sigma^6, \quad R(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + \dots + b_{12}\sigma^{12}. \tag{22}$$

Им доказано утверждение: решением класса (22) уравнений (18)-(20) является только частное решение С. А. Чаплыгина.

В диссертации исследованы условия существования решений (22) при условии $A_1 = A_2$. Получена система алгебраических равенств на величины a_i ($i = \overline{0,6}$), b_i ($i = \overline{0,12}$), которые являются условиями существования полиномиальных решений. Показано, что для класса полиномиальных решений Стеклова–Ковалевского–Горячева имеет место только частный случай решения С. В. Ковалевской, который определяется условием $A_1 = A_2 = 2A_3$, а для класса С. А. Чаплыгина – частный случай решения Д. Н. Горячева, который характеризуется условием $A_1 = A_2 = 4A_3$.

В пункте 3.2 выведены уравнения класса Ковалевского–Харламова в задаче о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Запишем уравнения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом (1), (2) при условиях

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)(1, 0, 0). \tag{23}$$

Тогда

$$(A_1p + \lambda(t))^\bullet = (A_2 - A_3)qr, \tag{24}$$

$$A_2\dot{q} = [(A_3 - A_1)p - \lambda(t)]r - s\nu_3, \tag{25}$$

$$A_3\dot{r} = [(A_1 - A_2)p + \lambda(t)]q + s\nu_2, \tag{26}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \tag{27}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1p + \lambda(t))\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k. \tag{28}$$

Гиростат представляет собой систему S , состоящую из тела-носителя S_0 и вращающегося относительно барицентрической оси гироскопа S_1 . Будем полагать, что $\lambda(t) = \lambda^*(p(t))$. Следовательно $\dot{\lambda}(t) = \lambda^{*'}(p) \cdot \dot{p}(t)$, где штрих обозначает дифференцирование по p . Для преобразования уравнений (24)-(27) выберем в качестве вспомогательной переменной компоненту p . Из уравнения (24) следует

$$\dot{p} = \frac{q(p)r(p)(A_2 - A_3)}{u'(p)}, \tag{29}$$

где $u(p) = \lambda^*(p) + A_1p$.

Переходя в (24)-(27) к дифференцированию по p , получим

$$(Q(p))' = \frac{2u'(p)}{A_2(A_2 - A_3)}(A_3p - u(p) - \frac{s}{r(p)}\nu_3(p)), \tag{30}$$

$$(R(p))' = \frac{2u'(p)}{A_3(A_2 - A_3)}(u(p) - A_2p + \frac{s}{q(p)}\nu_2(p)), \quad (31)$$

$$\nu_1'(p) = \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)}\left(\frac{\nu_2(p)}{\sqrt{Q(p)}} - \frac{\nu_3(p)}{\sqrt{R(p)}}\right), \quad (32)$$

$$\nu_2'(p) = \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)\sqrt{Q(p)R(p)}}(p\nu_3(p) - \sqrt{R(p)}\nu_1(p)), \quad (33)$$

$$\nu_3'(p) = \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)\sqrt{Q(p)R(p)}}(\sqrt{Q(p)}\nu_1(p) - p\nu_2(p)), \quad (34)$$

где $Q(p) = q^2(p)$, $R(p) = r^2(p)$.

Система уравнений (30)-(34) представляет собой систему дифференциальных уравнений на функции $Q(p)$, $R(p)$, $\nu_1(p)$, $\nu_2(p)$, $\nu_3(p)$, $u(p)$. Система является незамкнутой, поэтому необходимо задавать одну из указанных функций как функцию от p . После интегрирования (30)-(34) зависимость p от t находится из уравнения (29).

Для редукции уравнений (30)-(34) найдем ν_1 из интеграла моментов (28), а ν_2 , ν_3 из (30), (31)

$$\begin{aligned} \nu_1(p) &= \frac{1}{su(p)}[sk - A_2Q(p)\left(\frac{A_3(A_2 - A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)\right) + \\ &+ A_3R(p)\left(\frac{A_2(A_2 - A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)\right)], \\ \nu_2(p) &= \frac{\sqrt{Q(p)}}{s}[R'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)], \\ \nu_3(p) &= \frac{\sqrt{R(p)}}{s}[Q'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставим выражения (35) в систему (33), (34)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}A_3(A_2 - A_3)\frac{R''(p)Q(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_3(A_2 - A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} - \frac{1}{2}A_3R'(p)Q(p) \times \\ &\times \left[\frac{A_2}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u'^2(p)}\right] + \frac{1}{2}Q'(p)\left[\frac{A_2A_3R}{u(p)} + pA_2 - u(p)\right] + \\ &+ \frac{A_3}{A_2 - A_3}R(p)u'(p)\left[1 - \frac{A_3p}{u(p)}\right] + Q(p)\left[-\frac{A_2^2}{A_2 - A_3}u'(p)p + \frac{A_2}{A_2 - A_3}u'(p) + \right. \\ &\left. + A_2 - u'(p)\right] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3}\left[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_3\right] = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}A_2(A_2 - A_3)\frac{Q''(p)R(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_2(A_2 - A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} + \frac{1}{2}A_2Q'(p)R(p) \times \\ &\times \left[\frac{A_3}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u'^2(p)}\right] - \frac{1}{2}R'(p)\left[\frac{A_2A_3Q(p)}{u(p)} + pA_3 - u(p)\right] + \\ &+ \frac{A_2}{A_2 - A_3}Q(p)u'(p)\left[1 - \frac{A_2p}{u(p)}\right] + Q(p)\left[-\frac{A_3^2}{A_2 - A_3}u'(p)p + \frac{A_3}{A_2 - A_3}u'(p) - \right. \\ &\left. - A_3 + u'(p)\right] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3}\left[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_2\right] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В ряде случаев можно использовать уравнение, которое следует из интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ после подстановки в него значений (35). Оно является первым интегралом уравнений (36), (37).

Система (36), (37) является неавтономной системой дифференциальных уравнений на три функции $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$. Так как она не замкнута, то для ее интегрирования необходимо задавать либо одну из функций $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$, либо инвариантное соотношение $f(Q, R, u(p)) = 0$, которое может описывать некоторое программное движение гиростата. После нахождения $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$ зависимость $p(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{p} = \frac{A_2 - A_3}{u'(p)} \sqrt{Q(p)R(p)}. \quad (38)$$

Уравнения (36), (37) не являются простым обобщением уравнений Н. Ковалевского и П. В. Харламова, так как они получены на основании интеграла моментов и поэтому содержат постоянную k и имеют особенность в знаменателе.

В диссертации рассмотрен один специальный случай движения несомого тела. Он характеризуется условием $\boldsymbol{\omega}^* = p\mathbf{i}_1$, ($\boldsymbol{\omega}^*$ – относительная угловая скорость, $\mathbf{i}_1$ – единичный вектор барицентрической оси). Динамические уравнения записаны в виде:

$$\alpha_1 \dot{p} = (A_2 - A_3)qr, \quad A_2 \dot{q} = (A_3 - \alpha_1)pr - s\nu_3, \quad A_3 \dot{r} = (\alpha_1 - A_2)pq + s\nu_2, \quad (39)$$

где $\alpha_1 = A_1 + D$; A_i ($i = \overline{1, 3}$) – главные моменты инерции гиростата, D – момент инерции тела S_1 относительно оси вращения. В силу математической эквивалентности уравнений (9) и (39) в диссертации сделан вывод о том, что решения уравнений (9) задачи о движении тяжелого твердого тела могут быть интерпретированы, как решения системы (39).

В пункте 3.3 рассмотрен обобщенный класс полиномиальных решений уравнений Ковалевского–Харламова вида

$$p = v^2 + p_0, \quad Q(v) = \sum_{i=1}^n a_i v^i, \quad R(v) = \sum_{j=1}^m b_j v^j, \quad (40)$$

где p , $q(v) = \sqrt{Q(v)}$, $r(v) = \sqrt{R(v)}$ – компоненты угловой скорости, v – вспомогательная переменная. Инвариантные соотношения (40), в частности, описывают решение Б. И. Коносевича и Е. В. Поздняковича, а так же решение Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской.

Положим в (3), (4)

$$\mathbf{e} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{s} = s(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0). \quad (41)$$

Рассмотрим уравнения П. В. Харламова записанные в виде

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + a_1 + a_2 \sigma + (a_3 p + a_0) \tau' + a_4 \tau + a_5 p^2 + 2a_0 p = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + b_1 + b_2 \sigma + (b_3 p - b_0) \sigma' + b_4 \tau + b_5 p^2 + 2b_0 p = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где штрихом обозначена производная по p и

$$\sigma = \frac{(A_2 - A_3)}{A_1} Q(p), \quad \tau = \frac{(A_2 - A_3)}{A_1} R(p). \quad (43)$$

Величины a_i , b_i ($i = \overline{0, 5}$) зависят от главных моментов инерции, от λ_1 и постоянной интеграла энергии.

Система уравнений (42) имеет два интеграла

$$\begin{aligned} f_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3 p - b_0)\sigma + (a_3 p + a_0)\tau + \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\ f_4 &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\sigma')^2 + \sigma (\tau')^2 + d_0 + (d_2 p + d_3) \tau \sigma' + d_4 \sigma^2 + (d_5 p + d_6) \sigma \tau' + \\ &\quad + (d_7 \tau + d_8 p^2 + d_9 p + d_{10}) \sigma + d_{11} \tau^2 + (d_{12} p^2 + d_{13} p + d_{14}) \tau + \\ &\quad + d_{15} p^4 + d_{16} p^2 = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где коэффициенты при p , τ , σ являются постоянными параметрами.

Е. И. Харламова и Г. В. Мозалевская построили решение уравнений (43), (44). При исследовании действительности этого решения ими указаны два условия: первое условие отвечает требованию действительности используемых функций, второе условие следует из геометрического интеграла. Данные условия они рассмотрели только в случае, когда гиристатический момент равен 0 , т.е. в случае решения Б. И. Коносевиича и Е. В. Поздняковича. В данной диссертации приведены примеры разрешимости задачи в общем случае ($\lambda \neq 0$). Кроме этого, доказано единственность решения Харламовой–Мозалевской в классе (39). При этом применен другой способ исследования условий существования. Таким образом в диссертации рассмотрена задача: для системы уравнений (43) найти условия существования решений вида

$$\begin{aligned} p &= v^2 + p_0, \quad \sigma = \sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2 + \sigma_1 v + \sigma_0, \\ \tau &= \tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0 \end{aligned} \quad (45)$$

с постоянными $p_0, \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$ и построить соответствующие этим условиям действительные точные решения исходной системы уравнений.

В пункте 3.3 уравнения (43) преобразованы к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} & \tau \frac{d^2 \sigma}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\tau}{v} \frac{d\sigma}{dv} + 2a_3 v^3 \frac{d\tau}{dv} + 2(a_3 p_0 + a_0) v \frac{d\tau}{dv} + 4(a_2 \sigma + \\ & + a_4 \tau) v^2 + 4(a_5 p_0^2 + 2a_0 p_0 + a_1) v^2 + 8(a_5 p_0 + a_0) v^4 + 4a_5 v^6 = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2 \stackrel{\text{def}}{=} & \sigma \frac{d^2 \tau}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\sigma}{v} \frac{d\tau}{dv} + 2b_3 v^3 \frac{d\sigma}{dv} + 2(b_3 p_0 - b_0) v \frac{d\sigma}{dv} + 4(b_2 \sigma + \\ & + b_4 \tau) v^2 + 4(b_5 p_0^2 + 2b_0 p_0 + b_1) v^2 + 8(b_5 p_0 + b_0) v^4 + 4b_5 v^6 = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Они исследованы при условиях, указанных Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской

$$\begin{aligned} 4(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) + A_2 A_3 &= 0, \\ \frac{A_3}{A_1} &\in \left(\frac{17 - \sqrt{17}}{34}, \frac{4}{9} \right] \cup \left[0.4458, \frac{\sqrt{273} - 1}{34} \right) \cup \left(\frac{17 + \sqrt{17}}{34}, \frac{2}{3} \right] \cup [0.6875, 1), \end{aligned} \quad (48)$$

где A_i – главные моменты инерции.

Переменные исходной системы записываются как функции v следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v^2 + p_0, \quad \omega_2^2 = \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2) v^2, \\ \omega_3^2 &= \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0), \\ \gamma_1 \xi &= -\frac{2(2u - 1)}{u(17u^2 - 16u + 4)} (\sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2) + \frac{1}{2u} (v^2 + p_0)^2 - \\ & - \frac{17u - 8}{2(17u^2 - 16u + 4)} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0) - \frac{h}{A_3}, \\ \gamma_2 \xi &= \omega_2 \left(\frac{1}{4v} (4\tau_4 v^3 + 3\tau_3 v^2 + 2\tau_2 v + \tau_1) - \frac{9u - 4}{(17u - 8)u} (v^2 + p_0) - \eta \right), \\ \gamma_3 \xi &= -\omega_3 \left(\frac{2u - 1}{(17u - 8)u} (4\sigma_4 v^2 + 3\sigma_3 v + 2\sigma_2) + \frac{1 - u}{u} (v^2 + p_0) + \eta \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Кроме того, переменные v, t связаны соотношением $\int 2v dv / \sqrt{\sigma \tau} = t + \text{const}$. По формулам (49) решения системы (43) можно преобразовать в решения уравнений (24)–(28). При

исследовании действительности решения (43) использован параметр

$$\eta = \frac{(P_9(u) + \eta_1)(2u - 1)^3(17u - 8)^2(3u - 2)\tau_3^2}{4(u - 1)(9u - 4)(5u - 2)^2P_{10}(u)}, \quad (50)$$

где

$$\eta_1^2 = 9(9u - 4)(17u^2 - 16u + 4)(3u - 2)^3P_{12}(u). \quad (51)$$

Здесь P_9 , P_{10} , P_{12} – многочлены степени 9, 10 и 12 по u .

Множество действительных движений гиростата определяется набором следующих условий: положительностью произведения

$$\sigma\tau = v^2(\sigma_4v^2 + \sigma_3v + \sigma_2)(\tau_4v^4 + \tau_3v^3 + \tau_2v^2 + \tau_1v + \tau_0)$$

при некоторых значениях $v \in \mathbb{R}$, положительностью правой части равенства (51) при некоторых значениях параметра $u > 0$ и выполнением геометрического тождества

$$\gamma_1^2(v) + \gamma_2^2(v) + \gamma_3^2(v) = 1.$$

Полный анализ этих условий потребовал, в частности, вычисления дискриминантов полиномов второй и четвертой степени от v в виде рациональных функций от u, η_1 . С учетом принятых обозначений можно записать все условия вещественности решений в виде неравенств, связывающих переменные u, η_1 :

$$C_1^i(u)\eta_1 + C_2^i(u) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (52)$$

В данной задаче число m не превосходит семи. Привлечение зависимости (51) позволяет записать ограничения на u в терминах корней полиномов с целыми коэффициентами. Изучение неравенств (52) проведено в общем виде. Результаты исследования взаимного расположения корней полученных полиномов представлены в табл. 1.

Табл. 1. Интервалы вещественности решений.

i	u_1^i	u_2^i	n	n_1	n_2	$\tau_4/ \tau_4 $	$\sigma_4/ \sigma_4 $
1	0.378732187482	0.405702942358	4	2	2	-1	-1
2	0.407610887732	0.413171328943	4	2	2	-1	-1
3	0.413171328943	0.421417076192	6	4	2	-1	-1
4	0.421417076192	0.423374638620	4	2	2	-1	-1
5	0.445814591946	0.456550342408	4	2	2	1	-1
6	0.621267812518	0.665060968794	6	4	2	1	1
7	0.665060968794	0.666666666667	4	2	2	1	1
8	0.687566930488	0.810825343356	4	2	2	1	1

Рассматриваемого вида решения уравнений (43) существуют в случае, когда $u \in \bigcup_{i=1}^{12} (u_1^i, u_2^i)$. При этом $n = n_1 + n_2$ – число действительных корней полинома

$$V_6(v) = (\tau_4v^4 + \tau_3v^3 + \tau_2v^2 + \tau_1v + \tau_0)(\sigma_4v^2 + \sigma_3v + \sigma_2).$$

Зависимость v от времени задана дифференциальным уравнением $\dot{v}^2 = V_6(v)$, которое интегрируется посредством одной гиперэллиптической квадратуры. Если u принимает значение $u_3^1 = 2/5$, либо $u_2^7 = 2/3$, то полином $V_6(v)$ содержит только четные степени. При этом гиперэллиптическая квадратура вырождается в эллиптическую. В диссертации приведены примеры кинематического истолкования движения с помощью метода годографов.

В четвертом разделе исследованы условия существования решений уравнений (43) в постановке степенной геометрии А. Д. Брюно. Ранее А. Д. Брюно и И. Н. Гашененко рассмотрели случай $\lambda_1 = 0$. В диссертации предполагается $\lambda_1 \neq 0$.

Основная цель этого раздела – для решений $\sigma(p)$, $\tau(p)$ системы уравнений (43) в случае общего положения при $p \rightarrow 0$ и при $p \rightarrow \infty$ найти: а) все степенные асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^\alpha$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $\sigma_0, \tau_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; б) все степенные разложения вида

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s},$$

где $\alpha, \beta, s \in \mathbb{R}$, значения s не имеют точек накопления на $\mathbb{R}$, постоянные коэффициенты $\sigma_s, \tau_s \in \mathbb{C}$, $\sigma_0 \tau_0 \neq 0$.

В случае $p \rightarrow 0$ или $p \rightarrow \infty$ решения вида $\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \dots$, $\tau = \tau_0 p^\beta + \dots$ имеют асимптотики

$$\sigma = \sigma_0 t^{\omega\alpha} + \dots, \quad \tau = \tau_0 t^{\omega\beta} + \dots, \quad p = t^\omega, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\omega = -1$, если $p \rightarrow 0$ и $\omega = +1$, если $p \rightarrow \infty$. Поэтому степенным решениям системы соответствуют значения показателей $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, p_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega\alpha, \omega\beta, \omega)$ их асимптотик на плоскости $p_3 = -1$ (если $p \rightarrow 0$) и $p_3 = +1$ (если $p \rightarrow \infty$).

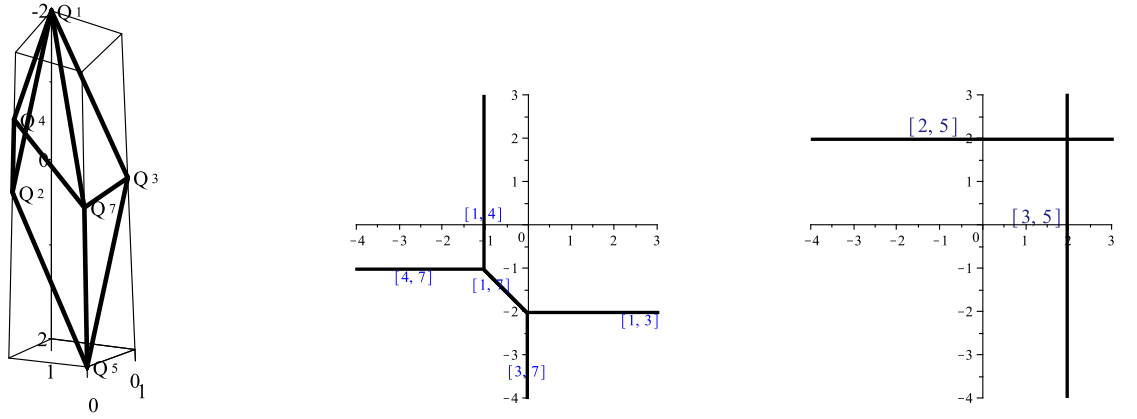


Рис. 1: Многогранник уравнения f_1 , пересечения многогранника f_1 с плоскостями $\gamma = \pm 1$

Уравнения (43) и интегралы (44) являются суммами конечного числа дифференциальных мономов. Согласно методам степенной геометрии, каждому моному ставится в соответствие вектор $Q = (q_1, q_2, q_3)$, координаты которого являются показателями степеней монома. Множество векторных показателей мономов уравнения называется *носителем* уравнения. Для каждого из уравнений (43) и интегралов (44) строятся носители, многогранники, пересечения многогранников с плоскостями $\gamma = \pm 1$ и вычисляются нормальные конусы. Например, выпуклая оболочка носителя первого из уравнений (43) $S(f_1) = S_1 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7\}$ образует многогранник Γ_1 , имеющий 6 вершин (рис. 1). Ребру $\{Q_5, Q_7\}$ принадлежит точка Q_6 носителя S_1 . Пересечения многогранника с плоскостями $\gamma = \pm 1$ изображены на рис. 1.

Построив для каждого уравнения пересечения многогранников с плоскостями $\gamma = \pm 1$ и объединив их, сможем найти нормальные конусы системы (43). Вычислив все нормальные конусы системы (43), возможно определить степенные асимптотики и шаг разложения. Более подробные рассуждения приведены в разделе 4.

Результаты исследования удобно представить в виде таблиц табл. 2-4:

Табл. 2. Степенные асимптотики F_k : $\sigma = \sigma_0 p^\alpha$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $p \rightarrow 0$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
α	0	1	0	2/3	0	3	0	2	0	4/3	1/2	1	1
β	1	0	0	2/3	3	0	2	0	4/3	0	1	1/2	1

Табл. 3. Степенные асимптотики $F_k : \sigma = \sigma_0 p^\alpha, \tau = \tau_0 p^\beta, p \rightarrow \infty$.

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22
α	$(2, \infty)$	2	2	$(1, 2)$	2	$(4/3, 2)$	2	1	2
β	2	$(2, \infty)$	$(1, 2)$	2	$(4/3, 2)$	2	1	2	2

Табл. 4. Собственные числа, произвольные константы и параметры.

k	s_1, s_2, s_3, s_4	s_0	Константы	Параметры
1	$-1, 0, 0, 1/2$	1	σ_0, l, z	x, y, η
3	$0, 0, 1, 1$	1	σ_0, τ_0, l, z	x, y, η
4	$-1, -1/3, 0, 0$	$1/3$	σ_0, z	x, y, η
5	$-3, -2, 0, 0$	1	—	x, y, η
7	$-3, -2, -2 \mp \sqrt{\varphi_1}$	1	σ_{s_2}	x, y, η
9	$-1, -2/3, -1/3, 0$	$1/3$	l, z	x, y, η
11	$-1, -1/2, -1/4, 0$	$1/2$	z	x, y, η
13	$-\frac{1}{2} \mp \sqrt{\varphi_3}, -1, -1$	1	σ_{s_2}	x, y, η
14	$-2 + \frac{1}{2}\alpha, 0, -1 - \alpha, -2\alpha$	$2 - \alpha; -1$	$\sigma_0, \sigma_{s_1}, l, z$	x, y, η
16	$\frac{3}{2}\beta - 2, 0, -\beta, -2\beta$	$2 - \beta; \beta - 1$	$\tau_0, \sigma_{s_1}, l, z$	$x = y, \eta$
18	$0, 0, 2 - \frac{5}{2}\beta, -2\beta$	$2 - \frac{3}{2}\beta$	$\tau_0, \tilde{\sigma}_0, l, z$	$x = y, \eta$
20	$0, -1/2, -1, \frac{1-2y}{y-1}$	-1	σ_{s_3}, z	$x = y, \eta$
22	$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varphi_4}, -3, -4$	-1	$\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, l, z$	x, y, η

Здесь k обозначает номер разложения, из табл. 2 и табл. 3 можно определить первые члены разложений при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ соответственно, а табл. 4 содержит собственные числа соответствующих степенных асимптотик, которые определяют шаг разложения. Например, разложения F_1 и F_3 имеют следующие асимптотики

$$\begin{aligned}
 F_1 : \quad \sigma &= \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k p^{\frac{k}{2}}, \quad \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^{\frac{2+k}{2}}, \\
 F_3 : \quad \sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k p^k, \quad \tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k p^k.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Таким образом, получено 22 семейства степенных разложений решений уравнений Ковалевского–Харламова. Семейства $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_{14} - \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{22}$ и отчасти $\mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{19}$ сохраняют основные свойства степенных разложений, вычисленных А. Д. Брюно и В. В. Луневым для уравнений Н. Ковалевского.

В разделе 5 проведена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям обобщенного класса Ковалевского–Харламова. Получены новые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Укажем редукцию к уравнению класса Ковалевского–Харламова на примере задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Уравнения движения такого гиростата записаны в виде (7), а первые интегралы – в виде (8). Уравнения (7) могут быть редуцированы к уравнениям обобщенного класса Н. Ковалевского при следующих предположениях

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \\
 A &= \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \text{diag}(B_1, 0, 0), \quad C = 0.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Учитывая (54) и полагая $\omega = (p, q, r)$, из (7), (8) получим

$$A_1 \dot{p} = (A_2 - A_3)qr, \tag{55}$$

$$A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)rp - (B_1p + s)\nu_3, \quad (56)$$

$$A_3\dot{r} = (A_1 - A_2)pq + (B_1p + s)\nu_2, \quad (57)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - z\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \quad (58)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1p\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k_0. \quad (59)$$

Введем новые переменные и параметры

$$q^2(p) = Q_*(p), \quad r^2(p) = R_*(p), \quad (60)$$

$$\mu_0 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad \mu_1 = \frac{A_2(A_2 - A_3)}{2A_1}, \quad \mu_2 = \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2A_1}. \quad (61)$$

Переходя в уравнениях (56), (57) к дифференцированию по вспомогательной переменной p и учитывая соотношения (60), (61), найдем функции

$$\nu_2 = v\sqrt{Q_*(p)}, \quad \nu_3 = u\sqrt{R_*(p)}, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} u(p) &= \frac{1}{B_1p + s} [(A_3 - A_1)p - \mu_1 Q'_*(p)], \\ v(p) &= \frac{1}{B_1p + s} [\mu_2 R'_*(p) - (A_1 - A_2)p]. \end{aligned} \quad (63)$$

Из (56) находим

$$\nu_1(p) = \frac{1}{A_1p} (k - Q_*(p)v(p) - R_*(p)u(p)). \quad (64)$$

Тогда геометрический интеграл из (59) представляется в виде

$$Q_*(p)v^2(p) + R_*(p)u^2(p) + \frac{1}{A_1^2p} (k - Q_*(p)v(p) - R_*(p)u(p))^2 - 1 = 0.$$

Преобразуя уравнения (58) к переменной p и подставляя в них соотношения (62)-(64), получим аналог уравнений Н. Ковалевского

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu_0 Q'_*(p)v(p) + \mu_0 Q_*(p)v'(p) + \nu_1(p) - pu(p) &= 0, \\ \frac{1}{2}\mu_0 R'_*(p)u(p) + \mu_0 R_*(p)u'(p) + pv(p) - \nu_1(p) &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

После интегрирования уравнений (65) переменные $\nu_i(p)$ определяем из (62), (64), а переменные $q(p), r(p)$ — из (60). Зависимость $p(t)$ находим из уравнения (55).

В пункте 5.4 исследованы полиномиальные решения класса А. И. Докшевича.

Запишем уравнения (7), (8) в скалярном виде, полагая $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} &= (A_2 - A_3)qr + B_2q\nu_3 - B_3r\nu_2 + \lambda_2r + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2\dot{q} &= (A_3 - A_1)pr + B_3r\nu_1 - B_1p\nu_3 - \lambda_1r - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3, \\ A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + B_1p\nu_2 - B_2q\nu_1 + \lambda_1q - \lambda_2p + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + \\ &+ (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2; \end{aligned} \quad (66)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \quad (67)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1p + \lambda_1)\nu_1 + (A_2q + \lambda_2)\nu_2 + A_3r\nu_3 = k_0. \quad (68)$$

Поставлена задача об исследовании условий существования у уравнений (66), (67) решений следующего вида

$$\begin{aligned} q = Q(p) &= \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \quad \nu_1 = \phi(p) = \sum_{j=0}^l a_j p^j, \\ \nu_2 = \psi(p) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \nu_3 = r\kappa(p), \quad \kappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{aligned} \quad (69)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_i – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Рассмотрен случай, когда полиномы из (69) имеют вид

$$\begin{aligned} Q(p) &= b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \\ \phi(p) &= a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \psi(p) = g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0, \quad \kappa(p) = f_1 p + f_0. \end{aligned} \quad (70)$$

Указанным классом описывается полиномиальное решение А. И. Докшевича задачи о движении тяжелого гиростата. Подставляя полиномы (70) в уравнения (66), (67) и геометрический интеграл из (68), потребуем выполнения полученных соотношений при всех p . Получим систему условий на параметры задачи, которая выписана в диссертации. Выписаны условия, при которых система алгебраических равенств имеет действительные решения. Приведем численный пример решения задачи (66)-(68).

При условиях

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_3, \quad A_1 = 7A_2/15, \quad A_3 = A_2 = a, \quad B_1 = B_2/3, \\ B_3 = B_2 = b, \quad s_2 = s, \quad f_0 = -\frac{18a}{25b} \quad (a > 0, b \neq 0, s \neq 0). \end{aligned} \quad (71)$$

получено решение задачи (66)-(68)

$$\begin{aligned} q &= \frac{4b}{27s} p^2 - \frac{5b^2}{27as} p - \frac{s}{b}, \\ r^2 = R(p) &= \frac{1}{9} \left(-\frac{16b^2}{81s^2} p^4 + \frac{40b^3}{81as^2} p^3 - \frac{81a^2s^2 + 25b^2}{81(as)^2} p^2 - 10\frac{b}{a} p + \frac{50b^2}{3a^2} \right), \\ \nu_1 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{6a^2}{25b^2} p^2 + \frac{12a}{5b} p + 1 \right), \quad \nu_2 = -\frac{2}{5s} \left(\frac{4a^2}{75b} p^3 + \frac{a}{5} p^2 - \frac{b}{3} p \right), \\ \nu_3 &= -\frac{18a}{25b} \left(\frac{a}{5b} p + 1 \right) \sqrt{R(p)}, \quad \mathbf{s} = \left(\frac{85b^2}{81a}, s, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{5b}{6}, \frac{7as}{10b}, 0 \right); \end{aligned} \quad (72)$$

$$\dot{p} = 3s\sqrt{R(p)}/(2b). \quad (73)$$

Решение дифференциального уравнения (73) дает зависимость вспомогательной переменной от времени: $p = p(t)$. Это позволяет получить зависимость от времени всех переменных решения (71), (72) рассматриваемой задачи.

В пункте 5.5 рассмотрены полиномиальные решения обобщенного класса С. А. Чаплыгина.

Поставлена задача о нахождении условий существования у уравнений (7) решений следующей структуры

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{j=0}^n b_j \sigma^j, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\
\nu_1 &= \varphi(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, \quad \nu_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \omega_2, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma} \omega_3, \\
\psi(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \kappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j
\end{aligned} \tag{74}$$

при следующих предположениях

$$\begin{aligned}
A &= \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3), \\
\lambda_2 &= 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0.
\end{aligned} \tag{75}$$

Найдены два новых частных решения уравнений (7). Первое новое частное решение найдено в случае, когда максимальные степени полиномов из (74) таковы: $n = m = 4$, $l = 2$, $n_1 = m_1 = 1$, т.е.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_4 \sigma^4 + b_3 \sigma^3 + b_2 \sigma^2 + b_1 \sigma + b_0, \\
\omega_3^2 &= R(\sigma) = c_4 \sigma^4 + c_3 \sigma^3 + c_2 \sigma^2 + c_1 \sigma + c_0, \quad \nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0, \\
\nu_2 &= \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma} \sqrt{R(\sigma)}, \quad \psi(\sigma) = g_1 \sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1 \sigma + f_0.
\end{aligned} \tag{76}$$

Подставляя предполагаемое решение (76) в уравнений (7) и геометрический интеграл из (8) и требуя тождественного выполнения полученных равенств для всех σ при $a_1 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$, получим систему условий на параметры задачи и искомые коэффициенты полиномиальных решений (76). В диссертации доказана разрешимость этой системы алгебраических равенств относительно параметров A_1, A_2, A_3, g_1, g_0 . Выписаны все коэффициенты решения (76). Приведен численный пример решения (76) уравнений (7).

Второе частное решение найдено при условиях на максимальные степени полиномов (74): $n = m = 4$, $l = 2$, $n_1 = 1$, $m_1 = 0$. Приведен численный пример действительности полученного полиномиального решения.

ВЫВОДЫ

В задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела доказано, что полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева–Чаплыгина существуют только в частных случаях решений С. Ковалевской и Д. Н. Горячева. Получено обобщение уравнений Ковалевского–Харламова на случай гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Исследованы условия существования обобщенного класса полиномиальных решений Е. И. Харламовой и Г. В. Мозалевской в задаче о движении тяжелого несимметричного гиростата. Указаны новые промежутки изменения параметра, характеризующего данное решение. Проведено кинематическое истолкование движения гиростата методом Пуансо.

На основе теории степенной геометрии исследована классификация асимптотических разложений решений уравнений движения тяжелого гиростата, полученных П.В.Харламовым для больших и малых значений проекции угловой скорости на барицентрическую ось. Получены новые классы данных разложений, которые не имеют аналогов для уравнений Ковалевского.

Найдены новые формы редуцированных уравнений в задачах о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Найдены новые классы полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гашененко И. Н. Асимптотические разложения решений уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Д. Н. Ткаченко // Сборник трудов Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – М: ФИЗМАТЛИТ. – 2015. – С. 80 – 83.
2. Гашененко И. Н. Об одном решении Харламовой–Мозалевской уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Г. В. Мозалевская, Д. Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 37 – 45.
3. Гашененко И. Н. Степенные разложения решений уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко, Д. Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. С. 11 – 26.
4. Горр Г. В. Об обобщении уравнений Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / Г. В. Горр, А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции "Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение актуальных проблем". – г. Астрахань. – 2017. – С. 15 – 19.
5. Зыза А. В. Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле / А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 55 – 63.
6. Зыза А. В. Условия существования полиномиального решения Докшевича в одной задаче динамики гиростата / А. В. Зыза, Д. Н. Ткаченко // Вестник ДонНУ. Сер. А. – 2013. – Вып. 1. – С. 37 – 41.
7. Ткаченко Д. Н. О редукции дифференциальных уравнений движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / Д. Н. Ткаченко // Труды ИПММ. – 2016. – Том. 30. – С. 132 – 139.
8. Ткаченко Д. Н. О степенных разложениях решений уравнений Ковалевского–Харламова / Д. Н. Ткаченко // Устойчивость, управление и динамика твердого тела: XI Международная конференция, 8-12 июня 2011 г. – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ. – 2011. – С. 111 – 112.
9. Ткаченко Д. Н. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Эйлера–Пуассона / Д. Н. Ткаченко // Вестник ДонНУ. Сер.А. – 2017. – Вып. 3. – С. 98 –105.
10. Ткаченко Д. Н. Применение теории дифференциальных уравнений в построении полиномиальных решений уравнений Эйлера–Пуассона / Д. Н. Ткаченко // Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование в рамках III форума "Инновационные перспективы Донбасса": VIII Международная научно-техническая конференция, 25 мая 2017. -- Донецк: ДонНТУ. – 2017. – С. 88 – 91.

АННОТАЦИЯ

Ткаченко Д.Н. Полиномиальные решения уравнений динамики в задаче о движении гири с постоянным и переменным гиристатическим моментом. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, ДНР, Донецк, 2018.

Проведена классификация обобщенных классов полиномиальных решений в задачах динамики твердого тела.

В задаче о движении тяжелого гириста установлены новые свойства полиномиальных решений уравнений Н. Ковалевского для динамически симметричных тел. В случае переменного гиристатического момента выполнена редукция исходных уравнений к уравнениям класса Ковалевского–Харламова. Изучены условия существования обобщенного класса полиномиальных решений в задаче о движении гириста с постоянным гиристатическим моментом и дано истолкование движения методом Пуансо.

При помощи методов степенной геометрии исследована задача о движении тяжелого гириста, центр масс которого лежит на главной оси эллипсоида инерции. Получено 22 семейства степенных разложений решений уравнений Ковалевского–Харламова в случае, когда проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось стремится к нулю, и в случае, когда эта переменная стремится к бесконечности.

Выполнена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гириста под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гириста в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона к уравнениям обобщенного класса Ковалевского–Харламова. Построены полиномиальные решения уравнений движения гириста в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Ключевые слова: *гиростат, полиномиальные решения, динамика твердого тела.*

D.N. Tkachenko. Polynomial solutions of dynamic equations in the problem on motion of a gyrost with constant or variable gyrostatic moment. – Manuscript.

The thesis for a candidate degree (physical and mathematical sciences) by the specialty 01.02.01 – the theoretical mechanics. State Institution of Higher Professional Education Donetsk National University, DPR, Donetsk, 2018.

The classification of generalized classes of polynomial solutions is carried out the problems of rigid body dynamics.

New properties of polynomial solutions of N. Kovalevsky equations for dynamically symmetrical bodies are established in the problem of a heavy gyrost movement. In the case of variable gyrostatic moment the reduction of the initial equations is performed to Kovalevsky–Kharlamov equations class. This work studies the existence of conditions of generic class of polynomial solutions in the problem of motion of a gyrost with constant gyrostatic moment as well as interpretation of motion by Poinso method.

Using the methods of power geometry, the problem of motion is studied for a heavy gyrost in which the center of mass lies on the main axis of ellipsoid of inertia. 22 families of power expansions of Kovalevsky–Kharlamov equations have been received in case when vector projection of angular velocity on barycentric axis tends to zero as well as in case, when this variable tends to infinity.

The reduction of Kirchhoff–Poisson equations of gyrost motion under potential and gyroscopic forces and gyrost motion in the magnetic field, considering Barnett–London effect, are transformed to Kovalevsky–Kharlamov equations of generalized class. Polynomial solutions of equations of motion of the gyrost in the magnetic field are studied with account of Barnett–London effect.

Keywords: *gyrost, polynomial solutions, rigid body dynamics.*