МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
Донецкой Народной Республики

ГУ «Институт прикладной математики и механики»

На правах рукописи

Зыза Александр Васильевич

УДК 531.38

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

01.02.01 «Теоретическая механика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк – 2020

Диссертация является рукописью.
Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк

Научный консультант	доктор физико-математических наук, профессор, **Горр Геннадий Викторович,** Государственное учреждение «Институт прикладной математики и механики», главный научный сотрудник отдела прикладной механики, г. Донецк, ДНР
Официальные оппоненты:	**Илюхин Александр Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВПО «РГЭУ (РИНХ)», профессор кафедры математики, г. Таганрог, Россия; **Маркеев Анатолий Павлович,** доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, главный научный сотрудник лаборатории механики систем, г. Москва, Россия; **Самсонов Виталий Александрович,** доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики МГУ, главный научный сотрудник лаборатории навигации и управления, г. Москва, Россия.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «17» февраля 2021 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 01.013.01 при ГУ «Институт прикладной математики и механики» по адресу: 283114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 309. Телефон +38(062)3110391, факс +38(062)3110391, e-mail: mtt@iamm.su

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГУ «Институт прикладной математики и механики» по адресу: 283114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74, к. 209, сайт ГУ «Институт прикладной математики и механики»: www.iamm.su

Автореферат разослан «___» __________ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 01.013.01 Ю.Б. Коносевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации исследуется проблема построения решений уравнений движения гиростата в двух задачах динамики. Первая задача описывает движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; вторая задача – движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Актуальность темы исследования. Актуальность темы диссертации заключается в том, что динамика гиростата, как составная часть аналитической механики, служит базовой научной дисциплиной, результаты которой не только находят применение в объяснении механических явлений в природе и технике, но и могут служить определенными рекомендациями в практической работе человека с современными техническими конструкциями.

Особенностью исследований аналитической механики является сочетание механических моделей движения систем связанных твердых тел с применяемыми математическими методами. Механическая модель должна отвечать определенным требованиям, среди которых адекватность по отношению к изучаемой механической системе и возможность получения результатов, которые позволяли бы их использовать на практике. К таким моделям относятся модель абсолютно твердого тела и модель гиростата. Они применяются в моделировании многих технических объектов (роботов, манипуляторов, спутников, гироскопических систем).

Гиростат является простейшей механической системой связанных твердых тел, изучение свойств движения которого проводилось в работах У. Томсона, Н.Е. Жуковского, Ж. Лиувилля, А. Грея, Т. Леви-Чивиты и У. Амальди, В.В. Румянцева, Й. Виттенбурга, Т.Р. Кана; Р.С. Фоулера; Р.Е. Роберсона, П.В. Харламова, Е.И. Харламовой, Г.В. Горра и А.М. Ковалева, А.В. Борисова и И.С. Мамаева, В.С. Асланова, А.В. Дорошина и других.

Теоретические аспекты этих работ базируются на фундаментальных результатах Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа, С.В. Ковалевской, К. Якоби, Г. Кирхгофа, А. Клебша, А.М. Ляпунова, В.А. Стеклова, С.А. Чаплыгина.

Значительное развитие динамика гиростата получила во второй половине 20 века. В это время сформировались школы по механике: в МГУ (В.В. Белецкий, Д.Е. Охоцимский, В.В. Румянцев, В.Н. Рубановский, В.В. Козлов, В.Г. Демин, В.М. Морозов, С.Я. Степанов, В.Г. Вильке, В.А. Самсонов, А.А. Буров, Ю.Г. Мартыненко); в Московском авиационном институте (В.Г. Веретенников, А.П. Маркеев, А.Г. Сокольский, Б.С. Бардин, О.В. Холостова); в Российском университете дружбы народов (А.С. Галиуллин, Р.Г. Мухарлямов, Р.Г. Мухаметзянов, И.А. Галиуллин); в Институте проблем механики (А.Ю. Ишлинский, Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов, С.А. Решмин, А.Г. Петров); в Институте прикладной математики и механики в г. Донецке (П.В. Харламов, Е.И. Харламова, А.И. Докшевич, А.Я. Савченко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев, А.А. Илюхин, Г.В. Мозалевская, М.Е. Лесина); в Софийском университете (Болгария) (А. Анчев, Л. Лилов, Л. Гаврилов); в Мансурском университете (Египет) (Х. Яхья); в Ганноверском университете им. Лейбница (Германия) (Й. Виттенбург); в Стэнфордском университете (США) (Т.Р. Кан). Тематика исследований в указанных школах охватывает все направления по аналитической механике.

При формировании математической постановки задачи о движении твердого тела и гиростата, имеющего неподвижную точку, учитывались содержательная и концептуальная модели, как классической задачи, так и ее обобщений и был установлен известный результат. Он заключался в том, что движение гиростата можно описать системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, которые допускают три первых интеграла. Поэтому при наличии дополнительного интеграла к их решению применима теория Якоби. Большое значение в математическом моделировании играет не только аналогия некоторых задач динамики гиростата, но и установление их отличительных свойств. Так, например, можно говорить, что задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил математически эквивалентна задаче о движении тела в идеальной несжимаемой жидкости (В.А. Стеклов, П.В. Харламов, Х.М. Яхья). Но указанные выше задачи и задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона существенно отличаются друг от друга тем, что количество первых интегралов в них не совпадает (Ю.Н. Урман, В.В. Козлов, В.А. Самсонов).

В силу того, что в задачах, которые рассматриваются в данной диссертации, доказана неинтегрируемость уравнений движения (А.В. Борисов, С.Л. Зиглин, В.В. Козлов и Д.А. Онищенко), большое значение имеет проблема построения частных решений уравнений этих задач (Ф. Кляйн, А. Зоммерфельд).

В диссертации в качестве задачи об исследовании частных решений принята задача о построении ***полиномиальных решений*** уравнений движения гиростата. Ранее аналогичную проблему изучали многие ученые (Н. Ковалевский, Д.Н. Горячев, С.А. Чаплыгин, В.А. Стеклов, П.В. Харламов, Е.И. Харламова, А.И. Докшевич, Б.И. Коносевич, Е.В. Позднякович, Г.В. Мозалевская, Л.М. Ковалева и др.). Объектом их исследования являлись задачи о движении тяжелого твердого тела и гиростата.

В диссертационной работе построение полиномиальных решений уравнений динамики проводилось для обобщенных задач (задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона). При этом рассматривались не только известные классы, но и ***новые***, ***введенные*** автором диссертации полиномиальные классы решений.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательской работы кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по следующим государственным темам: «Метод интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях» (№ 0107U001773, Г-07/38, 1.01.2007 – 31.12.2012); «Аналитические и геометрические исследования решений уравнений динамики гиростата с постоянным и переменным гиростатическим моментом» (№ 0119D000097, Г-19/20, 01.10.2019 – 31.12.2023).

Результаты диссертационной работы использовались в научных отчетах отдела прикладной механики ГУ «Институт прикладной математики и механики» Министерства образования и науки ДНР по государственным темам: «Методы исследования нелинейной динамики сложных механических систем и математическое моделирование систем взаимодействующих твердых тел» (№ 0111U000484, № III-6-11, 1.01.2011 – 31.12.2015); (№ 0107U001773, Г.07/38, 1.01.2015 – 31.12.2017); «Разработка эффективных геометрических и аналитических методов исследования нелинейных динамических систем» (№ 0117D000128, 1.01.2017 – 31.12.2021).

Цель и задачи исследования.

Объектом исследования являются две задачи о движении гиростата: задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемая уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона; задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Предметом исследования являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений класса Кирхгофа-Пуассона и уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Цель исследования – изучение условий существования обобщенных классов полиномиальных решений В.А. Стеклова-Н. Ковалевского-Д.Н. Горячева, А.И. Докшевича, Б.И. Коносевича-Е.В. Поздняковича и новых классов решений полиномиальной структуры, которые описывают программные движения гиростата в двух задачах динамики твердого тела; построение решений указанных классов в замкнутом виде и исследование их аналитических и геометрических свойств.

Задачами исследования являются:

1. Построение классификационной таблицы полиномиальных решений дифференциальных уравнений двух задач динамики гиростата: задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.
2. Разработка новых форм редуцированных уравнений движения в указанных выше задачах, позволяющих упростить исследование условий существования и построение частных решений полиномиальной структуры. Нахождение аналогов уравнений Н. Ковалевского в рассматриваемых задачах и построение новых частных решений редуцированных уравнений.
3. Исследование условий существования частных решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.
4. Построение новых частных решений обобщенного полиномиального класса Коносевича-Поздняковича дифференциальных уравнений двух указанных выше задач динамики гиростата.

5. Изучение условий существования решений обобщенного полиномиального класса Докшевича в двух указанных задач динамики гиростата.
6. Получение частных решений нового полиномиального класса уравнений Кирхгофа-Пуассона.
7. Исследование условий существования решений новых полиномиальных классов дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Методы исследования. В диссертации применены методы инвариантных соотношений построения решений уравнений динамики гиростата с неподвижной точкой, теория интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах; полуобратный метод решения задач аналитической механики.

Научная новизна полученных результатов.
1. Построена классификационная таблица полиномиальных решений дифференциальных уравнений Кирхгофа-Пуассона и уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.
2. Получены новые формы редуцированных уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в двух задачах: в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (задача I); в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II). Найдены аналоги уравнений Н. Ковалевского в указанных задачах. Построены *три новых решения* полиномиальной структуры редуцированных уравнений, которые описываются эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.
3. Изучены условия существования решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева дифференциальных уравнений задачи I и задачи II, в предположении, что вектор обобщенного центра масс гиростата и вектор гиростатического момента находится на одной главной оси эллипсоида инерции. Для рассматриваемых задач приведены таблицы вариантов значений максимальных степеней полиномов решений обобщенного класса Стеклова-Ковалевского-Горячева. В задаче I построено *пять новых частных* решений рассматриваемого класса, а в задаче II найдено *четыре новых частных* решения этого класса. Эти решения описываются эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.
4. Исследованы условия существования решений обобщенного полиномиального класса Коносевича-Поздняковича уравнений задачи I и задачи II, в предположении, что вектор обобщенного центра масс гиростата коллинеарен вектору гиростатического момента и находится на главной оси эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки гиростата. Для задачи I и задачи II получены таблицы вариантов значений максимальных степеней полиномов обобщенного класса Коносевича-Поздняковича. В задаче I найдено *четыре новых* решения, а в задаче II построено *семь новых частных* решения.
5. Найдены новые частные решения обобщенного полиномиального класса Докшевича, дифференциальных уравнений задачи I и задачи II, в предположе-

нии, что вектор обобщенного центра масс гиростата и вектор гиростатического момента лежат в одной главной плоскости эллипсоида инерции. Приведена общая таблица вариантов значений максимальных степеней полиномов решений обобщенного полиномиального класса Докшевича. Построено *шесть новых* решений рассматриваемого класса в задачах I, II. Эти решения описываются элементарными функциями и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

6. Изучены условия существования частных решений нового полиномиального класса уравнений Кирхгофа-Пуассона (задача I), в предположении, что вектор обобщенного центра масс и гиростатического момента находится в одной главной плоскости эллипсоида инерции. Приведена таблица вариантов значений максимальных степеней полиномов рассматриваемого класса решений. Построено *семь новых частных* решений нового полиномиального класса задачи I.

7. Исследованы условия существования решений новых полиномиальных классов уравнений задачи II. Для этих классов решений имеет место условие, что вектор обобщенного центра масс гиростата и вектор гиростатического момента лежат в одной из главных плоскостей эллипсоида инерции. Получена таблица вариантов значений максимальных степеней полиномов одного полиномиального класса. Найдено *десять решений* новых полиномиальных классов дифференциальных уравнений задачи II. Построенные решения описываются элементарными, эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени. Проведен анализ асимптотических и периодических свойств движения гиростата.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение и практическое применение, они могут быть использованы в прикладных областях механики.

Результаты исследований могут быть использованы в ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк) и в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк) для кинематического истолкования движения в найденных частных решениях различной полиномиальной структуры и для исследования асимптотических движений, а также при чтении специальных курсов по математическому моделированию движений сложных механических систем в вузах ДНР и России.

Личный вклад соискателя в совместных публикациях. Результаты диссертационной работы опубликованы в 17 статьях в рецензируемых изданиях, в тезисах докладов на 15 Международных конференциях и съездах. Три статьи написаны в соавторстве. В работе [15] автору диссертации принадлежит постановка задачи и исследование условий разрешимости системы алгебраических уравнений для параметров задачи. Е.С. Платоновой принадлежит построение числового примера действительности найденного полиномиального решения. В статье [16] автору диссертации принадлежит постановка задачи, построение первого частного решения редуцированных уравнений и метод нахождения вспомогательной переменной от времени. Д.Н. Ткаченко проведена редукция уравнений движения на рассматриваемых инвариантных соотношениях и получение второго решения задачи.

В работе [17] автору диссертации принадлежит постановка задачи и построение нового частного решения. Т.В. Хомяк указала и исследовала численный пример действительности найденного решения.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена применением общепринятых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений аналитической механики. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в рецензируемых журналах ДНР и России.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, съездах, семинарах:

– XI Международная конференция «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» (г. Донецк, 2011);
– I Международная научно-практическая интернет-конференция «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (г. Донецк, 2012);
– II Международная научно-практическая интернет-конференция «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (г. Донецк, 2013);
– III Международная научно-практическая интернет-конференция «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (г. Донецк, 2014);
– IV Международная научно-практическая интернет конференция «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (г. Донецк, 2015);
– Международная научно-методическая конференция «История и методология науки» (г. Донецк, 2016);
– I Международная научная конференция. «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности» (г. Донецк, 2016);
– V Международная научно-практическая интернет-конференция «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (г. Донецк, 2016);
– Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение актуальных проблем» (г. Астрахань, 2017);
– VI Международная научно-практическая интернет-конференция «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (г. Донецк, 2017);
– IV Международная научно-методическая конференция «Эвристическое обучение математике» (г. Донецк, 2018);
– III Международная научная конференция «Донецкие чтения 2018. Образование, наука инновации, культура и вызов современности» (г. Донецк, 2018);
– XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (г. Уфа, 2019);

– IV Международная научная конференция «Донецкие чтения 2019. Образование, наука инновации, культура и вызов современности» (г. Донецк, 2019);
– IX Международная научно-практическая интернет-конференция «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2020» (г. Донецк, 2020);
– семинар отдела прикладной и технической механики ГУ «Институт прикладной математики и механики» (руководитель академик А.М. Ковалев);
– семинар кафедры высшей математики и методики преподавания математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (руководитель профессор Г.В. Горр).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 научных статьях [1-17] в журналах, которые рекомендованы ВАК ДНР, и в 15 тезисах докладов научных конференций и съездов [18-32].

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 10 разделов, заключение, список использованных источников, который включает 306 наименований, 7 таблиц. Объем диссертации составляет 360 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** рассмотрена актуальность проведенных в диссертации исследований.

Раздел 1 диссертации посвящен анализу литературы по теме диссертации. Рассмотрены работы, в которых дана математическая постановка задач динамики; изучены вопросы интегрирования уравнений движения гиростата и различные методы исследования решений в конечном виде; проанализированы методы инвариантных соотношений (ИС), и комплексного истолкования движения гиростата.

В разделе 2 даны основные кинематические и динамические характеристики в задаче о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, вывод уравнений движения заряженного и намагниченного гиростата в магнитном, электрическом поле и в поле ньютоновского притяжения, и краткий анализ уравнений движения гиростата в магнитном поле, под действием эффекта Барнетта-Лондона.

Исследована редукция уравнений движения тяжелого гиростата, уравнений класса Кирхгофа-Пуассона и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Приведен метод инвариантных соотношений Т. Леви-Чивиты, метод П.В. Харламова построения решений дифференциальных уравнений движения.

Обсужден комплексный подход в истолковании движения гиростата, имеющего неподвижную точку, предложенный Г.В. Горром, и рассмотрен пример истолкования движения гиростата в случае полиномиальных классов ИС.

Дана классификация ИС уравнений движения, описывающих решения разной полиномиальной структуры, которые рассматривались ранее другими авторами. Приведен анализ полиномиальных решений, введенных автором диссертации.

Для изложения содержания следующих разделов остановимся на описании задач, которые рассматриваются в диссертации.

Первая задача (задача I) описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

которые имеют три первых интеграла

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad 2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2\kappa, \\ A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E. \end{gathered} \tag{2}$$

Эти уравнения характеризуют движение гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. В уравнениях (1), (2) обозначено: $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s}$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка (матрица B характеризует гироскопические силы, обусловленные силой Лоренца; матрица C – потенциальные силы, обусловленные ньютоновской и кулоновской силами); точка над переменными обозначает относительную производную; E и κ – постоянные интегралов.

Вторая задача (задача II) – задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Уравнения такого движения гиростата в векторном виде таковы

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

Уравнения (3) в отличие от уравнений (1) допускают только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \kappa_0. \tag{4}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$\left[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\right]^{\bullet} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

В (3)-(5)обозначено: $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s}$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; B – симметричная матрица, характеризующая магнитный момент гиростата $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$; C – симметричная матрица, характеризующая ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; точка над переменными обозначает относительную производную; κ_0 – постоянная интеграла площадей. Если имеет место равенство $B = \alpha E$ (E– единичная матрица, α – параметр, то из формулы (5) вытекает интеграл энергии для уравнений (3). Тогда уравнения (3) будут описывать задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и по своей структуре совпадут с уравнениями (1).

Раздел 3 посвящен разработке новых форм уравнений движения и получению обобщенных уравнений Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела: в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; и в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, позволяющих упростить построение и исследование условий существования полиномиальных решений.

Рассмотрим редукцию уравнений (1) задачи I. Для нахождения аналогов уравнений Н. Ковалевского в этой задаче положим

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}, \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad A = diag(A_1, A_2, A_3),$$
$$B = diag(B_1, 0, 0), \quad C = 0. \tag{6}$$

Учитывая (6) и полагая $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, из (1), (2) получим

$$A_1 \dot{p} = (A_2 - A_3) qr; \tag{7}$$
$$A_2 \dot{q} = (A_3 - A_1) pr + B_1 \nu_1 r - s\nu_3, \quad A_3 \dot{r} = (A_1 - A_2) pq - B_1 \nu_1 q + s\nu_2; \tag{8}$$
$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \tag{9}$$

Первые интегралы уравнений (7)-(9) запишем так

$$A_1 p\nu_1 + A_2 q\nu_2 + A_3 r\nu_3 - \frac{1}{2} B_1 \nu_1^2 = \kappa, \quad A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 - 2s\nu_1 = 2E,$$
$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{10}$$

Для получения редуцированных уравнений введем новые функции и параметры

$$q^2(p) = \tilde{Q}(p), \quad r^2(p) = \tilde{R}(p); \tag{11}$$
$$\mu_1 = \frac{2A_1(A_3 - A_1)}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_1 = \frac{2A_1 B_1}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2A_1 s}{A_2(A_2 - A_3)},$$
$$\mu_2 = \frac{2A_1(A_1 - A_2)}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_2 = \frac{2A_1 B_1}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2A_1 s}{A_3(A_2 - A_3)}. \tag{12}$$

Из интеграла энергии, указанного в системе (10), учитывая (11), имеем

$$\nu_1(p)=(2s)^{-1}\left(A_1p^2+A_2\tilde{Q}(p)+A_3\tilde{R}(p)-2E\right). \tag{13}$$

Переходя в уравнениях (8) к дифференцированию по вспомогательной переменной p и учитывая соотношения (11), (12), найдем

$$\nu_2=\sqrt{\tilde{Q}(p)}\varepsilon_2^{-1}\left(\tilde{R}'(p)+\sigma_2\nu_1(p)-\mu_2 p\right),$$
$$\nu_3=\sqrt{\tilde{R}(p)}\varepsilon_1^{-1}\left(-\tilde{Q}'(p)+\sigma_1\nu_1(p)+\mu_1 p\right). \tag{14}$$

На основании (13), (14) и

$$\dot{p}=\mu_0^{-1}\sqrt{\tilde{Q}(p)\tilde{R}(p)},\quad \mu_0=\frac{A_1}{A_2-A_3}, \tag{15}$$

преобразуем уравнения Пуассона (9) к переменной p

$$\frac{1}{2}\varphi(p)\tilde{R}'(p)+\frac{1}{\varepsilon_1}\tilde{R}(p)\left[\mu_1+\mu_0\sigma_1\left(\psi(p)-\varphi(p)\right)-\tilde{Q}''(p)\right]-\mu_0\left(\nu_1(p)-p\psi(p)\right)=0,$$
$$\frac{1}{2}\psi(p)\tilde{Q}'(p)+\frac{1}{\varepsilon_2}\tilde{Q}(p)\left[-\mu_2+\mu_0\sigma_2\left(\psi(p)-\varphi(p)\right)+R''(p)\right]- \tag{16}$$
$$-\mu_0\left(p\varphi(p)-\nu_1(p)\right)=0.$$

Здесь

$$\varphi(p)=\varepsilon_1^{-1}\left(-\tilde{Q}(p)+\sigma_1\nu_1(p)+\mu_1 p\right),$$
$$\psi(p)=\varepsilon_2^{-1}\left(\tilde{R}(p)+\sigma_2\nu_1(p)-\mu_2 p\right).$$

Уравнения (16) являются аналогами уравнений Н. Ковалевского в задаче о движении намагниченного тяжелого тела с неподвижной точкой под действием силы Лоренца, которая характеризуется матрицей B.

Интегралы этих уравнений таковы

$$\frac{1}{4s^2}\left(A_1p^2+A_2\tilde{Q}(p)+A_3\tilde{R}(p)-2E\right)^2+\frac{\tilde{R}(p)}{\varepsilon_1^2}\left(\mu_1 p+\sigma_1\nu_1(p)-\tilde{Q}'(p)\right)^2+$$
$$+\frac{\tilde{Q}(p)}{\varepsilon_2^2}\left(\tilde{R}'(p)-\mu_2 p+\sigma_2\nu_1(p)\right)^2-1=0,$$

$$\frac{A_1 p}{2s}\left(A_1p^2+A_2\tilde{Q}(p)+A_3\tilde{R}(p)-2E\right)+\frac{A_2\tilde{Q}(p)}{\varepsilon_2}\left(\tilde{R}'(p)-\mu_2 p+\sigma_2\nu_1(p)\right)+$$
$$+\frac{A_3\tilde{R}(p)}{\varepsilon_1}\left(\mu_1 p+\sigma_1\nu_1(p)-\tilde{Q}'(p)\right)-\frac{B_1}{8s^2}\left(A_1p^2+A_2\tilde{Q}(p)+A_3\tilde{R}(p)-2E\right)^2-\kappa=0.$$

Эти уравнения определены из первых интегралов (10) с помощью формул (13), (14).

После интегрирования уравнений (16) функции $\nu_1(p)$, $\nu_2(p)$, $\nu_3(p)$ определяются из (13), (14), переменные $q(p)$, $r(p)$ - из (11). Зависимость переменной $p = p(t)$ определяем из (15).

Уравнения (16) обобщаются на случай движения гиростата в поле силы тяжести и под действием Лоренцовой силы. Не выписывая эти уравнения явно, укажем только числовой пример их полиномиального решения. При этом будем считать, что вектор гиростатического момента находится на первой главной оси, то есть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, 0, 0)$.

Пусть

$$A_1 = a\,,\ A_2 = \frac{11}{10}a\,,\ A_3 = \frac{3}{5}a\,,\ B_1 = b\,,\ \lambda = \frac{b}{81}\,,\ s = -\frac{80b^2}{729a}. \tag{17}$$

Имеем

$$q^2(p) = \tilde{Q}(p) = -2p^2 - \frac{160b}{729a}p + \frac{97293401b^2}{26040609a^2},$$

$$r^2(p) = \tilde{R}(p) = 2p^2 + \frac{160b}{243a}p - \frac{b^2}{a^2}, \tag{18}$$

$$\nu_1(p) = -\frac{7a}{10b}p - \frac{7}{243},\quad \nu_2(p) = -\frac{21a}{40b}\sqrt{\tilde{Q}(p)},\quad \nu_3(p) = -\frac{7a}{40b}\sqrt{\tilde{R}(p)}.$$

Функцию $p = p(t)$ находим из уравнения (15) при

$$p \in \left(-\frac{\left(560 + \sqrt{194900402}\right)b}{10206a}; -\frac{\left(80 + \sqrt{124498}\right)b}{486a}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\left(-80 + \sqrt{124498}\right)b}{486a}; \frac{\left(-560 + \sqrt{194900402}\right)b}{10206a}\right).$$

На указанных интервалах подкоренные функции $\tilde{Q}(p)$ и $\tilde{R}(p)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность решения (15), (17), (18) установлена.

Решение (15), (17), (18) содержит два свободных положительных параметра a и b; и описывается эллиптическими функциями времени.

Редукция уравнений (3) задачи II проводится по аналогии с редукцией и для уравнений задачи I. При этом сохраняются условия (6). Считая $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ и $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, укажем лишь конечный результат редукции:

$$\dot{p} = \mu^* \sqrt{Q_*(p) R_*(p)}; \tag{19}$$

$$\nu_1(p) = \left(\kappa_0 - A_2 \upsilon(p) Q_*(p) - A_3 u(p) R_*(p)\right)(A_1 p)^{-1}, \tag{20}$$

$$v_2(p) = \upsilon(p)\sqrt{Q_*(p)}, \quad v_3(p) = u(p)\sqrt{R_*(p)}. \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\mu^* Q_*'(p)\upsilon(p) + \mu^* Q_*(p)\upsilon'(p) - pu(p) + v_1(p) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\mu^* R_*'(p)u(p) + \mu^* R_*(p)u'(p) + p\upsilon(p) - v_1(p) = 0. \tag{22}$$

Здесь

$$Q_*(p) = q^2(p),\ R_*(p) = r^2(p),$$

$$u(p) = \left[(A_3 - A_1)p - \tilde{\mu}_1 Q_*'\right](B_1 p + s)^{-1},$$

$$\upsilon(p) = \left[(A_2 - A_1)p + \tilde{\mu}_2 R_*'\right](B_1 p + s)^{-1}.$$

$$\mu^* = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{A_2(A_2 - A_3)}{2A_1}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{A_3(A_2 - A_3)}{2A_1}.$$

Первый интеграл уравнений (22) таков

$$Q_*(p)\upsilon^2(p) + R_*(p)u^2(p) + \left(k_0 - A_2 Q_*(p)\upsilon(p) - A_3 R_*(p)u(p)\right)^2 (A_1 p)^{-2} - 1 = 0. \tag{23}$$

Интеграл (23) вытекает из геометрического интеграла (4) при подстановке в него соотношений (20), (21).

Уравнения (22) можно отнести к уравнениям класса Н. Ковалевского, но метод их получения отличается от метода получения уравнений Н. Ковалевского, поскольку в этих методах используются разные значения для функции $v_1(p)$ (для нахождения уравнений Н. Ковалевского использовался интеграл энергии, а для получения уравнений (22) – интеграл момента количества движения). Это связано с тем, что уравнения (3) не допускают интеграл энергии.

Приведем числовой пример нового решения уравнений (19)-(22).

Пусть

$$A_1 = a, \quad A_2 = \frac{759}{590}a, \quad A_3 = \frac{11}{10}a, \quad B_1 = -10b, \tag{24}$$
$$(a > 0, b > 0).$$

Имеем

$$q^2(p) = Q_*(p) = -\frac{3481}{1089}p^2 + \frac{169b^2}{1650a^2},$$

$$r^2(p) = R_*(p) = -\frac{2950a^2}{121b^2}p^4 + \frac{33085}{7139}p^2 + \frac{74858685399756b^2}{563154352475a^2}, \tag{25}$$

$$v_1 = \frac{59a^3}{33b^3}p^3 - \frac{19331a}{97350b}p, \quad v_2 = \left(\frac{a^3}{b^3}p^2 - \frac{10764a}{87025b}\right)\sqrt{Q_*(p)}, \quad v_3 = -\frac{13a}{150b}\sqrt{R_*(p)}.$$

Функцию $p=p(t)$ получим из дифференциального уравнения (19). Так как подкоренные функции $Q_*(p)$ и $R_*(p)$ при $p=0$ принимают положительные значения, то решение (24), (25) – действительно. Указанное решение содержит два положительных параметра a и b; оно описывается гиперэллиптическими функциями времени.

В **разделе 4** исследованы условия существования частных решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Запишем уравнения (1) и первые интегралы в скалярном виде, полагая $\boldsymbol{\omega}=(p,q,r)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,0)$, $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,0)$, $A=diag(A_1,A_2,A_3)$, $B=diag(B_1,B_2,B_3)$, $C=diag(C_1,C_2,C_3)$:

$$\left.\begin{aligned}
A_1\dot{p}&=(A_2-A_3)qr+B_3qv_3-B_2rv_2+(C_3-C_2)v_2v_3+\lambda_2 r+s_2v_3,\\
A_2\dot{q}&=(A_3-A_1)pr+B_1rv_1-B_3pv_3+(C_1-C_3)v_1v_3-\lambda_1 r-s_1v_3,\\
A_3\dot{r}&=(A_1-A_2)pq+B_2pv_2-B_1qv_1+(C_2-C_1)v_1v_2+\lambda_1 q-\lambda_2 p+s_1v_2-s_2v_1;
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\dot{v}_1=rv_2-qv_3,\quad \dot{v}_2=pv_3-rv_1,\quad \dot{v}_3=qv_1-pv_2; \quad (27)$$

$$\left.\begin{gathered}
A_1p^2+A_2q^2+A_3r^2-2(s_1v_1+s_2v_2)+C_1v_1^2+C_2v_2^2+C_3v_3^2=2E,\\
2(A_1p+\lambda_1)v_1+2(A_2q+\lambda_2)v_2+2A_3rv_3-B_1v_1^2-B_2v_2^2-B_3v_3^2=2\kappa,\\
v_1^2+v_2^2+v_3^2=1.
\end{gathered}\right\} \quad (28)$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (26), (27) решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева. Структура этого класса решений в переменных угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и единичного вектора $\boldsymbol{v}$ - оси симметрии силовых полей при

$$\lambda_2=0,\quad s_2=0 \quad (29)$$

такова:

$$q^2=Q(p)=\sum_{i=0}^{n}b_ip^i,\quad r^2=R(p)=\sum_{j=0}^{m}c_jp^j,$$

$$v_1=\varphi(p)=\sum_{k=0}^{l}a_kp^k,\quad v_2=\frac{\psi(p)}{p}\sqrt{Q(p)},\quad v_3=\frac{æ(p)}{p}\sqrt{R(p)},$$

$$\psi(p)=\sum_{i=0}^{n_1}g_ip^i,\quad æ(p)=\sum_{j=0}^{m_1}f_jp^j, \quad (30)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули, b_i, c_j, a_k, g_i, f_j – неизвестные, подлежащие определению. Если для свободных членов полиномов

$\psi(p)$ и æ(p) из (30) выполнено условие $g_0^2 + f_0^2 = 0$, то указанным классом в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой можно описать решения В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева.

В результате исследования построено **пять новых частных решений** указанного класса уравнений (26), (27) задачи I, для которых варианты значений максимальных степеней полиномов решения записаны в таблице 1.

Таблица 1.

№ варианта	n	m	l	n_1	m_1
1	5	5	2	1	1
2	4	4	2	1	1
3	4	2	2	0	2
4	3	2	2	1	2

При построении этих частных решений учитывались условия, вытекающие из геометрического интеграла (28).

Полученные новые решения описываются гиперэллиптическими и эллиптическими функциями времени.

Приведем численный пример одного из таких решений.

$$A_1 = a, \quad A_2 = \frac{23}{35}a, \quad A_3 = \frac{10}{9}a, \quad B_1 = -\frac{305}{143}b, \quad B_2 = -b, \quad B_3 = b,$$

$$C_3 - C_2 = -\frac{315}{143}\frac{b^2}{a}, \quad C_1 - C_3 = \frac{30870}{20449}\frac{b^2}{a}; \quad (a>0,\ b>0),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{3591}{1573}fb,\, 0,\, 0\right), \quad \mathbf{s} = \left(-\frac{1349460}{224939}\frac{b^2 f}{a},\, 0,\, 0\right), \quad f = \frac{33}{27307}\sqrt{409605},$$

$$q = p\sqrt{Q^*(p)}, \quad r = p\sqrt{R^*(p)},$$

$$Q^*(p) = -\frac{1}{337211875(fb)^3}\times$$

$$\times\left(5848414a^3p^3 - 17892875a^2fbp^2 - 224224000a(fb)^2p + 9604\cdot 10^5(fb)^3\right), \qquad (31)$$

$$R^*(p) = \frac{1}{337211875(fb)^3}\times$$

$$\times\left(5848414a^3p^3 + 10020010a^2fbp^2 - 174123950a(fb)^2p + 191779875(fb)^3\right),$$

$$\nu_1 = -\frac{1}{121275fb^2}\left(20449a^2p^2 - 806050(fb)^2\right),$$

$$\nu_2 = \frac{1}{315b}(143ap + 1225fb)\sqrt{Q^*(p)}, \quad \nu_3 = \frac{1}{315b}(143ap + 315fb)\sqrt{R^*(p)}.$$

$$\dot{p} = -\frac{1225}{143}\left(\frac{bf}{a}\right)^2 \sqrt{Q^*(p)R^*(p)}, \tag{32}$$

где

$$-\frac{34\,fb}{5a} \le p \le -\frac{33\,fb}{5a}. \tag{33}$$

Решение (31), (32) содержит два свободных положительных параметра a, b и описывается функциями времени, полученными обращением гиперэллиптического интеграла, вытекающего из уравнения (32).

На указанном в (33) отрезке изменения p, исключая граничные значения, решение (31), (32) – действительно.

Раздел 5 посвящен изучению условий существования частных решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Запишем уравнения движения (3) и первые интегралы (4) в скалярном виде, полагая $\boldsymbol{\omega} = (p,q,r)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,0)$, $\mathbf{s} = (s_1,s_2,0)$, $A = diag(A_1,A_2,A_3)$, $B = diag(B_1,B_2,B_3)$, $C = diag(C_1,C_2,C_3)$.

Тогда кинематические уравнения совпадут с уравнениями (27), а динамические уравнения и первые интегралы примут вид

$$\left.\begin{aligned} A_1\dot{p} &= (A_2 - A_3)qr + B_2qv_3 - B_3rv_2 + (C_3 - C_2)v_2v_3 + \lambda_2 r + s_2v_3, \\ A_2\dot{q} &= (A_3 - A_1)pr + B_3rv_1 - B_1pv_3 + (C_1 - C_3)v_1v_3 - \lambda_1 r - s_1v_3, \\ A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + B_1pv_2 - B_2qv_1 + (C_2 - C_1)v_1v_2 + \lambda_1 q - \lambda_2 p + s_1v_2 - s_2v_1; \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$(A_1p + \lambda_1)v_1 + (A_2q + \lambda_2)v_2 + A_3qv_3 = \kappa_0, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1. \tag{35}$$

Поставим задачу об изучении условий существования у уравнений (27), (34) частных решений обобщенного полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева (30) при выполнении условий (29).

В результате исследования найдено **четыре новых частных решения** рассматриваемого обобщенного полиномиального класса задачи II. Варианты значений максимальных степеней полиномов полученных решений указаны в таблице 2.

Таблица 2.

№ варианта	n	m	l	n_1	m_1
1	5	4	3	1	2
2	4	4	2	1	1
3	3	2	2	1	2

При построении частных решений класса (30) обязательно учитываются условия выполнения геометрического интеграла из (35).

Новые частные решения описываются гиперэллиптическими функциями и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Укажем числовой пример одного из таких решений.

$$A_1 = a, \quad B_2 = b, \quad B_3 = -5b, \quad (a > 0, b > 0),$$

$$A_2 = \frac{5189 - 2\gamma}{9320} a, \quad A_3 = \frac{3(5189 - 2\gamma)a}{23300}, \quad B_1 = \frac{5(2027 + 20\gamma)b}{4533},$$

$$C_1 = C_3, \quad \alpha = C_3 - C_2 = -\frac{8(5189 + 2\gamma)b^2}{4533a},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{3(-39195823 + 7644\gamma)a^2}{108578 \cdot 10^4 bf}; 0; 0 \right), \quad \boldsymbol{s} = \left(-\frac{(19413 + 116\gamma)a}{23300 f}; 0; 0 \right);$$

$$\gamma = \sqrt{130249}, \quad q^2 = p^2 Q^*(p), \quad r^2 = R(p),$$

$$Q^*(p) = b_5 p^3 + b_4 p^2 + b_3 p + b_2, \quad R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0,$$

$$\nu_1 = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \nu_2 = (g_1 p + g_0)\sqrt{Q^*(p)}, \quad \nu_3 = (fp + f_1)\sqrt{R(p)},$$

$$b_5 = \frac{32 \cdot 10^5 (1962045147564329 + 5425835188622\gamma)(bf)^3}{574182365314457367 9a^3},$$

$$b_4 = \frac{56 \cdot 10^4 (332047883693 + 917660324\gamma)(bf)^2}{422223961551921a^2},$$

$$b_3 = -\frac{16(170975715836 + 444699473\gamma)bf}{10349387493a}, \quad b_2 = \frac{348299090074 + 691358032\gamma}{7705533375},$$

$$c_4 = -\frac{10^6 (332047883693 + 917660324\gamma)(bf)^2}{3800015653967289a^2}, \tag{36}$$

$$c_3 = -\frac{2 \cdot 10^3 (8898822716 + 24186263\gamma)bf}{838300386933a}, \quad c_2 = \frac{1256991842 + 3351656\gamma}{61644267},$$

$$c_1 = -\frac{(7359305257 + 14774851\gamma)a}{1188212625bf}, \quad c_0 = \frac{(239696807269 + 83294167\gamma)a^2}{12215025 \cdot 10^4 (bf)^2},$$

$$a_3 = -\frac{10^3 (392498 + 1169\gamma)bf^2}{61644267a}, \quad a_2 = -\frac{(3737 + 16\gamma)f}{1511},$$

$$a_1 = \frac{(318 + \gamma)a}{466b}, \quad a_0 = -\frac{(-11158860014 + 27159823\gamma)a^2}{271445 \cdot 10^5 b^2 f},$$

$$g_1 = \frac{(5189 - 2\gamma)a}{46600b}, \quad g_0 = \frac{(27446717 - 20756\gamma)a^2}{54289 \cdot 10^4 b^2 f},$$

$$f_1 = \frac{3(94191 - 172\gamma)a}{233 \cdot 10^3 b},$$

$$f = \frac{9(3675866703789053993\,8 - 8962943009203634\,1\gamma)^{1/2} a^2}{271445 \cdot 10^5 b^2};$$

$$\dot{p} = \frac{(-392498 + 1169\gamma)a}{1165 \cdot 10^3 bf} \sqrt{Q^*(p)R(p)}. \quad (37)$$

Решение (36), (37) содержит два свободных положительных параметра a, b, и описывается гиперэллиптическими функциями времени. Так как в точке $p = 0$ функции $Q^*(p)$ и $R(p)$ положительны, следовательно, решение (36), (37) является действительным.

В **разделе 6** исследуются условия существования решений обобщенного полиномиального класса Коносевича-Поздняковича уравнений Кирхгофа-Пуассона (26), (27) задачи I. Рассмотренный обобщенный класс при выполнении условий (29) имеет вид

$$p = \sigma^2, \quad q^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} b_i \sigma^i, \quad r^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{\tilde{m}} c_j \sigma^j,$$

$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tilde{l}} a_k \sigma^k, \quad \nu_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \frac{æ(\sigma)}{\sigma} \sqrt{R(\sigma)},$$

$$\psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}_1} g_i \sigma^i, \quad æ(\sigma) = \sum_{j=0}^{\tilde{m}_1} f_j \sigma^j, \quad (38)$$

где $\tilde{n}$, $\tilde{m}$, $\tilde{l}$, $\tilde{n}_1$, $\tilde{m}_1$ – натуральные числа или нули, b_i, c_j, a_k, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Если для свободных членов полиномов $\psi(\sigma)$ и $æ(\sigma)$ из (38) выполняется условие $g_0^2 + f_0^2 = 0$, то указанным классом решений (38) в классической задаче динамики можно описать решение Коносевича-Позднякова уравнений Эйлера-Пуассона, а в задаче о движении тяжелого гиростата – решение Харламовой-Мозалевской.

В результате исследования построено **четыре новых решения** изучаемого обобщенного класса уравнений (26), (27). Варианты значений максимальных степеней полиномов этих решений указаны в таблице 3.

Таблица 3.

№ варианта	$\tilde{n}$	$\tilde{m}$	$\tilde{l}$	$\tilde{n}_1$	$\tilde{m}_1$
1	2	4	2	2	1
2	3	3	2	2	2
3	3	4	2	1	1
4	4	4	2	1	1

Указанные решения описываются гиперэллиптическими функциями времени и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Построенные в разделе 6 частные решения не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата, то есть они не являются тривиальными обобщениями решения Б.И. Коносевича-Е.В. Поздняковича.

Укажем действительный числовой пример одного из решений, приведенных в диссертации:

$$A_2 = \frac{5}{7}A_1, \quad A_3 = \frac{4}{5}A_1, \quad A_1 = a,$$

$$B_1 = -\frac{B_3}{5}, \; B_2 = B_3 = b, \; C_2 = C_3, \; C_1 - C_3 = -\frac{b^2}{a}, \; \eta_0 = \sqrt{118}, \; (a>0, b>0),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{32719265 + 2770021\eta_0}{107471875(bf)^2}a^3, 0, 0 \right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{14579\eta_0 - 3272715}{21494375bf^2}a^2, 0, 0 \right);$$

$$p = \sigma^2, \quad q^2 = Q(\sigma) = \frac{7}{25}\left(\frac{14a}{bf}\sigma^3 + \frac{7(263+2\eta_0)a^2}{85(bf)^2}\sigma^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{14(3232+689\eta_0)a^3\sigma}{7225(bf)^3} + \frac{9(70855+6719\eta_0)a^4}{614125(bf)^4} \right),$$

$$r^2 = R(\sigma) = -\frac{2a}{bf}\sigma^3 - \frac{2(224+5\eta_0)a^2}{85(bf)^2}\sigma^2 +$$

$$+\frac{2(4993+1040\eta_0)a^3}{7225(bf)^3}\sigma + \frac{9(70855+6719\eta_0)a_0^4}{3070625(bf)^4},$$

$$\nu_1 = -\frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{3a^2}{5b^2 f}\sigma + \frac{(5902615+642896\eta_0)a^3}{21494375b^3 f^2}, \tag{39}$$

$$\nu_2 = \left(\frac{5f}{7}\sigma + \frac{(113+7\eta_0)a}{119b} \right)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \left(f\sigma + \frac{(88+5\eta_0)a}{85b} \right)\sqrt{R(\sigma)}.$$

Здесь

$$f = -\frac{3\sqrt{7}}{175}\left(\frac{232942943249046046}{700280639945138 - 64436115905755\eta_0} \right)^{1/4} \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

$$\dot{\sigma} = \frac{bf}{7a}\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}. \tag{40}$$

Решение (39), (40) уравнений (26), (27) задачи I содержит два положительных параметра a, b и описывается функциями, полученными обращением гиперэллиптического интеграла, вытекающего из уравнения (40). Так как подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$ принимают положительные значения, следовательно, решение (39), (40) – действительно.

Раздел 7 посвящен построению частных решений обобщенного полиномиального класса Коносевича-Поздняковича (38) дифференциальных уравнений (27), (34) задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона при выполнении условий (29).
Построено **семь новых решений** рассматриваемой задачи. Варианты значений максимальных степеней полиномов новых решений указаны в таблице 4.

Таблица 4.

№ варианта	$\tilde{n}$	$\tilde{m}$	$\tilde{l}$	$\tilde{n}_1$	$\tilde{m}_1$
1	4	4	2	1	1
2	4	4	2	1	0
3	4	4	1	1	1
4	3	4	2	1	1
5	2	4	2	2	1
6	3	3	2	2	2
7	3	3	1	2	2

Построенные в разделе 7 новые частные решения описываются функциями, полученными обращением гиперэллиптических интегралов и эллиптических интегралов Лежандра третьего рода. Данные решения не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой и в задаче о движении тяжелого гиростата. Таким образом, они не являются некоторыми обобщениями известных результатов по исследованию решений уравнений динамики твердого тела.

Приведем действительный числовой пример одного из таких решений.

$$A_1 = 2a, \quad A_2 = \frac{31}{10}a, \quad A_3 = 2a,$$
$$\delta_0^* = \sqrt{7489},$$
$$B_1 = -\frac{31a}{13f}, \quad B_2 = \frac{\left(39\delta_0^* - 3838\right)a}{310f}, \quad B_3 = \frac{11\left(17 - \delta_0^*\right)a}{720f}, \quad \left(a > 0,\ f > 0\right),$$
$$C_3 - C_2 = \frac{\left(357317 - 4501\delta_0^*\right)a}{22320f^2}, \quad C_1 - C_3 = \frac{\left(19\delta_0^* - 1523\right)a}{80f^2},$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{31\left(2327 + 31\delta_0^*\right)af^2}{16250g^2};\ 0;\ 0\right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{31\left(107 + \delta_0^*\right)af}{650g^2};\ 0;\ 0\right). \qquad (41)$$

$$p=\sigma^2, \quad q=\sqrt{Q(\sigma)}, \quad r=\sigma\sqrt{R^*(\sigma)},$$

$$Q(\sigma)=\frac{31\left(2813317+32501\delta_0^*\right)f^2}{9411187500g^4}\times$$

$$\times\left(5\left(2327-31\delta_0^*\right)g^2\sigma^2+99\left(\delta_0^*-17\right)fg\sigma+3564f^2\right),$$

$$R^*(\sigma)=\frac{\left(384163+4439\delta_0^*\right)}{7605000g^2}\left(13\left(13\delta_0^*-1121\right)g^2\sigma^2+72\left(2\delta_0^*-169\right)fg\sigma-2232f^2\right),$$

$$\nu_1=\frac{\left(1121+13\delta_0^*\right)f\sigma}{13000g}\left(\left(\delta_0^*-117\right)g\sigma+124f\right),$$

$$\nu_2=\left(g\sigma-\frac{17+\delta_0^*}{100}f\right)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3=f\sigma\sqrt{R^*(\sigma)},$$

$$g=\frac{\sqrt{130}f}{3250}\sqrt{\sqrt{233721239203+2700453059\delta_0^*}f};$$

$$\dot{\sigma}=\hat{d}\sigma\sqrt{Q(\sigma)R^*(\sigma)}, \quad \hat{d}=\frac{13\left(169-2\delta_0^*\right)g}{558f}, \tag{42}$$

при $\sigma\in\left[\sigma_1;\sigma_2\right]$,

$$\sigma_1=-\frac{f}{650g}\left(1053+9\delta_0^*-\sqrt{10750678+123734\delta_0^*}\right),$$

$$\sigma_2=-\frac{f}{100g}\left(107+\delta_0^*+\sqrt{28246+338\delta_0^*}\right).$$

Решение (41), (42) характеризуется двумя свободными положительными параметрами a и f и описывается функциями времени, полученными обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения (42). На указанном в (42) отрезке изменения σ, исключая граничные точки, подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R^*(\sigma)$ принимают положительные значения. Следовательно, решение (41), (42) – действительно.

В **разделе 8** изучены условия существования решений обобщенного полиномиального класса Докшевича уравнений Кирхгофа-Пуассона (26), (27) задачи I и уравнений (27), (34) задачи II. Этот обобщенный класс имеет вид

$$q=Q(p)=\sum_{i=0}^{\hat{n}}b_i p^i, \quad r^2=R(p)=\sum_{j=0}^{\hat{m}}c_j p^j,$$

$$\nu_1=\varphi(p)=\sum_{k=0}^{\hat{l}}a_k p^k, \quad \nu_2=\psi(p)=\sum_{i=0}^{\hat{n}_1}g_i p^i, \quad \nu_3=\frac{æ(p)}{p}\sqrt{R(p)},$$

$$æ(p)=\sum_{j=0}^{\hat{m}_1} f_j p^j, \qquad (43)$$

где $\hat{n}$, $\hat{m}$, $\hat{l}$, $\hat{n}_1$, $\hat{m}_1$ – натуральные числа или нули; b_i, c_j, a_k, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Если свободный член полинома $æ(p)$ из (43) $f_0=0$, то указанным классом в задаче о движении тяжелого гиростата описывается решение А.И. Докшевича.

Построено **три новых частных решения** обобщенного полиномиального класса Докшевича (43) в задаче I и **три новых частных решения** в задаче II. В таблице 5 указаны варианты значений максимальных степеней полиномов полученных решений, которые являются общими для двух рассматриваемых задач динамики гиростата

Таблица 5.

№	$\hat{n}$	$\hat{m}$	$\hat{l}$	$\hat{n}_1$	$\hat{m}_1$
1	3	6	3	3	1
2	2	4	2	2	1
3	2	4	1	2	1

Данные решения описываются элементарными функциями времени и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода. Приведем числовые примеры действительного решения для каждой из двух задач динамики гиростата.

Числовой пример для задачи I.

$$A_1=\frac{a}{4},\quad A_2=a,\quad A_3=a,$$

$$C_3=C_2,\quad C_1-C_3=-\frac{3b^2}{4a},\quad B_1=-\frac{11}{4}b,\quad B_2=b,\quad B_3=b,\quad (a>0,\, b>0),$$

$$\boldsymbol{s}=\left(-\frac{(3+2\delta^*)b^2}{160a};\, 0;\, 0\right),\quad \boldsymbol{\lambda}=\left(-\frac{13\delta^*}{80}b;\, \frac{3}{16}b;\, 0\right);$$

$$q=\frac{5a}{b}p^2+\frac{1}{8}p,\quad r=p\sqrt{\hat{R}(p)},$$

$$\hat{R}(p)=-\frac{25a^2}{b^2}p^2-\frac{5a}{4b}p+\frac{31}{64},$$

$$\nu_1=\frac{a}{b}p+\frac{1}{40}+\frac{\delta^*}{60},\quad \nu_2=-\frac{10a^2}{b^2}p^2+\frac{(2\delta^*-3)a}{6b}p+\frac{23}{160}+\frac{\delta^*}{120},$$

$$\nu_3 = \left(-\frac{2a}{b}p - \frac{1}{20} + \frac{\delta^*}{15}\right)\sqrt{\hat{R}(p)}, \quad \delta^* = \sqrt{391},$$

$$p(t) = \frac{31b^2 e^{u(t)}}{8\left(2b^2 e^{2u(t)} + 5abe^{u(t)} + 100a^2\right)}, \quad u(t) = -\frac{3\sqrt{31}b(t - t_0)}{160a}. \qquad (44)$$

Решение (44) содержит два положительных свободных параметра a и b. Оно описывается элементарными функциями времени.

Числовой пример для задачи II.

$$A_1 = \frac{5}{3}a, \quad A_2 = a, \quad A_3 = a, \quad C_3 = C_2, \quad C_1 - C_3 = \frac{2406\tilde{\tilde{\mu}}_1^2 a}{25 f^2},$$

$$B_1 = \frac{(7\xi_0 + 4369)\tilde{\tilde{\mu}}_1 a}{30 f}, \quad B_2 = \frac{\tilde{\tilde{\mu}}_1 a}{f}, \quad B_3 = \frac{40\tilde{\tilde{\mu}}_1 a}{f}, \quad (a > 0,\ f > 0),$$

$$\boldsymbol{s} = \left(802\left(3 + 20\tilde{\tilde{\mu}}_2\right)\left(400\tilde{\tilde{\mu}}_2^2 - 60\tilde{\tilde{\mu}}_2 + 9\right)\tilde{\tilde{\mu}}_1^2 a (225 f)^{-1};\ 0;\ 0\right),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\tilde{\tilde{\mu}}_1 a}{12030}\left(11\xi_0 + 1291;\ -100(7\xi_0 + 1259);\ 0\right),$$

$$q = -\frac{p}{1500}\left[18045\tilde{\tilde{\mu}}_1 p^2 + 3609\left(3\tilde{\tilde{\mu}}_1 + 100\tilde{\tilde{\mu}}_2\right)\tilde{\tilde{\mu}}_1 p + 25(2\xi_0 - 799)\right],$$

$$r = p\sqrt{R^*(p)},$$

$$R^*(p) = \frac{1}{2894418\cdot 10^4}\Big[-10445954562\tilde{\tilde{\mu}}_1^2 p^4 + 24120150(5\xi_0 - 2847)p^3 -$$

$$-21708135(7\xi_0 - 3601)\tilde{\tilde{\mu}}_1 p^2 - 45(\xi_0 - 409)\left(4\tilde{\tilde{\mu}}_2\right)^{-1} \times$$

$$\times(5151\xi_0 - 1750861)p + 20050(5596\xi_0 - 3545493)\Big],$$

$$\nu_1 = \frac{f}{27\tilde{\tilde{\mu}}_1}\left[27\tilde{\tilde{\mu}}_1 p^3 + 540\tilde{\tilde{\mu}}_1\tilde{\tilde{\mu}}_2 p^2 + 45\left(80\tilde{\tilde{\mu}}_1\tilde{\tilde{\mu}}_2^2 - 1\right)p + \left(8000\tilde{\tilde{\mu}}_2^3 + 27\right)\tilde{\tilde{\mu}}_1\right],$$

$$\nu_2 = \frac{f}{86832540\tilde{\tilde{\mu}}_1}\Big[4341627\tilde{\tilde{\mu}}_1 p^3 + 86832540\tilde{\tilde{\mu}}_1\tilde{\tilde{\mu}}_2 p^2 + 578883600\tilde{\tilde{\mu}}_1\tilde{\tilde{\mu}}_2^2 p -$$

$$-9(82202\xi_0 - 31508599)\tilde{\tilde{\mu}}_1 + 643204\cdot 10^4\tilde{\tilde{\mu}}_2\Big],$$

$$\nu_3 = \frac{f}{3\tilde{\tilde{\mu}}_1}\left(-5p + 3\tilde{\tilde{\mu}}_1\right)\sqrt{R^*(p)}, \qquad (45)$$

где

$$\tilde{\tilde{\mu}}_1 = 5\left(\frac{2\xi_0 - 417}{81\cdot 401}\right)^{1/3}, \quad \tilde{\tilde{\mu}}_2 = -\frac{3^{5/3}\cdot 401^{-1/3}(\xi_0 - 409)}{40(2\xi_0 - 417)^{2/3}},$$

$$f=\frac{3}{16\sqrt{5317}}\sqrt{71083129-9\cdot 19157\xi_0}\,,\quad \xi_0=\sqrt{164073}\,;$$

$$\dot{p}=-\frac{20}{9}\left(3p+20\tilde{\tilde{\mu}}_2\right)p\sqrt{R^*\left(p\right)}\ \text{при}\ p\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{71}{50}\right]. \tag{46}$$

Решение (45), (46) характеризуется двумя положительными параметрами a и f, и может быть выражено через функции, полученными в результате обращения эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения (46). На указанном в (46) отрезке изменения p решение (45), (46) – действительно.

Раздел 9 посвящен изучению условий существования решений нового полиномиального класса, введенного автором диссертации, в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, следующей структуры

$$p=\sigma^2\,; \tag{47}$$

$$q=Q(\sigma)=\sum_{i=0}^{n^*}b_i\sigma^i\,,\quad r^2=R(\sigma)=\sum_{j=0}^{m^*}c_j\sigma^j\,,$$

$$\nu_1=\varphi(\sigma)=\sum_{k=0}^{l^*}a_k\sigma^k\,,\quad \nu_2=\psi(\sigma)=\sum_{i=0}^{n_1^*}g_i\sigma^i\,,\quad \nu_3=\frac{æ(\sigma)}{\sigma}\sqrt{R(\sigma)}\,,$$

$$æ(\sigma)=\sum_{j=0}^{m_1^*}f_j\sigma^j\,, \tag{48}$$

где n^*, m^*, l^*, n_1^*, m_1^* – натуральные числа или нули, b_i, c_j, a_k, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению. При этом полагаем, что вектор гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ и вектор обобщенного центра масс гиростата $\mathbf{s}$ находятся в одной главной плоскости эллипсоида инерции. Отличие класса полиномиальных решений (47), (48) от решений обобщенного полиномиального класса Докшевича (43) состоит в том, что первая компонента вектора угловой скорости представима в виде квадрата вспомогательной переменной.

В разделе построено **семь новых решений** указанного класса уравнений Кирхгофа-Пуассона (26), (27). В таблице 6 указаны варианты значений максимальных степеней полиномов новых решений класса (47), (48).

Таблица 6.

№ варианта	n^*	m^*	l^*	n_1^*	m_1^*
1	3	6	2	4	2
2	3	6	2	3	1
3	2	4	3	2	2
4	2	4	2	3	2

5	2	4	2	2	1
6	2	4	1	1	0
7	2	2	2	2	2

Частные решения раздела 9 описываются элементарными, эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.

Укажем один числовой пример действительного решения.

$$A_1 = \frac{3}{2}A_2, \quad A_2 = A_3, \quad A_2 = a, \quad B_1 = \frac{7}{9}B_2, \quad B_3 = B_2,$$

$$B_2 = \frac{144a}{\eta a_1^2}, \quad \eta = \sqrt{186624a^4 + 6048a^2 + 1}, \quad C_2 = C_3,$$

$$C_1 - C_2 = -\frac{1536a}{\eta^2 a_1^4}, \quad \lambda_2 = a_1^2 B_2^2 \quad (a > 1,\, a_1 > 0),$$

$$\mathbf{s} = \left(-\frac{1536\left(432a^2 - 17\right)a}{\eta^3 a_1^4};\, 0;\, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{16a}{\eta^2 a_1^2}\left(3024a^2 - 113\right);\, \lambda_2;\, 0 \right),$$

$$p = \sigma^2, \quad q = Q(\sigma) = \frac{\sigma}{a}\left(-\frac{\eta a_1}{432}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma - \frac{14}{3\eta a_1} \right), \quad r^2 = R(\sigma) = \frac{\sigma^2}{3a^2}R^*(\sigma),$$

$$R^*(\sigma) = -\frac{\eta^2 a_1^2}{62208}\sigma^4 + \frac{\eta a_1}{288}\sigma^3 - \frac{1728a^2 + 109}{432}\sigma^2 + \frac{7 - 96a^2}{\eta a_1}\sigma + \frac{4\left(3456a^2 - 49\right)}{3\eta^2 a_1^2}, \quad (49)$$

$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = -\frac{\eta a_1^2}{96}\sigma^2 + a_1\sigma + \frac{432a^2 - 17}{\eta},$$

$$\nu_2 = \psi(\sigma) = \frac{1}{4a}\left(\frac{\eta^2 a_1^3}{20736}\sigma^3 - \frac{5\eta a_1^2}{576}\sigma^2 + \frac{\left(7 - 432a^2\right)a_1}{36}\sigma + \frac{576a^2 - 7}{\eta} \right),$$

$$\nu_3 = \frac{a_1}{8\sqrt{3}a}\left(-\frac{\eta a_1}{24}\sigma + 3 \right)\sqrt{R^*(\sigma)};$$

$$\dot{\sigma} = \frac{48\sqrt{3}}{a_1\eta}\sigma\sqrt{R^*(\sigma)}. \quad (50)$$

Решение (49), (50) характеризуется двумя произвольными параметрами $a > 1$ и $a_1 > 0$. Действительность этого решения можно получить из условия, что подкоренная функция в (50) при $\sigma = 0$ принимает положительное значение. При этом $\sigma(t)$ – функция, установленная в результате обращения эллиптического интеграла Лежандра третьего рода.

Раздел 10 посвящен изучению условий существования новых классов полиномиальных решений, уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, введенных автором диссертации. Структура одного нового класса решений указана в разделе 9 и совпадает с решением (47), (48) при условии

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, 0). \tag{51}$$

Построено **девять новых частных решений** указанного полиномиального класса уравнений (27), (34). Варианты значений максимальных степеней полиномов этих решений приведены в таблице 7.

Таблица 7.

№ варианта	n^*	m^*	l^*	n_1^*	m_1^*
1	3	6	2	4	2
2	3	6	2	3	1
3	2	4	3	3	2
4	2	4	3	2	2
5	2	4	2	4	3
6	2	4	2	3	2
7	2	4	2	2	1
8	2	4	1	1	0
9	2	2	2	2	2

Новые решения раздела 10 описываются элементарными и эллиптическими функциями времени

Укажем числовой пример одного действительного решения.

$$A_1 = \frac{5}{24}A_3, \quad A_2 = a, \quad A_3 = a, \quad (a > 0, b > 0),$$

$$B_1 = -\frac{b}{14}, \quad B_2 = b, \quad B_3 = b, \quad C_2 = C_3, \quad C_1 - C_3 = \frac{36b^2}{7a},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{b}{\sqrt{33}}\left(4\sqrt{13};\, 7\sqrt{5};\, 0\right), \quad \mathbf{s} = \frac{8\sqrt{33}b^2}{11a}\left(-\frac{13\sqrt{3}}{7};\, 7\sqrt{5};\, 0\right),$$

$$p = \sigma^2, \quad q = Q(\sigma) = \frac{\sigma}{5}\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\sqrt[4]{\frac{11}{39}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^2 + \frac{\sqrt{65}}{26}\sigma + \sqrt{10}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{b}{a}}\right),$$

$$r^2 = \frac{\sigma^2}{5}R^*(\sigma),$$

$$R^*(\sigma) = -\frac{\sqrt{429}}{1248}\frac{a}{b}\sigma^4 - \frac{\sqrt{2}}{104}\sqrt[4]{\frac{143}{3}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^3 - \frac{27}{52}\sigma^2 + 4\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{3}{143}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sigma + \frac{8\sqrt{429}}{11}, \tag{52}$$

$$\nu_1 = -\frac{1}{72}\frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{7\sqrt{2}}{18}\sqrt[4]{\frac{3}{143}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma + \frac{2\sqrt{429}}{99},$$

$$\nu_2=\frac{\sqrt{5}}{9}\left(\frac{\sqrt{33}}{960}\frac{a^2}{b^2}\sigma^4+\frac{\sqrt{2}}{80}\sqrt[4]{\frac{11}{39}}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^3+\frac{7\sqrt{13}}{260}\frac{a}{b}\sigma^2-\frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma-\frac{7\sqrt{33}}{11}\right),$$

$$\nu_3=\frac{\sqrt{5}}{180}\frac{a}{b}\sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{143}{3}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma+1\right)\sqrt{R^*(\sigma)},$$

$$\dot{\sigma}=\alpha_0\sigma\sqrt{R^*(\sigma)},\quad \alpha_0=\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{b}{a}}. \tag{53}$$

Решение (52), (53) уравнений (27), (34) положительное значение. Функцию времени $\sigma=\sigma(t)$ получим обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения (характеризуется двумя положительными параметрами a и b. Действительность этого примера вытекает из того, что подкоренная функция $R^*(\sigma)$ в точке $\sigma=0$ принимает 53).

В разделе 10 в дополнение к указанным выше решениям, найдено **одно новое решение** другого класса решений полиномиальной структуры. Для этого класса решений первая компонента вектора угловой скорости гиростата равна $p=\sigma^3$; другие компоненты этого вектора и компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ имеют вид (48) при условиях (51).

Приведем числовой пример действительного решения.

$$A_1=\frac{2}{3}a,\quad A_2=a,\quad A_3=a,\quad B_1=-\frac{2}{3}b,\quad B_2=-\frac{3}{2}b,\quad B_3=b,\quad (a>0, b>0,\ f>0),$$

$$C_3-C_2=\frac{(15f^2+4)b^2}{6af^2},\quad C_1-C_3=-\frac{2(9f^2+2)b^2}{9af^2},$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\left(\frac{b}{3f};\,0;\,0\right),\quad \mathbf{s}=-\frac{b^2}{3af}\left(1;\,\frac{1}{f};\,0\right);$$

$$p=\sigma^3,\quad q=Q(\sigma)=f\sigma^3+\frac{(9f^2+4)b^2}{9af^2}\sigma^2+\frac{b}{2a};$$

$$r^2=R(\sigma)=-f^2\sigma^6-\frac{2fb^2}{a}\sigma^5-\frac{(9f^2+4)b^4}{(3af)^2}\sigma^4-\frac{fb}{a}\sigma^3-\frac{b^3}{a^2}\sigma^2+\frac{3b^2}{4a^2}, \tag{54}$$

$$\nu_1=\varphi(\sigma)=-\frac{2b}{3f}\sigma^2,\quad \nu_2=\psi(\sigma)=\frac{af}{b}\sigma^3+b\sigma^2+\frac{1}{2},\quad \nu_3=\frac{a}{b}\sqrt{R(\sigma)};$$

$$\dot{\sigma}=\frac{\sigma}{3f}\sqrt{R(\sigma)}. \tag{55}$$

Решение (54), (55) уравнений (27), (34) характеризуется тремя положительными параметрами a, b, f, и описывается функциями, полученными обращением гиперэллиптического интеграла, вытекающего из уравнения (55). Действительность решения (54), (55) следует из того, что функция $R(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$ принимает положительное значение.

Это решение обладает примечательным свойством: при $t \to \infty$ переменная $\sigma \to 0$, следовательно, в силу формул (54), (55) движение гиростата асимптотически стремится к состоянию покоя.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертации исследуется проблема построения частных решений полиномиальной структуры уравнений движения гиростата в двух задачах динамики. Первая задача описывает движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; вторая задача – движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Дадим краткий анализ полученных результатов:

1. Разработаны **новые формы уравнений** движения и получены обобщенные уравнения Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой: в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (задача I) и в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II). Построены ***три новых частных решения*** редуцированных уравнений;
2. Рассмотрены условия существования **обобщенного полиномиального класса** Стеклова-Ковалевского-Горячева дифференциальных уравнений класса Кирхгофа-Пуассона (задача I). Построено ***пять новых частных решений***;
3. Изучены условия существования частных решений **обобщенного полиномиального класса** Стеклова-Ковалевского-Горячева в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II). Найдено ***четыре новых частных решения***;
4. Исследованы условия существования решений **обобщенного полиномиального класса** Коносевича-Поздняковича в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (задача I). Построено ***четыре новых частных решения*** указанного класса;
5. Рассмотрены условия существования частных решений полиномиальной структуры **обобщенного класса** Коносевича-Поздняковича в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II). Получено ***семь новых частных решений*** данного класса;
6. Изучены решения **обобщенного полиномиального класса** Докшевича в двух указанных выше обобщенных задачах динамики гиростата. Найдено ***три новых частных решения*** уравнений класса Кирхгофа-Пуассона (задача I) и ***три новых частных решения*** дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II);

7. Исследованы решения **нового** полиномиального класса в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (задача I). Построено ***семь новых частных решений*** рассматриваемого класса.
8. Изучены **новые классы полиномиальных решений** в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (задача II). Найдено ***десять новых частных решений*** изучаемых классов.

Все обобщенные классы полиномиальных решений, перечисленные выше, введены автором диссертации.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Зыза А.В. Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 116–123.
2. Зыза А.В. Новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Зыза // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 92–99.
3. Зыза А.В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 33–42.
4. Зыза А.В. Новый случай интегрируемости уравнений Кирхгофа-Пуассона / А.В. Зыза // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 43–47.
5. Зыза А.В. Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа-Пуассона / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 63–69.
6. Зыза А.В. Новые решения уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Тр. ИПММ ДНР. – 2015. – Т. 29. – С. 51–59.
7. Зыза А.В. Исследование обобщенного класса полиномиальных решений задачи о движении гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – Вып. 1. – С. 3–11.
8. Зыза А.В. Интегрирование уравнений Кирхгофа-Пуассона на полиноминальных инвариантных соотношениях / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 25–35.
9. Зыза А.В. Новые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 4. – С.23–40.
10. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – Т.10, №1. – С. 7–25.
11. Зыза А.В. Случай интегрируемости в задаче о движении твердого тела в магнитном поле / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 36–44.

12. Зыза А.В. Об обобщенных уравнениях Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / А.В. Зыза // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, вып. 1. – С. 73–83.
13. Зыза А.В. Полиномиальные решения двух задач динамики гиростата / А.В. Зыза // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Сборник трудов. Уфа. Республика Башкортостан. Россия. 19–24 августа 2019г. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – Т. 1. – С. 76–78.
14. Зыза А.В. Алгебраические инвариантные соотношения в решении одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 78–86.
15. Зыза А.В. Алгебраические инвариантные соотношения в решении уравнений Кирхгофа-Пуассона / А.В. Зыза, Е.С. Платонова // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 1. – С. 16–21.
16. Зыза А.В. Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза, Д.Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 55–63.
17. Зыза А.В. Об одном случае интегрируемости уравнений движения твердого тела в магнитном поле / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк // Вісн. Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – Вып. 2. – С. 31–35.
18. Горр Г.В. Об обобщении уравнений Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / Г.В. Горр, А.В. Зыза, Д.Н. Ткаченко // Естественные и математические науки: современный взгляд на изучение на актуальные проблемы: Международная научно-практическая конференция, 25 июля 2017 г.: Сборник научных трудов. Астрахань, 2017. – С. 15–20.
19. Зыза А.В. О двух специальных классах полиномиальных решений задачи о движении гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Устойчивость, управление и динамика твердого тела: 11 международная конференция, 8–12 июня 2011 г. – Донецк. – С. 53–54.
20. Зыза А.В. Об одном новом полиномиальном решении задачи о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Зыза // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти – 2013: II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, 21 травня 2013 р. – Донецьк. – С. 37–38.
21. Зыза А.В. О методе построения решений полиномиальных классов уравнений Кирхгофа-Пуассона / А.В. Зыза // История и методология науки: Международная научно-методическая конференция, 31 марта 2016 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2016. – С. 58–59.
22. Зыза А.В. О новом классе частных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона / А.В. Зыза // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции, 16–18 мая 2016 г. – Том 1. Физико-математические, технические науки и экология /

под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016.– С. 129–130.

23. Зыза А.В. Полиномиальное решение уравнений движения тела с одной неподвижной точкой в магнитном поле / А.В. Зыза // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2016: V Международная научно-практическая интернет-конференция, 27 мая 2016 г. – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2016. – С. 6–7.
24. Зыза А.В. Изучение обобщенного класса полиномиальных решений задачи о движении твердого тела в магнитном поле / А.В. Зыза // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2017: VI Международная научно-практическая интернет-конференция, 26 мая 2017 г. – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2017. – С. 9–11.
25. Зыза А.В. Новые решения полиномиальной структуры задачи о движении гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Эвристическое обучение математике: Материалы IV Международной научно-методической конференции, 19–20 апреля 2018 г. – Донецк: ДонНУ, 2018. – С. 110–112.
26. Зыза А.В. О полиномиальном решении с квадратичными инвариантными соотношениями задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона / А.В. Зыза // Донецкие чтения 2018. Образование, наука инновации, культура и вызов современности: Материалы III Международной научной конференции, 25 октября 2018 г. – Том 1. Физико-математические, технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ. – 2018. – С. 257–258.
27. Зыза А.В. Полиномиальные решения двух задач динамики гиростата / А.В. Зыза // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. 19–24 августа 2019 г.: Аннотации докладов. г. Уфа. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 18.
28. Зыза А.В. О новом классе частных решений одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза // Донецкие чтения 2019: Образование, наука инновации, культура и вызов современности: Материалы IV Международной научной конференции, 31 октября 2019 г. – Том 1. Физико-математические, технические науки. Часть I / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ. – 2019. – С. 35–37.
29. Зыза А.В. Классификация полиномиальных инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Зыза // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2020: IX Международная научно-практическая интернет-конференция, посвященная 100-летию ДонНУЭТ, 29 мая 2020 г.: материалы. – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2020. – С. 16–18.
30. Зыза А.В. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела в магнитном поле. / А.В. Зыза, Е.И. Афанасьева // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти – 2012: І Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, 17 травня 2012 р. – Донецьк. – С. 42–43.

31. Зыза А.В. О новых классах полиномиальных решений одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза, Т.Ю. Афонина // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти – 2014: III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, 20 травня 2014 р.– Донецьк. – С. 66–68.
32. Зыза А.В. Новые случаи интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в магнитном поле / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2015: IV Международная научно-практическая интернет-конференция, 25 мая 2015 г. – Донецк. – С. 30–31.

Аннотация

Зыза А.В. Исследование условий существования обобщенных классов полиномиальных решений уравнений движения гиростата под действием гироскопических, потенциальных и непотенциальных сил. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика, ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», ДНР, Донецк 2020.

Диссертация посвящена разработке методов построения частных решений различной полиномиальной структуры в двух задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой. Первая задача описывает движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, дифференциальные уравнения которой относятся к классу Кирхгофа-Пуассона; вторая задача – движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, дифференциальные уравнения которой допускают только два первых интеграла.

Проведена классификация известных классов полиномиальных решений и новых классов решений полиномиальной структуры, введенных автором диссертации, в указанных задачах динамики гиростата.

Выполнена редукция уравнений Кирхгофа-Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Найдены аналоги уравнений Н. Ковалевского в рассматриваемых задачах. Построены три новых решения полиномиальной структуры редуцированных уравнений, которые описываются эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.

Изучены условия существования частных решений обобщенных полиномиальных классов Стеклова-Ковалевского-Горячева, Докшевича, Коносевича-Позднякова и новых классов полиномиального вида дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Построено 43 новых частных решений рассматриваемых классов указанных задач динамики. Эти решения описываются элементарными, гиперэллиптическими функциями и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: гиростат, полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа-Пуассона, эффект Барнетта-Лондона.

Abstract

Zyza A.V. Study of the existence conditions for generalized classes of polynomial solutions of gyrostat motion equations under the gyroscopic, potential, and non-potential forces. – Manuscript.

A dissertation submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences with specialization in 01.02.01-theoretical mechanics, GOU VPO “Donetsk National University”, DNR, Donetsk 2020.

The dissertation is devoted to the study of methods for constructing particular solutions of different polynomial structures in two problems of the rigid body fixed point dynamics. The first problem describes the motion of the gyrostat under the influence of potential and gyroscopic forces. The differential equations corresponding to this problem belong to the Kirchhoff-Poisson class. The second problem deals with the motion of the gyrostat in the magnetic field, taking into account the Barnett-London effect. The differential equations for this problem allow only the two first integrals.

The classification of known classes of polynomial solutions and new classes of polynomial structure solutions, introduced by the author of the dissertation, was obtained in these problems of gyrostat dynamics.

The reduction of Kirchhoff-Poisson equations related to the problem of the gyrostat motion under the potential and gyroscopic forces and gyrostat motion equations in the magnetic field considering the Barnett-London effect was performed. The analogues of N. Kovalevsky's equations in the problems under consideration have been found. Three new solutions for the polynomial structure of the reduced equations, which are described by the elliptical and hyperelliptic functions of time, have been constructed.

The existence conditions for the particular solutions of generalized polynomial classes Steklov-Kovalevsky-Goryachev, Dokshevich, Konosevich-Pozdnyakov and new classes of polynomial type of differential equations of the gyrostat motion problem under the potential and gyroscopic forces and the problem of gyrostat motion in the magnetic field taking into account the Barnett-London effect have been thoroughly studied. We constructed 43 new particular solutions to these dynamics problems that belong to the considered classes. These solutions are described by elementary, hyperelliptic functions and functions obtained by the inversion of the Legendre elliptical integrals of the third kind.

Keywords: gyrostat, polynomial solutions, Kirchhoff-Poisson equations, Barnett-London effect.