НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

С Е Р И Я

«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ:
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, КИБЕРНЕТИКА»

Том 4

**В.П. Моторный, В.Ф. Бабенко,
А.А. Довгошей, О.И. Кузнецова**

ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИИ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»*

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2011

УДК 517.54

В книге предоставлен широкий круг самых последних результатов в области теории аппроксимации и гармонического анализа, полученных сотрудниками отдела теории функций ИПММ НАН Украины г. Донецк. Среди этих результатов можно отметить теоремы по известной проблеме С.М. Никольского о приближении функций с учетом положения точки на отрезке, точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка функций одной и многих переменных, обобщение ряда классических результатов теории аналитических функций в единичном круге на случай ограниченных односвязных областей (теорем братьев Рисс, Вермера, Сеге и др.), решение задачи об одновременной аппроксимации функций из пространств Харди, неулучшаемые неравенства типа Сидона для сферических и полиэдральных ядер Дирихле, *m*-кратные аналоги теорем Сидона–Теляковского, Фомина, Фридли и др.

Для профессиональных математиков и механиков, а также для широкого круга читателей, интересующихся современными достижениями в теории аппроксимации и гармонического анализа.

В книзі наведено широке коло найостанніших результатів у галузі теорії апроксимації та гармонійного аналізу, отриманих співробітниками відділу теорії функцій ІПММ НАН України м. Донецьк. Серед цих результатів можна відмітити теореми з відомії проблеми С.М. Нікольського про наближення функцій з урахуванням положення точки на відрізку, точні нерівності типу Колмогорова для похідних дрробового порядку функцій однієї та багатьох змінних, узагальнення низки класичних результатів теорії аналітичних функцій в одиничному колі на випадок обмежених однозв'язних областей (теорем братів Рісс, Вермера, Сеге та ін.), розв'язок задачі про одночасну апроксимацію функцій з просторів Харді, неполіпшувані нерівності типу Сідона для сферичних та поліедральних ядер Діріхле, *m*-кратні аналоги теорем Сідона–Теляковського, Фоміна, Фрідлі та ін.

Для професійних математиків і механіків, а також для широкого кола читачів, що цікавляться сучасними досягненнями в теорії апроксимації та гармонійного аналізу.

Ответственный редактор В.И.Рязанов
Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Р.М. Тригуб,
доктор физ.-мат. наук, профессор С.А. Пичугов

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы
Редактор *В.В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1143-4

ВВЕДЕНИЕ

Данный том посвящен изложению результатов по теории аппроксимации и гармоническому анализу, полученных за последние десять лет сотрудниками отдела теории функций Института прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины, которые не вошли в другие монографии. С более ранними результатами по указанным направлениям можно ознакомиться по монографии [1] профессора Владимира Ивановича Белого, который возглавлял отдел теории функций с 1984 по 1997 год, монографиям профессоров Владимира Владимировича Андриевского [1,2], Владислава Федоровича Бабенко [3], Роальда Михайловича Тригуба [4], Валерия Владимировича Волчкова [5, 6], а также по книге [7], посвященной 40-летию образования института.

Глава 1 написана главным научным сотрудником отдела, членом-корреспондентом НАН Украины Виталием Павловичем Моторным. В главе представлены его результаты, относящиеся к известной проблеме С.М. Никольского о приближении функций, заданных на отрезке, алгебраическими многочленами с учетом положения точки. Для следующих классов функций получены асимптотически точные (на классах) оценки таких приближений: W^r_∞ (r – дробное) – класс функций с ограниченной производной дробного порядка, $W^r H^\omega$ ($r = 0,\ 1,\ \ldots$) – класс функций с заданной мажорантой модуля непрерывности r-й производной, а также некоторых классов функций, представимых сингулярными интегралами.

Глава 2 подготовлена ведущим научным сотрудником отдела, д. ф.-м. н., профессором Владиславом Федоровичем Бабенко. В ней изложены полученные им в последние годы результаты о точных неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка функций одной и многих переменных, а также даны их приложения к решению ряда экстремальных задач теории аппроксимации. В частности, эти неравенства применены к решению задачи Стечкина об аппроксимации неограниченных операторов дробного дифференцирования на некоторых классах непрерывных функций ограниченными операторами и задачи Колмогорова о необходимых и достаточных условиях, обеспечивающих существование функции, имеющей заданные числа нормами своих производных соответствующего порядка.

Главы 3 и 4, написанные старшим научным сотрудником отдела, к. ф.-м. н. Алексеем Альфредовичем Довгошеем, дают обобщение ряда классических результатов теории аналитических функций в единичном круге на случай ограниченных односвязных областей, отличных от круга, и выясняют те характерные особенности геометрии границ областей, при которых верна та или иная теорема. Это, в частности, сделано для теоремы братьев Рисс об абсолютной непрерывности мер ортогональных аналитическим полиномам, теоремы Вермера о максимальности диск-алгебры функций аналитических в единичном круге и непрерывных на замыкании этого круга, описания множеств пика и интерполяционных множеств этой алгебры как замкнутых подмножеств граничной окружности, имеющих нулевую меру Лебега, условия Сегё расходимости логарифмического интеграла и некоторых других результатов.

В перечисленных обобщениях вместо диск-алгебры и меры Лебега на окружности рассматривается равномерное замыкание $P(\Gamma)$ алгебры аналитических полиномов и, соответственно, гармонические меры на Γ-границе области G. При такой постановке вопроса перечисленные теоремы верны если, а во многих случаях только если G – область Каратеодори и $\overline{G}$ не разделяет плоскость. Так как гармоническая мера является представляющей мерой соответствующего линейного мультипликативного функционала на $P(\Gamma)$, то это дает возможность использовать результаты из «абстрактной» теории равномерных алгебр – основного технического средства проводимых исследований. Широко используются классические результаты теории приближений на плоскости, в частности, теорема Мергеляна о приближении аналитическими полиномами и Уолша–Лебега о приближении гармоническими полиномами.

Также дается решение задачи об одновременной аппроксимации функций из пространств Харди над непересекающимися односвязными областями одной функцией, аналитической в этих областях и непрерывной на сфере Римана, и задачи о структуре мер μ таких, что плотность алгебр рациональных функций в $L^t(\mu)$ влечет равномерную плотность этих алгебр.

Пользуясь случаем, хотелось бы вспомнить Владимира Ивановича Белого и отметить, что именно поставленная им задача о полиномиальной аппроксимации в классах Харди с нормой, порожденной наименьшей гармонической мажорантой, привела в конечном итоге ко всем результатам, излагаемым в главах 3 и 4.

Главы 5 и 6 подготовлены старшим научным сотрудником отдела, к. ф.-м. н. Ольгой Ивановной Кузнецовой и посвящены развитию теории кратных тригонометрических рядов.

В главе 5 исследуются сферические частичные суммы и сферические методы суммирования кратных тригонометрических рядов. Найден точный при любом $p \geq 1$ порядок роста норм p-сильных сферических частичных сумм Фурье в пространстве ограниченных почти всюду на m-мерном ($m \geq 3$) торе функций. В двумерном случае получена оценка сверху. Для сферических ядер Дирихле доказаны неулучшаемые неравенства типа неравенства Сидона. Для кратных тригонометрических рядов с радиальной симметрией коэффициентов найдены условия, при выполнении которых рассматриваемые ряды являются рядами Фурье, и необходимые и достаточные условия сходимости по сферам в метрике L. Получены верхние и нижние оценки норм интегральных аналогов p-сильных сферических средних. Эти результаты применяются к исследованию поведения интегральных средних сумм Бохнера–Рисса, показатель которых меньше критического.

В главе 6 вводится класс ограниченных звездных полиэдров в R^m, таких, что коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей, их определяющих, являются «плохо» приближенными числами. Для частичных сумм Фурье, порожденных полиэдрами данного класса, непрерывных на m-мерном торе функций доказываются p-сильная суммируемость, сильная суммируемость Карлемана, критерий сильной суммируемости с пропусками. Найден максимально возможный рост функций Орлича Φ, для которых оператор L_Φ- сильного суммирования ограничен.

На широкий класс множеств, порождающих частичные суммы Фурье, распространен результат Фридли и Шиппа, устанавливающий двойственность между ограниченностью операторов сильного суммирования и оценками интегральных норм линейных средних ядер Дирихле (неравенствами типа неравенства Сидона). Для ядер Дирихле, порожденных полиэдрами из введенного класса, получены неулучшаемые неравенства типа неравенства Сидона. Доказанные теоремы применяются к исследованию интегрируемости и сходимости почти всюду m-кратных тригонометрических рядов, сходимости данных рядов в метрике L. Как следствие, одним методом получены аналоги известных теорем Сидона–Теляковского, Фомина, Фридли.

Список литературы

[1] *Andrievskii V.V., Belyi V.I., Dzjadyk V.K.* Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable. – Atlanta, Georgia: World Federation Publisher. – 1995. – 211 p.

[2] *Andrievskii V.V.* Discrepancy of signed measures and polynomial approximation. – New-York: Springer, 2002. – 438 p.

[3] *Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения. – К.: Наук. думка, 2003. – 590 с.

[4] *Trigub R.M., Belinskiy E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer. – 2004. – 585 p.

[5] *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.

[6] *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg groups. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.

[7] *Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины.* – Донецк: ИПММ НАНУ, 2005. – 392 с.

ГЛАВА 1

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С УЧЕТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

§ 1. Введение

Задача о приближении функций, заданных на отрезке [-1,1], алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке впервые была рассмотрена С.М. Никольским [1] и решена им для класса W^1_∞ — функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой, равной единице. С.М. Никольский указал линейный метод $L_n(f;x)$ приближения алгебраическими многочленами функций из класса W^1 такой, что

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x|\ln n}{n^2}\right), \quad x \in [-1,1], \tag{1.1}$$

и показал, что константу $\frac{\pi}{2}$ в неравенстве (1.1) уменьшить нельзя.

Так была доказана возможность приближения функций, заданных на отрезке алгебраическими многочленами, с улучшением приближения у концов отрезка и в то же время асимптотически наилучшее на всем классе. Этот результат С.М. Никольского и высказанные им гипотезы определили несколько направлений в аппроксимации непрерывных функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами.

Стало понятно, каким должно быть уточнение теоремы Джексона об оценке наилучшего приближения непрерывных функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами, допускающее (в случае квазистепенных мажорант) полное обращение. Первое из таких уточнений теоремы Джексона было получено А.Ф. Тиманом (см. [2, с. 276]) для функций из пространства $C^r_{[-1,1]}$. Через $C^r_{[-1,1]}$, $r = 0,\ 1,\ \ldots,$ будем обозначать пространство r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке [-1,1] функций.

Теорема 1.1. *Для любого целого числа $r \geq 0$ существует линейный метод приближения $U_{n,r}(f;x)$ функций из пространства $C^r_{[-1,1]}$ такой, что*

$$|f(x) - U_{n,r}(f;x)| \leq C_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^r \omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right), \quad (1.2)$$

где $n > r$, C_r — зависит только от r, а $\omega(f^{(r)};t)$ — модуль непрерывности r-й производной.

В дальнейшем обобщения этой теоремы, учитывающие поведение k-го модуля гладкости функции $f \in C^r_{[-1,1]}$, а также дающие одновременно поточечную оценку производных, получено в работах В.К. Дзядыка [3], Г. Фрейда [4], Р.М. Тригуба [5], Ю.А. Брудного [6], R.A. Devore [7], H. Dahlhaus [8], В.В. Жука и Г.И. Натансона [9] и других математиков.

Приведем одну из теорем (см. [9]), обобщающую исследования многих математиков.

Теорема 1.2. *Пусть $k+1,\ r,\ n$ — натуральные числа, $k < r$, $n \geq r-1$. Тогда существует последовательность линейных операторов $U_{n,r}(f;x)$, отображающих пространство $C^r_{[-1,1]}$ в пространство алгебраических многочленов степени не выше n таких, что для любых $f \in C^k_{[-1,1]}$ и $j = 0,\ \ldots,\ k$ будет*

$$|f^{(j)}(x) - U^{(j)}_{n,r}(f;x)| \leq C_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{k-j} \omega_{r-k}\left(f^{(k)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right), \quad (1.3)$$

где $n > r$, C_r— зависит только от r, а $\omega_m(f;t)$ — модуль гладкости порядка m функции $f(x)$.

Представляет интерес также обобщения теоремы 1.1, полученные С.А. Теляковским [10] и независимо И.Е. Гопенгаузом [11], которые показали, что в правой части неравенства (1.2) слагаемые $\frac{1}{n^2}$ можно убрать.

Кроме того, результат С.М. Никольского открыл возможность получать точную асимптотику поточечного приближения алгебраическими многочленами непериодических функций различных классов функций. Введем некоторые классы функций. Пусть W^r_∞, $r > 0$ — класс функций f_r, представимых на отрезке [-1,1] в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} f(t)dt + P(x), \tag{1.4}$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, x_+^{r-1} — усеченная степень, функция $f(t)$ измерима и $|f(t)| \leq 1$ почти всюду, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a). В случае целых r это класс функций f, $\quad r-1$ производная которых абсолютно непрерывна, а $|f^{(r)}(t)| \leq 1$ почти всюду. Через $W^r H^\omega, \quad r = 0,\ 1,\ \ldots \quad (W^0 H^\omega = H^\omega)$ будем обозначать класс функций f из пространства $C^r_{[-1,1]}$, r-я производная ($f^{(0)} = f$) которых удовлетворяет условию

$$|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Для класса W^r_∞ А.Ф. Тиман (см. [2, с. 310–314]) доказал следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Для любого натурального числа $r > 1$ существует линейный метод $U_{n,r}(f;x)$ приближения функций из класса W^r_∞ такой, что для любой функции $f \in W^r_\infty$ имеет место неравенство*

$$|f(x) - U_{n,r}(f;x)| \leq \frac{K_r}{n^r}[(\sqrt{1-x^2})^r + o(1)] \tag{1.5}$$

и константу K_r (K_r — константа Фавара) на классе W^r_∞ уменьшить нельзя.

Заметим, что константа, определяющая остаточный член в (1.5), зависит от функции f.

Таким образом, для каждого натурального числа r был указан линейный метод приближения, осуществляющий асимптотически наилучшее приближение класса W^r_∞ алгебраическими многочленами в равномерной метрике и в то же время каждую функцию из класса W^r_∞ у концов отрезка [-1,1] приближающий лучше. В работах Н.П. Корнейчука и А.И. Половины [12 — 14] было установлено, что аналогичная оценка с главным членом, зависящим от x, имеет место и в более общем случае — когда учитывается поведение модуля непрерывности функции или модуля непрерывности производной. Однако приближение в этом случае осуществляется нелинейным методом. Приведем основные результаты работы [14]:

Теорема 1.4. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(f;x)\}$ степени $n = 1,\ 2,\ \ldots$ такая, что равномерно относительно всех $x \in [-1,1]$ при $n \to \infty$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P_n(f;x)| \leq \frac{1}{2}\omega(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}) + o(\omega(\frac{1}{n})). \tag{1.6}$$

Доказательство теоремы 1.4 базировалось на методе промежуточного приближения, учитывающего положение точки на отрезке, суть которого содержится в следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ существует последовательность ломанных $\varphi_n(x)$ таких, что:*

1) для производной $\varphi_n'(x)$, в точках ее существования выполняется неравенство

$$|\varphi_n'(x)| \leq \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \equiv K_n(x), \quad n = 2,\ 3,\ \ldots; \quad |x| \leq 1;$$

2) равномерно относительно $x \in [-1,1]$ при $n \to \infty$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2}\max_{0\leq t\leq 2}\{\omega(t) - K_n(x)t\} + o(\omega(1/n).$$

Затем А.А. Лигун [15] получил обобщение теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Для любого нечетного числа r существует линейный метод приближения $Q_{n,r}(f;x)$ такой, что для любой функции $f \in C^r_{[-1,1]}$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - Q_{n,r}(f;x)| \leq$$
$$\leq \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + o\left(\frac{\omega(f^{(r)};1/n)}{n^r}\right), \tag{1.7}$$

где $\omega(f^{(r)};t)$ — модуль непрерывности r-й производной функции $f(x)$.

Обращаем внимание на то, что в указанных работах обобщение теоремы С.М. Никольского сопровождалось огрублением остаточного члена. Поэтому следующий шаг, связанный с развитием указанных исследований С.М. Никольского, состоял в уточнении остаточного члена в неравенствах (1.1), (1.5) — (1.7). Первым осуществил его В.Н. Темляков [16], он усилил неравенство (1.1), убрав $\ln n$ в остаточном члене. При этом приближение функций из класса W_∞^1 осуществлялось нелинейным методом.

Результат В.Н. Темлякова привел к следующей гипотезе: *Для любой функции $f \in W_\infty^r$, $\quad r$ — любое положительное число, существует последовательность алгебраических многочленов $p_n(x)$, $\quad n > r$, удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{K_r(\sqrt{1-x^2})^r}{n^r} + C_r\frac{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (1.8)$$

где величина C_r зависит только от r.

Подтверждение этого предположения для любого натурального числа $r \ge 2$ было дано Р.М. Тригубом [17]:

Теорема 1.6. *Для любой функции $f \in W_\infty^r$, $\quad r$ — натуральное число большее либо равное 2, существует последовательность алгебраических многочленов $p_n(x)$, $\quad n = r-1,\ r,\ \dots,$ удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x) - p_n(x)| \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + c_r\frac{(\sqrt{1-x^2})^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (1.9)$$

где константа c_r зависит от r.

В этой главе рассматривается приближение функций алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке для классов функций, имеющих ограниченную производную нецелого порядка r, классов W^rH^ω и некоторых классов сингулярных интегралов.

§ 2. Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами

В этом параграфе рассмотрим две теоремы, одну теорему — теорему 2.1 о разностных свойствах [18] одного класса интегралов, а другую — теорему 2.2 о приближении [19], учитывающем положение точки на отрезке, интегралов дробного порядка от ограниченных функций алгебраическими многочленами. Отметим, что порядковая оценка поточечного приближения функций, имеющих производную дробного порядка, была получена в работе [20].

2.1. Вспомогательные определения и результаты

Положим для $t, u \in [0, \pi]$

$\sin C(t,u) = \begin{cases} \sin t, & \text{если } t = u, \\ \frac{\cos t - \cos u}{u-t}, & \text{если } t \neq u. \end{cases}$

Очевидны следующие свойства функции $\sin C(t,u)$:

а) $\sin t < \sin C(t,u) < \sin u$, если $0 < t < u \leq \frac{\pi}{2}$ и, соответственно, $\sin t > \sin C(t,u) > \sin u$, если $\frac{\pi}{2} < t < u \leq \pi$;

б) $0 \leq \sin C(t,u) \leq 1, \quad t,\ u \in [0,\pi]$;

в) функция $\sin C(t,u)$ имеет частные производные по переменным t и u любого порядка и, в частности:

$$\left|\frac{\partial \sin C(t,u)}{\partial t}\right| \leq M_1, \quad \left|\frac{\partial^2 \sin C(t,u)}{\partial t^2}\right| \leq M_2, \quad t,\ u \in [0,\pi],$$

где M_1 и M_2 — некоторые абсолютные константы.

Менее очевидно следующее свойство.

Лемма 2.1. *Пусть $t < u$. Если $t \leq \frac{\pi}{2}$, то*

$$\sin C(t,u) > \frac{1}{2}\sin u, \quad \text{если} \quad u \leq \frac{\pi}{2}, \tag{2.1}$$

и

$$\sin C(t,u) > \frac{2}{\pi}, \quad \text{если} \quad u > \frac{\pi}{2}.$$

Если $t > \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin C(t,u) > \frac{1}{2}\sin t. \tag{2.2}$$

В частности, $\sin C(t,u) > \frac{1}{2}\sin t$ и $\sin C(t,u) > \frac{1}{2}\sin u$ для любых $t,\ u \in [0,\pi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \leq \frac{\pi}{2}$ и $t \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда, в силу выпуклости вверх функции $\cos t$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin C(t,u) > \sin C(0,u)$. Поэтому

$$\frac{\sin u}{\sin C(t,u)} < \frac{\sin u}{\sin C(0,u)} = \frac{u \sin u}{1 - \cos u} := w(u).$$

Легко видеть, что на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $w(u)$ достигает максимума в точке 0 и $w(0) = 2$. Отсюда следует неравенство (2.1). Если $u > \frac{\pi}{2}$, то $\sin C(t,u) > \sin C(0, \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$. В силу определения функции $\sin C(t,u)$, из неравенства (2.1) следует (2.2). Лемма доказана.

Введем далее следующие обозначения.

Пусть

$$\Delta_h g(t) = g(t) - g(t-h), \ \ \Delta_h^2 g(t) = g(t+h) - 2g(t) + g(t-h), \ \ h > 0.$$

Если функция g зависит от переменных t и u, то через $\Delta_{t,h} g(t,u)$ (соответственно $\Delta_{t,h}^2 g(t,u)$) будем обозначать соответствующую разность по переменной t.

Лемма 2.2. *Предположим, что*

$$\int_0^\pi |\Delta_{t,h} g(t,u)| du \le C\omega(t,h), \tag{2.3}$$

$$|\varphi(t,u)| \le M \ \text{ и } \ |\Delta_{t,h}\varphi(t,u)| \le M_1 h, \ \ h > 0. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\int_0^\pi |\Delta_{t,h}(g(t,u)\varphi(t,u))| du \le M_1 h \int_0^\pi |g(t,u)| du + MC\omega(t,h). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$|\Delta_{t,h}(g(t,u)\varphi(t,u))| \le |g(t,u)\varphi(t,u) - g(t,u)\varphi(t-h,u)| +$$

$$+|g(t,u)\varphi(t-h,u) - g(t-h,u)\varphi(t-h,u)|,$$

то из условий (2.3) и (2.4) получаем (2.5). Лемма доказана.

Замечание 2.1. Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

Докажем несколько элементарных неравенств.

Лемма 2.3. *Пусть* $r \in (0,1)$. *Для любых* $x, \ t \in (0,\pi)$ *имеет место неравенство.*

$$|\sin^r t - \sin^r x| < 2\sin^{r-1} x \sin\frac{|x-t|}{2}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что неравенство (2.6) является следствием неравенства

$$|\sin^r t - \sin^r x| < \sin^{r-1} x|\sin x - \sin t|. \tag{2.7}$$

Докажем неравенство (2.7). Пусть $0 < t < x \le \pi/2$. Тогда $\sin t < \sin x$ и $\sin^{r-1} x < \sin^{r-1} t$. Поэтому

$$\sin^{r-1} x|\sin x - \sin t| = \sin^r x - \sin^{r-1} x \sin t > \sin^r x - \sin^r t > 0. \tag{2.8}$$

Если $0 < x < t \le \pi/2$, то $\sin x < \sin t$ и $\sin^{r-1} x > \sin^{r-1} t$. Следовательно,

$$\sin^{r-1} x|\sin x - \sin t| = \sin^{r-1} x \sin t - \sin^r x > \sin^r t - \sin^r x > 0. \tag{2.9}$$

Из неравенств (2.8), (2.9) следует (2.7) для указанных значений t и x. Пусть $x \in (0, \pi/2]$, $\quad t \in (\pi/2, \pi)$ и $y = \pi - t$. Тогда $y \in (0, \pi/2)$ и

$$\begin{aligned} |\sin^r t - \sin^r x| &= |\sin^r(\pi - y) - \sin^r x| < \sin^{r-1} x\,|\sin x - \sin y| = \\ &= \sin^{r-1} x\,|\sin x - \sin t|\,. \end{aligned}$$

Аналогично, если $t \in (0, \pi)$, а $x \in (\pi/2, \pi)$, то, полагая $u = \pi - x$, получаем

$$|\sin^r t - \sin^r x| = |\sin^r t - \sin^r u| < \sin^{r-1} u|\sin u - \sin y| = \sin^{r-1} x|\sin x - \sin y|.$$

Лемма 2.3 доказана.

Замечание 2.2. Левую часть неравенства (2.6), очевидно, можно оценить следующим образом:

$$|\sin^r t - \sin^r x| < 2^r \sin^r \frac{|x - t|}{2}. \tag{2.10}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $r \in (0, 1)$. *Для любых* $x,\ t \in (0, \pi)$ *имеет место неравенство*

$$\sin^r t < \frac{2\pi}{3} \sin^{r-1} x \sin \frac{x + t}{2}. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\frac{x+t}{2} \in (\pi/6, 5\pi/6)$. Тогда $2\sin(t+x)/2 > 1 \ge \sin^r t$. Следовательно, неравенство (2.11) необходимо доказать для $\frac{x+t}{2} \in (0, \pi/6)$ и для $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$. Рассмотрим первый случай. Представим переменную t в виде $t = ax$. Так как $r \in (0, 1)$ и $\sin \frac{x+t}{2} > \frac{3}{2\pi}(x + t)$, то

$$\sin^r t < t^r = a^r x^r < (1 + a)x^r = x^{r-1}(x + ax) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} x^{r-1} \frac{3}{2\pi}(x+t) < \frac{2\pi}{3} \sin^{r-1} x \sin\frac{x+t}{2}.$$

Случай $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$ аналогичен. Положим $\pi - t = a(\pi - x)$. Тогда $\sin^r t = \sin^r(\pi - t) < (\pi - t)^r = a^r(\pi - x)^r$, $\sin^{r-1} x = \sin^{r-1}(\pi - x) > (\pi - x)^{r-1}$ и $\sin\frac{x+t}{2} = \sin(\pi - \frac{x+t}{2}) \geq \frac{3}{2\pi}(a+1)(\pi - x)$. Поэтому

$$\sin^r t < a^r(\pi - x)^r < (1+a)(\pi - x)^r = (\pi - x)^{r-1}(1+a)(\pi - x) <$$

$$< \frac{2\pi}{3} \sin^{r-1} x \frac{3}{2\pi}(a+1)(\pi - x) < \frac{2\pi}{3} \sin^{r-1} x \sin\frac{x+t}{2}.$$

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $r \in (0,1)$. Для любых $x, t \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$\sin^r t < 2\sin^r \frac{x+t}{2}. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\frac{x+t}{2} \in (\pi/6, 5\pi/6)$, то $2\sin(t+x)/2 > > 1 \geq \sin^r t$. Пусть $\frac{x+t}{2} \in (0, \pi/6)$. Тогда

$$\sin t < 2\sin t/2 < 2\sin\frac{t+x}{2}. \tag{2.13}$$

Если $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$, то

$$\sin t = \sin(\pi - t) < 2\sin\frac{\pi - t}{2} < 2\sin\frac{(\pi - t) + (\pi - x)}{2} = 2\sin\frac{t+x}{2}. \tag{2.14}$$

Из неравенств (2.13) и (2.14) следует (2.12).

Лемма 2.5 доказана.

Перейдем теперь к интерполяции и приближению функций тригонометрическими полиномами полуцелого порядка.

Тригонометрическим полиномом $T_{n-1/2}(t)$ полуцелого порядка $n - -1/2$ называется сумма вида [21, с. 4]

$$\sum_{k=0}^{n-1} [a_k \cos(k+1/2)t + b_k \sin(k+1/2)t],$$

где a_k, b_k — произвольные числа. Полиномы $T_{n-1/2}(t)$ удовлетворяют условию

$$T_{n-1/2}(t+2\pi) = -T_{n-1/2}(t). \tag{2.15}$$

Естественно, интерполировать и приближать полиномами полуцелого порядка следует функции $f(t)$, заданные на всей действительной оси и удовлетворяющие условию (2.15). Такие функции будем называть антипериодическими, а число 2π — антипериодом.

Пусть $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{2n-1}$ и $y_0,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2n-1}$ — две группы чисел, причем числа первой группы удовлетворяют условию $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{2n-1} < 2\pi$. Существует [21, с. 4, 73] единственный интерполяционный полином $T_{n-1/2}(t)$ порядка $n-1/2$, удовлетворяющий условиям

$$T_{n-1/2}(t_i) = y_i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Возьмем в качестве узлов интерполяции равноотстоящие точки $t_i = \frac{\pi i}{n}$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$, а в качестве чисел y_i — значение произвольной антипериодической функции $f(t)$ в этих точках. Тогда полином полуцелого порядка $n-1/2$, интерполирующий функцию $f(t)$ по равноотстоящим узлам, имеет вид [21, с. 6]:

$$L_{n-1/2}(f,t) = \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) l_k(t), \quad \text{где} \quad l_k(t) = \frac{1}{2n} \frac{\sin n(t-t_k)}{\sin \frac{t-t_k}{2}}.$$

Интерполяционные полиномы $L_{n-1/2}(f,t)$ полуцелого порядка обладают большинством свойств обычных тригонометрических интерполяционных полиномов по равноотстоящим точкам $t_i = \frac{2\pi i}{2n+1}$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n$. В дальнейшем будет необходимо следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} |l_k(t)| dt < \frac{\pi}{n}(\ln n + \pi). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенства $|\sin t| \le 1$, $\sin t \le t$, если $0 < t < \pi$, и $\sin t > 2t/\pi$, если $t \in (0, \pi/2)$, получаем

$$\frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin n(t-t_k)}{\sin(t-t_k)/2} \right| dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{|\sin nt|}{\sin t/2} dt <$$

$$< \frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \frac{nt}{t/\pi} dt + \frac{1}{n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{dt}{t/\pi} = \pi^2/n + \frac{\pi \ln n}{n}.$$

Оценим норму интерполяционного полинома $L_{n-1/2}(f,t)$ в пространстве L_1 с обычной интегральной нормой:$\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.7. *Для любой антипериодической функции ограниченной вариации имеет место неравенство*

$$\left\|L_{n-1/2}(f)\right\|_1 \leq (\ln n + \pi)(\|f\|_1 + \frac{\pi}{n}V_0^{2\pi}(f)). \tag{2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данной антипериодической функции f определим кусочно-постоянную антипериодическую функцию, задав ее на полуинтервале $[0;2\pi)$ равенством $f_n(t) = f(t_k)$, если $t \in [t_k; t_{k+1})$, где $t_k = \frac{\pi k}{n}$, $\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$. Очевидно, что $L_{n-1/2}(f;t) = L_{n-1/2}(f_n;t)$ и для всех $t \in [0;\pi/n)$:

$$\left\|L_{n-1/2}(f)\right\|_1 = \left\|L_{n-1/2}(f_n)\right\|_1 = \left\|\sum_{k=0}^{2n-1} f_n(t_k+t)l_k(x)\right\|_1.$$

Используя лемму 2.6, получаем

$$\left\|L_{n-1/2}(f)\right\|_1 = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{2n-1} f_n(t_k+t)l_k(x)|dxdt \leq$$

$$\leq \frac{n}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^{2\pi}|l_k(x)|dx\int_0^{\pi/n}|f_n(t_k+t)|dt \leq$$

$$\leq (\ln n + \pi)\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^{\pi/n}|f_n(t_k+t)|dt = (\ln n + \pi)\left\|f_n\right\|_1.$$

Из определения функции f_n следует

$$\|f_n\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f\|_1 \leq \|f\|_1 + \frac{\pi}{n}V_0^{2\pi}f,$$

что и доказывает лемму 2.7.

Следствие 2.1. *Если функция f — абсолютно непрерывна на отрезке $[0;2\pi]$, то*

$$\left\|L_{n-1/2}(f)\right\|_1 \leq (\ln n + \pi)(\|f\|_1 + \frac{\pi}{n}\left\|f'\right\|_1).$$

Обозначим через $\breve{E}_{n-1/2}(f)_1$ величину наилучшего приближения антипериодической функции f тригонометрическими полиномами $T_{n-1/2}(t)$

полуцелого порядка $n-1/2$ в пространстве L_1, т. е.

$$\breve{E}_{n-1/2}(f)_1 = \inf_{T_{n-1/2}} \left\| f - T_{n-1/2} \right\|_1 ,$$

а через $E_n(f)_1$ — величину наилучшего приближения периодической функции f тригонометрическими полиномами порядка n в пространстве L_1. Если $f(t)$ — непрерывная антипериодическая функция, то $f(2t)$ — непрерывная 2π-периодическая функция. При этом, если $T_{n-1/2}(t)$ — полином полуцелого порядка наилучшего приближения в пространстве L_1 функции $f(t)$, то, в силу единственности тригонометрического полинома наилучшего приближения непрерывной 2π-периодической функции, полином $T_{n-1/2}(2t)$ будет тригонометрическим полиномом наилучшего приближения в пространстве L_1 функции $f(2t)$ и при этом имеет место равенство

$$\breve{E}_{n-1/2}(f(x))_1 = E_{2n-1}(f(2x))_1. \tag{2.18}$$

Пусть, далее, $\breve{W}^r MH_1^\alpha$, $\quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha \in (0,1]$, соответственно $W^r MH_1^\alpha$ — класс антипериодических (соответственно 2π-периодических) функций, r-я производная которых удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t+h) - f^{(r)}(t)| dt \le Mh^\alpha.$$

Если $f \in \breve{W}^r MH_1^\alpha$, то $f(2t) \in W^r 2^{r+\alpha} MH_1^\alpha$. Отсюда, в силу (2.18), следует, что для любой функции $f \in \hat{W}^r MH_1^\alpha$ имеет место неравенство

$$\breve{E}_{n-1/2}(f)_1 \le \frac{C_r K}{n^{r+\alpha}}, \tag{2.19}$$

где C_r— некоторая константа, зависящая от r. Кроме того, будем использовать следствие частного случая теоремы А.Л. Гаркави [22].

Лемма 2.8. *Если $T_{n-1/2}$ — тригонометрический полином полуцелого порядка $n-1/2$ наилучшего приближения в пространстве L_1 функции f, производная f' которой принадлежит L_1, то*

$$\left\| f' - T'_{n-1/2} \right\|_1 \le C(n\breve{E}_{n-1/2}(f)_1 + \breve{E}_{n-1/2}(f')_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $T_{n-1/2}(t)$ — тригонометрический полиномом полуцелого порядка наилучшего приближения в пространстве L_1 функции $f(t)$, то $T_{n-1/2}(2t)$ будет тригонометрическим полиномом наилучшего приближения в пространстве L_1 функции $f(2t)$. Тогда

$$\left\| f' - T'_{n-1/2} \right\| = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |f'(t) - T'_{n-1/2}(t)| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f'(2t) - T'_{n-1/2}(2t)| dt.$$

Применяя теорему А.Л. Гаркави [22] о приближении производной функции производной полинома наилучшего приближения этой функции, получаем

$$\left\| f' - T'_{n-1/2} \right\|_1 \leq C(nE_{2n-1}(f(2x))_1 + E_{2n-1}(f'(2x))_1),$$

что вместе с (2.18) влечет утверждение леммы 2.8.

Лемма 2.9. *Для любой функции $f \in \breve{W}^r MH_1^\alpha$ имеет место неравенство*

$$\left\| f - L_{n-1/2}(f) \right\|_1 \leq \frac{C_r M \ln n}{n^{r+\alpha}}. \tag{2.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для любого тригонометрического полинома $T_{n-1/2}(x)$ полуцелого порядка $n - 1/2$ выполняется равенство $L_{n-1/2}(T_{n-1/2}; x) = T_{n-1/2}(x)$, то взяв в качестве $T_{n-1/2}(x)$ полином наилучшего приближения в пространстве L_1, а также используя неравенства (2.17) — (2.19) и лемму 2.8, получаем

$$\left\| f - L_{n-1/2}(f) \right\|_1 \leq \left\| f - T_{n-1/2} \right\|_1 + \left\| L_{n-1/2}(T_{n-1/2} - f) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \breve{E}_{n-1/2}(f)_1 + C_r \ln n (\breve{E}_{n-1/2}(f)_1 + \frac{1}{n} \left\| f' - T'_{n-1/2} \right\|) \leq \frac{C_r M \ln n}{n^{r+\alpha}}.$$

Замечание 2.3. Утверждения лемм 2.6 — 2.9 остаются справедливыми, если в качестве точек интерполирования взять точки $t_i + \alpha$, $i = 0, 1, \ldots, 2n - 1$, где α — любое действительное число.

Следствие 2.2. *Пусть*

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r}, \quad r > 0$$

— ядро Бернулли и $P_n^r(t)$ *— тригонометрический полином степени не выше* $n-1$ *наилучшего* L_1*-приближения* $D_r(t)$*. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_r(t) - P_n^r(t)||\sin\frac{t}{2}|\ dt \le C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}. \tag{2.21}$$

Действительно, в силу равенства (см. [2, с. 133])

$$D_r(t) = \frac{t_+^{r-1}}{\Gamma(r)} + G_r(t),$$

где $G_r(t)$ — аналитическая на полуинтервале $(-2\pi, 2\pi]$ функция, имеющая ограниченную на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ производную:$|G_r^{(2)}(t)| \le M$, следует, что для целого r ядро $D_r(t)$ принадлежит классу $\breve{W}^{r-1}M_rH_1^1$, а для дробного r-классу $\breve{W}^{[r]}M_rH_1^{r-[r]}$, где $[r]$ — целая часть числа r. Произведение $D_r(t)\sin\frac{t}{2}$ имеет гладкость на единицу большую. Тригонометрический полином $P_n^r(t)$ степени не выше $n-1$ наилучшего L_1 -приближения ядра $D_r(t)$ интерполирует (см. [23]) это ядро в $2n$ равноотстоящих точках. Следовательно, тригонометрический полином $P_n^r(t)\sin\frac{t}{2}$ полуцелого порядка $n-1/2$ интерполирует $D_r(t)\sin\frac{t}{2}$. Поэтому в силу леммы 2.9 имеет место (2.21).

Задача о поточечном приближении функций, имеющих на отрезке [-1,1] ограниченную производную дробного порядка, алгебраическими многочленами приводит к изучению свойств функций вида

$$R_0(x) \equiv R_0(f;x) = \int_0^{\pi} K(x,t)f(t)dt, \tag{2.22}$$

где ядро

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma(r)}(\cos x - \cos t)_+^{r-1}\sin t - (D_r(x-t) + D_r(x+t))\sin^r t,$$

$r \in (0;1)$, $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, $(x-t)_+^{r-1}$ — усеченная степень, функция $f(t)$ измерима и $|f(t)| \le 1$ почти всюду, а

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r}.$$

Имеет место следующие утверждение.

Теорема 2.1. *Вторая разность любой функции $R_0(x)$, представимой равенством (2.22), удовлетворяет неравенству*

$$|\Delta_h^2 R_0(x)| \le C \begin{cases} h^{1+r} \sin^{r-1} x, & \text{если} \quad \sin x \ge h, \\ h^{2r}, & \text{если} \quad \sin x < h, x \in [0, \pi], \end{cases} \tag{2.23}$$

где C — абсолютная константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала неравенство

$$|\Delta_h^2 R_0(0)| \le C h^{2r}, \quad 0 < h < \pi/4, \tag{2.24}$$

где C — некоторая абсолютная константа. Так как $R_0(x)$ — четная функция, а $|f(t)| \le 1$ почти всюду, то

$$|\Delta_h^2 R_0(0)| = 2| \int_0^\pi \{ [\frac{1}{\Gamma(r)} (\cos h - \cos t)_+^{r-1} - \frac{1}{\Gamma(r)} (1 - \cos t)_+^{r-1}] \sin t +$$

$$+ [2D_r(t) - D_r(t+h) - D_r(t-h)] \sin^r t \} f(t) dt | \le$$

$$\le \frac{2}{\Gamma(r)} \int_0^\pi |(\cos h - \cos t)_+^{r-1} - (1 - \cos t)_+^{r-1}| \sin t dt +$$

$$+2 \int_0^\pi |\Delta_h^2 D_r(t)| \sin^r t dt := 2I_1 + 2I_2.$$

Оценим интеграл I_1:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^h (1 - \cos t)_+^{r-1} \sin t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_h^\pi [(\cos h - \cos t)_+^{r-1} - (1 - \cos t)_+^{r-1}] \sin t \, dt < \frac{2h^{2r}}{\Gamma(r+1)}. \tag{2.25}$$

Чтобы оценить интеграл I_2, воспользуемся равенством [2, с. 133]

$$D_r(t) = \frac{t_+^{r-1}}{\Gamma(r)} + G_r(t), \tag{2.26}$$

где $G_r(t)$ — аналитическая на полуинтервале $(-2\pi, 2\pi]$ функция, имеющая на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ограниченную производную второго порядка: $|G_r^{(2)}(t)| \le M$. Поэтому

$$|\Delta_h^2 G_r(t)| \le Mh^2, \quad t \in [0,\pi], \quad h \in (0,\pi/2), \tag{2.27}$$

что позволяет дать следующую оценку интеграла I_2:

$$I_2 \le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^h [2t^{r-1} - (t+h)^{r-1}] \sin^r t dt + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_h^\pi \Delta_h^2 t^{r-1} \sin^r t dt +$$

$$+ \int_0^\pi |\Delta_h^2 G_r(t)| \sin^r t dt \le \frac{2 \sin^r h}{\Gamma(r+1)} h^r + \pi M h^2 + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\pi}^\pi \Delta_h^2 t_+^{r-1} \sin^r |t| dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-h}^h \Delta_h^2 t_+^{r-1} \sin^r |t| dt < Ch^{2r} + \int_{-\pi}^\pi \Delta_h^2 D_r(t) \sin^r |t| dt -$$

$$- \int_{-\pi}^\pi \Delta_h^2 G_r(t) \sin^r |t| dt - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-h}^h [(t+h)_+^{r-1} - 2t_+^{r-1}] \sin^r |t| dt. \tag{2.28}$$

Очевидно, что третий интеграл не превосходит $C_r h^{2r}$, а второй, в силу неравенства (2.27), не превосходит $\pi M h^2$. Чтобы оценить первый интеграл, заметим, что функция

$$u(x) = \int_{-\pi}^\pi D_r(t-x) \sin^r |t| dt$$

есть r-й периодический интеграл от 2π-периодической функции, равной на отрезке $[-\pi,\pi]$ $\sin^r |t| - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^r t dt$ и удовлетворяющей условию Липшица порядка r. Поэтому

$$|\Delta_h^2 u(x)| \le Ch^{2r},$$

где C — некоторая абсолютная константа. Но

$$\int_{-\pi}^\pi \Delta_h^2 D_r(t) \sin^r |t| dt = \Delta_h^2 u(0).$$

Следовательно, первый интеграл в неравенстве (2.28) не превосходит Ch^{2r}. Из оценок (2.25) и (2.28) следует (2.24).

Аналогично доказывается неравенство

$$|\Delta_h^2 R_0(\pi)| \le Ch^{2r}, \quad 0 < h < \pi/4, \tag{2.29}$$

где C — некоторая константа. Из неравенств (2.24) и (2.29) следует оценка второй разности с шагом h для $x \in [0,\ 2h]$ или $x \in [\pi - 2h, \pi]$:

$$|\Delta_h^2 R_0(x)| \le Ch^{2r}, \quad 0 < h < \pi/4, \tag{2.30}$$

естественно, с некоторой другой, чем в (2.24) или (2.29), константой C. Из оценки (2.30) для указанных x и h нетрудно получить неравенство

$$|\Delta_h^2 R_0(x)| \le 2^{1-r} C h^{1+r} \sin^{r-1} x, \quad 0 < h < \pi/4. \tag{2.31}$$

Докажем неравенство (2.31) для $x \in [2h, \pi - 2h]$. Для этого, используя равенство (2.26), представим функцию $R_0(x)$ в виде

$$R_0(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x),$$

где

$$\psi_1(x) = -\int_0^\pi (G_r(t-x) + G_r(t+x)) \sin^r t f(\cos t) dt,$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi (t+x)^{r-1} \sin^r t f(\cos t) dt,$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi [(\cos x - \cos t)_+^{r-1} \sin t - (t-x)_+^{r-1} \sin^r t] f(\cos t) dt.$$

В силу неравенства (2.27), для всех $x \in [0,\ \pi]$ и $h > 0$ следует оценка

$$|\Delta_h^2 \psi_1(x)| \le Ch^2.$$

Оценим $\Delta_h^2 \psi_2(x)$. Пусть $2h \le x \le \pi/2$. Тогда, используя ограниченность функции $f(\cos t)$, выпуклость вниз функции t^{r-1} и представление второй разности от абсолютно непрерывной функции $g(t)$ в виде

$$\Delta_h^2 g(x) = \int_0^h [g'(x+u) - g'(x+u-h)] du, \tag{2.32}$$

получаем

$$|\Delta_h^2 \psi_2(x)| \le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \Delta_{x,h}^2 (t+x)^{r-1} \sin^r t \, dt =$$

$$= \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \int_0^h \{(t+x+u-h)^{r-2} - (t+x+u)^{r-2}\} \sin^r t \, du \, dt.$$

Поменяв порядок интегрирования, для всех $u \in [0, h]$ имеем следующую оценку внутреннего интеграла:

$$\frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \{(t+x+u-h)^{r-2} - (t+x+u)^{r-2}\} \sin^r t \, dt =$$

$$= \frac{r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t \cos t \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^{\pi-x} \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{\pi-x}^{\pi} \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t \, dt := I_1 + I_2 + I_3.$$

Учитывая условие $2h \leq x \leq \pi/2$, нетрудно видеть, что

$$I_1 \leq C_1 h x^{2r-2}, \quad I_2 \leq C_2 h^r \sin^{r-1} x, \quad I_3 \leq C_3 h x^r.$$

Из этих оценок следует, что для функции $\psi_2(t)$ выполняется неравенство (2.31), если $2h \leq x \leq \pi/2$. Так как функция $(t+x)^{r-1}$ имеет ограниченную вторую производную по переменной x для всех $t \in [0, \pi]$ и $x \in [\pi/4, 5\pi/4]$, то $|\Delta_{x,h}^2 (t+x)^{r-1}| \leq Ch^2$, если $x \geq \pi/2$ и $h \in (0, \pi/4)$, поэтому неравенство (2.31) имеет место и для $x \geq \pi/2$. Перейдем к оценке величины $\Delta_h^2 \psi_3(x)$. Как и в случае функции $\psi_2(x)$, сначала получаем оценку

$$|\Delta_h^2 \psi_3(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi |\Delta_{x,h}^2 K(x,t)| dt,$$

где через $K(x,t)$ обозначена разность

$$(\cos x - \cos t)_+^{r-1} \sin t - (t-x)_+^{r-1} \sin^r t.$$

Положим

$$p_1 = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{x+2h} |\Delta_{x,h}^2 K(x,t)| dt,$$

$$p_2 = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} |\Delta_{x,h}^2 K(x,t)| dt$$

и оценим каждый интеграл. Чтобы оценить интеграл p_1, ядро $K(x,t)$ представим в виде

$$K(x,t) = (t-x)_+^{r-1} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1 \right)$$

и воспользуемся грубой оценкой для $\Delta_{x,h}^2 K(x,t)$:

$$|\Delta_{x,h}^2 K(x,t)| \le |K(x+h,t)| + |K(x-h,t)| + 2|K(x,t)|.$$

Тогда

$$p_1 \le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x-h}^{x+2h} (t-x+h)^{r-1} \sin^r t \left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x-h,t)} - 1 \right| dt +$$

$$+2 \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x}^{x+2h} (t-x)^{r-1} \sin^r t \left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1 \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x+h}^{x+2h} (t-x-h)^{r-1} \sin^r t \left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+h,t)} - 1 \right| dt := T_1 + T_2 + T_3.$$

Пусть $z(x,t) = \frac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x}$ и $M_1 = \max_{0 \le t, x \le \pi} |z(x,t)|$. Используя формулу Лагранжа, получаем оценку разности $\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1$:

$$\left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1 \right| = \frac{|\sin^{1-r} t - \sin^{1-r} C(x,t)|}{\sin^{1-r} C(x,t)} =$$

$$= (1-r) \frac{\sin^{-r} C(u,t) |z(u,t)| |t-x|}{\sin^{1-r} C(x,t)} \le$$

$$\le (1-r) M_1 \sin^{-r} C(u,t) \sin^{r-1} C(x,t) |t-x|, \tag{2.33}$$

где u находится между точками x и t. Используя оценку (1.42), неравенства $\sin C(u,t) > 1/2 \sin t$ и $\sin C(x-h,t) > 1/2 \sin(x-h)$, следующие из леммы 2.1, и условие $2h < x$, получаем

$$T_1 \le \frac{(1-r)M_1}{\Gamma(r)} \int_{x-h}^{x+2h} (t-x+h)^r \sin^r t \sin^{-r} C(u,t) \sin^{r-1} C(x-h,t) dt \le$$

$$\leq 2\frac{3^{r+1}(1-r)M_1}{\Gamma(r)(r+1)}h^{r+1}\sin^{r-1}(x-h) \leq Ch^{r+1}\sin^{r-1}x.$$

Аналогично оцениваются интегралы T_2 и T_3. Таким образом,

$$p_1 \leq Ch^{r+1}\sin^{r-1}x. \tag{2.34}$$

Чтобы оценить интеграл p_2, представим $\Delta^2_{x,h}K(x,t)$ по формуле (2.32):

$$\Delta^2_{x,h}K(x,t) = \int_0^h [\frac{\partial K(x+u,t)}{\partial x} - \frac{\partial K(x+u-h,t)}{\partial x}]du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$p_2 \leq \int_0^h \int_{x+2h}^{\pi} |K_x^{'}(x+u,t) - K_x^{'}(x+u-h,t)|dtdu,$$

где

$$K_x^{'}(x,t) = \frac{r-1}{\Gamma(r)}(t-x)_+^{r-1}\sin t \sin^{r-2}C(x,t)\frac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x}+$$

$$+\frac{1-r}{\Gamma(r)}(t-x)_+^{r-2}\sin^r t\left(\frac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x,t)}-1\right) := z_1(x,t)+z_2(x,t).$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int_{x+2h}^{\pi} |K_x^{'}(x+u,t) - K_x^{'}(x+u-h,t)|dt \leq$$

$$\leq \int_{x+2h}^{\pi} |z_1(x+u,t) - z_1(x+u-h,t)|dt+$$

$$+\int_{x+2h}^{\pi} |z_2(x+u,t) - z_2(x+u-h,t)|dt := J_1 + J_2$$

и покажем, что интегралы J_1 и J_2 удовлетворяют неравенствам

$$J_1 \leq C\sin^{r-1}xh^r, \quad J_2 \leq C\sin^{r-1}xh^r. \tag{2.35}$$

Так как частные производные $\frac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 \sin C(x,t)}{\partial x^2}$ ограничены (см. свойство в) функции $\sin C(x,t)$), а

$$\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}(t-x-u)_+^{r-1}\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)dt\le C\sin^{r-1}x, \qquad (2.36)$$

то, в силу леммы 2.2, чтобы оценить интеграл J_1, достаточно получить оценку (2.35) для интеграла

$$J^*=\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}|\Delta_{x,h}\{(t-x-u)_+^{r-1}\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)\}|dt.$$

Очевидно, что

$$J^*\le\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}|(t-x-u)_+^{r-1}-(t-x-u+h)_+^{r-1}|\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)dt+$$

$$+\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}(t-x-u+h)_+^{r-1}\sin t|\sin^{r-2}C(x+u,t)-$$

$$-\sin^{r-2}C(x+u-h,t)|dt:=A_1+A_2.$$

В силу леммы 2.1 $\sin C(x+u,t)>1/2\sin t$ и $\sin C(x+u,t)>1/2\sin(x+$ $+u)$. Используя эти неравенства и условие на переменную x, получаем

$$A_1\le\frac{2^{2-r}\sin^{r-1}(x+u)}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}\{(t-x-u)_+^{r-1}-$$

$$-(t-x-u+h)_+^{r-1}\}dt\le 2^{3-2r}\frac{\sin^{r-1}x}{\Gamma(r+1)}h^r.$$

Для оценки интеграла A_2 воспользуемся неравенством

$$|\sin^{r-2}C(x+u,t)-\sin^{r-2}C(x+u-h,t)|\le(2-r)M_1h\sin^{r-3}C(v,t),$$

где $v=v(t)\in[x+u-h,x+u]$, и неравенством $\sin C(v,t)>1/2\sin t$:

$$A_2\le\frac{2M_1h}{\Gamma(r)}\int_{x+2h}^{\pi}(t-x-u+h)_+^{r-1}\sin^{r-2}C(v,t)dt. \qquad (2.37)$$

Если $x+2h<\pi/2$, то снова, используя неравенство $\sin C(v,t)>1/2\sin t>$ $>1/2\sin x$ для $t\in[x+2h,\pi/2]$ и неравенство $\sin C(v,t)>2/\pi$ для $t\ge\pi/2$, из оценки (2.37) получаем

$$A_2 \le \frac{2^{3-r} M_1 h \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)_+^{r-1} \sin^{-1} t dt +$$

$$+C_1 h \int_{\pi/2}^{\pi} (t-x-u+h)_+^{r-1} dt \le$$

$$\le C_2 h \sin^{r-1} x \int_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)^{r-2} dt + C_3 h \le C h^r \sin^{r-1} x.$$

Пусть $\pi \ge x+2h \ge \pi/2$. В этом случае, в силу леммы 2.1, $\sin C(v,t) > > 2/\pi \ge 2/\pi \sin(x+h)$, если $v(t) \le \pi/2$, и $\sin C(v,t) > 1/2 \sin v > > 1/2 \sin(x+h)$, если $v > \pi/2$. Следовательно,

$$A_2 \le \frac{2^{3-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \sin^{r-2}(x+h) \int_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-1} dt \le$$

$$\le C_4 h \sin^{2r-2} x \le C h^r \sin^{r-1} x.$$

Таким образом, интегралы A_1 и A_2 удовлетворяют неравенству (2.35). В силу леммы 2.2, из неравенства (2.36) следует, что для интеграла J_1 также выполняется неравенство (2.35). Оценим теперь J_2:

$$J_2 \le \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} |(t-x-u)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u,t)} - 1 \right) -$$

$$-(t-x-u+h)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u-h,t)} - 1 \right) |dt \le$$

$$\le \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} |(t-x-u+h)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u,t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u-h,t)} \right) |dt + \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} |(t-x-u)^{r-2} -$$

$$-(t-x-u+h)^{r-2}| \sin^r t \left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u,t)} - 1 \right| dt := B_1 + B_2.$$

Для оценки интеграла B_1 воспользуемся неравенством

$$|\sin^{r-1} C(x+u,t) - \sin^{r-1} C(x+u-h,t)| \leq M_1 h \sin^{r-2} C(v,t),$$

где $v = v(t) \in [x+u-h, x+u]$ и $M_1 = \max_{0 \leq t, x \leq \pi} |\frac{\partial \sin C(y,t)}{\partial y}|$.

Так же, как для интеграла A_2, рассмотрим два случая. Если $x+2h <$ $< \pi/2$, то

$$B_1 \leq \frac{2^{2-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)^{r-2} \sin^{r-1} t dt + C_1 h \int_{\pi/2}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} dt \leq$$

$$\leq \frac{2^{2-r} M_1 h \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} (3h-u)^{r-1} + C_2 h^r. \tag{2.38}$$

В случае $x + 2h \geq \pi/2$ сначала воспользуемся неравенством $\sin C(v,t) >$ $> 1/2 \sin t$, а затем неравенствами $\sin C(v,t) > 2/\pi \geq 2/\pi \sin(x+h)$, если $v(t) \leq \pi/2$, и $\sin C(v,t) > 1/2 \sin v > 1/2 \sin(x+h)$, если $v > \pi/2$:

$$B_1 \leq \frac{2M_1 h}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} \sin^{r-1} C(v,t) dt \leq$$

$$\leq \frac{2^{2-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \sin^{r-1}(x+h) \int_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} t dt \leq C h^r \sin^{r-1} x. \tag{2.39}$$

Чтобы оценить интеграл B_2, применим неравенство

$$\left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1 \right| \leq M_1 (t-x) \sin^{r-1} C(x,t) \sin^{-r} C(v,t),$$

где $v = v(t) \in (x,t)$, и неравенство $\sin C(v,t) > 1/2 \sin t$:

$$B_2 \leq \frac{2^r (1-r) M_1}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} [\Delta_{u,h} (t-x-u)^{r-2}] \sin^{r-1} C(x+u,t)(t-x-u) dt.$$

В случае $x+2h < \pi/2$, используя неравенство $\sin C(x+u,t) > \sin(x+u) >$ $> \sin x$, если $t \leq \pi/2$, и неравенство $\sin C(x+u,t) > 2/\pi$, если $t > \pi/2$, получаем

$$B_2 \leq \frac{2(1-r) M_1 \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi/2} [(t-x-u)^{r-2} - (t-x-u+h)^{r-2}](t-x-u) dt +$$

$$+\frac{2^{2r-1}(1-r)\pi^{1-r}M_1}{\Gamma(r)}\int_{\pi/2}^{\pi}[(t-x-u)^{r-2}-(t-x-u+h)^{r-2}](t-x-u)dt\leq$$

$$\leq C_1\sin^{r-1}x\{\int_{x+2h}^{\pi}[(t-x-u)^{r-1}-(t-x-u+h)^{r-1}]dt+$$

$$+h\int_{x+2h}^{\pi}[(t-x-u+h)^{r-2}dt\}\leq C\sin^{r-1}xh^r. \qquad (2.40)$$

Если $x+2h\geq\pi/2$, то, как и выше, применим неравенство $\sin C(x+u,t)>$ $>2/\pi\sin(x+u)$, если $(x+u)\leq\pi/2$, и неравенство $\sin C(x+u,t)>$ $>1/2\sin(x+u)\geq1/2\sin(x+h)$, если $(x+u)>\pi/2$:

$$B_2\leq\frac{2M_1\sin^{r-1}(x+h)}{\Gamma(r)}\{\int_{x+2h}^{\pi}[(t-x-u)^{r-1}-(t-x-u+h)^{r-1}]dt+$$

$$+h\int_{x+2h}^{\pi}[(t-x-u+h)^{r-2}dt\}\leq C\sin^{r-1}xh^r. \qquad (2.41)$$

Из неравенств (2.38) — (2.41) следует равномерная по переменной u оценка для интеграла J_2:

$$J_2\leq Ch^r\sin^{r-1}x.$$

Следовательно, для интеграла p_2 имеет место неравенство (2.24). Таким образом, для функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, а значит, и для функции $R_0(x)$ выполняется неравенство (2.31), если $x\in[2h,\pi-2h]$. Учитывая оценку (2.30), получаем утверждение теоремы 2.1.

2.2. Приближение интегралов нецелого порядка

Теорема 2.2. *Для любого дробного числа $r>0$ и любой функции $f_r\in W_\infty^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ такая, что*

$$|f_r(x)-P_n(x)|\leq\frac{K_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^r+O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-1}\right), \quad (2.42)$$

где

$$K_r = \frac{4\sin\frac{r\pi}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad 0<r<1,$$

$$K_r = \frac{4}{\pi}\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\{(2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\}}{(2m+1)^{r+1}}\Big|, \quad r>1,$$

а $\gamma_r \in [0,\pi)$ *является корнем уравнения*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\}}{(2m+1)^{r}} = 0.$$

Константу K_r *(для нецелых* r K_r *— константы Фавара) в неравенстве* (2.42) *уменьшить нельзя, а постоянная, определяющая остаточный член в* (2.42)*, зависит только от* r.

При этом следует отметить, и этим в работе будем пользоваться, что отношение $\frac{K_r}{n^r}$ есть величина наилучшего приближения ядра

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r} \tag{2.43}$$

тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот важный результат был получен в работе В.К. Дзядыка [23] (см. также работы [42, 43], в которых были получены существенные обобщения).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. Пусть $\rho \in (0,\ 1)$, $m = 0,\ 1,\ \ldots$ и $r = \rho + m$. Не теряя общности, будем считать, что $P(x) = 0$ в (1.4). При этом функцию $f_r(x)$, представимую равенством (1.4), будем записывать в виде $f_{m+\rho}(x)$. Очевидно, что $f'_{m+\rho}(x) = f_{m-1+\rho}(x)$. Обозначим через $S_m(x)$ функцию

$$\int_0^{\pi}[D_r(u-x) + (-1)^m D_r(u+x)]\sin^{\rho} u f(\cos u)du,$$

а через $R_m(x)$ — разность $f_{m+\rho}(\cos x) - \sin^m x S_m(x)$. Так как $\frac{d}{dx}f_{m+\rho}(\cos x) = -\sin x f_{m-1+\rho}(\cos x)$ и $S'_m(x) = S_{m-1}(x)$, то для всех $m \geq 1$

$$\frac{d}{dx}R_m(x) = -\sin x R_{m-1}(x) - m\cos x\sin^{m-1} x S_m(x). \tag{2.44}$$

Используя определение функций $S_m(x)$ и $R_m(x)$, функцию $f_r(\cos x) = f_{m+\rho}(\cos x)$ представим в виде

$$f_r(\cos x) = \sin^m x S_m(x) + R_m(x)$$

и аппроксимируем каждое слагаемое четным тригонометрическим полиномом. Функцию $\sin^m x S_m(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $\sin^m x Q_n^m(x)$, где

$$Q_n^m(x) = \int_0^\pi [P_n(u-x)) + (-1)^m P_n(u+x)] \sin^\rho u f(\cos u) du,$$

а $P_n(x) = P_n^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-1$ наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(x)$, т.е.

$$||D_r(x) - P_n^r(x)||_1 = \frac{K_r}{n^r}. \tag{2.45}$$

Чтобы оценить приближение функции $\sin^m x S_m(x)$, докажем следующую лемму.

Лемма 2.10. *Для любого $r = m + \rho$ и $x \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$|S_m(x) - Q_n^m(x)| \le \frac{K_r \sin^\rho x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{\rho-1}, \tag{2.46}$$

где C — некоторая константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что

$$|S_m(t) - Q_n^m(t)| \le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} \sin^{\rho-1} t. \tag{2.47}$$

Рассмотрим уклонение многочленов $Q_n^m(t)$ от $S_m(t)$ в каждой точке интервала $(0, \pi)$:

$$|S_m(t) - Q_n^m(t)| \le | \int_0^\pi [D_r(u-t) - P_n(u-t) +$$

$$+(-1)^m (D_r(u+t) - P_n(u+t))] \sin^\rho u \, f(\cos u) du| \le$$

$$\le \int_0^\pi |D_r(u-t) - P_n(u-t)| \sin^\rho u \, du + \int_0^\pi |D_r(u+t) - P_n(u+t)| \sin^\rho u \, du :=$$

$$:= I_1 + I_2.$$

Используя неравенство (2.6) и точную оценку (2.45) (см. [23]) величины наилучшего приближения ядра $D_r(u)$ в L_1 тригонометрическими полиномами $P_n(u)$, оценим интеграл I_1:

$$I_1 \le \sin^\rho t \int_0^\pi |D_r(u-t) - P_n(u-t)| du +$$

$$+2\sin^{\rho-1} t \int_0^\pi |D_r(u-t) - P_n(u-t)| \sin\frac{|u-t|}{2} du \le$$

$$\le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + 2\sin^{\rho-1} t \int_0^{2\pi} |D_r(u)\sin\frac{u}{2} - P_n(u)\sin\frac{u}{2}| du. \qquad (2.48)$$

Многочлен $P_n(u)\sin\frac{u}{2}$ полуцелого порядка $n-1/2$ интерполирует функцию $D_r(u)\sin\frac{u}{2}$ в $2n$ равноотстоящих точках $\frac{\gamma_r}{n}+\frac{k\pi}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$, где $\gamma_r=0$, если $r\in(0,1]$, а для $r>1$ числа γ_r определены при формулировки теоремы 2.2. Так как $D_r(u)\sin\frac{u}{2}$ принадлежит классу $\hat{W}^{m+1}H_1^\rho$, то в силу неравенства (2.21)

$$\int_0^{2\pi} |D_r(u)\sin\frac{u}{2} - P_n(u)\sin\frac{u}{2}| du \le \frac{C_r \ln n}{n^{m+1+\rho}} = \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}. \qquad (2.49)$$

Из неравенств (2.48) и (2.49) получаем

$$I_1 \le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}} \sin^{\rho-1} t, \quad t\in(0,\pi). \qquad (2.50)$$

Чтобы получить оценку интеграла I_2, применим неравенство (2.11):

$$I_2 < \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1} t \int_0^\pi |D_r(u+t) - P_n(u+t)| \sin\frac{u+t}{2} du \le$$

$$\le \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1} t \int_0^{2\pi} |D_r(u)\sin\frac{u}{2} - P_n(u)\sin\frac{u}{2}| du \le \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}} \sin^{\rho-1} t. \quad (2.51)$$

Из соотношений (2.50), (2.51) следует неравенство (2.47). А теперь докажем, что

$$|S_m(t) - Q_n^m(t)| \le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + \frac{C_r \ln n}{n^{r+\rho}}, \quad t\in(0,\pi). \qquad (2.52)$$

Как и в первом случае, начинаем с неравенства

$$|S_m(t) - Q_n^m(t)| \le I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 оценим, используя неравенство (2.10):

$$I_1 \le \sin^\rho t \int_0^\pi |D_r(u-t) - P_n(u-t)|du+$$

$$+2^\rho \int_0^\pi |D_r(u-t) - P_n(u-t)| \sin^\rho \frac{|u-t|}{2} du \le$$

$$\le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + 2^\rho \int_0^{2\pi} |D_r(u) - P_n(u)| \sin^\rho \frac{u}{2} du \le$$

$$\le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + 2^\rho \{ \int_{u: \sin u/2 \le 1/n} |D_r(u) - P_n(u)| \sin^\rho \frac{u}{2} du+$$

$$+\int_{u:\sin u/2 > 1/n} |D_r(u) - P_n(u)| \sin^\rho \frac{u}{2} du\} \le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + \frac{2^\rho K_r}{n^{r+\rho}} +$$

$$+2^\rho n^{1-\rho} \int_0^{2\pi} |D_r(u) - P_n(u)| \sin \frac{u}{2} du \le \frac{K_r \sin^\rho t}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+\rho}}, \quad t \in (0, \pi). \tag{2.53}$$

Чтобы оценить интеграл I_2, применим неравенство (2.12):

$$I_2 < 2 \int_0^\pi |D_r(u+t) - P_n(u+t)| \sin^\rho \frac{u+t}{2} du \le$$

$$\le 2 \int_0^{2\pi} |D_r(u) - P_n(u)| \sin^\rho \frac{u}{2} du \le \frac{C \ln n}{n^{r+\rho}}. \tag{2.54}$$

Из неравенств (2.53), (2.54) следует (2.52), а из неравенств (2.47) и (2.52) следует (2.46). Лемма 2.10 доказана.

Из неравенства (2.46) следует оценка приближения функции $\sin^m x S_m(x)$ в каждой точке интервала $(0, \pi)$:

$$|\sin^m x S_m(x) - \sin^m x Q_n^m(x)| \le \frac{K_r \sin^r x}{n^r} + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{r-1}. \tag{2.55}$$

Лемма 2.11. *Пусть $g(x)$ — четная 2π-периодическая функция, производная которой удовлетворяет неравенству*

$$|g'(x)| \le l_n \left(\sin x + \frac{1}{n}\right)^k, \quad x \in (0,\pi), \tag{2.56}$$

где l_n и k — некоторые положительные константы. Тогда существует тригонометрический многочлен $P_n(x)$ степени не выше $2ns$, где целое число s выбрано так, что $2s-k-1>1$, такой, что

$$|g(x) - P_n(x)| \le \frac{l_n C_k}{n} \left(\sin x + \frac{1}{n}\right)^k, \quad x \in (0,\pi). \tag{2.57}$$

Здесь константа C_k зависит от k.

Доказательство. Положим $t_i = \frac{\pi i}{n}$, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$, $L_i = = g\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$, где $g(t)$ — четная 2π-периодическая функция. С помощью чисел L_i определим кусочно-постоянную четную 2π-периодическую функцию $F_n(g;t)$:

$$F_n(g;t) = \begin{cases} L_i, & \text{если } t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1, \\ L_0, & \text{если } t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Так же, как в работе [26], функцию $F_n(g;t)$ представим в виде

$$F_n(g;t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \Xi_{t_i}(t), \tag{2.58}$$

где $\Xi_{t_i}(t)$ — четная 2π-периодическая функция, для $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ определенная на отрезке $[0,\pi]$ равенством

$$\Xi_{t_i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \le t_i, \\ 0, & \text{если} \quad t > t_i \end{cases}$$

и $\Xi_{t_n}(t) = 1$, а

$$\Delta L_i = \begin{cases} L_{i-1} - L_i, & \text{если } i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1, \\ L_{n-1}, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Для $t \in (t_i, t_{i+1}]$, в силу условия (2.56), получим

$$|g(t) - F_n(g;t)| \le \frac{Cl_n}{n} (\sin t + 1/n)^k \tag{2.59}$$

и

$$|L_{i-1} - L_i| \le \frac{Cl_n}{n} (\sin t_i + 1/n)^k. \tag{2.60}$$

Пусть $T_N(t_i;t)$ — четный тригонометрический многочлен [6] степени не выше $N \le 2sn$ такой, что

$$|\Xi_{t_i}(t) - T_N(t_i;t)| \le C_s(1+n|t_i-t|)^{-2s+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1, \quad (2.61)$$

где целое число s выбрано так, что $2s-k-1>1$. Считая $T_N(t_n;t)=1$, положим

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i T_N(t_i;t).$$

Используя неравенства (2.60), (2.61), рассмотрим уклонение многочлена $P_n(t)$ от функции $F_n(g;t)$ в каждой точке отрезка $[0,\pi]$:

$$|F_n(g;t) - P_n(t)| = |\sum_{i=1}^{n-1} \Delta L_i(\Xi_{t_i}(t) - T_N(t_i;t))| \le$$

$$\le \frac{C_s l_n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin^k t_i}{(1+n|t_i-t|)^{2s-1}}. \quad (2.62)$$

Пусть $t \in (t_j, t_{j+1}]$. Тогда $\sin t_i < \sin t$, если $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ j$ или $i = n-j,\ n-j+1,\ \cdots,\ n-1$, и $\sin t_i \le \sin t + |t_i - t|$, если $i = j+1, \cdots, n-j-1$. В соответствии с этим сумму, стоящую в правой части неравенства (2.62), разобьем на две и оценим каждую из них:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin^k t_i}{(1+n|t_i-t|)^{2s-1}} \le \sum_{i:\sin t_i<\sin t} \frac{\sin^k t}{(1+n|t_i-t|)^{2s-1}} +$$

$$+ \sum_{i:\sin t_i \ge \sin t} \frac{\sin^k t_i}{(1+n|t_i-t|)^{2s-1}} := \sum_1 + \sum_2 .$$

$$\sum_1 \le \sin^k t \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(1+n|t_i-t_j|)^{2s-1}} + \sum_{i=n-j}^{n} \frac{1}{(1+n|t_i-t_{j+1}|)^{2s-1}} \right) =$$

$$= \sin^k t \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(1+\pi|i-j|)^{2s-1}} + \sum_{i=n-j}^{n} \frac{1}{(1+\pi|i-j-1|)^{2s-1}} \right) = C \sin^k t; \quad (2.63)$$

$$\sum_2 \le \sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{(\sin t + |t_i - t|)^k}{(1+n|t_i - t|)^{2s-1}} \le 2^k \sin^k t \sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{1}{(1+\pi|i-j-1|)^{2s-1}} +$$

$$+\frac{2^k}{n^k}\sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{(n|t_i - t|)^k}{(1+n|t_i - t|)^{2s-1}} \le C_k \sin^k t + \frac{2^k}{n^k}\sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{1}{(1+\pi|i-j-1|)^{2s-k-1}} \le$$

$$\le C_k \sin^k t + \frac{C_k}{n^k} = C_k(\sin t + 1/n)^k. \tag{2.64}$$

Из оценок (2.59) и (2.62) — (2.64) следует неравенство (2.57). Лемма 2.11 доказана.

Оценку приближения функции $R_m(x)$ получим в следующей лемме.

Лемма 2.12. *Для любого $r > 0$ существует последовательность $T_n^m(x)$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что*

$$|R_m(x) - T_n^m(x)| \le C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}} (\sin x + \frac{1}{n})^{r-1}, \quad x \in (0,\pi), \tag{2.65}$$

где константа C_r зависит от r.

Доказательство. Докажем сначала лемму 2.12 для $m = 0$. В силу теоремы 2.1 (см. неравенство (1.32))

$$|\Delta_t^2 R_0(x)| \le C t^{1+\rho}(|\sin x| + t)^{\rho-1}, \quad \rho \in (0,1]\, t > 0.$$

Пусть

$$D_{n,2}(R_0, x) = b(n) \int_0^\pi (R_0(x+t) + R_0(x-t)) K_{s-1}^2(t)\, dt$$

— многочлены Джексона [45, с. 115], $b(n) \asymp 1/n, \quad s - 1 = [n/2]$,

$$|R_0(x) - D_{n,2}(R_0, x)| \le C \frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}.$$

Предположим, что $|\sin x| > 1/n$. Тогда

$$|R_0(x) - D_{n,2}(R_0, x)| = b(n) |\int_0^\pi \Delta_t^2 R_0(x) K_{s-1}^2(t)\, dt| \le$$

$$\leq Cb(n)\left[\int_0^{|\sin x|}|\sin x|^{\rho-1}t^{\rho+1}K_{s-1}^2(t)\,dt+n^{-2}\int_{|\sin x|}^{\pi}t^{2\rho-4}\,dt\right]\leq$$

$$\leq C|\sin x|^{\rho-1}n^{-\rho-1}. \tag{2.66}$$

Если $|\sin x|\leq 1/n$, то

$$|R_0(x)-D_{n,2}(R_0,x)|\leq Cb(n)\int_0^{\pi}t^{2\rho}K_{s-1}^2(t)\,dt\leq Cn^{-2\rho}. \tag{2.67}$$

Из оценок (2.66) и (2.67) следует утверждение леммы 2.12 для $m=0$.

Передачу справедливости утверждения леммы 2.12 с k-го шага на $(k+1)$-й шаг осуществим при помощи леммы 2.11. Пусть утверждение леммы 2.12 имеет место для индекса $m=k$, т.е. существует тригонометрический многочлен степени не выше n такой, что

$$|R_k(x)-T_n^k(x)|\leq\frac{C_k\ln n}{n^{k+\rho+1}}(\sin x+1/n)^{k+\rho-1}.$$

Следовательно,

$$\sin x|R_k(x)-T_n^k(x)|\leq\frac{C_k\ln n}{n^{k+\rho+1}}(\sin x+1/n)^{k+\rho}. \tag{2.68}$$

Пусть Q_n^{k+1} — тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству (2.46) для $m=k+1$:

$$|S_{k+1}(x)-Q_n^{k+1}(x)|\leq\frac{K_{\rho+k+1}\sin^\rho x}{n^{\rho+k+1}}+\frac{C_k\ln n}{n^{\rho+k+2}}(\sin x+1/n)^{\rho-1}. \tag{2.69}$$

Определим четный тригонометрический многочлен $U_n(x)$ так, чтобы

$$U_{n'}(x)=\sin xT_n^k(x)+(k+1)\cos x\sin^k xQ_n^{k+1}(x).$$

Тогда, используя равенство (2.44), получаем

$$\frac{d}{dx}(R_{k+1}+U_n(x))=-\sin x(R_k(x)-T_n^k(x))-$$

$$-(k+1)\cos x\sin^k x(S_{k+1}(x)-Q_n^{k+1}(x)).$$

Из неравенств (2.68), (2.69) следует оценка

$$|\frac{d}{dx}(R_{k+1} + U_n(x))| \leq \frac{C_k \ln n}{n^{k+\rho+1}}(\sin x + 1/n)^{k+\rho}.$$

Таким образом, для функции $g(x) = R_{k+1} + U_n(x)$ выполняется условие (2.68) леммы 2.11 при условии, что $l_n = C_k n^{-k-\rho-1} \ln n$. Следовательно, существует тригонометрический полином степени не выше $2ns$ такой, что

$$|R_{k+1} + U_n(x) - P_n(x)| \leq \frac{C_k \ln n}{n^{k+\rho+2}}(\sin x + 1/n)^{k+\rho}. \qquad (2.70)$$

Учитывая зависимость от n правой части неравенства (2.70) (может быть, увеличив при этом константу C_k), можно считать, что степень полинома $U_n(x) - P_n(x)$ не выше n. Лемма 2.12 доказана.

Из неравенств (2.55), (2.65) следует оценка сверху для поточечного приближения функции $f_r(x)$.

Для завершения доказательства теоремы 2.2 покажем, что константу K_r в неравенстве (2.42) уменьшить нельзя. Введем класс $W^r_{(-\infty,\infty)}$ функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{r-1} \varphi(t) dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $r > 0$, $\varphi(t)$ — измерима и почти всюду не превосходит 1.

Очевидно, что функции из класса W^r_∞ можно рассматривать как следы функций из класса $W^r_{(-\infty,\infty)}$: для этого необходимо функции $\varphi(t)$ в представлении (1.4) доопределить нулем для $|t| > 1$. Кроме того, класс $W^r_{(-\infty,\infty)}$ содержит [27, с. 266] класс $\tilde{W}^r_\infty$ — 2π-периодических функций, имеющих ограниченную почти всюду единицей производную $\varphi(t)$ порядка r с нулевым средним значением. Любую функцию $f \in \tilde{W}^r$ можно представить в виде

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_r(x-t) \varphi(t) dt.$$

Обозначая через $\tilde{E}_n(f)_C$ наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в равномерной метрике, напомним равенство, полученное В.К. Дзядыком [23] для дробного r:

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}^r)_C := \sup_{f \in \tilde{W}^r} \tilde{E}_n(f)_C = \frac{K_r}{n^r}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (2.71)$$

Через $E_n(f;a,b)_C$ будем обозначать наилучшее приближение на отрезке $[a,b]$ функции f алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ в равномерной метрике, через $A_n(f)_C$ — наилучшее приближение на $(-\infty,\infty)$ функции $f\in W^r_{(-\infty,\infty)}$ целыми функциями конечной степени, меньшей либо равной n, в равномерной метрике. Пусть

$$C_{r,n}=\sup_{f\in W^r_{(-\infty,\infty)}} n^r E_n(f;-1,1)_C.$$

Любую функцию $f(x)\in W^r_{(-\infty,\infty)}$ для $x\in[-1,1]$ можно представить в виде $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi(t)dt,\quad -1\le x\le 1$, и

$$f_2(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-\infty}^{-1}(x-t)^{r-1}\varphi(t)dt,\quad -1\le x\le 1.$$

Очевидно, что $f_1(x)\in W^r_\infty$, и нетрудно видеть, что $E_n(f_2;-1,1)_C\le\frac{d_r}{n^{2r}}$, где константа d_r не зависит от f. Поэтому

$$C_{r,n}=\sup_{f\in W^r} n^r E_n(f;-1,1)_C$$

и в силу неравенства (2.42)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} C_{r,n}\le K_r. \tag{2.72}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $W^r_{(-\infty,\infty)}$, $f_n(t)=f(\frac{n}{\sigma+1}t)$, $\sigma>0$. Учитывая, что производная дробного порядка функции $f(at)$, $a>0$, не превосходит почти всюду числа a^r, в силу определения чисел $C_{r,n}$ получим

$$E_n(f;-n/(\sigma{+}1),n/(\sigma{+}1))_C=E_n(f_n;-1,1)_C\le\left(\frac{n}{1+\sigma}\right)^r\frac{C_{r,n}}{n^r}=\frac{C_{r,n}}{(1+\sigma)^r}.$$

Так как [28, с. 390-395] $A_1(f)=\lim_{\sigma\to0}\lim_{n\to\infty}E_n(f;-n/(\sigma+1),n/(\sigma+ +1))_C$, то $A_1(f)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}C_{r,n}$, следовательно,

$$\sup_{f\in W^r_{(-\infty,\infty)}} A_1(f)_C\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\,C_{r,n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\sup_{f\in W^r} n^r E_n(f;-1,1)_C. \tag{2.73}$$

Учитывая включение $\tilde{W}^r_\infty\subset W^r_{(-\infty,\infty)}$, из равенства (2.71) получаем [28, с. 374], что

$$\sup_{f\in W^r_{(-\infty,\infty)}} A_1(f)_C \geq K_r. \tag{2.74}$$

Из соотношений (2.72) — (2.74), следует равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in W^r} n^r E_n(f;-1,1)_C = K_r.$$

Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Приближение функций класса W^rH^ω алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке

Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности такой, что функция $t\omega'(t)$ не убывает. Тогда для любой функции $f \in \in W^rH^\omega$ существует последовательность алгебраических многочленов $Q^r_n(f;x)$ степени $n = r, r+1, \ldots$ (при $r = 0, \quad n \geq 1$) таких, что выполняется неравенство*

$$|f(x) - Q^r_n(f;x)| \leq \frac{K_r}{2}\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\Big)^r\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right)+$$

$$+C_r\frac{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n})^r\omega(\frac{\ln n}{n^2})}{n^r},$$

где K_r — константа Фавара, а величина C_r зависит только от r.

Заметим, что большинство известных модулей непрерывности такие, что $t\omega'(t)$ не убывает. Например: $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\omega(t) = t^\alpha \ln\frac{e}{t}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\omega(t) = \frac{1}{\ln\frac{e^2}{t}}$, $0 \leq t \leq 1$ и другие. Кроме того, очевидно, что $\omega(t)$ удовлетворяет этому условию, если

$$\omega(t) = \int_0^t \frac{v(u)}{u}\,du, \tag{3.1}$$

где функция $v(u)$ не убывает и такая, что

$$v'(u) \leq \frac{v(u)}{u}. \tag{3.2}$$

Условию (3.2), например, удовлетворяют все выпуклые модули непрерывности. Обратно, если выпуклый модуль непрерывности $\omega(t)$ имеет абсолютно непрерывную производную и $t\omega'(t)$ не убывает, то $\omega(t)$ можно представить в виде (3.1), положив $u(t) = t\omega'(t)$. При этом выполняется (3.2).

3.1. Необходимые определения и вспомогательные результаты

Пусть $x_0 = 0$ и, считая, что $n \geq 5$,

$$x_k = x_{k-1} + \frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2} \ \ (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.3}$$

— точки отрезка [0,1], где $a \in [1, \pi]$ — некоторое постоянное число, которое при доказательстве теоремы будем выбирать в зависимости от параметра r. Обозначим через x_{N-1} наибольшую из тех точек, для которых выполняется неравенство $x_{N-1} \leq \overline{x}$, где число $\overline{x} = \overline{x}_n < 1$ такое, что $\overline{x} + \frac{a}{n}\sqrt{1 - \overline{x}^2} = 1$. Если $x_{N-1} = \overline{x}$, то из (3.3) следует, что $x_N = 1$, а если $x_{N-1} < \overline{x}$, то по определению считаем, что $x_N = 1$. Положим $E_k = [-x_{k+1}, -x_k] \bigcup [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$

Сначала докажем одно элементарное неравенство для точек x_k, определенных равенством (3.3).

Лемма 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\sqrt{1 - x_{k-1}^2} < 2\sqrt{1 - x_k^2}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\sqrt{1 - x_{k-1}^2} - \sqrt{1 - x_k^2} = \frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{\sqrt{1 - x_{k-1}^2} + \sqrt{1 - x_k^2}} <$$

$$< 2\frac{\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2}}{\sqrt{1 - x_{k-1}^2} + \sqrt{1 - x_k^2}} < \frac{2a}{n} \tag{3.5}$$

и функция $\frac{t}{t + \frac{2a}{n}}$ возрастает, то

$$\frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{\sqrt{1 - x_{k-1}^2}} = \frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{\sqrt{1 - x_k^2} + \sqrt{1 - x_{k-1}^2} - \sqrt{1 - x_k^2}} >$$

$$> \frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{\sqrt{1 - x_k^2} + \frac{2a}{n}} > \frac{\sqrt{1 - x_{N-1}^2}}{\sqrt{1 - x_{N-1}^2} + \frac{2a}{n}}. \tag{3.6}$$

Из определения числа $\overline{x}$ следует, что

$$\sqrt{1-\overline{x}^2} = \frac{a}{n}(1+\overline{x}) \tag{3.7}$$

и

$$\overline{x} = \frac{1-a^2/n^2}{1+a^2/n^2} \geq \frac{1-\pi^2/5^2}{1+\pi^2/5^2} > \sqrt{2}-1.$$

Поэтому

$$\sqrt{1-x_{N-1}^2} \geq \sqrt{1-\overline{x}^2} > \frac{a}{n}\sqrt{2},$$

и из неравенства (3.6) находим, что

$$\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}} > \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2}}{\frac{a}{n}\sqrt{2}+\frac{2a}{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Используя последнее неравенство в цепочки (3.5), получаем

$$\sqrt{1-x_{k-1}^2} - \sqrt{1-x_k^2} < \frac{2a}{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}}} < \frac{2a}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}a}{n},$$

что вместе с неравенством (3.6) влечет оценку

$$\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}} > \frac{\sqrt{1-x_{N-1}^2}}{\sqrt{1-x_{N-1}^2}+\frac{\sqrt{2}a}{n}} > \frac{\frac{\sqrt{2}a}{n}}{\frac{\sqrt{2}a}{n}+\frac{\sqrt{2}a}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.1. Из соотношений (3.5), (3.7) следует неравенство

$$\sqrt{1-x_{N-1}^2} < \frac{4\pi}{n}. \tag{3.8}$$

Действительно, из (3.7) следует $\sqrt{1-\overline{x}^2} < \frac{2a}{n}$, а из определения числа $\overline{x}$ и неравенства

$$\sqrt{1-x_{N-1}^2} - \sqrt{1-\overline{x}^2} = \frac{\overline{x}^2 - x_{N-1}^2}{\sqrt{1-x_{N-1}^2}+\sqrt{1-\overline{x}^2}} <$$

$$< 2\frac{\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{N-1}^2}}{\sqrt{1-x_{N-1}^2}+\sqrt{1-\overline{x}^2}} < \frac{2a}{n}.$$

Следовательно, (3.8) имеет место.

Лемма 3.2. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности такой, что $t\omega'(t)$ не убывает. Тогда для любых положительных чисел b, s и τ имеет место неравенство*

$$|s\omega'(bs) - \tau\omega'(b\tau)| \le \omega'(b\tau)|s-\tau|. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $s < \tau$. Тогда $\omega'(bs) \ge \omega'(b\tau)$ и

$$\omega'(b\tau)|s-\tau| = \omega'(b\tau)\tau - \omega'(b\tau)s \ge \omega'(b\tau)\tau - \omega'(bs)s \ge 0,$$

аналогично, если $s > \tau$, то

$$\omega'(b\tau)|s-\tau| = \omega'(b\tau)s - \omega'(b\tau)\tau \ge \omega'(bs)s - \omega'(b\tau)\tau \ge 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности и $f(t)$ — некоторая функция из класса H^ω. Не теряя общности можно считать, что $\omega(t)$ — дифференцируемая функция на отрезке $[0;\,2]$. Обозначим через $\varphi_{k,a}(t)$ функцию из класса M_kH, существование которой установлено Н.П. Корнейчуком [13, 14], такую, что

$$|f(t) - \varphi_{k,a}(t)| \le \Delta_k, \quad t \in [-1,1],$$

где $M_k = \omega'(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2})$, а

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right), \quad k=1,2,\ldots,N, \ \ a\in[1,\pi],$$

и будем считать, что функция $\varphi_{k,a}(t)$ задана в виде, указанном А.В. Покровским [24]:

$$\varphi_{k,a}(t) = \inf_{u\in[-1,1]}\{f(u) + M_k|t-u|\} + \Delta_k. \tag{3.10}$$

Лемма 3.3. *Имеют место неравенства*

$$\varphi_{k,a}(t) - \varphi_{k+1,a}(t) \le \Delta_k - \Delta_{k+1}, \quad t \in [-1,1], \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Доказательство. Пусть для фиксированного значения t

$$\varphi_{k+1,a}(t) = f(x') + M_{k+1}|t - x'| + \Delta_{k+1}.$$

Тогда $\varphi_{k,a}(t) \le f(x') + M_k|t - x'| + \Delta_k$ и

$$\varphi_{k,a}(t) - \varphi_{k+1,a}(t) \le M_k|t - x'| - M_{k+1}|t - x'| + \Delta_k - \Delta_{k+1} \le \Delta_k - \Delta_{k+1}.$$

Причем последнее неравенство строгое, если $M_{k+1} > M_k$.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Имеют место неравенства*

$$\Delta_k - \Delta_{k+1} < (M_{k+1} - M_k)(x_{k+1} - x_k), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{3.11}$$

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа и учитывая выпуклость функции $\omega(t)$, получаем

$$2(\Delta_k - \Delta_{k+1}) = \omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2} - \omega(\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2}) +$$

$$+M_{k+1}\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2} \le \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2}\right)\left(\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2} - \frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2}\right) -$$

$$-M_k\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2} + \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2}\right)\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_k^2} = (M_{k+1} - M_k)\frac{a}{n}\sqrt{1 - x_{k-1}^2}.$$

Из полученного неравенства и неравенства (3.4) следует (3.11). Лемма доказана.

3.2. Приближение функций абсолютно непрерывными функциями переменной гладкости

Следующее утверждение является основным вспомогательным утверждением в этом параграфе. Оно является усилением леммы 1.1 Н.П. Корнейчука и А.И. Половины и, несомненно, интересно само по себе.

Лемма 3.5. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, точки x_k выбраны как в пункте 1 и m — наибольшее натуральное число, для которого выполняется неравенство $\sqrt{1-x_m^2} \geq \ln n/an$. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ и любого числа $a \in [1,\pi]$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\{\psi_{n,a}(f;x)\}$ таких, что*

(1) почти всюду выполняются неравенства

$$|\psi'_{n,a}(f;x)| \leq M_{k+1}, \quad x \in E_k, \quad k = 0,\ 1,\ \dots,\ m;$$
$$|\psi'_{n,a}(f;x)| \leq M_{m+1}, \ \ |x| \geq x_{m+1};$$

(2)

$$|f(x) - \psi_{n,a}(f;x)| \leq \Delta_k, \quad x \in E_k, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

и

$$|f(x) - \psi_{n,a}(f;x)| \leq \Delta_m, \quad |x| \geq x_{m+1},$$

где $M_k = \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, *а* $\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ N$.

Доказательство. Для заданной функции $f(x) \in H^\omega$ и любого натурального числа $n \geq 5$ укажем алгоритм построения функции $\psi_{n,a}(t)$, для которой имеет место утверждение леммы 3.5. Для этого мы будем использовать функции $\varphi_{k,a}(t)$, определенные равенством (3.10) для заданной функции $f(x)$, числа $a \in [1,\pi]$ и индекса k. Для простоты вместо $\varphi_{k,a}(t)$ будем использовать обозначение $\varphi_k(t)$, а вместо $\psi_{n,a}(t)$ — обозначение $\psi(t)$.

Положим на отрезке $[x_{-1}, x_1]$ $\psi(t) = \varphi_1(t)$ и определим сначала функцию $\psi(t)$ на полуинтервале $(x_1, 1]$. Аналогично будет строиться функция $\psi(t)$ на полуинтервале $[-1, x_{-1})$. В зависимости от ситуации будем определять функцию $\psi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ или отрезке $[x_k, x_{k+p}]$, считая, что $k \leq m+1$ и что она уже задана на отрезке $[0, x_k]$ так, что $\psi(x_k) = \varphi_k(x_k)$. Если $k = m+1$, то на отрезке $[x_k, 1]$ положим $\psi(t) = \varphi_{m+1}(t)$. В этом случае $|f(t) - \psi(t)| \leq \Delta_{m+1}$, $x \in [x_{m+1}; 1]$ и $|\psi'(t)| \leq M_{m+1}$.

При $k < m+1$ рассмотрим на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ две функции: $\varphi_k(t)$ и $\varphi_{k+1}(t)$. Если эти функции в некоторых точках этого отрезка принимают равные значения и x^* — самая левая из них, то положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_k(t), & x_k \le t \le x^*, \\ \varphi_{k+1}(t), & x^* \le t \le x_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что для $\psi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ имеет место утверждение леммы 3.5 и $\psi(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1})$. Для случая, когда графики этих функций не пересекаются, рассмотрим три возможности.

1. $\varphi_k(t) > \varphi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Пусть сначала график линейной функции $l_1(t) = \varphi_k(x_k) - M_k(t - x_k)$ пересекает график функции $\varphi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и x^* — первая точка, для которой это происходит. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} l_1(t), & x_k \le t \le x^* \\ \varphi_{k+1}(t), & x^* \le t \le x_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что $|\psi'(t)| \le M_{k+1}, \quad f(t) - \psi(t) \le f(t) - \varphi_{k+1}(t) \le \Delta_{k+1}$, если $t \in [x_k, x^*]$, $f(t) - \psi(t) = f(t) - \varphi_{k+1}(t) \le \Delta_{k+1}$, если $t \in [x^*, x_{k+1}]$ и $\psi(t) - f(t) \le \varphi_k(t) - f(t) \le \Delta_k, \quad t \in [x_k, x_{k+1}]$.

Если график линейной функции $l_1(t)$ не пересекает график функции $\varphi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, то рассмотрим линейную функцию $l_2(t) = \varphi_{k+1}(x_{k+1}) + M_{k+1}(x_{k+1} - t)$ и покажем, что в некоторой точке $x^* \in [x_k, x_{k+1}]$ графики функций $l_1(t)$ и $l_2(t)$ принимают равные значения. Если это не так, то

$$l_2(x_k) = \varphi_{k+1}(x_{k+1}) + M_{k+1}(x_{k+1} - x_k) < l_1(x_k) = \varphi_k(x_k). \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) следует

$$\varphi_k(x_{k+1}) - \varphi_{k+1}(x_{k+1}) > l_1(x_{k+1}) - \varphi_{k+1}(x_{k+1}) =$$

$$= \varphi_k(x_k) - M_k(x_{k+1} - x_k) - \varphi_{k+1}(x_{k+1}) > M_{k+1}(x_{k+1} - x_k) - M_k(x_{k+1} - x_k)$$

и в силу неравенства (3.11)

$$\varphi_k(x_{k+1}) - \varphi_{k+1}(x_{k+1}) > \Delta_k - \Delta_{k+1},$$

а это противоречит лемме 3.3. Следовательно, график функции $l_2(t)$ пересекает график функции $l_1(t)$ и график функции $\varphi_k(t)$ на отрезке

$[x_k, x_{k+1}]$. Положим $\psi(t) = \min\{\varphi_k(t), l_2(t)\}$. Тогда $|\psi'(t)| \le M_{k+1}$, $t \in \in [x_k, x_{k+1}]$, $f(t) - \psi(t) \le f(t) - \varphi_{k+1}(t) \le \Delta_{k+1}$, если $t \in [x_k, x_{k+1}]$, и $\psi(t) - f(t) \le \varphi_k(t) - f(t) \le \Delta_k$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$.

2. $\varphi_k(t) < \varphi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и график линейной функции $l_{k,0}(t) = \varphi_k(x_k) + M_{k+1}(t - x_k)$ пересекает график функции $\varphi_{k+1}(t)$ на этом отрезке. Положим

$$\psi(t) = \min\{l_{k,0}(t), \varphi_{k+1}(t)\} \le \varphi_{k+1}(t).$$

Очевидно, что $|\psi'(t)| \le M_{k+1}$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $f(t) - \psi(t) \le f(t) - \varphi_k(t) \le \Delta_k$, так как $\psi(t) \ge \varphi_k(t)$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$, и $\psi(t) - f(t) \le \varphi_{k+1}(t) - f(t) \le \Delta_{k+1}$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$. Кроме того $\psi(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1})$. Если $x_{k+1} = x_{m+1}$, то положим $\psi(t) = \varphi_{k+1}(t)$ для $t \in [x_m, 1]$. Тогда $|\psi'(t)| \le M_{k+1}$ и $|f(t) - -\psi(t)| \le |f(t) - \varphi_{m+1}(t)| \le \Delta_{m+1}$ для всех $t \in [x_m, 1]$.

3. $\varphi_k(t) < \varphi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и графики функций $l_{k,0}(t)$ и $\varphi_{k+1}(t)$ не пересекаются на этом отрезке. Рассмотрим вспомогательную функцию $z_k(t)$, которая на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$ совпадает с функцией

$$l_{k,j}(t) = \varphi_k(x_k) + \sum_{i=1}^{j} M_{k+i}(x_{k+i} - x_{k+i-1}) + M_{k+j+1}(t - x_{k+j}), \quad t \in [x_k; 1].$$

Предположим, что на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$ графики функций $\varphi_{k+j+1}(t)$ и $z_k(t)$ не пересекаются, а на отрезке $[x_{k+p}, x_{k+p+1}]$, если $x_{k+p} < x_{m+1}$, эти функции принимают в некоторых точках равные значения. Тогда на отрезке $[x_k, x_{k+p}]$ положим $\psi(t) = z_k(t)$, а на отрезке $[x_{k+p}, x_{k+p+1}]$:

$$\psi(t) = \min\{l_{k,p}(t), \varphi_{k+p+1}(t)\}.$$

Очевидно, что $\psi(x_{k+p+1}) = \varphi_{k+p+1}(x_{k+p+1})$.

Если $x_{k+p} = x_{m+1}$, то на отрезке $[x_{m+1}, 1]$ положим $\psi(t) = = \min\{l_{k,p}(t), \varphi_{k+p+1}(t)\}$, и в этом случае построение функции $\psi(t)$ завершено.

Очевидно, что $|\psi'(t)| \le M_{k+j+1}$ и $\psi(t) - f(t) \le \varphi_{k+j+1}(t) - f(t) \le \le \Delta_{k+j+1} \le \Delta_{k+j}$, если $t \in [x_{k+j}, x_{k+j+1}]$ $1 \le j \le p$.

Оценим сначала разность $f(t) - \psi(t)$ на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$ $1 \le j \le p-1$, представляя ее в виде

$$f(t) - \psi(t) = f(t) - \varphi_k(t) + \varphi_k(t) - \psi(t) \le \Delta_k + \varphi_k(x_k) + M_k(t - x_k) - \psi(t) =$$

$$= \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(M_{k+i} - M_k)(x_{k+i} - x_{k+i-1}) - (M_{k+j+1} - M_k)(t - x_{k+j}) \leq$$

$$\leq \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(M_{k+i} - M_{k+i-1})(x_{k+i} - x_{k+i-1}).$$

Применяя теперь лемму 3.4, получаем

$$f(t) - \psi(t) < \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(\Delta_{k+i-1} - \Delta_{k+i}) = \Delta_{k+j}, \quad j = 0,\ 1,\ \dots,\ p-1.$$

Рассмотрим теперь $f(t) - \psi(t)$ на отрезке $[x_{k+p}, x_{k+p+1}]$. Если $\psi(t) = \varphi_{k+p+1}(t)$ в некоторой точки t, то $f(t) - \psi(t) \leq \Delta_{k+p+1}$. Если же $\psi(t) = z_k(t)$, то так же, как на отрезке $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$ при $j = 0,\ 1,\ \dots,\ p-1$, получаем

$$f(t) - z_k(t) < \Delta_{k+m}.$$

Итак, в первых двух случаях $\psi(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1})$, а в последнем случае $\psi(x_{k+p+1}) = \varphi_{k+p+1}(x_{k+p+1})$, если $x_{k+p} < x_{m+1}$.

Если для некоторого $\nu \leq p_{k+\nu} = x_{m+1}$, то на отрезке $[x_{m+1}, 1]$ полагаем

$$\psi(t) = \min\{l_{k,\nu}(t), \varphi_{k+\nu}(t)\}$$

и в этом случае построение функции $\psi(t)$ завершено. Так как отрезков имеется конечное число, то указанный алгоритм приводит к доказательству леммы 3.5.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Сначала докажем теорему для $r = 0$. Пусть $f(x) \in H^\omega$ и $\psi(x) = \psi_{n,\pi}(f;x)$ — функция, существование которой установлено в лемме 3.5 для постоянной $a = \pi$. Так как для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x_k^2}$, то $\omega'(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_k^2}) \leq \omega'(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2})$ и, в силу леммы 3.5,

$$|\psi'(x)| \leq \omega'(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}), \quad x \in [-x_m, x_m], \tag{3.13}$$

а для $|x| \geq x_m$, в силу леммы 3.5, так как $\sqrt{1-x_m^2} \geq \ln n/\pi n$, имеет место неравенство

$$|\psi'(x)| \leq \omega'(\ln n/n^2). \tag{3.14}$$

Из оценок (3.13), (3.14) следуют неравенства

$$|\psi'(x)| \leq \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right), \quad x \in (-1,1), \tag{3.15}$$

$$|\psi'(x)| \leq \omega'(\ln n/n^2) \quad x \in [-1,1]. \tag{3.16}$$

Оценка промежуточного приближения функции $f(x)$ функцией $\psi(x)$ получена в лемме 3.5. Чтобы получить приближение $\psi(x)$, рассмотрим алгебраический многочлен $Q_n^0(f;x)$ такой, что

$$Q_n^0(f;\cos t) = -\int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\, du,$$

где $P_n^1(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_1(t)$. Тогда после замены $x = \cos t, \quad t \in [0,\pi]$, используя неравенство (3.15), равенство (2.45) и значение постоянной $K_1 = \pi/2$, получаем

$$|\psi(x) - Q_n^0(f;x)| = |\psi(\cos t) + \int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\, du| =$$

$$= |\int_{-\pi}^{\pi} \{D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\}\psi'(\cos u)\sin u\, du| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_1(t-u) - P_n^1(t-u)|\omega'(\frac{\pi}{n}|\sin u|)|\sin u|\, du \leq$$

$$\leq \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t \int_{-\pi}^{\pi} |D_1(t-u) - P_n^1(t-u)|\, du+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} |D_1(t-u) - P_n^1(t-u)||\omega'(\frac{\pi}{n}|\sin u|)|\sin u| - \omega'(\frac{\pi}{n}\sin t)\sin t|du =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t + \Delta(t). \tag{3.17}$$

Второй сомножитель произведения, стоящего под знаком интеграла, определяющего величину $\Delta(t)$, оценим, используя лемму 3.2. Для этого в неравенстве (3.9) положим $b = \frac{\pi}{n}, \quad s = |\sin u|, \quad \tau = \sin t$. Тогда

$$|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u| - \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t| \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)|\sin\frac{t-u}{2}|,$$

$$\Delta(t) \le 2\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\int_{-\pi}^{\pi}|D_1(t-u) - P_n^1(t-u)||\sin\frac{t-u}{2}|\,du.$$

Используя теперь неравенство (2.21), получаем

$$\Delta(t) \le C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\frac{\ln n}{n^2} = C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}. \qquad (3.18)$$

Пусть точка $\tilde{x} \in [x_m; x_{m+1}]$ такая, что $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = \ln n/\pi n$, тогда для $|x| \le \tilde{x}$

$$\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \le \omega'\left(\frac{\pi\ln n}{\pi n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \le \omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \qquad (3.19)$$

Оценим уклонение многочлена $Q_n^0(f;x)$ от функции $f(x)$ для $|x| \le \tilde{x}$. Учитывая неравенства (3.17) — (3.19), оценку промежуточного приближения функции $f(x)$ функцией $\psi(x)$, полученную в лемме 3.5, и монотонность функции $t\omega'(t)$ для $x \in E_k \bigcap [-\tilde{x}, \tilde{x}]$, $\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, получаем

$$|f(x) - Q_n^0(f;x)| \le |f(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - Q_n^0(f;x)| \le$$

$$\le \Delta_k + \frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2} + C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - \frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)\sqrt{1-x_{k-1}^2} +$$

$$+\frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2} + C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}, \qquad (3.20)$$

так как в силу (3.5)

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - \omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \le$$

$$\leq \frac{\pi}{n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)(\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\sqrt{1-x_{k+1}^2}) \leq \frac{4\pi^2}{n^2}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right).$$

Используя неравенство (3.19), имеем

$$|f(x)-Q_n^0(f;x)| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)+C\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.21}$$

Пусть теперь $|x| \geq \tilde{x}$. В этом случае, используя неравенства (3.16) и (2.21), получаем

$$|f(x)-Q_n^0(f;x)| \leq |f(x)-\psi(x)|+|\psi(x)-Q_n^0(f;x)| \leq$$

$$\leq \Delta_m+\int_{-\pi}^{\pi}|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u|\,du \leq$$

$$\leq \Delta_m+\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\sin t\int_{-\pi}^{\pi}|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)|\,du+$$

$$+\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)||\sin u-\sin t|\,du \leq$$

$$\leq \Delta_m+C\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n}\frac{\pi}{2n}+C\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq C\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.22}$$

Из (3.20) — (3.22) следует теорема для $r=0$.

Замечание 3.2. Из неравенств (3.20), (3.22), благодаря выпуклости модуля непрерывности (производная не возрастает), следует неравенство

$$|f(x)-Q_n^0(f;x)| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)+C\omega'\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}. \tag{3.23}$$

Существуют модули непрерывности такие, что

$$\omega'\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq \omega\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Например, $\omega(t) = (2-\ln t)^{\alpha}$, $t \in (0;1]$, $\omega(0) = 0$, $\alpha \in (0;1]$. Поэтому для таких модулей непрерывности остаточный член в (3.20) — (3.22) можно заменить на $C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

При доказательстве теоремы 3.1 в случае $r > 0$ можно ограничиться функциями из класса $W^r H^{\omega}$, представимыми в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)\,dt,$$

где $f \in H^{\omega}$. Пусть

$$I_r(f(\cos u))(t) = \int_0^{2\pi} f(\cos u)D_r(t-u)\,du.$$

Положим

$$f_k(\cos t) = (-\sin t)^k I_k(f(\cos u))(t) + R_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ \dots. \tag{3.24}$$

Нетрудно проверить, что для любого $k = 2,\ 3,\ \dots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}R_k(t) = -\sin t R_{k-1}(t) + k(-\sin t)^{k-1}\cos t I_k(f(\cos u))(t), \tag{3.25}$$

а

$$\frac{d}{dt}R_1(t) = \cos t I_1(f(\cos u))(t) - \frac{\sin t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos t)\,dt. \tag{3.26}$$

Рекуррентная зависимость (3.25), (3.26) позволит найти оценку приближения функции $R_k(t)$, зная приближение функций $I_k(f(\cos u))(t)$ и $R_{k-1}(t)$.

Лемма 3.6. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности такой, что функция $t\omega'(t)$ не убывает. Тогда для любой функции $f \in H^{\omega}$ и любого натурального числа r существует последовательность алгебраических многочленов $T_n^r(f;t)$ степени $n \geq 2$ таких, что выполняется неравенство*

$$|I_r(f(\cos u))(t) - T_n^r(f;t)| \leq \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right) + C_r\frac{\omega(\frac{\ln n}{n^2})}{n^r}, \quad t \in [0,\pi], \tag{3.27}$$

где K_r — константа Фавара, а величина C_r зависит только от r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in H^\omega$, $a_r = \frac{2K_{r+1}}{K_r}$, $r \in N$ и $\psi(x) \equiv \psi_{n,a_r}(f;x)$ — функция, построенная для f и данного числа a_r в соответствии с леммой 3.5. Представим $I_r(f(\cos u))(t)$ в виде

$$I_r(f(\cos u))(t) = I_r(f(\cos u) - \psi(\cos u))(t) + I_r(\psi(\cos u))(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

и приблизим каждое слагаемое правой части. Первое будем аппроксимировать тригонометрическим полиномом:

$$A_n^r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} P_n^r(t-u)(f(\cos u) - \psi(\cos u))\, du,$$

где $P_n^r(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(t)$.

Пусть t_k, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ — точки отрезка $[0, \pi/2]$ такие, что $\cos t_k = x_k$ и $F_k = (t_{k+1}; t_k) \bigcup (\pi - t_k; \pi - t_{k+1}) \bigcup (-t_k; -t_{k+1}) \bigcup (-\pi + {} + t_{k+1}; -\pi + t_k)$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, $F_m = (-t_m; t_m) \bigcup (\pi - t_m; \pi) \bigcup (-\pi; t_m - {} - \pi)$. Тогда, используя лемму 3.5 и четность функций $f(\cos u)$ и $\tilde{\psi}(\cos u)$, получаем

$$|f_1(t) - A_n^r(t)| \le \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \int_{F_k} |D_r(t-u) - P_n^r(t-u)| \{\omega\left(\frac{a_r}{n} \sin t_{k-1}\right) -$$

$$-\omega'\left(\frac{a_r}{n} \sin t_{k-1}\right) \frac{a_r}{n} \sin t_{k-1}\}\, du \le \frac{1}{2}\{\omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right) -$$

$$-\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right) \frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\} \int_0^{2\pi} |D_r(u) - P_n^r(u)|\, du +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \int_{F_k} |D_r(t-u) - P_n^r(t-u)| \left\{\omega\left(\frac{a_r}{n} \sin t_{k-1}\right) - \omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\right\}\, du +$$

$$+\frac{a_r}{2n} \sum_{k=0}^{m} \int_{F_k} |D_r(t-u) - P_n^r(t-u)| \{\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)(\sin t + \alpha)) -$$

$$-\omega'\left(\frac{a_r}{n} \sin t_{k-1}\right) \sin t_{k-1}\};\quad du \equiv I_1^0 + I_1^1 + I_1^2, \tag{3.28}$$

где α — положительная константа, которая в зависимости от t будет определена позже. Очевидно, что

$$I_1^0 = \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}(\sin t+\alpha)\right) - \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha). \tag{3.29}$$

Чтобы оценить I_1^1, рассмотрим два случая: а) $\sin t+\alpha \le \sin t_{k-1}$ и б) $\sin t+ +\alpha > \sin t_{k-1}$. В первом случае разность $\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)$ неотрицательная и в силу теоремы Лагранжа и монотонности производной $\omega'(t)$ не превосходит $\frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t_{k-1}-\sin t-\alpha)$, а во втором отрицательная и, следовательно, меньше $\frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)|\sin t_{k-1}- -\sin t-\alpha|$. Таким образом, учитывая, что $u \in F_k$ и неравенство $0<\sin t_{k-1}-\sin t_k \le \frac{2a_r}{n} \le \frac{2\pi}{n}$, получаем

$$\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right) \le$$

$$\le \frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)[|\sin t - |\sin u|| + ||\sin u| - \sin t_{k-1}| + \alpha] \le$$

$$\le \frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\{2|\sin\frac{t-u}{2}| + 2\pi/n + \alpha\}.$$

Используя последнее неравенство и неравенство (2.21), имеем

$$I_1^1 \le C_r\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}} + \frac{1}{n^{r+2}} + \frac{\alpha}{n^{r+1}}\right\}.$$

Для $\sin t \ge \ln n/n$ положим $\alpha=0$. Тогда

$$I_1^1 \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right\} \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right\}. \tag{3.30}$$

Если $0 \le \sin t \le \ln n/n$, то положим $\alpha = \ln n/n$. Тогда

$$I_1^1 \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1+\ln n}{n^2}\right\} \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + \frac{\ln n}{n^2}\right\}. \tag{3.31}$$

Таким образом, для всех $t \in [0;\pi]$ для I_1^1 имеет место оценка (3.31).

Чтобы оценить I_1^2, применим для разности

$$\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha)-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}$$

лемму 3.2, положив $b=\frac{a_r}{n}$, $\quad s=\sin t_{k-1}$, $\quad \tau=\sin t+\alpha$, и воспользуемся тем, что $u\in F_k$, а также неравенством (3.5), в силу которого $0<\sin t_{k-1}-$ $-\sin t_k\le 2a_r/n\le 2\pi/n$, и, следовательно,

$$|\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha)-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}|\le$$

$$\le\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)|\sin t+\alpha-\sin t_{k-1}|\le$$

$$\le\frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)[|\sin t-|\sin u||+||\sin u|-\sin t_{k-1}|+\alpha]\le$$

$$\le\frac{a_r}{n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\{2|\sin\frac{t-u}{2}|+2\pi/n+\alpha/n\}.$$

Из последнего неравенства точно так же, как получили оценку (3.30) — (3.31), получаем для всех $t\in[0;\pi]$ оценку величины I_1^2:

$$I_1^2\le\frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1+\ln n}{n^2}\right\}\le\frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)+\frac{\ln n}{n^2}\right\}. \quad (3.32)$$

Рассмотрим теперь приближение функции $f_2(t)$. Так как после интегрирования по частям

$$f_2(t)=I_r(\psi(\cos u))=-\int_{-\pi}^{\pi}D_{r+1}(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\,du,$$

то для приближения функции $f_2(t)$ возьмем тригонометрический полином $B_n^r(t)$ вида

$$B_n^r(t)=-\int_{-\pi}^{\pi}P_n^{r+1}(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\,du,$$

где $P_n^{r+1}(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_{r+1}(t)$. Точно так же, как были доказаны неравенства (3.14), (3.15), нетрудно вывести, что

$$|\psi'(\cos u)|\le\min\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right),\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\},\quad u\in[-\pi,\pi]. \quad (3.33)$$

Пусть точка $\tilde{x} \in [x_m; x_{m+1}]$ такая, что $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = \ln n / a_r n$.
Используя неравенство (3.33), для $|x| \le \tilde{x}$ получаем

$$|f_2(t) - B_n^r(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)| \omega' \left(\frac{a_r}{n} |\sin u|\right) |\sin u| \, du \le$$

$$\le \omega' \left(\frac{a_r}{n} \sin t\right) \sin t \int_{-\pi}^{\pi} |D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)| \, du +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)| |\omega' \left(\frac{a_r}{n} |\sin u|\right) |\sin u| - \omega' \left(\frac{a_r}{n} \sin t\right) \sin t| \, du =$$

$$= \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}} \omega' \left(\frac{a_r}{n} \sin t\right) \sin t + \Delta_r(t).$$

Оценка величины $\Delta_r(t)$ для $\cos t \in [-\tilde{x}; \tilde{x}]$ осуществляется так же, как и величины $\Delta(t)$ для $r = 0$:

$$\Delta_r(t) \le C_r \min \left\{ \omega' \left(\frac{a_r}{n} \sin t\right) \frac{\ln n}{n^{r+2}}, \omega' \left(\frac{\ln n}{n}\right) \frac{\ln n}{n^{r+2}} \right\}.$$

Следовательно, для $\cos t \in [-\tilde{x}; \tilde{x}]$

$$|f_2(t) - B_n^r(t)| \le \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}} \omega' \left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n} \sin t\right) \sin t +$$

$$+ C_r \min \left\{ \omega' \left(\frac{a_r}{n} \sin t\right) \frac{\ln n}{n^{r+2}}, \omega' \left(\frac{\ln n}{n}\right) \frac{\ln n}{n^{r+2}} \right\} \le \frac{C_r}{n^r} \omega \left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.34}$$

Предположим теперь, что $|x| > \tilde{x}$. В силу неравенства (3.33)

$$|\frac{d}{dt} \psi(\cos u)| \le \omega' \left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad u \in [-\pi, \pi].$$

Тогда

$$|f_2(t) - B_n^r(t)| \le \omega' \left(\frac{\ln n}{n}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)| |\sin u| \, du \le$$

$$\le \omega' \left(\frac{\ln n}{n}\right) \sin t \int_{-\pi}^{\pi} |D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)| \, du +$$

$$+\omega'\left(\frac{\ln n}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi}|D_{r+1}(t-u)-B_n^r(t-u)||\sin u-\sin t|\,du=$$

$$=\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\sin t+C_r\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)(\frac{\ln n}{n^{r+2}}).$$

Если $|x|\geq\tilde{x}=\cos\tilde{t}$, то, так как $\omega'(t)t$ не убывает,

$$\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha)\geq\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin\tilde{t}\right)\sin\tilde{t}=$$

$$=\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-\tilde{t}^2}\right)\sqrt{1-\tilde{t}^2}. \qquad (3.35)$$

Пусть $T_n^r(f;t)=A_n^r(t)+B_n^r(t)$. Из неравенства

$$|I_r(f(\cos u))(t)-T_n^r(f;t)|\leq|f_1(t)-A_n^r(t)|+|f_2(t)-B_n^r(t)|$$

и оценок (3.28) — (3.35) следует справедливость леммы 3.6.

Лемма 3.7. *Пусть для 2π-периодической функции $f(x)$ существует тригонометрический полином $g_n(t)$ степени не выше n такой, что*

$$|f(x)-g_n(t)|\leq L_n^k(|\sin t|+1/n)^k\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right),$$

где $k\geq 0$, а величина L_n зависит только от n. Тогда существует тригонометрический полином $G_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$|I(f)(t)-G_n(t)|\leq L_n^k d_k\frac{\left(|\sin t|+\frac{1}{n}\right)^k}{n}\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right),$$

где d_k зависит только от k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно близко к приведенному в работе [5] (см. лемму 2). Пусть a_0 — среднее значение разности $f(t)-g(t)$ и $F(t)=I_1(f-g_n-a_0)(t)=I(f)(t)-P_n(t)$, где $P_n(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n. Оценим вторую разность с шагом $u>0$ функции $F(t)$:

$$|\Delta_u^2F(t)|=u|f(t+h_1)-g_n(t+h_1)-f(t+h_2)+g_n(t+h_2)|\leq$$

$$\leq 2u \max_{-u\leq v\leq u} |f(t+v) - g_n(t+v)| \leq$$

$$\leq 2uL_n^k \max_{-u\leq v\leq u} (|\sin(t+v)| + 1/n)^k \omega\left(\frac{|\sin(t+v)| + 1/n}{n}\right) \leq$$

$$\leq L_n^k d_k u[(|\sin t| + 1/n)^k + u^k]\left\{\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right) + (nu+1)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}. \tag{3.36}$$

Функцию $I(f)(t) = F(t) + P_n(t)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $G_n(x) = D_{n,k_0}(F;t) + P_n(t)$, где $D_{n,k_0}(F;t)$ — обобщенные многочлены Джексона (см. [2, с. 57; 40]):

$$D_{n,k_0}(F;t) = \int_0^\pi (F(t+u) + F(t-u))K_{n,k_0}(u)\,du,$$

где

$$K_{n,k_0}(u) = b_s\left(\frac{\sin\frac{su}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^{2k_0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,k_0}(u)\,du = 1,$$

а s и k выбраны так, что $s-1 = [n/k_0]$, $\quad k+6 > 2k_0 > k+3$. Тогда, используя (2.35), получаем

$$|I(f)(t) - G_n(t)| = |F(t) - D_{n,k_0}(F;t)| = \int_0^\pi \Delta_u^2 F(t) K_{n,k_0}(u)\,du \leq$$

$$\leq L_n^k d_n \int_0^\pi u((|\sin t|+1/n)^k + u^k)\{\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right) + (nu+1)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\}\,dt \leq$$

$$\leq L_n d_k \frac{(|\sin t| + \frac{1}{n})^k}{n}\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы 3.7 следует оценка поточечного приближения $I_r(f(\cos u))(t)$, где $f \in H^\omega$, по порядку лучшая у концов отрезка $(0,\pi)$ по сравнению с (3.27).

Действительно, в силу теоремы А.Ф. Тимана (см. [2, с. 276]) для любой функции $f \in H^\omega$ существует тригонометрический полином $g_n^0(t)$ такой, что

$$|f(\cos t) - g_n^0(t)| \leq C\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right).$$

Применяя лемму 3.7, методом математической индукции устанавливаем для любого натурального числа r существование четного тригонометрического полинома $G_n^r(t)$ такого, что

$$|I_r(f(\cos u))(t) - G_n^r(t)| \leq C_r \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)}{n^r}. \qquad (3.37)$$

Из леммы 3.7 и неравенства (3.37) следует утверждение.

Лемма 3.8. *Для любого натурального числа r существует последовательность $\{M_n^r(t)\}$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что*

$$|R_r(t) - M_n^r(t)| \leq C_r \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)(|\sin t| + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}. \qquad (3.38)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $r = 1$ утверждение леммы следует из (3.37) при $r = 1$, равенства (3.26) и леммы 3.7. Пусть утверждение леммы 3.8 имеет место для $r = k \geq 1$, т.е. существует четный тригонометрический полином $M_n^k(t)$ степени не выше n, для которого имеет место (3.38) при $r = k$. Тогда

$$|\sin t(R_k(t) - M_k^r(t))| \leq C_k \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)(|\sin t| + 1/n)^k}{n^{k+1}}. \qquad (3.39)$$

Используя теперь равенство (3.25), оценки (3.37) и (3.39), замечаем, что для $R'_{k+1}(t)$ выполняется условие леммы 3.7. Следовательно, в силу утверждения леммы 3.7 лемма 3.8 имеет место для $r = k + 1$. Лемма доказана.

Из лемм 3.6 и 3.8 и равенства (3.24) для любой функции $f \in H^\omega$ следует существование алгебраического многочлена $Q_n^r(f; x)$ такого, что для любого $t \in [0, \pi]$

$$|f_r(\cos t) - Q_n^r(f; \cos t)| \leq \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sin t}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right) +$$

$$+C_r \frac{\omega\left(\ln n \frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)(|\sin t|+1/n)^{r-1}}{n^{r+1}},$$

а это эквивалентно утверждению теоремы 3.1.

§ 4. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами

4.1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная интегрируемая на отрезке $[-1,\ 1]$ функция и H некоторый класс функций f, заданных на этом же отрезке, для которых существует в смысле главного значения интеграл

$$S_\rho(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\rho(t)\,dt, \quad x \in (-1,1). \tag{4.1}$$

Для некоторых весовых функций $\rho(x)$ и классов H задачи об аппроксимации сингулярных интегралов (4.1) исследовались, например, в работах [31 — 34]. Преобразование $S_\rho(f)$ можно рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции к функции f, заданной на отрезке [-1,1]. При этом суперпозиция $S_\rho(f)(\cos x)$ определенным образом выражается через функцию, тригонометрически сопряженную к индуцированной функции $f(\cos x)$ или к функции, которая определяется последней. Мы не касаемся задачи об описании множества пар $(\rho(x), H)$, для которых существует (всюду или почти всюду) интеграл (4.1) и какими свойствами он обладает.

В работе рассмотрим конкретные весовые функции $\rho_{-1}(x) = (1-$ $-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\rho_1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\rho_0(x) = 1$ и классы W_p^r, $r > 0$, $p = \infty$ или $p = 1$, функций $f_r(x)$ определяемых на отрезке [-1,1] равенством

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)\,dt + P(x), \tag{4.2}$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, функция $f(t)$ измерима и $|f(t)| \le 1$ почти всюду, если $p=\infty$, и $\|f\|_1 \le 1$, если $p=1$, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a).

Через $W^r_{p,2\pi}$ будем обозначать соответствующие классы 2π-периодических функций, а через $\tilde{W}^r_{p,2\pi}$ — классы функций, тригонометрически сопряженные к функциям из класса $W^r_{p,2\pi}$.

Введем теперь классы функций, которые будут предметом исследования в работе. Обозначим через $\hat{W}^r_p$, соответственно $\check{W}^r_p$, $\overline{W}^r_p$, классы функций $S_\rho(f)$, представимых сингулярным интегралом (4.1) с весом $\rho_{-1}(t) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, соответственно с весом $\rho_1(t) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\rho_0(t) = 1$, где $f \in W_p^r$.

В этом параграфе рассматриваются асимптотически точные оценки приближения функций классов $\hat{W}_\infty^r$, $\breve{W}_\infty^r$ и $\overline{W}_\infty^r$ с учетом положения точки на интервале (-1,1) алгебраическими многочленами, они представлены в следующих утверждениях.

Теорема 4.1. *Для любого числа $r > 0$ и любой функции $f \in \hat{W}_\infty^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $n = [r]+1,\ [r]+2,\ \ldots$, такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)|\sqrt{1-x^2} \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^r + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-1}\right), \tag{4.3}$$

где

$$\tilde{K}_r = \frac{4\cos\frac{r\pi}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \qquad 0 < r \le 1/2,$$

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\}}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \quad r > 1/2,$$

а $\gamma_r \in (0,\pi]$ является корнем уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\{(2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\}}{(2m+1)^r} = 0.$$

Величина C_r зависит только от r.

При этом следует отметить, и этим в работе будем пользоваться, что отношение $\frac{\tilde{K}_r}{n^r}$ есть величина наилучшего приближения ядра

$$\tilde{D}_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r} \tag{4.4}$$

тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот важный результат был получен в работах Н.И. Ахиезера и М.Г. Крейна [37] при натуральных r, С.Б. Стечкина [40] при $0 < r \le 1/2$, Сунь-Юншена [41] при нецелых $r > 1$ и В.К. Дзядыка [43] при $1/2 < r < 1$.

Теорема 4.2. *Для любого числа $r > 0$ и любой функции $f \in \breve{W}^r_\infty$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $n = [r]+1,\ [r]+2,\ \dots$, такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}(\sqrt{1-x^2}+1/n)^r\right), \quad (4.5)$$

где константа C_r зависит от r.

Сложнее складывается ситуация для классов сингулярных интегралов (4.1), определяемых весом $\rho_1(x) = 1,\ \ \forall x \in [-1,1]$. Дело в том, что даже для функции $f(x) = 1,\ \ \forall x \in [-1,1]$:

$$S_{\rho_o}1(x) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-x}{1+x}, \quad x \in (-1,1),$$

а для любой функции $f(x) \in W^r_\infty$ (см. далее равенство (4.11)):

$$S_{\rho_o}f(\cos t) = C(f(\cos u)\operatorname{sign}\sin u)(t).$$

В этом случае либо необходимо приближать функцию $S_{\rho_o}f(x)$ на отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$, либо потребовать, чтобы $f(x)$ обращалась в ноль на концах отрезка [-1,1] вместе со своими производными. Во втором случае можно обеспечить необходимую гладкость $C(f(\cos u)\operatorname{sign}\sin u)(t)$. Эта идея реализована в следующей теореме.

Теорема 4.3. *Пусть $f \in \overline{W}^r_\infty$, $\quad r = 1,\ 2,\ \dots$, и на концах отрезка $[-1,\ 1]$ функция $f(x)$ и все ее производные до $r-1$ порядка обращаются в ноль. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $\ n \ge r+1$ такая, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r} + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}(\sqrt{1-x^2}+1/n)^r\right), \quad (4.6)$$

где константа C_r зависит от r.

В случае целых r покажем, что множитель $\ln n$ в правых частях неравенств (4.3), (4.5), (4.6) можно убрать.

4.2. Вспомогательные определения и результаты

Если функция $f \in W^r_p$, а функция $\rho(t)$ ограничена на любом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$, то для $\forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\rho\,(t)\;dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(\cos t)}{\cos t-x}\rho\,(\cos t)\sin t\;dt, \tag{4.7}$$

где интеграл справа также понимается в смысле главного значения. Из (4.7), используя равенство

$$ctg\frac{x-t}{2}+ctg\frac{x+t}{2}=\frac{2\sin x}{\cos t-\cos x},\qquad t\neq x,$$

для любой функции $\hat{f}\in\hat{W}_p^r$ получаем

$$\hat{f}(\cos x)=\frac{1}{\pi\sin x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos t)}{2tg\frac{x-t}{2}}\;dt=\frac{1}{\sin x}C(f(\cos t))(x), \tag{4.8}$$

где через $C(f)(x)$ обозначена функция, тригонометрически сопряженная к $f(x)$. Для любой функции $\check{f}\in\check{W}_p^r$ из равенства

$$ctg\frac{x-t}{2}-ctg\frac{x+t}{2}=\frac{2\sin t}{\cos t-\cos x},\qquad t\neq x,$$

следует соотношение

$$\check{f}(\cos x)=C(f(\cos t)\sin t)(x). \tag{4.9}$$

Так как для любой функции $\overline{f}\in\overline{W}_\infty^r$

$$\overline{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

то из равенства (4.8) следует равенство

$$\overline{f}(\cos x)=\frac{1}{\sin x}C(f(\cos t)|\sin t|)(x). \tag{4.10}$$

Если же $\overline{f}$ представить в виде

$$\overline{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)/\sqrt{1-t^2}}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

то, учитывая (4.9), получаем

$$\overline{f}(\cos x)=C(f(\cos t)\,\mathrm{sign}\sin t)(x). \tag{4.11}$$

Отметим также, что для любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени n $S_{\rho_{-1}}(P_n)(x)$ — многочлен степени $n-1$, в частности $S_{\rho_{-1}}(1)(x)=0$, а $S_{\rho_1}(P_n)(x)$ — многочлен степени $n+1$, в частности

$S_{\rho_1}(1)(x) = -x$. Поэтому, не теряя общности в решении задач аппроксимации классов $\hat{W}_p^r$ и $\breve{W}_p^r$, можно считать, что в равенстве (4.2) $P(x) = 0$.

Замечание 4.1. Для обозначения тригонометрически сопряженной функции будем использовать как символ $\tilde{f}$, так и $C(f)$, причем последний будем использовать для суперпозиции функций, например, как в правых частях (4.10), (4.11).

Для любой суммируемой 2π-периодической функции f положим

$$I_r f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_r(x-t)\, dt, \quad I_0 f(x) = f(x),$$

где

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r}$$

— ядро Бернулли.

Если f в среднем равна нулю, то $f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^r I_r f(x)$. В общем случае

$$\frac{d}{dx} I_r f(x) = I_{r-1} f(x), \quad r \geq 2 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} I_1 f(x) = f(x) - 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t)\, dt. \tag{4.12}$$

Пусть далее

$$C(I_r f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \tilde{D}_r(x-t)\, dt,$$

где $\tilde{D}_r(t) = C(D_r)(t)$ — функция, тригонометрически сопряженная к $D_r(t)$. Тогда для $r = 1,\ 2,\ \dots$

$$C(I_r f)(x) = I_r C(f)(x), \quad \frac{d}{dx} C(I_r f)(x) = C(I_{r-1})(x), \quad C(I_0 f)(x) = \tilde{f}(x). \tag{4.13}$$

Обозначим через $\tilde{E}_n(f)_p$ наилучшее приближение функции f тригонометрическими многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве C, если $p = \infty$, и в пространстве L_1, если $p = 1$, Известны неравенства

$$\tilde{E}_n(C(I_r f)_p \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r} \tilde{E}_n(f)_p. \tag{4.14}$$

В случае целых r неравенство (4.14) является следствием (см. [2, с. 331]) известных теорем Н.И. Ахиезера, С.Г. Крейна [37] и Фавара [38], если

$p = \infty$, и С.М. Никольского [39], если $p = 1$. Для нецелых r неравенство (4.14) вытекает из результатов С.Б. Стечкина [40], Сунь-Юншена [41] и В.К. Дзядыка [43].

Рассмотрим некоторые свойства сопряженных функций.

Лемма 4.1. *Для любого натурального числа k и любой функции f, для которой существует $C(f)$, имеет место равенство*

$$C(\sin^k t f(t))(x) = \sin^k x C(f)(x) + T_k(x), \tag{4.15}$$

где $T_k(x)$ — многочлен степени не выше k.

Доказательство. Пусть $k = 1$ и A_k, B_k — коэффициенты Фурье функции $C(\sin t f(t))(x)$, A_k', B_k' — коэффициенты Фурье функции $\sin x C(f)(x)$. Для их сравнения применим формулу Рисса (см. [44, с. 568]):

$$\int_0^{2\pi} \tilde{u}(x)v(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} u(x)\tilde{v}(x)\,dx.$$

Тогда для $k = 1,\ 2,\ \ldots$

$$\pi B_k = \int_0^{2\pi} C(\sin t f(t))(x)\sin kx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x f(x)\cos kx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)(\cos(k+1)x - \cos(k-1)x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\tilde{f}(x)\sin kx\,dx = \pi B_k'.$$

Аналогично для $k = 2,\ 3,\ \ldots$ получим

$$\pi A_k = \int_0^{2\pi} C(\sin t f(t))(x)\cos kx\,dx = -\int_0^{2\pi} \sin x f(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(k+1)x - \cos(k-1)x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\tilde{f}(x)\cos kx\,dx = \pi A_k'.$$

Пусть теперь $k = 1$:

$$\pi A_1 = \int_0^{2\pi} C(\sin t f(t))(x)\cos x\,dx = -\int_0^{2\pi} \sin x f(x)\sin x\,dx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{\pi a_0}{2} + \int_0^{2\pi} \sin x\tilde{f}(x)\cos x\,dx = -\frac{\pi a_0}{2} + \pi A_1'.$$

Очевидно, что $A_0 = 0$, а $\pi A_0' = \int_0^{2\pi} \sin x\tilde{f}(x)\,dx = \pi a_1$. Следовательно,

$$C(\sin tf(t))(x) = \sin xC(f)(x) - a_1/2 - a_0/2\cos x,$$

где a_0, a_1 — соответствующие коэффициенты Фурье функции f. Предположим, что равенство (4.15) имеет место для индекса $k = m$. Тогда

$$C(\sin^{m+1} tf(t))(x) = \sin xC(\sin^m tf(t))(x) + T_1(x) =$$

$$= \sin x(\sin^m xC(f)(x) + T_m(x)) + T_1(x) = \sin^{m+1} xC(f)(x) + T_{m+1}(x).$$

Следовательно, в силу принципа математической индукции оно верно для любого натурального n.

Лемма доказана.

Замечание 4.2. Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

Лемма 4.2. *Пусть тригонометрический полином $T_n(x)$ степени не выше n удовлетворяет условию*

$$|T_n(x)| \le M(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}, \quad x \in [-\pi,\pi], \quad \rho \in (0,1].$$

Тогда

$$|\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)| \le MCn(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{4.16}$$

где $\tilde{T}_n(x)$ — тригонометрический полином, сопряженный к $T_n(x)$.

Доказательство. Многочлен $\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)$ можно представить в виде (см. [46, с.195]):

$$\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x) = \frac{2n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\cos ntK_{n-1}(t)\,dt,$$

где

$$K_{n-1}(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}}$$

— ядро Фейера. Тогда

$$|\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{2n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x+t)| K_{n-1}(t)\, dt \leq$$

$$\leq \frac{2nM}{\pi} (\int_0^{\pi} (|\sin(x+t)| + 1/n)^{\rho-1} K_{n-1}(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{\pi} (|\sin(x-t)| + 1/n)^{\rho-1} K_{n-1}(t)\, dt) = \frac{2Mn}{\pi}(I_1 + I_2).$$

Так как правая часть является π-периодической функцией, симметричной относительно точки $\pi/2$, то достаточно оценить интегралы для $x \in \in [0, \pi/2]$. Если $x \in [0,\ 1/n]$, то $(|\sin(x \pm t)| + 1/n)^{\rho-1} \leq n^{1-\rho}$ и

$$I_1 + I_2 \leq Cn^{1-\rho}. \tag{4.17}$$

Если $x \in [\pi/4, \pi/2]$, то $|\sin(x \pm t)| \geq \sin \pi/8$ при условии, что $t \in [0, \pi/8]$. Но тогда

$$I_1 + I_2 \leq C. \tag{4.18}$$

Пусть теперь $x \in [1/n, \pi/4]$. Чтобы оценить интеграл I_1, заметим, что $\sin(x+t) \geq \sin x$, если $t \in [0, \pi - 2x]$. Тогда

$$I_1 \leq \int_0^{\pi-2x} (\sin x + 1/n)^{\rho-1} K_{n-1}(t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} n^{1-\rho} K_{n-1}(t)\, dt \leq$$

$$\leq C(\sin x + 1/n)^{\rho-1} + Cn^{-\rho}. \tag{4.19}$$

Оценим интеграл I_2:

$$I_2 \leq \int_0^{x/2} (|\sin(x-t)| + 1/n)^{\rho-1} K_{n-1}(t)\, dt +$$

$$+ \int_{x/2}^{\pi} (|\sin(x-t)| + 1/n)^{\rho-1} K_{n-1}(t)\, dt \leq$$

$$\leq (\sin \frac{x}{2} + 1/n)^{\rho-1} + Cn^{-\rho}x^{-1} \leq C(\sin x + 1/n)^{\rho-1}. \tag{4.20}$$

Из (4.17) — (4.20) следует (4.16).

Лемма доказана.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о поточечном приближении периодических функций тригонометрическими полиномами.

Лемма 4.3. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|\Delta_t^2 f(x)| \le t^{1+\rho}(|\sin x| + t)^{\rho-1}, \quad \rho \in (0,1],$$

то

$$|f(x) - D_{n,2}(f,x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}},$$

где

$$D_{n,2}(f,x) = b(n)\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))K_{s-1}^2(t)\,dt$$

— многочлены Джексона [45, *с.* 115], $b(n) \asymp 1/n, \quad s-1 = [n/2]$.

Доказательство. Предположим, что $|\sin x| > 1/n$. Тогда

$$|f(x) - D_{n,2}(f,x)| = b(n)|\int_0^\pi \Delta_t^2 f(x) K_{s-1}^2(t)\,dt| \le$$

$$\le Cb(n)\left[\int_0^{|\sin x|} |\sin x|^{\rho-1} t^{\rho+1} K_{s-1}^2(t)\,dt + n^{-2}\int_{|\sin x|}^\pi t^{2\rho-4}\,dt\right] \le$$

$$\le C|\sin x|^{\rho-1} n^{-\rho-1}.$$

Если $|\sin x| \le 1/n$, то

$$|f(x) - D_{n,2}(f,x)| \le Cb(n)\int_0^\pi t^{2\rho}K_{s-1}^2(t)\,dt \le Cn^{-2\rho}.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы 4.3.

Пусть $\rho \in (0,1), \quad f_\rho \in W_\infty^\rho$ и

$$S_0(x) = \int_0^\pi [D_\rho(u-x) + D_\rho(u+x)]\sin^\rho u f(\cos u)du.$$

Обозначим через $R_0(x)$ разность $f_\rho(\cos x) - S_0(x)$. В теореме 2.1 получена (см. неравенство (1.32)) оценка второй разности функции $R_0(x)$, которую можно представить в виде

$$|\Delta_t^2 R_0(x)| \le Ct^{1+\rho}(|\sin x| + t)^{\rho-1},$$

где C — абсолютная константа. Следовательно, в силу леммы 4.3

$$|R_0(x) - D_{n,2}(R_0, x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}. \tag{4.21}$$

Лемма 4.4. *Предположим, что для производной $f'(x)$ 2π-периодической абсолютно непрерывной функции $f(x)$ существует тригонометрический полином степени не выше n такой, что*

$$|f'(x) - T_n(x)| \le L_n(|\sin x| + 1/n)^{k-1},$$

где $k > 0$, а величина L_n зависит только от n. Тогда существует тригонометрический полином $Q_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$|f(x) - Q_n(x)| \le L_n d_k \frac{(|\sin x| + \frac{1}{n})^{k-1}}{n},$$

где d_k зависит только от k.

Лемма 4.4 является частным случаем леммы 3.7 , когда $\omega(t) = 1$, если $t \ge 1/n$.

Лемма 4.5. *Предположим, что для функции f существует последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x)$ таких, что*

$$|f(x) - T_n(x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}} \quad \rho \in (0, 1].$$

Тогда существует последовательность тригонометрических полиномов $Q_n(x)$ и постоянная $\tilde{C}$ такие, что

$$|\tilde{f}(x) - Q_n(x)| \le \tilde{C}\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}. \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что функция f ортогональна константе. Обозначим через $F(x)$ ее первообразную. Из условия леммы 4.5, в силу леммы 4.4, следует существование последовательности тригонометрических полиномов $P_n(x)$ таких, что

$$|F(x) - P_n(x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+2}}. \tag{4.23}$$

Пусть $S_n(x) = P_{2^{n+1}}(x) - P_{2^n}(x)$. Из (4.23) очевидно следует оценка

$$|S_n(x)| \leq C\frac{(|\sin x| + \frac{1}{2^n})^{\rho-1}}{2^{n(\rho+2)}}.$$

Применяя лемму 4.2 для полиномов $S_n(x)$, получаем

$$\left|\frac{d}{dx}\tilde{S}_n(x)\right| \leq C\frac{(|\sin x| + \frac{1}{2^n})^{\rho-1}}{2^{n(\rho+1)}}. \tag{4.24}$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}(x) = \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\tilde{S}_k(x) + \frac{d}{dx}\tilde{P}_2(x).$$

Для $n \in [2^N,\, 2^{N+1})$ положим

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{d}{dx}\tilde{S}_k(x) + \frac{d}{dx}\tilde{P}_2(x).$$

Из неравенства (4.24) следует оценка

$$|\tilde{f}(x) - Q_n(x)| \leq C\sum_{k=N}^{\infty}(|\sin x| + \frac{1}{2^k})^{\rho-1}2^{-k(\rho+1)}.$$

Если $|\sin x| \leq 1/n$, то левая часть не превосходит $C_\rho n^{-2\rho}$, если же $|\sin x| >$ $> 1/n$, то $|\sin x| > 2^{-k}$ для $\forall k \geq N+1$. В этом случае

$$|\tilde{f}(x) - Q_n(x)| \leq C\sum_{k=N}^{\infty}\frac{|\sin x|^{\rho-1}}{2^{k(\rho+1)}} \leq \tilde{C}\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}.$$

Лемма доказана.

Следствие 4.1. *Благодаря* (4.21) *для функции* $R_0(x)$ *выполняются условия леммы 4.5. Поэтому существует последовательность тригонометрических полиномов* $T_n^0(x)$ *таких, что*

$$|\tilde{R}_0(x) - T_n^0(x| \leq C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}.$$

Приведем одну из основных лемм работы [17], на которой базируется доказательство теоремы 1.6 (см. неравенство (1.9)).

Лемма 4.6. *Любая функция* $f \in W^r_\infty$, r *— целое, с условием* $f^{(\nu)}(\pm 1) =$ $= 0$ *при* $\nu \leq \frac{r-2}{2}$ *представима в виде*

$$f(\cos x) = (-\sin x)^r I_r(f^{(r)}(\cos t))(x) + \sin^{r-1} x g_1(x), \tag{4.25}$$

где $g_1 \in \gamma_r W_\infty^{r+1}$ *при некотором* γ_r.

Можно считать, что граничные условия для функции $f_r(x)$ выполнены за счет специально выбранного многочлена $P(x)$ в представлении (4.2). Так как операторы $S_{\rho_{-1}}(f)$ и $S_{\rho_1}(f)$ отображают алгебраические многочлены в многочлены, то выбор многочлена $P(x)$ не влияет на оценку приближения.

4.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 4.1. В силу равенства (4.8) для любой функции $f \in W_p^r$ и любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени $n \geq r-1$ имеет место равенство

$$|S_{\rho_{-1}}(f_r)(x) - P_n(x)|\sqrt{1-x^2} = |[S_{\rho_{-1}}(f_r)(\cos t) - P_n(\cos t)]\sin t| =$$

$$= |C(f_r(\cos t))(t) - T_{n+1}(t)|, \tag{4.26}$$

где $T_{n+1}(t)$ — нечетный тригонометрический полином степени не выше n. Равенство (4.26) редуцирует задачу о взвешенной аппроксимации сингулярного интеграла $S_{\rho_{-1}}(f_r)$ алгебраическими многочленами к задаче о поточечной аппроксимации периодической функции $C(f_r(\cos t))(t)$ тригонометрическими полиномами. Суперпозицию $f_r(\cos t)$ представим в виде

$$f_r(\cos x) = \sin^m x S_m(x) + R_m(x), \tag{4.27}$$

где

$$S_m(x) = \int_0^\pi [D_r(u-x) + (-1)^m D_r(u+x)] \sin^\rho u f(\cos u) du, \tag{4.28}$$

$$m = [r], \quad \rho = r - [r].$$

Переходя к сопряженным функциям и используя лемму 4.1, получаем

$$C(f_r(\cos t))(x) = \sin^m x C(S_m)(x) + C(R_m)(x) + Q_m(x), \tag{4.29}$$

где

$$C(S_m)(x) = \int_0^\pi [-\tilde{D}_r(u-x) + (-1)^m \tilde{D}_r(u+x)] \sin^\rho u f(\cos u) du,$$

а $Q_m(x)$ — тригонометрический полином степени не выше m. Снова применяя лемму 4.1 и равенства

$$\frac{d}{dx} f_r(\cos x) = -f_{r-1}(\cos x) \sin x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} C(S_m)(x) = -C(S_{m-1})(x),$$

найдем рекуррентную зависимость для $C(R_m)$:

$$\frac{d}{dx} C(R_m)(x) = -\sin x C(R_{m-1})(x) - m \cos x \sin^{m-1} x C(S_m)(x) + T_m(x), \tag{4.30}$$

где $T_m(x)$ — тригонометрический полином степени не выше m.

Аппроксимируем теперь каждое слагаемое правой части равенства (4.29) нечетным тригонометрическим полиномом. Функцию $\sin^m x C(S_m)(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $\sin^m x Q_n^m(x)$, где

$$Q_n^m(x) = \int_0^\pi [-P_n(u-x)) + (-1)^m P_n(u+x)] \sin^\rho u f(\cos u) du,$$

а $P_n(x) = P_n^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-1$ наилучшего L_1-приближения ядра $\tilde{D}_r(x)$, т.е.

$$||\tilde{D}_r(x) - P_n^r(x)||_1 = \frac{\tilde{K}_r}{n^r}. \tag{4.31}$$

Лемма 4.7. *Для любого* $r = m + \rho, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \rho \in (0,1]$, *и* $x \in (0,\pi)$ *имеет место неравенство*

$$|C(S_m)(x) - Q_n^m(x)| \le \frac{\tilde{K}_r \sin^\rho x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{\rho-1}, \tag{4.32}$$

где C — некоторая константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что для всех $x \in (0, \pi)$

$$|C(S_m)(x) - Q_n^m(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r \sin^\rho x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} \sin^{\rho-1} x, \tag{4.33}$$

$$|C(S_m)(x) - Q_n^m(x)| \leq | \int_0^\pi \Big[-\tilde{D}_r(u-x) + P_n(u-x) +$$

$$+(-1)^m(\tilde{D}_r(u+x) - P_n(u+x))\Big] \sin^\rho u f(\cos u) du| \leq \int_0^\pi |\tilde{D}_r(u-x) -$$

$$-P_n(u-x)| \sin^\rho u \, du + \int_0^\pi |\tilde{D}_r(u+x) - P_n(u+x)| \sin^\rho u \, du := I_1 + I_2.$$

Используя неравенство (2.6) и равенство (4.31), оценим интеграл I_1 :

$$I_1 \leq \sin^\rho x \int_0^\pi |\tilde{D}_r(u-x) - P_n(u-x)| du +$$

$$+2 \sin^{\rho-1} x \int_0^\pi |\tilde{D}_r(u-x) - P_n(u-x)| \sin \frac{|u-x|}{2} du \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{K}_r \sin^\rho x}{n^r} + 2 \sin^{\rho-1} x \int_0^{2\pi} |\tilde{D}_r(u) \sin \frac{u}{2} - P_n(u) \sin \frac{u}{2}| du. \tag{4.34}$$

Многочлен $P_n(u) \sin \frac{u}{2}$ полуцелого порядка $n - 1/2$ интерполирует [43] функцию $\tilde{D}_r(u) \sin \frac{u}{2}$ в $2n$ равноотстоящих точках $\frac{\gamma_r}{n} + \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,$ $2n-1$, где $\gamma_r = 0$, если $r \in (0, 1/2]$, а для $r > 1/2$ числа γ_r определены при формулировки теоремы 1. Так как $\tilde{D}_r(u) \sin \frac{u}{2}$ принадлежит классу $M\hat{W}^{m+1} H_1^\rho$, то в силу неравенства (2.20)

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{D}_r(u) \sin \frac{u}{2} - P_n(u) \sin \frac{u}{2}| du \leq \frac{C \ln n}{n^{m+1+\rho}} = \frac{C \ln n}{n^{r+1}}. \tag{4.35}$$

Из неравенств (4.34) и (4.35) получаем

$$I_1 \leq \frac{\tilde{K}_r \sin^\rho x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} \sin^{\rho-1} x, \quad x \in (0, \pi). \tag{4.36}$$

Чтобы получить оценку интеграла I_2, применим неравенство (2.11):

$$I_2 < \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1}x\int_0^{\pi}|\tilde{D}_r(u+x)-P_n(u+x)|\sin\frac{u+x}{2}du \le$$

$$\le \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1}x\int_0^{2\pi}|\tilde{D}_r(u)\sin\frac{u}{2}-P_n(u)\sin\frac{u}{2}|du \le \frac{C\ln n}{n^{r+1}}\sin^{\rho-1}x. \quad (4.37)$$

Из соотношений (4.36), (4.37) следует неравенство (4.33).

А теперь докажем, что

$$|C(S_m)(x)-Q_n^m(x)| \le \frac{\tilde{K}_r\sin^{\rho}x}{n^r}+\frac{C\ln n}{n^{r+\rho}}, \quad x\in(0,\pi). \quad (4.38)$$

Как и в первом случае, начинаем с неравенства

$$|C(S)_m(x)-Q_n^m(x)| \le I_1+I_2.$$

Интеграл I_1 оценим, используя неравенство (2.10):

$$I_1 \le \sin^{\rho}x\int_0^{\pi}|\tilde{D}_r(u-x)-P_n(u-x)|du+$$

$$+2^{\rho}\int_0^{\pi}|\tilde{D}_r(u-x)-P_n(u-x)|\sin^{\rho}\frac{|u-x|}{2}du \le$$

$$\le \frac{\tilde{K}_r\sin^{\rho}x}{n^r}+2^{\rho}\int_0^{2\pi}|\tilde{D}_r(u)-P_n(u)|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du \le$$

$$\le \frac{\tilde{K}_r\sin^{\rho}x}{n^r}+2^{\rho}\{\int_{u:\sin u/2\le 1/n}|\tilde{D}_r(u)-P_n(u)|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du+$$

$$+\int_{u:\sin u/2>1/n}|\tilde{D}_r(u)-P_n(u)|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du\} \le \frac{\tilde{K}_r\sin^{\rho}x}{n^r}+\frac{2^{\rho}\tilde{K}_r}{n^{r+\rho}}+$$

$$+2^{\rho}n^{1-\rho}\int_0^{2\pi}|\tilde{D}_r(u)-P_n(u)|\sin\frac{u}{2}du \le \frac{\tilde{K}_r\sin^{\rho}x}{n^r}+\frac{C\ln n}{n^{r+\rho}}, \quad x\in(0,\pi). \quad (4.39)$$

Чтобы оценить интеграл I_2, применим неравенство (2.12):

$$I_2 < 2\int_0^{\pi} |\tilde{D}_r(u+x) - P_n(u+x)| \sin^{\rho}\frac{u+x}{2} du \leq$$

$$\leq 2\int_0^{2\pi} |D_r(u) - P_n(u)| \sin^{\rho}\frac{u}{2} du \leq \frac{C\ln n}{n^{r+\rho}}. \tag{4.40}$$

Из неравенств (4.39),(4.40) следует (4.38), а из неравенств (4.33) и (4.38) следует (4.32).

Лемма 4.7. доказана.

Замечание 4.3. Если число r — натуральное, то $r = m$ и нетрудно видеть, что

$$C(S_m)(x) = (-1)^m \tilde{I}_m(f(\cos t))(x)$$

и в силу неравенства (4.14)

$$\tilde{E}_n(C(R_1))_\infty \leq \frac{\pi \tilde{K}_1}{2n(n-1)}, \tag{4.41}$$

так как почти всюду колебание функции $f(\cos t)$ не превышает 2.

Лемма 4.8. *Для любого $\rho \in (0,1]$ существует последовательность $T_n^m(x)$ нечетных тригонометрических полиномов степени не выше $n \geq$ $\geq m$ таких, что*

$$|C(R_m)(x) - T_n^m(x)| \leq C_m \frac{\ln n(|\sin x| + 1/n)^{m+\rho-1}}{n^{m+\rho+1}}. \tag{4.42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $m = 0$ лемма 4.8 совпадает со следствием из леммы 4.5 (см. следствие 4.1)). Предположим, что лемма доказана для натурального $k \in [0, m)$, докажем ее для индекса $k+1$. Используя равенство (4.30) для $C(R_{k+1})$:

$$\frac{d}{dx}C(R_{k+1})(x) = -\sin x C(R_k)(x) - (k+1)\cos x \sin^k x C(S_{k+1})(x) + T_{k+1}(x),$$

предположение и лемму 4.7, построим последовательность тригонометрических полиномов $P_n^k(x)$ таких, что

$$|\frac{d}{dx}C(R_{k+1})(x) - P_n^k(x)| \leq C_{k+1}\frac{\ln n(|\sin x| + 1/n)^{k+\rho}}{n^{k+\rho+1}}.$$

Таким образом, для функции $C(R_{k+1})$ выполняется условие леммы 4.4, следовательно, существует последовательность $T_n^{k+1}(x)$ нечетных тригонометрических полиномов, для которых выполняется неравенство (4.42). Лемма доказана.

Из лемм 4.7, 4.8 вытекает существование нечетного тригонометрического полинома $T_{n+1}(x)$ такого, что

$$|C(f_r(\cos t))(x) - T_{n+1}(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r |\sin x|^r}{n^r} + C_r \left(\frac{\ln n(|\sin x| + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}} \right), \tag{4.43}$$

что вместе с равенством (4.26) обеспечивает справедливость теоремы 4.1.

Замечание 4.4. В случае целых r, т.е. когда $\rho = 0, \quad r = m$ в правой части неравенства (4.42) $\ln n$ можно убрать.

Действительно, в этом случае

$$C(S_m)(x) = (-1)^m \tilde{I}_m(f(\cos t))(x)$$

и для $m = 2,\ 3,\ \ldots$

$$\frac{d}{dx} C(R_m)(x) = -\sin x C(R_{m-1})(x) -$$

$$-(-1)^m m \cos x \sin^{m-1} x \tilde{I}_m(f(\cos t))(x) + T_m(x), \tag{4.44}$$

а для $m = 1$

$$\frac{d}{dx} C(R_1)(x) = \cos x \tilde{I}_1(f(\cos t))(x) + T_1(x). \tag{4.45}$$

Из (4.45), (4.14) и теоремы Фавара [38] и Ахиезера—Крейна [37], очевидно, следует оценка

$$\tilde{E}_n((R_1))_\infty \leq \frac{\pi \tilde{K}_1}{2n(n-1)},$$

т. е. получаем (4.42) для $r = 1$ без $\ln n$ в правой части. Используя теперь равенство (4.44), замечание 4.4 и лемму 4.4, методом математической индукции получаем (4.42) для любого натурального r без $\ln n$ в правой части.

Из замечаний 4.3 и 4.4 следует уточнение теоремы 4.1.

Теорема 4.4. *Для любой функции* $f \in \hat{W}^r$, $r = 1, 2, \ldots$, *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \geq \geq r + 2$, *такая, что*

$$|f(x)-P_n(x)|\sqrt{1-x^2} \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^r+O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}\right). \quad (4.46)$$

Константу $\tilde{K}_r$ *в правой части неравенства* (4.46) *уменьшить нельзя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (4.46), как уже отмечалось, следует из замечаний 4.3, 4.4. Неулучшаемость константы $\tilde{K}_r$ в (4.46) докажем методом от противного. Предположим, что существует число K такое, что для любого n найдется нечетный тригонометрический полином $T_n^r(x)$ степени не выше $n \geq r-1$ такой, что

$$|\sin^r x\tilde{I}_r(f(\cos t))(x) - T_n^r(x)| \leq \frac{K|\sin x|^r}{n^r}. \quad (4.47)$$

Из неравенства (4.47) следует, что $T_n^r(x) \leq C|\sin x|^r$, и поэтому тригонометрический полином $T_n^r(x)$ можно представить в виде

$$T_n^r(x) = \sin^r xQ_{n-r}^r(x),$$

где $Q_{n-r}^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-r$. Подставляя в (4.47) вместо $T_n^r(x)$ произведение $\sin^r xQ_{n-r}^r(x)$ и сокращая на $|\sin x|^r$, получае для любой функции $f(\cos t)$, колебание которой на отрезке $[-\pi,\pi]$ не больше 2, неравенство

$$|\tilde{I}_r(f(\cos t))(x) - Q_{n-r}^r(x)| \leq \frac{K}{n^r} < \frac{\tilde{K}_r}{n^r}.$$

А этого не может быть, например, для функции $f(\cos t) = \operatorname{sign}\cos nt$. Полученное противоречие опровергает предположение. Теорема 4.4 доказана.

Замечание 4.5. Теорему 4.4 можно также доказать, используя равенство (4.25) и лемму 4.1.

Для этого рассмотрим функции, сопряженные к левой и правой частям равенства (4.25):

$$C(f(\cos t))(x) = (-\sin x)^r\tilde{I}_r(f^{(r)}(\cos t)(x) + \sin^{r-1} x\tilde{g}_1(x) + T_r(x),$$

где $T_r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше r.

Неравенство (4.14) позволяет построить последовательность $T_n^r(x)$ нечетных тригонометрических полиномов степени $n \geq r$ таких, что

$$|C(f(\cos t))(x) - T_n^r(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}|\sin x|^r + O\left(\frac{|\sin x|^{r-1}}{n^{r+1}}\right).$$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $\breve{f} \in \breve{W}_\infty^r$. Тогда $\breve{f} = S_{\rho_1}(f_r)(x)$, где $f_r \in W_\infty^r$, и благодаря равенству (4.9) и лемме 4.1

$$\breve{f}(\cos x) = \sin x C(f_r(\cos t))(x) + T_1(x),$$

где $T_1(x)$ — тригонометрический полином степени не выше 1. Но тогда из неравенства (4.43) следует, что

$$|\breve{f}(\cos x) - T_{n-1}(x)\sin x| \leq \frac{\tilde{K}_r|\sin x|^{r+1}}{n^r} + C_r\left(\frac{\ln n(|\sin x| + 1/n)^r}{n^{r+1}}\right). \tag{4.48}$$

Так как $T_{n-1}(x)\sin x$ — четный тригонометрический полином, то из последнего неравенства следует утверждение теоремы 4.2.

Соображения, которые использовались при доказательстве теоремы 4.4, позволяют сделать следующее заключение.

Теорема 4.5. *Для любой функции $\breve{f} \in \breve{W}_\infty^r$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $n \geq r+1$, такая, что*

$$|\breve{f}(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} + C_r\left(\frac{(\sqrt{1-x^2} + 1/n)^r}{n^{r+1}}\right). \tag{4.49}$$

Константу $\tilde{K}_r$ в правой части неравенства (4.49) *уменьшить нельзя.*

Доказательство теоремы 4.3. Пусть $\overline{f} \in \overline{W}_\infty^r$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда $\overline{f} = S_{\rho_0}(f_r)(x)$, где $f_r \in W_\infty^r$, и $f_r^{(\nu)}(\pm 1) = 0$, $\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1$. В силу равенства (4.11) задачу о приближении функции $\overline{f}$ алгебраическими многочленами сводим к задаче о поточечном приближении тригонометрическими полиномами четной функции $F_r(x) := = C(f_r(\cos t)\,\mathrm{sign}\sin t)(x)$:

$$|\overline{f}(x) - P_n(x)| = |\overline{f}(\cos t) - P_n(\cos t)| =$$

$$= |C(f_r(\cos u)\operatorname{sign}\sin u)(t) - P_n(\cos t)| = |F_r(t) - P_n(\cos t)|. \qquad (4.50)$$

Для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ функция $F_r(x)$ абсолютно непрерывна и, в силу леммы 4.1

$$\frac{d}{dx}F_r(x) = -\sin x F_{r-1}(x) + T_{1,r}(x), \quad r = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (4.51)$$

где $F_0(x) = C(f(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x)$, $T_{1,r}(x)$ — тригонометрический многочлен степени не выше 1. Положим

$$F_r(x) = (-\sin x)^r I_r(F_0)(x) + \overline{R}_r(x). \qquad (4.52)$$

Так как $I_r(F_0)(x) = \tilde{I}_r(f(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x)$, то в силу (4.14)

$$\tilde{E}_n(I_r(F_0))_\infty \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}. \qquad (4.53)$$

Методом математической индукции установим существование тригонометрического полинома $T_{n,r}(x)$ такого, что

$$|\overline{R}_r(x) - T_{n,r}(x)| \le C_r(\frac{|\sin x|^{r-1}}{n^{r+1}} + 1/n^{2r}). \qquad (4.54)$$

Для $r = 1$ $\overline{R}_1(x) = F_1(x) + \sin x I_1(F_0)(x)$ и благодаря равенству (4.51)

$$\frac{d}{dx}\overline{R}_1(x) = \cos x I_1(F_0)(x) + T_{1,1}(x).$$

Снова применяя оценку (4.14), для $n \ge 2$ найдем, что

$$\tilde{E}_n(\frac{d}{dx}\overline{R}_1)_\infty \le \frac{\tilde{K}_1}{n-1},$$

а тогда очевидно существование тригонометрического полинома $T_{n,1}(x)$ такого, что

$$|\overline{R}_1(x) - T_{n,1}(x)| \le C/n^2.$$

Предположим теперь, что для $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ r-1\}$ существует тригонометрический полином $T_{n,m}(x)$ такой, что имеет место неравенство (4.54). Из представления (4.52) и равенства (4.51) следует

$$\frac{d}{dx}\overline{R}_{m+1}(x) = -\sin x\overline{R}_m(x)+(m+1)(-sinx)^m\cos xI_{m+1}(F_0)(x)+T_{1,m+1}(x).$$

Используя теперь предположение, оценку (4.14), построим тригонометрический полином $T_n(x)$ такой, что

$$\left|\frac{d}{dx}\overline{R}_{m+1}(x) - T_n(x)\right| \leq C_m(\frac{|\sin x|^m}{n^{m+1}} + 1/n^{2m+1}).$$

Из последнего неравенства и леммы 4.4 следует существование тригонометрического полинома $T_{n,m+1}(x)$, для которого выполняется неравенство (4.54) для индекса $m+1$. В силу принципа математической индукции неравенство (4.54) имеет место для всех натуральных чисел от 1 до r. Из равенства (4.52), оценок (4.53) и (4.54) следует существование алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени не выше n такого, что

$$|F_r(x) - P_n(\cos x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}|\sin x|^r + C_r\frac{(|\sin x| + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}. \qquad (4.55)$$

Неравенство 4.55 благодаря равенству (4.50) эквивалентно неравенству (4.6).

Точность константы $\tilde{K}_r$ в неравенстве (4.55) следует из точности оценки (4.53). Неравенство (4.53) обращается в равенство для функции $f(\cos t) = \operatorname{sign}\sin nt \operatorname{sign}\sin t$.

Теорема 4.3 доказана.

Список литературы

1. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10. – С. 95-322.

2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

3. *Дзядык В.К.* О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – Т. 22, № 3. – С. 337-354.

4. *Freud G.* Uber dis apprpximation reelen stetiger Funktionen durch gewohnliche Polinome// Math. Ann., 1959. – V. 137, N 1. – P. 17-25.

5. *Тригуб Р.М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – Т. 26, № 2. – С. 261-280.

6. *Брудный Ю.А.* Обобщение одной теоремы А.Ф. Тимана// Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 6. – С. 1237-1240.

7. *Devore R.A.* Pointwise approximation by polynomials and splines// Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. — С. 132-141.

8. *Dahlhaus H.* Pointwise approximation by algebraic polynomials// J. appr. Theory. – 1989. – V. 57, N 3. – P. 241-245.

9. *Жук В.В., Натансон Г.И.* О приближении функций, заданных на отрезке// Методы вычислений. – Изд. С.-Петербургского ун-та. – 1995. – Вып. 17. – С. 105-121.

10. *Теляковский С.А.* Две теоремы об аппроксимации функций алгебраическими многочленами// Матем. сб. – 1966. – Т. 70, № 2. – С. 252-265.

11. *Гопенгауз И.Е.* К теореме А.Ф.Тимана о приближении функций многочленами на отрезке// Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 163-172.

12. *Корнейчук Н.П., Половина А.И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке// ДАН СССР. – 1966. – Т. 166, № 2. – С. 281-283.

13. *Корнейчук Н.П., Половина А.И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами// Мат. заметки. – 1971. – Т. 9, № 4. – С. 441-447.

14. *Корнейчук Н.П., Половина А.И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами// Укр. мат. журн. – 1972. – Т. 24, № 3. – С. 328-340.

15. *Лигун А.А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами// Изв. вузов. Математика. – 1980. – **4**. – С. 53-60.

16. *Темляков В.Н.* Приближение функций из класса W^1_∞ алгебраическими многочленами// Мат. заметки. – 1981. – Т. 29, № 4. – С. 597-602.

17. *Тригуб Р.М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке// Мат. заметки. – 1993. – Т. 54, № 6. – С. 113-121.

18. *Моторный В.П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 5. – С. 603-613.

19. *Моторный В.П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 7. – С. 940-951.

20. *Шалашова Л.Я.* Аппроксимационная теорема А.Ф.Тимана для функций, имеющих непрерывную производную дробного порядка// ДАН СССР. – 1969. – Т. 188, № 6. – С. 1248-1249.

21. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. — Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 256 с.

22. *Гаркави А.Л.* О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – Т. 24. – С. 103-128.

23. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – Т. 17. – С. 933-950.

24. *Покровский А.В.* Об одной теореме А.Ф.Тимана// Фукц. анализ и его прим. – 1967. – Т. 1, № 3. – С. 93-94.

25. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

26. *Моторный В.П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L^p// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т. 38, № 4. – С. 874-899.

27. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

28. *Бернштейн Н.С.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 2. – 627 с.

29. *Моторний В.П.* Наближення функцій алгебраїчними многочленами з врахуванням положення точки на відрізку// Допов. НАН України. – 2001. – **3**. – С. 19-23.

30. *Моторный В.П.* О точных оценках поточечного приближения алгебраическими многочленами классов $W^r H^\omega$// Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 6. – С. 783-799.

31. *Бокша А.Н., Русак В.Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов// International conference on approximation theory, Kaluga. – 1996. – ABSTRACTS. V. 1. – P. 38-39.

32. *Пекарский А.А.* Соотношения между наилучшими рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями в равномерной метрике// International conference on approximation theory, Kaluga. – 1996. – ABSTRACTS. V. 2. – P. 168-169.

33. *Бокша А.Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с выпуклой плотностью// Тези доповідей, 2-а школа "Ряди Фур'є: Теорія і застосування". – Київ, 1997. – С. 24-25.

34. *Моторная О.В.* О наилучшем приближении многочленами некоторых классов функций// Вісник Дніпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – Дніпропетровськ, 1998. – Вип. 3. – С. 91-100.

35. *Моторный В.П.* Об асимптотически точных оценках поточечного приближения алгебраическими многочленами некоторых классов функций// Докл. РАН. – 2000. – Т. 370, № 3. – С. 313-315.

36. *Моторный В.П.* Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. . – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331-345.

37. *Ахиезер Н.И., Крейн М.Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций// Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 15. – С. 107-112.

38. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Eulera la demonstration de quelques proprietes des integrales des fonctions periodqiues ou presque-periodqiues// Matematisk Tidskrift, Kobenhavn. B.H., 1936. – **4**. – P. 81-94.

39. *Никольский С.М.* Приближение фкнкций тригонометрическими полиномами в среднем// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 9. – С. 207-256.

40. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 197-206.

41. *Сунь-Юншень.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**. – С. 143-153.

42. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – Т. 23. – С. 933-950.

43. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер// Мат. заметки. – 1974. – Т. 16, № 5. – С. 691-701.

44. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

45. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

46. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.

47. *Моторный В.П.* Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке// Труды МИРАН. – 2001. – Т. 232. – С. 268-285.

48. *Моторный В.П* К вопросу о приближении функций алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке// Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 8. – С. 1087-1098.

ГЛАВА 2

НЕРАВЕСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Введение

Неравенства для норм промежуточных производных функций одной переменной важны для многих областей математики (математический анализ, теория аппроксимации, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория некорректных задач, теория оптимальных алгоритмов и др.). Особенно интересными являются неулучшаемые неравенства такого типа по той причине, что именно они имеют наиболее яркие приложения. На протяжении более чем 100 лет усилия многих математиков были направлены на получение таких неравенств. Большинство достижений в этом направлении требовало создания новых методов исследования, и как сами неравенства, так и методы их доказательства, находили важные приложения.

Одним из наиболее ярких достижений в этой проблематике является неравенство Колмогорова [24]. По этой причине неравенства для промежуточных производных и их многомерные аналоги называют неравенствами типа Колмогорова. Неравенства типа Колмогорова для функций многих переменных имеют большое значение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории интерполяции операторов, теоремах вложения классов гладких функций.

К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной. С соответствующими результатами можно ознакомиться, например, по монографиям [7, 23, 29, 38] и обзорам [3, 4, 5]. Случай функций многих переменных изучен в значительно меньшей степени. По поводу известных точных неравенств типа Колмогорова сошлемся на работы [6, 8, 22, 25, 34, 36, 37].

В ряде вопросов математического анализа и его приложений возникает потребность наряду с производными и интегралами целых порядков рассматривать также производные и интегралы дробных порядков. Дробными производными интересовались еще Лейбниц и Эйлер. Лиувилль, Абель, Риман, Летников, Вейль, Адамар и многие другие известные математики оказали влияние на развитие дробного интегродифференцирования. Дробное исчисление имеет богатое содержание, обусловленное взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др. Дробное исчисление интенсивно развивается, о чем свидетельствует большой поток публикаций. В данной работе существенно использована фундаментальная монография [31], в которой можно найти большинство известных определений и фактов, относящихся к дробному интегродифференцированию. Кроме математических, дробное исчисление имеет важные приложения и в других областях науки, например в физике, химии (см., например, [1, 30]).

Следует отметить, что точное решение экстремальных задач анализа и, в частности, теории аппроксимации, связанных с дробными производными и интегралами, сталкивается со значительными трудностями. По этой причине известно совсем немного точных неравенств типа Колмогорова для дробных производных функций одной и многих переменных (см. [2, 20, 21, 27]). Ряд точных неравенств для дробных производных функций одной и многих переменных получен только в последнее время, главным образом автором данной главы, его коллегами и учениками. Эти результаты, а также некоторые известные ранее в этом направлении здесь и изложены.

§2 посвящен точным неравенствам типа Колмогорова для дробных производных в смысле Маршо [28] функций из пространств Гельдера, которые задаются с помощью фиксированного модуля непрерывности. Рассмотрены случаи функций, заданных на всей действительной оси, полуоси или отрезке. Типичный пример приведенных здесь результатов дает

Теорема 2.1. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,\ 1)$ таковы, что*

$$\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du < \infty. \tag{1.1}$$

Тогда для любой функции $x \in H^{\omega}(R)$ производные $D^{\alpha}_{\pm}x$ принадлежат пространству $C(R)$ и справедливы точные неравенства

$$\left\| D^{\alpha}_{\pm}x \right\|_{C(R)} \le A_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\min\{2\left\| x \right\|_{C(R)}, \left\| x \right\|_{H^{\omega}(R)} \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Результаты данного параграфа получены В.Ф. Бабенко и М.С. Чуриловой [14].

§3 посвящен неравенствам типа Колмогорова для L_p-норм дробных производных функций, заданных на действительной оси или полуоси. Пример полученных здесь результатов дает

Теорема 3.2. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие* (1.1). *Тогда для любой функции $x \in H^{\omega}_p(R_+)$ и любого $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\left\| D^{\alpha}_{-}x \right\|_{L_p(R_+)} \le \left\| D^{\alpha}_{-,h}x \right\|_{L_p(R_+)} + A_{\alpha} \left\| x \right\|_{H^{\omega}_p(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du.$$

В случае, когда $p = 1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ является локально абсолютно непрерывной функцией, это неравенство является точным.

В этой теореме $D^{\alpha}_{-,h}x$ — так называемая усеченная дробная производная Маршо. Результаты §3 также получены В.Ф. Бабенко и М.С. Чуриловой [14].

В §4 приведены неравенства типа Колмогорова, оценивающие равномерную норму дробных производных функций класса $L^1_{\infty,s}$ через равномерную норму самой функции и L_s-норму ее производной. Здесь также рассмотрены случаи функций, заданных на оси, полуоси и отрезке. Типичный пример дает

Теорема 4.1. *Пусть $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. Для произвольной функции $x \in L^1_{\infty,s}(R)$ при любом $h > 0$ справедливы точные неравенства*

$$\left\| D^{\alpha}_{\pm}x \right\|_{C(R)} \le \left\| D^{\alpha}_{\pm,h}x \right\|_{C(R)} + \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^{\alpha}} - \frac{1}{h^{\alpha}} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}}}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| x' \right\|_{L_s(R)}. \tag{1.2}$$

По поводу результатов данного параграфа см. [18, 39].

В §5 приведены некоторые неравенства типа Колмогорова, содержащие производные порядка выше первого. Это принадлежащие Гейсбергу [21] неравенства, оценивающее норму дробной производной через равномерную норму функции и ее второй производной, а также полученные В.Ф. Бабенко и М.С. Чуриловой [15, 19] неравенства для дробных производных по Риссу. Кроме того, в п. 5.3 приведены точные неравенства, оценивающие равномерную норму производных Маршо порядка $\alpha < k$, $k \in N$, через равномерную норму усеченной производной и L_s-норму k-й производной данной функции. Эти неравенства также полученыВ.Ф. Бабенко и М.С. Чуриловой.

В §6 приведены неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка функций многих переменных. В п. 6.1 речь идет о неравенствах типа Колмогорова для норм смешанных производных дробного порядка функций многих переменных. Соответствующие результаты получены В.Ф. Бабенко, С.А. Пичуговым [11], В.Ф. Бабенко, С.А. Пичуговым и Н.В. Парфинович [12]. В п. 6.2 приведены неравенства типа Колмогорова для гиперсингулярных интегралов со знакопостоянной характеристикой. Такого рода интегралы позволяют, в частности, с единой точки зрения рассмотреть производные по направлению и производные Рисса функций многих переменных. Результаты этого пункта получены В.Ф. Бабенко и М.С. Чуриловой [18]. По поводу некоторых других точных неравенств для дробных производных функций многих переменных, примыкающих к изложенным, см. [9, 10].

В §7 приведены некоторые приложения изложенных в п. 6.1 результатов. К таким приложениям относятся, прежде всего, приложения к решению задачи Стечкина об аппроксимации неограниченных операторов ограниченными. Эта задача возникла в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 г. (см. [33]) и в дальнейшем активно изучалась его учениками и другими математиками. Обзор имеющихся в этом направлении результатов можно найти в [3, 4]. В данном параграфе мы ограничиваемся приложениями, касающимися задачи об аппроксимации неограниченного оператора смешанного дифференцирования дробного порядка ограниченными операторами. Соответствующие результаты получены В.Ф. Бабенко, С.А. Пичуговым и Н.В. Парфинович [12]. Аналогичные приложения имеют и многие другие изложенные в данной главе результаты.

К числу других приложений неравенств типа Колмогорова относятся решения задачи о необходимых и достаточных условиях существования функции рассматриваемого класса, имеющей заданные числа нормами производных соответствующего порядка. В [24] Колмогоров решил эту задачу для троек чисел и класса $L^r_{\infty,\infty}(R)$. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [7]. В п. 7.2 приведено решение следующей задачи типа Колмогорова, полученное В.Ф. Бабенко, С.А. Пичуговым и Н.В. Парфинович [12].

Требуется найти необходимые и достаточные условия на числа

$$M_0,\ M_\alpha,\ M_{\omega_1},\ ...,\ M_{\omega_m},$$

которые обеспечивают существование функции $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}(R^m)$ такой, что

$$\|x\|_{C(R^m)} = M_0,\ \|D^\alpha_\varepsilon x\|_{C(R^m)} = M_\alpha,\ \|x\|_{H^{\omega_j}(R^m)} = M_{\omega_j}\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

§ 2. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций из пространств Гельдера

В данном параграфе приведен ряд неравенств типа Колмогорова, которые оценивают сверху равномерные нормы дробных производных в смысле Маршо функций, определенных на всей действительной оси, полуоси или конечном отрезке, через равномерные нормы самих функций и их нормы в гельдеровых пространствах. При этом использованы следующие определения и обозначения.

Пусть G есть одно из множеств R, R_+ или $[a, b]$. Через $C(G)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $x : G \to R$ с нормой

$$\|x\|_{C(G)} := \sup_{t\in G} |x(t)|.$$

Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, т.е. неубывающая на R_+, непрерывная и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Через $H^\omega(G)$ обозначим множество функций $x \in C(G)$, для которых

$$\|x\|_{H^\omega(G)} := \sup_{\substack{u,v\in G\\ u\neq v}} \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega(|u - v|)} < \infty.$$

Если $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \beta \le 1$, то вместо $H^\omega(G)$ будем писать $H^\beta(G)$.

Для заданного модуля непрерывности ω через $UH^\omega(G)$ обозначим единичный шар в пространстве $H^\omega(G)$, т.е. множество функций $x \in C(G)$ таких, что $\|x\|_{H^\omega(G)} \le 1$.

Будем рассматривать функцию $\Omega\left(\delta, UH^{\omega}(G)\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, UH^{\omega}(G)\right) := \sup_{\substack{x \in UH^{\omega}(G),\\ \|x\|_{C(G)} \le \delta}} \left\|D_{\pm}^{\alpha} x\right\|_{C(G)}.$$

Эта функция называется модулем непрерывности оператора $D_{\pm}^{\alpha}$ на множестве $UH^{\omega}(G)$.

2.1. Неравенства для функций, заданных на действительной оси

Производные $D_{\pm}^{\alpha} x$ в смысле Маршо для функций $x : R \to R$ определяются следующим образом:

$$(D_{\pm}^{\alpha} x)(u) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Ниже для сокращения записей полагаем $A_{\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Теорема 2.1. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что*

$$\int_0^1 \frac{\omega\left(u\right)}{u^{1+\alpha}} du < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда для любой функции $x \in H^{\omega}\left(R\right)$ производные $D_{\pm}^{\alpha} x$ принадлежат пространству $C(R)$ и справедливы точные неравенства

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha} x\right\|_{C(R)} \le A_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\min\{2\left\|x\right\|_{C(R)}, \left\|x\right\|_{H^{\omega}(R)} \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $u \in R$ имеем

$$\left|(D_{\pm}^{\alpha} x)(u)\right| = A_{\alpha} \left| \int_0^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt \right| \le A_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\left|x(u) - x(u \mp t)\right|}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{2.3}$$

Так как $x \in H^{\omega}(R)$, то имеют место неравенства

$$\left|x(u) - x(u \mp t)\right| \le 2\left\|x\right\|_{C(R)}$$

и

$$\left|x(u) - x(u \mp t)\right| \le \left\|x\right\|_{H^{\omega}(R)} \omega(|t|),$$

так что

$$|x(u) - x(u \mp t)| \leq \min\{2\,\|x\|_{C(R)}\,, \|x\|_{H^\omega(R)}\,\omega(|t|)\}. \qquad (2.4)$$

Сопоставляя (2.3) и (2.4), получаем, что для любого u

$$\left|(D^\alpha_\pm x)(u)\right| \leq A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\,\|x\|_{C(R)}\,, \|x\|_{H^\omega(R)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt. \qquad (2.5)$$

Покажем, что если $x \in H^\omega\,(R)$ и выполнено условие (2.1), то производная $(D^\alpha_- x)(u)$ непрерывно зависит от u.

Применяя неравенство (2.5) к разности $x(u) - x(u+\delta)$, $\delta \in R$, получаем

$$|(D^\alpha_\pm x)(u) - (D^\alpha_\pm x)(u+\delta)| \leq A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\omega(x;|\delta|), 2\,\|x\|_{H^\omega(R)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Отметим, что при $\delta \to 0$ семейство функций

$$\frac{\min\{2\omega(x,|\delta|), 2\,\|x\|_{H^\omega(R)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}$$

равномерно стремится к нулю на любом множестве $t \in [\sigma, \infty)$, $\sigma > 0$, и интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\min\{2\omega(x;|\delta|), 2\,\|x\|_{H^\omega(R)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt$$

равномерно сходится для $|\delta| \leq 1$.

Следовательно,

$$|(D^\alpha_\pm x)(u) - (D^\alpha_\pm x)(u+\delta)| \to 0, \ |\delta| \to 0,$$

что доказывает непрерывность $(D^\alpha_\pm x)(u)$ для всех $u \in R$.

Теперь из соотношения (2.5) вытекает неравенство (2.2).

Докажем точность неравенства (2.2). Для любого $h > 0$ положим

$$x_h(u) = \begin{cases} \omega\,(|u|) - \frac{\omega(h)}{2}, & |u| \leq h; \\ \frac{\omega(h)}{2}, & |u| > h. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Для функции x_h имеем

$$\|x_h\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{\omega(h)}{2}, \ \ \|x_h\|_{H^\omega(\mathbb{R})} = 1.$$

Кроме того,

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x_h\right\|_{C(R)} \geq \left|\left(D_{\pm}^{\alpha}x_h\right)(0)\right| =$$

$$= A_{\alpha}\left|\int_0^{\infty}\frac{x_h(0)-x_h(\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| = A_{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\min\{\omega(t);\omega(h)\}}{t^{1+\alpha}}dt =$$

$$= A_{\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{\min\{\|x_h\|_{H^{\omega}(\mathbb{R})}\omega(t);2\|x_h\|_{C(\mathbb{R})}\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Точность неравенства (2.2) доказана. Теорема доказана.

Приведем несколько следствий из доказанной теоремы.

Следствие 2.1. *Для любой функции $x \in H^{\omega}(R)$ и любого $h > 0$ справедливы точные неравенства*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x\right\|_{C(R)} \leq A_{\alpha}\left(\|x\|_{H^{\omega}(R)}\int_0^h\frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du + \frac{2\|x\|_{C(R)}}{\alpha h^{\alpha}}\right). \qquad (2.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (2.2) при любом $h > 0$ получаем

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x\right\|_{C(R)} \leq A_{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\min\{2\|x\|_{C(R)},\|x\|_{H^{\omega}(R)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt =$$

$$= A_{\alpha}\left(\int_0^h\frac{\min\{2\|x\|_{C(R)},\|x\|_{H^{\omega}(R)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt + \right.$$

$$\left. + \int_h^{\infty}\frac{\min\{2\|x\|_{C(R)},\|x\|_{H^{\omega}(R)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt\right) =$$

$$= A_{\alpha}\left(\|x\|_{H^{\omega}(R)}\int_0^h\frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du + \frac{2\|x\|_{C(R)}}{\alpha h^{\alpha}}\right)$$

и неравенство (2.7) доказано. Его точность при любом h устанавливается с помощью функции (2.6). Следствие 2.1 доказано.

Отметим, что минимизируя правую часть неравенства (2.7) по $h > 0$, получаем правую часть неравенства (2.2), так что утверждения теоремы 2.1 и следствия 2.1 эквивалентны.

Следствие 2.2. *Пусть* $0 < \alpha < \beta \leq 1$. *Для произвольной функции* $x \in H^{\beta}(R)$ *справедливы точные неравенства*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x\right\|_{C(R)} \leq \frac{A_{\alpha}2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha(1-\frac{\alpha}{\beta})} \|x\|_{C(R)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|_{H^{\beta}(R)}^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Для доказательства следствия 2.2 достаточно при $\omega(t) = t^{\beta}$ вычислить интеграл, стоящий в правой части (2.2).

Через $L_{\infty,\infty}^{1}(R)$ обозначим множество локально абсолютно непрерывных ограниченных функций $x : R \to R$, таких, что $x' \in L_{\infty}(R)$. Как хорошо известно, $x \in L_{\infty,\infty}^{1}(R)$ тогда и только тогда, когда $x \in H^{1}(R)$. Поэтому из следствия 2.2 получаем

Следствие 2.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для произвольной функции* $x \in$ $\in L_{\infty,\infty}^{1}(R)$ *справедливы точные неравенства*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x\right\|_{C(R)} \leq \frac{A_{\alpha}2^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \|x\|_{C(R)}^{1-\alpha} \|x'\|_{L_{\infty}(R)}^{\alpha}.$$

Из теоремы 2.1 и следствия 2.2 непосредственно выводим

Следствие 2.4. *В условиях теоремы 2.1 для любого* $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, UH^{\omega}(R)\right) = A_{\alpha}\int_{0}^{\infty}\frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

В частности, если $0 < \alpha < \beta \leq 1$, *то*

$$\Omega\left(\delta, UH^{\beta}(R)\right) = \frac{A_{\alpha}2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}\delta^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

В заключение данного пункта получим еще одно неравенство, в котором вместо равномерной нормы используем более индивидуальные, чем норма, характеристики функции. На целесообразность получения неравенств типа Колмогорова с такими характеристиками обращал внимание С.Б. Стечкин (см. [35]). В качестве таких характеристик используем равномерные нормы так называемых усеченных производных:

$$(D_{\pm,h}^{\alpha}x)(u) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{h}^{\infty}\frac{x(u)-x(u\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt, \quad h > 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполняется условие* (2.1). *Для любой функции* $x \in H^{\omega}(R)$

и любого $h > 0$ справедливы точные неравенства

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm}x\right\|_{C(R)} \le \left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x\right\|_{C(R)} + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}(R)}\int_0^h \frac{\omega\left(u\right)}{u^{1+\alpha}}du. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого u имеем

$$\left|(D^{\alpha}_{\pm}x)(u)\right| = A_{\alpha}\left|\int_0^h \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}}dt + \int_h^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| \le$$

$$\le A_{\alpha}\left|\int_0^h \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| + A_{\alpha}\left|\int_h^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| \le$$

$$\le A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}(R)}\int_0^h \frac{\omega\left(t\right)}{t^{1+\alpha}}dt + \left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x\right\|_{C(R)},$$

и неравенство (2.8) доказано.

Это неравенство обращается в равенство для функции (2.6). Действительно, мы уже отмечали, что

$$\left\|x_h\right\|_{H^{\omega}(R)} = 1.$$

Кроме того,

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm}x_h\right\|_{C(R)} \ge \left|\left(D^{\alpha}_{\pm}x_h\right)(0)\right| =$$

$$= A_{\alpha}\int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt + A_{\alpha}\omega(h)\int_h^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt =$$

$$= A_{\alpha}\left\|x_h\right\|_{H^{\omega}(R)}\int_0^h \frac{\omega\left(u\right)}{u^{1+\alpha}}du + \left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x_h\right\|_{C(R)},$$

поскольку

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x_h\right\|_{C(R)} = A_{\alpha}\omega(h)\int_h^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = A_{\alpha}\frac{\omega(h)}{\alpha h^{\alpha}}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x\right\|_{C(R)} \le A_{\alpha}\int_h^{\infty} \frac{\left\|x(u) - x(u \mp t)\right\|_{C(R)}}{t^{1+\alpha}}dt \le$$

$$\leq A_\alpha \int_h^\infty \frac{2\|x\|_{C(R)}}{t^{1+\alpha}} dt = A_\alpha \frac{2\|x\|_{C(R)}}{\alpha h^\alpha}.$$

Поэтому из теоремы 2.2 вытекает следствие 2.1, из которого, как мы уже отмечали, с помощью минимизации по h следует теорема 2.1.

2.2. Неравенства для функций, заданных на полуоси

Правосторонняя производная $D_-^\alpha x$ в смысле Маршо для функций $x : R_+ \to R$ определяется так же, как и для функций, заданных на всей оси:

$$(D_-^\alpha x)(u) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{x(u) - x(u+t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Как и раньше, для сокращения записей полагаем $A_\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Для правосторонней производной функций, заданных на полуоси, совершенно аналогично теореме 2.1 устанавливается

Теорема 2.3. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие* (2.1)*. Тогда для любой функции $x \in H^\omega(R_+)$ производная $D_-^\alpha x \in C(R_+)$ и справедливо точное неравенство*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{C(R_+)} \leq A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\|x\|_{C(R_+)}, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Семейство экстремальных функций определяется в этом случае так: для $h > 0$

$$x_h(u) = \begin{cases} \omega(u) - \frac{\omega(h)}{2}, & 0 \leq u \leq h; \\ \frac{\omega(h)}{2}, & u > h. \end{cases}$$

Очевидно, что для функций $x \in H^\omega(R_+)$ сохраняются также аналоги следствий 2.1 — 2.4.

Аналогом теоремы 2.2 является

Теорема 2.4. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие* (2.1)*. Для любой функции $x \in H^\omega(R_+)$ и любого $h > 0$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{C(R_+)} \leq \left\|D_{-,h}^\alpha x\right\|_{C(R_+)} + A_\alpha \|x\|_{H^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du.$$

Левосторонние производные $D_{0+}^{\alpha}x$ функций, заданных на полуоси, определяются соотношением

$$\left(D_{0+}^{\alpha}x\right)(u) = \frac{x(u)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)u^{\alpha}} + A_{\alpha}\int_0^u \frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}}dt.$$

Для таких производных приведем следующие два утверждения.

Теорема 2.5. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполняется условие* (2.1). *Тогда для любой функции* $x \in$ $\in H^{\omega}\left(R_{+}\right)$ *при любом* $u > 0$ *справедливо точное неравенство*

$$|(D_{0+}^{\alpha}x)(u)| \leq \frac{|x(u)|}{\Gamma\left(1-\alpha\right)u^{\alpha}} + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}(R_{+})}\int_0^u \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) *обращается в равенство для функции вида*

$$x_u(t) = \begin{cases} -\omega\left(u-t\right) + \frac{\omega(u)}{2}, & 0 \leq t \leq u; \\ \frac{\omega(u)}{2}, & t > u. \end{cases}$$

Теорема 2.6. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполняется условие* (2.1). *Для произвольной функции* $x \in$ $\in H^{\omega}\left(R_{+}\right)$ *и произвольной точки* $u > 0$ *справедливо точное неравенство*

$$\left|(D_{0+}^{\alpha}x)(u)\right| \leq \frac{\left\|x\right\|_{C(R_{+})}}{\Gamma(1-\alpha)u^{\alpha}} + A_{\alpha}\int_0^u \frac{\min\{2\left\|x\right\|_{C(R_{+})}, \left\|x\right\|_{H^{\omega}(R_{+})}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt. \tag{2.10}$$

В частности, при любом $h \in (0,u)$

$$\left|(D_{0+}^{\alpha}x)(u)\right| \leq \frac{\left\|x\right\|_{C(R_{+})}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{h^{\alpha}} - \frac{1}{u^{\alpha}}\right) + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}(R_{+})}\int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt. \tag{2.11}$$

Последнее неравенство обращается в равенство для функции вида

$$x_{h,u}(t) = \begin{cases} -\frac{\omega(h)}{2}, & 0 \leq t \leq u-h; \\ -\omega(u-t) + \frac{\omega(h)}{2}, & u-h < t < u; \\ \frac{\omega(h)}{2}, & u \leq t \leq \infty. \end{cases} \tag{2.12}$$

Приведем доказательство только теоремы 2.6.

Неравенство (2.10) устанавливается аналогично неравенству (2.2). А именно, используя определения левосторонней производной и оценки

$$|x(u)-x(t)| \le 2\,\|x\|_{C(R_+)}\,,$$

$$|x(u)-x(t)| \le \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(|u-t|),$$

имеем при любом $u>0$

$$\left|(D^\alpha_{0+}x)(u)\right| \le \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha \int_0^u \frac{\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(u-t)\}}{(u-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha \int_0^u \frac{\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Далее, при любом $h\in(0,u)$

$$\left|(D^\alpha_{0+}x)(u)\right| \le \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha \int_0^h \frac{\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt +$$

$$+A_\alpha \int_h^u \frac{\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Используя для оценки первого интеграла неравенство

$$\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\} \le \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t),$$

а для оценки второго интеграла неравенство

$$\min\{2\,\|x\|_{C(R_+)}\,, \|x\|_{H^\omega(R_+)}\,\omega(t)\} \le 2\,\|x\|_{C(R_+)}\,,$$

получаем

$$\left|(D^\alpha_{0+}x)(u)\right| \le \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha\,\|x\|_{H^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt +$$

$$+2A_\alpha\,\|x\|_{C(R_+)} \int_h^u \frac{dt}{t^{1+\alpha}} =$$

$$= \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{h^\alpha}-\frac{1}{u^\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\,\|x\|_{H^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Неравенство (2.11) доказано.

Для доказательства точности этого неравенства достаточно заметить, что для функции (2.12)

$$\|x_{h,u}\|_{C(R_+)} = \frac{\omega(h)}{2},$$

$$\|x_{h,u}\|_{H^\omega(R_+)} = 1$$

и

$$\left|(D^\alpha_{0+}x_{h,u})(u)\right| = \frac{\omega(h)}{2\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha\omega(h)\int_0^{u-h}\frac{dt}{(u-t)^{1+\alpha}} +$$

$$+A_\alpha\int_{u-h}^{u}\frac{\omega(u-t)}{(u-t)^{1+\alpha}}dt = \frac{\omega(h)}{2\Gamma(1-\alpha)u^\alpha} + A_\alpha\omega(h)\int_h^u\frac{dt}{t^{1+\alpha}} + A_\alpha\int_0^h\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \frac{\|x_{h,u}\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{h^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha}\right) + A_\alpha\|x_{h,u}\|_{H^\omega(R_+)}\int_0^h\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

2.3. Неравенства для функций, заданных на конечном отрезке

Для функций, заданных на отрезке $[a,b]\subset R$, при $u\in(a,b)$ левосторонняя дробная производная Маршо порядка $\alpha\in(0,1)$ функции $x:[a,b]\to R$ определяется равенством

$$\left(D^\alpha_{a+}x\right)(u) = \frac{x(u)}{\Gamma(1-\alpha)(u-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^u\frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}}dt,$$

а правосторонняя — соответственно равенством

$$\left(D^\alpha_{b-}x\right)(u) = \frac{x(u)}{\Gamma(1-\alpha)(b-u)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_u^b\frac{x(u)-x(t)}{(t-u)^{1+\alpha}}dt$$

(если эти интегралы существуют).

Теорема 2.7. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha\in(0,1)$ *таковы, что выполняется условие* (2.1). *Тогда для любой точки* $u\in$ $\in(a,b)$ *и функции* $x\in H^\omega([a,b])$ *справедливы точные неравенства*

$$|(D^{\alpha}_{a+}x)(u)| \leq \frac{|x(u)|}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(u-a\right)^{\alpha}} + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\int_{0}^{u-a}\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

$$|(D^{\alpha}_{b-}x)(u)| \leq \frac{|x(u)|}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(b-u\right)^{\alpha}} + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\int_{0}^{b-u}\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Теорема 2.8. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие (2.1). Тогда для любой точки $u \in \in (a,b)$ и функций $x \in H^{\omega}([a,b])$ справедливы точные неравенства*

$$|(D^{\alpha}_{a+}x)(u)| \leq \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(u-a\right)^{\alpha}} + A_{\alpha}\int_{0}^{u-a}\frac{\min\{2\left\|x\right\|_{C(R_{+})},\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt,$$

$$|(D^{\alpha}_{b-}x)(u)| \leq \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(b-u\right)^{\alpha}} + A_{\alpha}\int_{0}^{b-u}\frac{\min\{2\left\|x\right\|_{C(R_{+})},\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Теорема 2.9. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие (2.1). Тогда для любой функции $x \in \in H^{\omega}([a,b])$, любой точки $u \in (a,b)$ и любого $h \in (0, u-a)$ имеет место точное неравенство*

$$\left|D^{\alpha}_{a+}x(u)\right| \leq \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{h^{\alpha}} - \frac{1}{(u-a)^{\alpha}}\right) + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

При любом $h \in (0, b-u)$ имеет место точное неравенство

$$\left|D^{\alpha}_{b-}x(u)\right| \leq \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{h^{\alpha}} - \frac{1}{(b-u)^{\alpha}}\right) + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}([a,b])}\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Мы не приводим доказательства этих теорем, поскольку они по существу аналогичны доказательствам теорем из предыдущего пункта. Конструкции экстремальных функций аналогичны (2.12).

§ 3. Неравенства типа Колмогорова для L_p-норм дробных производных

В этом параграфе приведем неравенства, оценивающие L_p-нормы дробных производных через L_p- и H_p^ω-нормы самих функций. Кроме того, приведем неравенства, оценивающие равномерные нормы дробных производных через равномерную норму самой функции и L_s-норму ее первой производной.

Укажем необходимые определения и обозначения.

Пусть G есть R, R_+ или отрезок $[a, b]$. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций $x : G \to R$ с конечной нормой

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(u)|^p \, du\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{ess}\sup\limits_{u \in G} |x(u)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in N$ и $s \in [1, \infty]$ обозначим через $L_s^r(G)$ множество функций $x : G \to R$ таких, что $x^{(r-1)}$ ($x^{(0)} = x$) локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Положим $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \bigcap L_s^r(G)$.

3.1. Неравенства для функций, заданных на действительной оси

Рассмотрим случай $G = R$. Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Через $H_p^\omega(R)$ обозначим множество функций $x \in L_p(R)$, для которых

$$\|x\|_{H_p^\omega(R)} := \sup_{t \in R,\, t \ne 0} \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(R)}}{\omega(|t|)} < \infty.$$

Если $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \beta \le 1$, то вместо $H_p^\omega(R)$ будем писать $H_p^\beta(R)$.

Для заданного модуля непрерывности ω через $UH_p^\omega(R)$ обозначим единичный шар в пространстве $H_p^\omega(R)$, т. е. множество функций $x \in L_p(R)$ таких, что $\|x\|_{H_p^\omega(R)} \le 1$.

Рассмотрим функцию $\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R)\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R)\right) := \sup_{\substack{x \in UH_p^\omega(R), \\ \|x\|_{L_p(R)} \le \delta}} \left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(R)}.$$

Эта функция называется модулем непрерывности оператора $D_\pm^\alpha$ на множестве $UH_p^\omega(R)$.

Наша цель — получение неравенств, оценивающих L_p-нормы дробных производных функции $x \in L_p$ через L_p-норму и H_p^ω-норму самой функции.

Теорема 3.1. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполнено условие* (2.1)*. Тогда для любой функции $x \in \in H_p^\omega(R)$ производные $D_\pm^\alpha x$ принадлежат пространству $L_p(R)$ и справедливы неравенства*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(R)} \le A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\left\|x\right\|_{L_p(R)}, \left\|x\right\|_{H_p^\omega(R)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt. \qquad (3.1)$$

В случае, когда $p = 1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ является локально абсолютно непрерывной функцией, неравенства (3.1) *являются точными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left\|(D_\pm^\alpha x)(\cdot)\right\|_{L_p(R)} = A_\alpha \left\|\int_0^\infty \frac{x(\cdot) - x(\cdot \mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\right\|_{L_p(R)} \le$$

$$\le A_\alpha \int_0^\infty \frac{\left\|x(\cdot) - x(\cdot \mp t)\right\|_{L_p(R)}}{t^{1+\alpha}}dt. \qquad (3.2)$$

Так как $x \in H_p^\omega(R)$, справедливы неравенства

$$\left\|x(\cdot) - x(\cdot \mp t)\right\|_{L_p(R)} \le 2\left\|x\right\|_{L_p(R)}$$

и

$$\left\|x(\cdot) - x(\cdot \mp t)\right\|_{L_p(R)} \le \left\|x\right\|_{H_p^\omega(R)}\omega(t),$$

так что

$$\left\|x(\cdot) - x(\cdot \mp t)\right\|_{L_p(R)} \le \min\{2\left\|x\right\|_{L_p(R)}, \left\|x\right\|_{H_p^\omega(R)}\omega(t)\}. \qquad (3.3)$$

Сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$\left\|(D_\pm^\alpha x)(\cdot)\right\|_{L_p(R)} \le A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\left\|x\right\|_{L_p(R)}, \left\|x\right\|_{H_p^\omega(R)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Неравенство (3.1) доказано.

Точность неравенства (3.1) при $p = 1$ будет следовать из точности неравенства (3.4), приведенного в следствии 3.1.

Как и в пункте 2.1, из данной теоремы получаем такие следствия.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 для любой функции* $x \in H_p^\omega(R)$ *и любого* $h > 0$ *справедливы неравенства*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(R)} \le A_\alpha \left(\|x\|_{H_p^\omega(R)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du + \frac{2\|x\|_{L_p(R)}}{\alpha h^\alpha} \right). \tag{3.4}$$

В случае, когда $p = 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(t)$ *является локально абсолютно непрерывной функцией, неравенства* (3.4) *являются точными.*

Отметим, что следствие 3.1 и теорема 3.1 на самом деле эквивалентны, так как из следствия 3.1 путем минимизации по $h > 0$ выражения, стоящего в правой части неравенства (3.4), получается соотношение (3.1).

Следствие 3.2. *Пусть* $0 < \alpha < \beta \le 1$. *Для произвольной функции* $x \in H_p^\beta(R)$ *справедливы неравенства*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(R)} \le \frac{A_\alpha 2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha(1-\frac{\alpha}{\beta})} \|x\|_{L_p(R)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|_{H_p^\beta(R)}^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{3.5}$$

При $p = 1$ *неравенства* (3.5) *являются точными.*

Из теоремы 3.1 и следствия 3.2 выводим

Следствие 3.3. *В условиях теоремы 3.1 для любого* $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R)\right) \le A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

В случае, когда $p = 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(t)$ *является локально абсолютно непрерывной функцией,*

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R)\right) = A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

В частности, при $p = 1$, *если* $0 < \alpha < \beta \le 1$, *то*

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\beta(R)\right) = \frac{A_\alpha 2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha(1-\frac{\alpha}{\beta})} \delta^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Обобщением теоремы 2.2 является следующая

Теорема 3.2. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполнено условие* (2.1)*. Тогда для любой функции $x \in \in H_p^\omega(R)$ и любого $h > 0$ справедливы неравенства*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(R)} \leq \left\|D_{\pm,h}^\alpha x\right\|_{L_p(R)} + A_\alpha \left\|x\right\|_{H_p^\omega(R)} \int_0^h \frac{\omega\left(u\right)}{u^{1+\alpha}} du. \qquad (3.6)$$

В случае, когда $p = 1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ — локально абсолютно непрерывная функция, неравенство (3.6) *является точным.*

Обращаясь к доказательству точности приведенных в этом пункте неравенств при $p = 1$, мы, как уже отмечалось, докажем только точность неравенства (3.4) из следствия 3.1.

Для любого $h > 0$ положим

$$x_h(u) = \begin{cases} \omega'\left(u\right), & 0 \leq u \leq h; \\ 0, & u \notin (0,h). \end{cases} \qquad (3.7)$$

Для этой функции будет

$$\left\|x_h\right\|_{L_1(R)} = \omega(h).$$

Найдем $\left\|x_h\right\|_{H_1^\omega(R)}$. При любом $t \in (0,h)$ имеем

$$\left\|x_h(\cdot) - x_h(\cdot - t)\right\|_{L_1(R)} = \omega(t) + \omega(h-t) - \omega(h) + \omega(t) + \omega(h) - \omega(h-t) = 2\omega(t).$$

При $t > h$ имеем

$$\left\|x_h(\cdot) - x_h(\cdot - t)\right\|_{L_1(R)} = 2\omega(h).$$

Значит,

$$\left\|x_h\right\|_{H_1^\omega(R)} = 2.$$

Теперь найдем $\left\|D_-^\alpha x_h\right\|_{L_1(R)}$. Имеем

$$\left\|D_-^\alpha x_h\right\|_{L_1(R)} = A_\alpha \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^h\right) \left|\int_0^\infty \frac{x_h(u) - x_h(u+t)}{t^{1+\alpha}} dt\right| du.$$

Для $u < 0$

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < -u; \\ -\omega'(t+u), & -u < t < h-u; \\ 0, & t > h-u. \end{cases}$$

Если $0 < u < h$, то

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} \omega'(u) - \omega'(u+t), & 0 \le t < h-u; \\ \omega'(u), & t > h-u. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left\| D_-^\alpha x_h \right\|_{L_1(R)} = A_\alpha \int_{-\infty}^{0} \int_{-u}^{h-u} \frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dt\, du +$$

$$+A_\alpha \int_0^h \int_0^{h-u} \frac{\omega'(u) - \omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu + A_\alpha \int_0^h \omega'(u) \int_{h-u}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt\, du =$$

$$= A_\alpha (I_1 + I_2 + I_3).$$

Вычислим I_1:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-u}^{h-u} \frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu = \int_0^\infty \int_u^{h+u} \frac{\omega'(t-u)}{t^{1+\alpha}} dtdu =$$

$$= \int_0^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^t \omega'(t-u) du + \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_{t-h}^{t} \omega'(t-u) du =$$

$$= \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \omega(h) \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Теперь вычислим I_2:

$$I_2 = \int_0^h \int_0^{h-u} \frac{\omega'(u) - \omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu =$$

$$= \int_0^h \int_0^{h-t} \frac{\omega'(u) - \omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dudt = \int_0^h \frac{\omega(h-t) - \omega(h) + \omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Наконец, найдем I_3:

$$I_3 = \int_0^h \omega'(u) \int_{h-u}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dtdu =$$

$$= \int_0^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_{h-t}^{h} \omega'(u) du + \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^h \omega'(u) du =$$

$$= \int_0^h \frac{\omega(h) - \omega(h-t)}{t^{1+\alpha}} dt + \omega(h) \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} dt =$$

$$= \int_0^h \frac{\omega(h) - \omega(h-t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Таким образом,

$$I_2 + I_3 = I_1 = \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Следовательно, вспоминая значения $\|x_h\|_{H_1^\omega(R)}$ и $\|x_h\|_{L_1(R)}$, получаем

$$\left\|D_-^\alpha x_h\right\|_{L_1(R)} = 2A_\alpha \left(\int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}\right) =$$

$$= A_\alpha \left(\|x_h\|_{H_1^\omega(R)} \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{2\,\|x_h\|_{L_1(R)}}{\alpha h^\alpha}\right) =$$

$$= A_\alpha \int_0^h \frac{\min\left\{2\,\|x_h\|_{L_1(R)}\,,\ \|x_h\|_{H_1^\omega(R)}\,\omega(t)\right\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Точность неравенства (3.4) доказана.

3.2. Неравенства для функций, заданных на полуоси

Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Через $H_p^\omega\,(R_+)$ обозначим множество функций $x \in L_p\,(R)$, для которых

$$\|x\|_{H_p^\omega(R_+)} := \sup_{t \in \mathrm{R},\, t>0} \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(R)}}{\omega\,(t)} < \infty.$$

Ниже речь идет только о правосторонних производных.

Повторяя доказательство теоремы 3.1, нетрудно установить, что справедлива

Теорема 3.3. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие (2.1). Тогда для любой функции $x \in$ $\in H_p^\omega\,(R_+)$ производная $D_-^\alpha x$ принадлежит пространству $L_p(R_+)$ и справедливо неравенство*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} \le A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\,\|x\|_{L_p(R_+)}\,, \|x\|_{H_p^\omega}\,\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt. \qquad (3.8)$$

Верны также аналоги следствий 3.1—3.3.

Следствие 3.4. *В условиях теоремы 3.3 для любой функции* $x \in H_p^\omega(R_+)$ *и любого* $h > 0$ *справедливы неравенства*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} \le A_\alpha \left(\|x\|_{H_p^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du + \frac{2\|x\|_{L_p(R_+)}}{\alpha h^\alpha} \right). \tag{3.9}$$

Следствие 3.5. *Пусть* $0 < \alpha < \beta \le 1$. *Для произвольной функции* $x \in H_p^\beta(R_+)$ *справедливы неравенства*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} \le \frac{A_\alpha 2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha(1-\frac{\alpha}{\beta})} \|x\|_{L_p(R_+)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|_{H_p^\beta(R_+)}^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{3.10}$$

Для заданного модуля непрерывности ω через $UH_p^\omega(R_+)$ обозначим единичный шар в пространстве $H_p^\omega(R_+)$, т. е. множество функций $x \in L_p(R_+)$ таких, что $\|x\|_{H_p^\omega(R_+)} \le 1$.

Рассмотрим функцию $\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R_+)\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R)\right) := \sup_{\substack{x \in UH_p^\omega(R_+), \\ \|x\|_{L_p(R_+)} \le \delta}} \left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)}.$$

Эта функция называется модулем непрерывности оператора $D_\pm^\alpha$ на множестве $UH^\omega(R_+)$.

Следствие 3.6. *В условиях теоремы 3.3 для любого* $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, UH_p^\omega(R_+)\right) \le 2A_\alpha \int_0^\infty \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{3.11}$$

В отличие от утверждений, приведенных в пункте 3.1, мы не знаем, являются ли неравенства (3.8)—(3.11) точными при $p = 1$. Однако в отношении следующей теоремы это уже верно.

Теорема 3.4. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполняется условие* (2.1). *Тогда для любой функции* $x \in H_p^\omega(R_+)$ *и любого* $h > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R)_+} \le \left\|D_{-,h}^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} + A_\alpha \|x\|_{H_p^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du. \tag{3.12}$$

В случае, когда $p = 1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ — локально абсолютно непрерывная функция, неравенство (3.12) *является точным.*

В доказательстве, очевидно, нуждается только утверждение о точности неравенства (3.12).

Для сужения построенной в предыдущем пункте функции x_h на полуось R_+, за которой мы сохраним обозначение x_h, имеем

$$\|x_h\|_{H_1^\omega(R_+)} = 1$$

и

$$\left\|D^\alpha_{-,h} x_h\right\|_{L_1(R_+)} = A_\alpha \int_0^h \int_h^\infty \frac{x_h(u) - x_h(u+t)}{t^{1+\alpha}} dt\, du =$$

$$= A_\alpha \int_0^h \omega'(u) du \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = A_\alpha \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Вычисляя $\left\|D^\alpha_- x\right\|_{L_1(R)_+}$, получаем

$$\left\|D^\alpha_- x_h\right\|_{L_1(R)_+} = A_\alpha \left(\int_0^h \frac{\omega\,(u)}{u^{1+\alpha}} du + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha} \right) =$$

$$= \left\|D^\alpha_{-,h} x_h\right\|_{L_1(R_+)} + A_\alpha \left\|x_h\right\|_{H_1^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega\,(u)}{u^{1+\alpha}} du.$$

Точность неравенства (3.12) при $p = 1$ доказана.

§ 4. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций класса $L^1_{\infty,s}$

Пусть G есть R, R_+ или отрезок $[a, b]$. Для $r \in N$ и $s \in [1, \infty]$ обозначим через $L^r_s(G)$ множество функций $x : G \to R$, таких что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} = f)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Положим $L^r_{p,s}(G) := L_p(G) \bigcap L^r_s(G)$, $p \in [1, \infty]$. Через $UL^r_{p,s}(G)$ обозначим множество таких $x \in L^r_{p,s}(G)$, что $\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(R)} \leq 1$. Функция $\Omega\left(\delta, UL^r_{p,s}(G)\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, UL^r_{p,s}(G)\right) := \sup_{\substack{x \in UL^r_{p,s}(G), \\ \|x\|_{C(G)} \leq \delta}} \left\|D^\alpha_\pm x\right\|_{C(G)}$$

называется модулем непрерывности оператора $D^\alpha_\pm$ на множестве $UL^r_{p,s}(G)$.

В данном параграфе мы получим неравенства типа Колмогорова, оценивающие равномерные нормы дробных производных функции через равномерную норму самой функции и L_s- норму ее первой производной. Для левосторонних производных функций, заданных на полуоси, и для производных функций, заданных на отрезке, будут получены поточечные оценки значений дробных производных.

4.1. Неравенства для функций, заданных на оси

Мы начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R)$ *при любом* $h > 0$ *справедливы точные неравенства*

$$\left\|D^\alpha_\pm x\right\|_{C(R)} \le \left\|D^\alpha_{\pm,h} x\right\|_{C(R)} + \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)^{s'} du\right)^{\frac{1}{s'}}}{\Gamma(1-\alpha)} \left\|x'\right\|_{L_s(R)}. \qquad (4.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения в случаях $\left\|D^\alpha_- x\right\|_{C(R)}$ и $\left\|D^\alpha_+ x\right\|_{C(R)}$ аналогичны. Приведем доказательство для случая $\left\|D^\alpha_- x\right\|_{C(R)}$. Для получения соответствующего неравенства (4.1) достаточно оценить только $\left|D^\alpha_- x(0)\right|$. Для произвольного $h > 0$, получим

$$\left|D^\alpha_- x(0)\right| = A_\alpha \left|\int_0^\infty \frac{x(0) - x(t)}{t^{1+\alpha}} dt\right| \le$$

$$\le A_\alpha \left(\left|\int_0^h \frac{x(0) - x(t)}{t^{1+\alpha}} dt\right| + \left|\int_h^\infty \frac{x(0) - x(t)}{t^{1+\alpha}} dt\right|\right).$$

Заметим, что

$$A_\alpha \left|\int_h^\infty \frac{x(0) - x(t)}{t^{1+\alpha}} dt\right| = \left|(D^\alpha_{-,h} x)(0)\right| \le \left\|D^\alpha_{-,h} x\right\|_{C(R)}.$$

Рассмотрим

$$\left|\int_0^h \frac{x(0) - x(t)}{t^{1+\alpha}} dt\right|.$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, имеем

$$\left|\int_0^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^t x'(u) du\right| = \left|\int_0^h x'(u) \int_u^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} du\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\alpha} \int_0^h x'(u) \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right) du\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^h |x'(u)| \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) du \leq \frac{1}{\alpha} \|x'\|_{L_s(R)} \left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}}$$

(на последнем шаге мы применили неравенство Гельдера с показателями s и $s' = s/(s-1)$). Отметим, что полученный интеграл

$$\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du$$

имеет особенность в точке 0 и сходится тогда и только тогда, когда $\alpha s' <$ < 1, т. е. $\alpha < 1 - \frac{1}{s}$, откуда и вытекает ограничение на порядок дробной производной $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$, приведенное в формулировке теоремы.

Сопоставляя полученные оценки, получаем неравенство (4.1). Его точность будет следовать из точности неравенства (4.2).

Теорема 4.2. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R)$ *при любом* $h > 0$ *справедливы точные неравенства*

$$\left\| D^\alpha_\pm x \right\|_{C(R)} \leq \frac{2\,\|x\|_{C(R)}}{\Gamma(1-\alpha) h^\alpha} + \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}}}{\Gamma(1-\alpha)} \|x'\|_{L_s(R)}. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того чтобы получить неравенство (4.2) из неравенства (4.1), достаточно заметить, что

$$\left\| D^\alpha_{\pm,h} x \right\|_{C(R)} \leq 2\,\|x\|_{C(R)} A_\alpha \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \frac{2\,\|x\|_{C(R)}}{\Gamma(1-\alpha) h^\alpha}.$$

Докажем точность неравенства (4.2). Определим функцию

$$x_{s,h}(u) = \begin{cases} \int_0^u \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+^{s'-1} dv - \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv, & 0 \leq u; \\ -\frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv, & u \leq 0. \end{cases}$$

Для этой функции имеем

$$\|x_{s,h}\|_{C(R)} = \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv$$

и

$$\left\| x'_{s,h} \right\|_{L_s(R)} = \left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{(s'-1)s} du \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} dv \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Кроме того,

$$\left\| D_-^\alpha x_{s,h} \right\|_{C(R)} \geq \left| \left(D_-^\alpha x_{s,h} \right)(0) \right| = A_\alpha \left| \int_0^\infty \frac{x_{s,h}(0) - x_{s,h}(t)}{t^{1+\alpha}} dt \right| =$$

$$= A_\alpha \left(\int_0^h \frac{1}{t^{1+\alpha}} \int_0^t \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv \int_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \right) =$$

$$= A_\alpha \left(\frac{1}{\alpha h^\alpha} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv + \frac{1}{\alpha} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} dv \right) =$$

$$= \frac{2 \left\| x_{s,h} \right\|_{C(R)}}{\Gamma(1-\alpha) h^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}} \left\| x'_{s,h} \right\|_{L_s(R)},$$

откуда и следует точность неравенства (4.2).

После замены переменных $u/h = v$ в интеграле

$$\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du$$

неравенство (4.2) можно переписать в виде

$$\left\| D_\pm^\alpha x \right\|_{C(R)} \leq \frac{2 \left\| x \right\|_{C(R)}}{\Gamma(1-\alpha) h^\alpha} + \frac{h^{\frac{1}{s'} - \alpha} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}}}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| x' \right\|_{L_s(R)}. \qquad (4.3)$$

Следствие 4.1. *В условиях теоремы 4.1 справедливы точные неравенства*

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm}x\right\|_{C(R)} \le \frac{2^{1-\alpha s'}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\left(1-\alpha s'\right)^{1-\alpha s'}\left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}}\left\|x\right\|^{1-\alpha s'}_{C(\mathrm{R})}\left\|x'\right\|^{\alpha s'}_{L_s(R)}. \qquad (4.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в правую часть неравенства (4.3) вместо h значение

$$h_* = \left(\frac{2\alpha\left\|x\right\|_{\infty}}{\left(\frac{1}{s'}-\alpha\right)\left\|x'\right\|_s}\right)^{s'}\cdot\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{-1} > 0.$$

Получим

$$\left\|D^{\alpha}_{-}x\right\|_{\infty} \le \frac{(h_*)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\left\|x\right\|_{\infty} + h_*^{\frac{1}{s'}}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{\frac{1}{s'}}\left\|x'\right\|_s\right) =$$

$$= \frac{2\left\|x\right\|_{\infty}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{\alpha}\left(\frac{\left(\frac{1}{s'}-\alpha\right)\left\|x'\right\|_s}{2\alpha\left\|x\right\|_{\infty}}\right)^{\alpha s'}\left(1+\frac{\alpha}{\frac{1}{s'}-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2^{1-\alpha s'}}{\Gamma(1-\alpha)\left(1-\alpha s'\right)^{1-\alpha s'}\left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{\alpha}\left\|x\right\|^{1-\alpha s'}_{\infty}\left\|x'\right\|^{\alpha s'}_{s}.$$

Неравенство (4.4) доказано. Покажем, что оно обращается в равенство для определенных выше функций $x_{s,h}$ при любом $h > 0$. Выполняя в полученных при доказательстве точности неравенства (4.2) выражениях для $\left\|x_{s,h}\right\|_{C(R)}$, $\left\|x'_{s,h}\right\|_{L_s(R)}$ и $\left|\left(D^{\alpha}_{-}x_{s,h}\right)(0)\right|$ замену переменных $v/h = u$, получаем

$$\left\|x_{s,h}\right\|_{C(R)} = \frac{1}{2}\int_0^h\left(\frac{1}{v^{\alpha}}-\frac{1}{h^{\alpha}}\right)^{s'-1}dv = \frac{h^{1-\alpha s'+\alpha}}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'-1}du,$$

$$\left\|x'_{s,h}\right\|_{L_s(R)} = \left(\int_0^h\left(\frac{1}{v^{\alpha}}-\frac{1}{h^{\alpha}}\right)^{s'}du\right)^{\frac{1}{s}} = h^{\frac{1}{s}-\alpha\frac{s'}{s}}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)^{s'}du\right)^{\frac{1}{s}}$$

и

$$\left|\left(D_-^\alpha x_{s,h}\right)(0)\right| = A_\alpha \left(\frac{1}{\alpha h^\alpha} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha} \int_0^h \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} dv \right) = \frac{A_\alpha h^{1-\alpha s'}}{\alpha} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} dv + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} dv \right) = \frac{h^{1-\alpha s'}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{u^\alpha} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du.$$

Теперь для доказательства того, что неравенство (4.4) обращается в равенство для функции $x_{s,h}$, достаточно убедиться в том, что имеет место неравенство

$$\frac{h^{1-\alpha s'}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{u^\alpha} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du \geq \frac{2^{1-\alpha s'} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \right)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha) \left(1 - \alpha s'\right)^{1-\alpha s'} \left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}} \times$$

$$\times \left(\frac{h^{1-\alpha s'+\alpha}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du \right)^{1-\alpha s'} \left(h^{\frac{1}{s} - \alpha \frac{s'}{s}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s} du \right)^{\frac{1}{s}} \right)^{\alpha s'}.$$

После очевидных преобразований и упрощений это неравенство можно переписать в виде

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du + \int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \geq$$

$$\geq \left(\frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du}{1 - \alpha s'} \right)^{1-\alpha s'} \left(\frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du}{\alpha s'} \right)^{\alpha s'}.$$

Последнее неравенство имеет место в силу неравенства Юнга с показателями $\frac{1}{1-\alpha s'}$ и $\frac{1}{\alpha s'}$. Следствие 4.1 доказано.

Из следствия 4.1 выводим

Следствие 4.2. *В условиях теоремы 4.1*

$$\Omega\left(\delta, UL^r_{\infty,s}(R)\right) = \frac{2^{1-\alpha s'} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \right)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha) \left(1 - \alpha s'\right)^{1-\alpha s'} \left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}} \cdot \delta^{1-\alpha s'}.$$

4.2. Неравенства для функций, заданных на полуоси

Для правосторонних производных функций класса $L^1_{\infty,s}(R_+)$ справедливы утверждения теорем 4.1, 4.2 и следствий 4.1, 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R_+)$ *при любом* $h > 0$ *справедливо точное неравенство*

$$\overline{x}(v + t') > \psi_{2,h}(v + t').$$

Теорема 4.4. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R_+)$ *при любом* $h > 0$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha_- x \right\|_{C(R_+)} \leq \frac{2\left\| x \right\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)h^\alpha} + \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}}}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| x' \right\|_{L_s(R_+)}.$$

Следствие 4.3. *В условиях теоремы 4.3 справедливо точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha_- x \right\|_{C(R_+)} \leq \frac{2^{1-\alpha s'} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \right)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\left(1-\alpha s'\right)^{1-\alpha s'} \left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}} \left\| x \right\|^{1-\alpha s'}_{C(R_+)} \left\| x' \right\|^{\alpha s'}_{L_s(R_+)}.$$

Для модуля непрерывности оператора правосторонней производной имеем

Следствие 4.4. *В условиях теоремы 4.3*

$$\Omega\left(\delta, UL^r_{\infty,s}(R_+)\right) = \frac{2^{1-\alpha s'} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'} du \right)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\left(1-\alpha s'\right)^{1-\alpha s'} \left(\alpha s'\right)^{\alpha s'}} \delta^{1-\alpha s'}.$$

Получим поточечные неравенства для левосторонних производных функций класса $L^1_{\infty,s}(R_+)$.

Теорема 4.5. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R_+)$ *при любом* $u > 0$ *справедливо точное неравенство*

$$\left|(D^{\alpha}_{0+}x)(u)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{|x(u)|}{u^{\alpha}}+\left(\int_0^u\left(\frac{1}{v^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}}\|x'\|_{L_s(R_+)}\right). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая определение левосторонней производной, получаем

$$\left|(D^{\alpha}_{0+}x)(u)\right| \leq \frac{|x(u)|}{\Gamma(1-\alpha)u^{\alpha}}+A_{\alpha}\left|\int_0^u\frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}}dt\right| =$$

$$= \frac{|x(u)|}{\Gamma(1-\alpha)u^{\alpha}}+A_{\alpha}\left|\int_0^u(u-t)^{1+\alpha}\int_t^u x'(v)dvdt\right| \leq$$

$$\leq \frac{|x(u)|}{\Gamma(1-\alpha)u^{\alpha}}+A_{\alpha}\int_0^u\frac{1}{(u-t)^{1+\alpha}}\int_t^u\left|x'(v)\right|dvdt. \tag{4.6}$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования и применяя затем неравенство Гельдера, получаем

$$\int_0^u\frac{1}{(u-t)^{1+\alpha}}\int_t^u|x'(v)|dvdt = \int_0^u|x'(v)|\int_0^v\frac{dt}{(u-t)^{1+\alpha}}dv =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^u|x'(v)|\left(\frac{1}{(u-v)^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\|x'\|_{L_s(R+)}\left(\int_0^u\left(\frac{1}{(u-v)^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\|x'\|_{L_s(R+)}\left(\int_0^u\left(\frac{1}{v^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{4.7}$$

Сопоставляя (4.6) и (4.7), получаем (4.5).

Аналогично доказательству теоремы 4.2 нетрудно показать, что неравенство обращается в равенство для функции

$$x_u(v) = \begin{cases} \int\limits_v^u\left(\frac{1}{(u-t)^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{s'-1}dt, & 0 \leq v \leq u; \\ \int\limits_0^u\left(\frac{1}{(u-t)^{\alpha}}-\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{s'-1}dt, & u \leq v. \end{cases}$$

Действительно,

$$|x_u(u)| = \int_0^u \left(\frac{1}{(u-t)^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'-1} dv = \int_0^u \left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'-1} dv$$

и

$$\|x_u'\|_{L_s(R)} = \left(\int_0^u \left(\frac{1}{(u-t)^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{(s'-1)s} dt \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^u \left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'} dt \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Кроме того,

$$\left| \left(D_{0+}^\alpha x_u \right)(u) \right| = \left| \frac{x_u(u)}{\Gamma(1-\alpha) u^\alpha} + A_\alpha \int_0^u \frac{x_u(u) - x_u(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| =$$

$$= \frac{x_u(u)}{\Gamma(1-\alpha) u^\alpha} + A_\alpha \int_0^u \frac{1}{(u-t)^{1+\alpha}} \int_t^u \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} dv\, dt =$$

$$= \frac{x_u(u)}{\Gamma(1-\alpha) u^\alpha} + A_\alpha \int_0^u \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'-1} \int_0^v \frac{1}{(u-t)^{1+\alpha}} dt\, dv =$$

$$= \frac{x_u(u)}{\Gamma(1-\alpha) u^\alpha} + \frac{A_\alpha}{\alpha} \int_0^u \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'} dv =$$

$$= \frac{|x_u(u)|}{\Gamma(1-\alpha) u^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^u \left(\frac{1}{v^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right)^{s'} du \right)^{\frac{1}{s'}} \|x_u'\|_{L_s(R)}.$$

Точность неравенства (4.5) доказана.

Теорема 4.6. *Пусть* $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. *Для произвольной функции* $x \in L^1_{\infty,s}(R_+)$ *при любом* $h \in (0,u)$ *справедливо точное неравенство*

$$\left| (D_{0+}^\alpha x)(u) \right| \le \frac{\|x\|_{C(R_+)}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{2}{(u-h)^\alpha} - \frac{1}{u^\alpha} \right) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^{u-h}\left(\frac{1}{u^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)^{s'}du\right)^{\frac{1}{s'}}\|x'\|_{L_s(R_+)}.$$

На доказательстве этой теоремы мы не останавливаемся.

4.3. Неравенства для функций, заданных на отрезке

Аналогом теоремы 4.5 является следующая

Теорема 4.7. *Пусть $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. Для произвольной функции $x \in L^1_{\infty,s}([a,b])$ при любом $u \in (a,b)$ справедливо точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_{a+}x)(u)\right| \le \frac{|x(u)|}{\Gamma(1-\alpha)(u-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^u\left(\frac{1}{(u-v)^\alpha}-\frac{1}{(u-a)^\alpha}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}},$$

а при любом $u \in (a,b)$ — точное неравенство

$$\left|(D^\alpha_{b-}x)(u)\right| \le \frac{|x(u)|}{\Gamma(1-\alpha)(b-u)^\alpha}+$$

$$+\frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_u^b\left(\frac{1}{(b-v)^\alpha}-\frac{1}{(b-u)^\alpha}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Теорема 4.8. *Пусть $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1-\frac{1}{s}$, $u \in (a,b)$. Для произвольной функции $x \in L^1_s([a,b])$ справедливы такие точные неравенства:*

$$\left|(D^\alpha_{a+}x)(u)\right| \le \frac{\max\limits_{t\in[a,h]}\left|\frac{x(u)-x(t)}{(u-h)^\alpha}+\frac{x(t)}{(u-a)^\alpha}\right|}{\Gamma(1-\alpha)}+$$

$$+\frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\left(\int_h^u\left(\frac{1}{(u-v)^\alpha}-\frac{1}{(u-h)^\alpha}\right)^{s'}dv\right)^{\frac{1}{s'}}$$

при любом $h \in (a,u)$ и

$$\left|(D^\alpha_{b-}x)(u)\right| \le \frac{\max\limits_{t\in[a,h]}\left|\frac{x(u)-x(t)}{(h-u)^\alpha}+\frac{x(t)}{(b-u)^\alpha}\right|}{\Gamma(1-\alpha)}+$$

$$+\frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left(\int_u^h \left(\frac{1}{(v-u)^\alpha} - \frac{1}{(h-u)^\alpha}\right)^{s'} dv\right)^{\frac{1}{s'}}$$

при любом $h \in (u, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем для левосторонней производной; для правосторонней производной рассуждения аналогичны. Для любой точки $u \in (a, b)$ и любого $h \in (a, x)$ оценим

$$\left|(D_{a+}^\alpha x)(u)\right| = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \frac{x(u)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int\limits_a^u \frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \frac{x(u)}{(u-a)^\alpha} + \alpha \int_a^h \frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_h^u \frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right|.$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое. Сумму под знаком модуля запишем в виде одного интеграла. Очевидно, будем иметь

$$\left| \frac{x(u)}{(u-a)^\alpha} + \alpha \int_a^h \frac{x(u)-x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| =$$

$$= \alpha \left| \int_a^h \frac{x(u)\left[\left(\frac{u-a}{u-h}\right)^\alpha - 1\right]^{-1} + x(u) - x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| \leq$$

$$\leq \alpha \int_a^h \frac{\left|\left(1 + \left[\left(\frac{u-a}{u-h}\right)^\alpha - 1\right]^{-1}\right) x(u) - x(t)\right|}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \leq$$

$$\leq \max_{t\in[a,h]} \left| \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{u-a}{u-h}\right)^\alpha - 1}\right) x(u) - x(t) \right| \left(\frac{1}{(u-h)^\alpha} - \frac{1}{(u-a)^\alpha} \right) =$$

$$= \max_{t\in[a,h]} \left| \frac{x(u)-x(t)}{(u-h)^\alpha} + \frac{x(t)}{(u-a)^\alpha} \right|.$$

Для оценки второго слагаемого представим интеграл под знаком модуля в виде

$$\int_h^u \int_t^u \frac{x'(v)dv}{(u-t)^{1+\alpha}} dt = \int_h^u x'(v) \int_h^v \frac{dt}{(u-t)^{1+\alpha}} dv =$$

$$= \int_h^u x'(v) \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{(u-h)^\alpha} \right) dv.$$

Тогда

$$\left| \int_h^u \frac{x(u) - x(t)}{(u-t)^{1+\alpha}} dt \right| \le \frac{1}{\alpha} \int_h^u |x'(v)| \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{(u-h)^\alpha} \right) du \le$$

$$\le \frac{\|x'\|_s}{\alpha} \left(\int_h^u \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{(u-h)^\alpha} \right)^{s'} dv \right)^{\frac{1}{s'}}$$

(на последнем шаге применили неравенство Гельдера с показателями s и s'). Требуемое неравенство для правосторонней производной доказано. На доказательстве точности останавливаться не будем.

Следствие 4.5. *В условиях предыдущей теоремы справедливы точные неравенства*

$$\left|(D^\alpha_{a+} x)(u)\right| \le \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{2}{(u-h)^\alpha} - \frac{1}{(u-a)^\alpha} \right) +$$

$$+ \frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_h^u \left(\frac{1}{(u-v)^\alpha} - \frac{1}{(u-h)^\alpha} \right)^{s'} dv \right)^{\frac{1}{s'}}$$

и

$$\left|(D^\alpha_{b-} x)(u)\right| \le \frac{\|x\|_{C([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{2}{(h-u)^\alpha} - \frac{1}{(b-u)^\alpha} \right) +$$

$$+ \frac{\|x'\|_{L_s([a,b])}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_u^h \left(\frac{1}{(v-u)^\alpha} - \frac{1}{(h-u)^\alpha} \right)^{s'} dv \right)^{\frac{1}{s'}}.$$

§ 5. Неравенства, содержащие производные порядка выше первого

В данном параграфе приведем точное неравенство для дробных производных в смысле Маршо порядка $0 < \alpha < 1$ функций класса $L^2_{\infty,\infty}(R)$ и его аналог для функций класса $L^2_{\infty,\infty}(R_+)$. Затем приведем точные неравенства для производных Рисса порядка $0 < \alpha < 2$ (п. 5.2) и неравенства, оценивающие равномерную норму производных Маршо через равномерную норму усеченных производных и L_s- норму производной функции любого заданного порядка (п. 5.3).

5.1. Неравенства, оценивающее норму дробной производной через равномерную норму функции и ее второй производной

Мы начнем со случая функций, заданных на полуоси.

Для заданного $h > 0$ через $\psi_{2,h}$ обозначим заданную на R_+ функцию, которая определяется следующим образом:

$$\psi_{2,h}(u) = \begin{cases} \frac{h^2}{4} - \frac{(u-h)^2}{2}, & x \in [0,h]; \\ \frac{h^2}{4}, & x \in (h,\infty). \end{cases}$$

Вместо $\psi_{2,1}$ будем писать ψ_2. Отметим, что

$\|\psi_{2,h}\|_{C(R_+)} = \frac{h^2}{4}, \quad \left\|\psi''_{2,h}\right\|_{L_\infty(R_+)} = 1, \quad \psi''_{2,h}(t) = -1$ для $t \in (0,h)$

и

$$\left\|D^\alpha_\pm \psi_{2,h}\right\|_{C(R_+)} = h^{2-\alpha}\left\|D^\alpha_\pm \psi_2\right\|_{C(R_+)}.$$

Теорема 5.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Для любой функции $x \in L^2_{\infty,\infty}(R_+)$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|D^\alpha_- x\right\|_{C(R_+)} \le \frac{\left\|D^\alpha_- \psi_2\right\|_{C(R_+)}}{\|\psi_2\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(R_+)}} \|x\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(\mathrm{R}_+)} \|x''\|^{\frac{\alpha}{2}}_{L_\infty(R_+)}. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана функция $x \in L^2_{\infty,\infty}(R_+)$, причем предположим, что $\|x''\|_{L_\infty(R)_+} = 1$. Выберем значение параметра h так, чтобы $\|x\|_{L_\infty(R)_+} = \|\psi_{2,h}\|_{L_\infty(R)_+}$. Такой выбор, очевидно, возможен:

$$h = \left(4\|x\|_{C(R_+)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

Для произвольного $u \in R_+$ найдем $v \in [0,h]$ такое, что выполняется равенство

$$x(u) = \psi_{2,h}(v).$$

Тогда при всех $t > 0$ имеем

$$x(u+t) \le \psi_{2,h}(v+t). \tag{5.3}$$

Действительно, рассмотрим функцию $\overline{x}(y) := x(y-(v-u))$. Неравенство (5.3) эквивалентно неравенству

$$\overline{x}(v+t) \le \psi_{2,h}(v+t).$$

Предположим, что последнее неравенство не выполняется, т.е. найдется $t' > 0$, такое, что

$$\overline{x}(v+t') > \psi_{2,h}(v+t').$$

Ясно, что $t' < h-v$, так как при всех $y > 0$ справедливо неравенство $x(y) \le \|\psi_{2,h}\|_{C(R_+)}$. По той же причине найдется $t' < t'' \le h-v$ такое, что

$$\overline{x}(v+t'') = \psi_{2,h}(v+t'').$$

Тогда разность

$$\Delta(y) = \overline{x}(y) - \psi_{2,h}$$

будет обладать следующими свойствами:

$$\Delta(v) = 0, \quad \Delta(t') > 0, \quad \Delta(t'') = 0.$$

Но тогда найдутся $t_1 \in (v, t')$ и $t_2 \in (t', t'')$ такие, что

$$\Delta'(t_1) > 0, \quad \Delta'(t_2) < 0.$$

Значит, на множестве положительной меры, содержащемся в интервале (t_1, t_2), будет

$$\Delta''(y) < 0,$$

что невозможно.

Таким образом, (5.3) имеет место и, следовательно,

$$x(u) - x(u+t) \ge \psi_{2,h}(v) - \psi_{2,h}(v+t).$$

Из определения производных в смысле Маршо выводим

$$(D_-^\alpha x)(u) \ge (D_-^\alpha \psi_{2,h})(v) \ge -\left\|D_-^\alpha \psi_{2,h}\right\|_{C(R)}.$$

Рассматривая вместо функции $\psi_{2,h}(v)$ функцию $-\psi_{2,h}(v)$, аналогично предыдущему получаем

$$(D_-^\alpha x)(u) \le -(D_-^\alpha \psi_{2,h})(v) \le \left\|D_-^\alpha \psi_{2,h}\right\|_{C(R)}.$$

Таким образом,

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{C(R_+)} \le \|\psi_{2,h}\|_{C(R_+)} = h^{2-\alpha} \left\|D_-^\alpha \psi_2\right\|_{C(R_+)}.$$

Вспоминая (5.2), получаем, что для любой функции x такой, что $\|x''\|_{L_\infty(R_+)} = 1$, имеет место неравенство

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{C(R_+)} \le \left(4\,\|x\|_{C(R_+)}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \left\|D_-^\alpha \psi_2\right\|_{C(R_+)} =$$

$$= \frac{\left\|D_-^\alpha \psi_2\right\|_{C(R_+)}}{\|\psi_2\|_{C(R_+)}^{1-\frac{\alpha}{2}}} \|x\|_{C(R_+)}^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{5.4}$$

Для того чтобы получить неравенство (5.1) в общем случае, достаточно применить (5.4) к функции $x/\,\|x''\|_{C(R_+)}$.

Неравенство (5.1) обращается в равенство для функций вида $\psi_{2,h}$, $h > 0$.

Теорема доказана.

Перейдем к функциям, заданным на всей оси.

Для заданного $h > 0$ через $\varphi_{2,h}$ обозначим заданную на всей числовой оси, нечетную функцию, которая на R_+ определяется следующим образом:

$$\varphi_{2,h}(u) = \begin{cases} \frac{h^2}{2} - \frac{(u-h)^2}{2}, & x \in [0,h]; \\ \frac{h^2}{2}, & x \in (h,\infty). \end{cases}$$

Вместо $\varphi_{2,1}$ будем писать φ_2. Отметим, что

$$\|\varphi_{2,h}\|_{C(R)} = \frac{h^2}{2}, \qquad \left\|\varphi_{2,h}''\right\|_{L_\infty(R)} = 1$$

и

$$\left\|D_\pm^\alpha \varphi_{2,h}\right\|_{C(R)} = h^{2-\alpha} \left\|D_\pm^\alpha \varphi_2\right\|_{C(R)}.$$

Теорема 5.2. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Для любой функции $x \in L_{\infty,\infty}^2(R)$ справедливы точные неравенства*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{C(R)} \le \frac{\left\|D_\pm^\alpha \varphi_2\right\|_{C(R)}}{\|\varphi_2\|_{C(R)}^{1-\frac{\alpha}{2}}} \|x\|_{C(R)}^{1-\frac{\alpha}{2}} \left\|x''\right\|_{L_\infty(R)}^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Рассуждения проведем только для правосторонней производной. Случай левосторонней производной аналогичен. Пусть задана функция $x \in L^2_{\infty,\infty}(R)$, причем предположим, что $\|x''\|_{L_\infty(R)} = 1$. Выберем значение параметра h так, чтобы $\|x\|_{L_\infty(R)} = \|\varphi_{2,h}\|_{L_\infty(R)}$. Такой выбор, очевидно, возможен:

$$h = \left(2\|x\|_{C(R)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

Для произвольного $u \in R$ найдем $v \in [-h, h]$ такое, что выполняется равенство

$$x(u) = \varphi_{2,h}(v).$$

Тогда при всех $t > 0$ имеем

$$x(u+t) \le \varphi_{2,h}(v+t)$$

(это устанавливается аналогично тому, как в доказательстве предыдущей теоремы доказано (5.1)) и, следовательно,

$$x(u) - x(u+t) \ge \varphi_{2,h}(v) - \varphi_{2,h}(v+t).$$

Теперь из определения производных в смысле Маршо выводим

$$(D^\alpha_- x)(u) \ge (D^\alpha_- \varphi_{2,h})(v) \ge -\left\|(D^\alpha_- \varphi_{2,h}\right\|_{C(R)}.$$

Рассматривая вместо функции $\varphi_{2,h}(v)$ функцию $-\varphi_{2,h}(v)$, аналогично предыдущему получаем

$$(D^\alpha_- x)(u) \le -(D^\alpha_- \varphi_{2,h})(v) \le \left\|D^\alpha_- \varphi_{2,h}\right\|_{C(R)}.$$

Таким образом,

$$\left\|D^\alpha_- x\right\|_{C(R)} \le \|\varphi_{2,h}\|_{C(R)} = h^{2-\alpha}\left\|D^\alpha_- \varphi_2\right\|_{C(R)}.$$

Вспоминая (5.6), получаем, что для любой функции x, для которой $\|x''\|_{L_\infty(R)} = 1$, имеет место неравенство

$$\left\|D^\alpha_- x\right\|_{C(R)} \le \left(2\|x\|_{C(R)}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\left\|D^\alpha_- \varphi_2\right\|_{C(R)} = \frac{\left\|D^\alpha_- \varphi_2\right\|_{C(R)}}{\|\varphi_2\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(R)}}\|x\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(R)}. \tag{5.7}$$

Для того чтобы получить неравенство (5.5) в общем случае, достаточно применить (5.7) к функции $x/\|x''\|_{C(R)}$.

Неравенство (5.5) обращается в равенство для функций вида $\varphi_{2,h}$, $h > 0$.

Теорема доказана.

Применяя к неравенству (5.5) метод Стейна [32] (см. также [7, с. 84]), получаем его аналог в пространствах $L_p(R)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 5.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для всех функций* $x \in L^2_{p,p}(R)$, $1 \le p < \infty$, *справедливы неравенства*

$$\left\|D^\alpha_\pm x\right\|_{L_p(R)} \le \frac{\left\|D^\alpha_\pm \varphi_2\right\|_{L_\infty(R)}}{\left\|\varphi_2\right\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{L_\infty(R)}} \left\|x\right\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{L_p(R)} \left\|x''\right\|^{\frac{\alpha}{2}}_{L_p(R)}.$$

5.2. Неравенства для производных по Риссу

Производная по Риссу порядка $\alpha \in (0;2)$ функции $x : R \to R$ определяется соотношением

$$\left(D^\alpha x\right)(u) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{x(u+t) - 2x(u) + x(u-t)}{t^{1+\alpha}} dt$$

(если этот интеграл существует); причем при $\alpha = 1$ нормирующий множитель считается равным $(-2/\pi)$.

Для заданного $\lambda > 0$ и $r \in N$ через $\varphi_{\lambda,r}$ будем обозначать r-й $2\pi/\lambda$-периодический интеграл от функции $\varphi_{\lambda,0}(t) := \mathrm{s}gn \sin\lambda t$, имеющий нулевое среднее значение на периоде; $\varphi_r := \varphi_{1,r}$. Функции $\varphi_{\lambda,r}$ называются идеальными сплайнами Эйлера.

Основной результат данного пункта содержится в следующей теореме.

Теорема 5.4. *Пусть* $\alpha \in (0;2)$ *и* $r = 2, 3, \ldots$. *Тогда для всех функций* $x \in L^r_{\infty,\infty}(R)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|D^\alpha x\right\|_{L_\infty(R)} \le \frac{\left\|D^\alpha \overline{\varphi}_r\right\|_{L_\infty(R)}}{\left\|\overline{\varphi}_r\right\|^{1-\frac{\alpha}{r}}_{L_\infty(R)}} \left\|x\right\|^{1-\frac{\alpha}{r}}_{L_\infty(R)} \left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{\alpha}{r}}_{L_\infty(R)}, \tag{5.8}$$

где

$$\overline{\varphi}_r(x) = \begin{cases} \varphi_r\left(x + (r-1)\frac{\pi}{2}\right), & x \in [-\pi,\pi]; \\ \max\limits_t \varphi_r(t), & x \notin [-\pi,\pi]. \end{cases} \tag{5.9}$$

Для $r = 2$ константа $\|D^\alpha \overline{\varphi}_r\|_{L_\infty(R)} / \|\overline{\varphi}_r\|^{1-\frac{\alpha}{r}}_{L_\infty(R)}$ в (5.8) неулучшаема и (5.8) обращается в равенство для функций вида (5.9).

Известные нам методы доказательства теоремы 5.4 существенно отличаются от методов, используемых в остальной части главы. Поэтому результаты данного пункта мы приводим без доказательств. Отметим только, что важную роль здесь играет теорема сравнения Колмогорова для производных [24] (см. также [26, с. 122]). Пусть

$$W^r_\infty(R) = \left\{x \in L^r_{\infty,\infty}(R) : \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(R)} \le 1\right\}.$$

Теорема 5.5. *Пусть $x \in W^r_\infty(R)$ $(r = 1,\ 2,\ \ldots)$ и $\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ для некоторого λ. Тогда*

1) если $x(u) = \varphi_{\lambda,r}(v)$, то $\left|x^{'}(u)\right| \le \left|\varphi^{'}_{\lambda,r}(v)\right|$ (для $r = 1$ в предположении, что $x^{'}(u)$ существует);

2) справедливы неулучшаемые (в условиях теоремы) неравенства

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(R)} \le \left\|\varphi^{(k)}_{\lambda,r}\right\|_{L_\infty(R)} = \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{L_\infty(R)}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ r-1.$$

Кроме того, используется техника сравнения перестановок Харди (см., например, [26]).

Применяя к неравенству (5.8) метод Стейна, получаем его аналог в пространствах $L_p(R)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 5.6. *Пусть $\alpha \in (0;2)$ и $r = 2,\ 3,\ \ldots$. Тогда для всех функций $x \in L^r_{p,p}(R)$, $1 \le p < \infty$, справедливо неравенство*

$$\|D^\alpha x\|_{L_p(R)} \le \frac{\|D^\alpha \overline{\varphi}_r\|_{L_\infty(R)}}{\|\overline{\varphi}_r\|^{1-\frac{\alpha}{r}}_{L_\infty(R)}} \|x\|^{1-\frac{\alpha}{r}}_{L_p(R)} \left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{\alpha}{r}}_{L_p(R)}.$$

5.3. Неравенства для функций класса L^k_s

Для рассмотрения дробных производных Маршо порядка большего 1 используются следующие определения. Для функций, заданных на всей действительной оси или полуоси производные $D^\alpha_+ x$ и $D^\alpha_- x$ (в случае функций, заданных на полуоси, только производная $D^\alpha_- x$) произвольного порядка $\alpha > 0$ определяются следующими соотношениями:

$$D^\alpha_\pm x(u) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\Delta^l_{\pm t} x\right)(u)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad l > \alpha,$$

(если интеграл существует), где

$$\left(\Delta_{\pm t}^{l}x\right)(u)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k}x(u\mp kt)$$

есть разность порядка l с шагом t от функции x,

$$A_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k^{\alpha}$$

$(A_l(\alpha)=0,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$. Отметим, что коэффициент перед интегралом может быть записан в виде

$$-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)A_l(\alpha)}=\int_0^{\infty}\frac{\left(1-e^{-t}\right)^l}{t^{1+\alpha}}dt$$

и, следовательно, положителен.

Для любого $h>0$

$$D_{\pm,h}^{\alpha}x(u)=-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)A_l(\alpha)}\int_h^{+\infty}\frac{\left(\Delta_{\pm t}^{l}x\right)(u)}{t^{1+\alpha}}dt,\qquad l>\alpha,$$

называется усеченной дробной производной порядка $\alpha>0$.

Функции $N_{k,t}(u)=t^{k-1}N_k(u/t)$, $t>0$, $u\in R$, определяются в терминах B-сплайнов (подробнее о B-сплайнах см., например, [41, с. 44, 146]). Пусть $N_1(u)=\chi_{[0,1)}(u)$ — это характеристическая функция интервала $[0,1)$ и для $k=2,\ 3,\ \ldots$

$$N_k(u)=\int_R N_{k-1}(u-v)N_1(v)\,dv=\int_0^1 N_{k-1}(u-v)\,dv.$$

Из определения следует, что $\operatorname{supp}N_{k,t}=[0,kt]$ и $N_{k,t}(u)>0$ для всех $u\in(0,kt)$. Для нас важна возможность следующего интегрального представления k-й разности функции:

$$\left(\Delta_{-t}^{k}x\right)(u)=(-1)^k\int_u^{u+kt}N_{k,t}(v-u)\,x^{(k)}(v)\,dv.$$

Отметим, что функция $N_{k,t}(u)$ при $k=2,\ 3,\ \ldots$ является симметричной относительно центра ее носителя, возрастает по u слева от центра и убывает справа от него. По параметру t эта функция возрастает при любом фиксированном значении u, для $u\in[0,t_1]$, $t_2>t_1$, две функции совпадают: $N_{k,t_2}(u)=N_{k,t_1}(u)$.

Основной результат данного пункта составляет следующая теорема.

Теорема 5.7. *Пусть* $1 \le s \le \infty$, G *есть* R_+ *или* R. *Если* $k \in N$, $\alpha \in \left(0, k - \frac{1}{s}\right) \setminus \mathrm{N}$, *то для любой функции* $x \in L_s^k(G)$ *и для любого* $h > 0$ *выполняются точные неравенства*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha} x\right\|_{C(G)} \le \left\|D_{\pm,h}^{\alpha} x\right\|_{C(G)} + \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) A_k(\alpha)} \left\|x^{(k)}\right\|_{L_s(G)} \cdot \|g\|_{L_{s'}(G)}, \quad (5.10)$$

где

$$g(u) = \int_{\frac{u}{k}}^{h} \frac{N_{k,t}(u)}{t^{1+\alpha}} dt \quad (5.11)$$

(если $G = R_+$, *то неравенство выполняется только для правосторонней производной).*

Неравенство (5.10) *обращается в равенство для любой* k*-й первообразной от функции* $(g(u))^{s'-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $h > 0$, очевидно, получим

$$D_{-}^{\alpha} x(0) = \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) A_k(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\left(\Delta_{-t}^k x\right)(0)}{t^{1+\alpha}} dt =$$

$$= \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) A_k(\alpha)} \int_0^{h} \frac{\left(\Delta_{-t}^k x\right)(0)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) A_k(\alpha)} \int_h^{\infty} \frac{\left(\Delta_{-t}^k x\right)(0)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Рассмотрим первое слагаемое. k-ю разность функции x запишем в виде

$$\left(\Delta_{-t}^k x\right)(0) = (-1)^k \int_0^{kt} N_{k,t}(u)\, x^{(k)}(u) du.$$

Получим

$$\int_0^{h} \frac{\left(\Delta_{-t}^k x\right)(0)}{t^{1+\alpha}} dt = (-1)^k \int_0^{h} \frac{1}{t^{1+\alpha}} \int_0^{kt} N_{k,t}(u)\, x^{(k)}(u) du\, dt.$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$(-1)^k \int_0^{kh} x^{(k)}(u) \int_{u/k}^{h} \frac{N_{k,t}(u)}{t^{1+\alpha}} dt du =$$

$$= (-1)^k \int_0^{kh} x^{(k)}(u) g(u) du,$$

где функция $g(u)$ определена формулой (5.11).

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\left|\int_0^{kh} x^{(k)}(u)g(u)du\right| \le \left\|x^{(k)}\right\|_{L_s(G)} \cdot \|g\|_{L_{s'}(G)}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left|\left(D_-^\alpha x\right)(0)\right| \le \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)A_k(\alpha)} \left\|x^{(k)}\right\|_{L_s} \cdot \|g\|_{L_{s'}} + \left|\left(D_{-,h}^\alpha x\right)(0)\right|,$$

откуда и следует неравенство (5.10).

Доказательство точности этого неравенства является довольно трудным и его здесь не приводим.

Если функция x является ограниченной, можем оценить усеченную производную и получить следующее неравенство типа Колмогорова.

Следствие 5.1. *Для функций $x \in L_s^k(G)$ в условиях предыдущей теоремы справедливо неравенство*

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{C(G)} \le \frac{2^k \|x\|_{C(G)}}{\alpha\Gamma(-\alpha)A_k(\alpha)h^\alpha} + \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)A_k(\alpha)} \left\|x^{(k)}\right\|_{L_s(G)} \cdot \|g\|_{L_{s'}(G)}.$$

Для $k = 2$ получаем такое

Следствие 5.2. *Пусть $s \in (1,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ или $\alpha \in \left(1, 2-\frac{1}{s}\right)$. Для любой функции $x \in L_s^2(R_+)$ и любого $h > 0$ имеет место точное неравенство*

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{C(G)} \le \left\|D_{-,h}^\alpha x\right\|_{C(G)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\left(2-2^\alpha\right)} \left(\int_0^{2h} (g(u))^{s'} du\right)^{\frac{1}{s'}} \|x''\|_{L_s(G)},$$

где

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2u^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\left(1-2^{\alpha-1}\right) - \frac{u}{\alpha h^\alpha}, & 0 < u < h; \\ \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^\alpha u^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{u}{\alpha h^\alpha}, & h \le u \le 2h; \\ 0, & u > 2h. \end{cases}$$

Экстремальная функция определяется так:

$$G_h(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \int\limits_{2h}^v (g(u))^{s'-1}\, dudv, & 0 \le t \le 2h; \\ \\ \int\limits_0^{2h} \int\limits_{2h}^v (g(u))^{s'-1}\, dudv, & t > 2h. \end{cases}$$

§ 6. Неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка функций многих переменных

6.1. Неравенства типа Колмогорова для норм смешанных производных дробного порядка функций многих переменных

Пусть R^m — пространство точек $t = (t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m)$ и $\{e_i\}_{i=1}^m$ — стандартный базис в R^m. Через $C(R^m)$ обозначим пространство всех ограниченных непрерывных функций $x : R^m \to R$ с нормой

$$\|x\|_C = \|x\|_{C(R^m)} := \sup\{|x(t)| :\ t \in R^m\}.$$

Для заданного вектора $t = (t_1,\ ...,\ t_m) \in R^m$ через $\Delta_{t_je_j}x(u)$ обозначим разности функции $x(u)$ по переменной u_j с шагом t_j:

$$\Delta_{t_je_j}x(u) := x(u) - x(u + te_j)$$

и определим соотношением

$$\Delta_t x(u) := \Delta_{t_1e_1}\Delta_{t_2e_2}...\Delta_{t_me_m}x(u)$$

смешанную разность функции $x(u)$ с шагом t.

Пусть $\omega_j(t_j)$, $t_j \ge 0$ $(j = 1,\ ...,\ m)$ — заданные модули непрерывности. Будем рассматривать следующие пространства:

$$H^{j,\omega_j}(\mathrm{R}^m) := \{x \in C(R^m) : \|x\|_{\omega_j} = \|x\|_{H^{j,\omega_j}} = \sup_{t \ne 0} \frac{\left\|\Delta_{t_je_j}x(\cdot)\right\|_C}{\omega_j(|t_j|)} < \infty\}.$$

Если $\omega_j(t_j) = t_j^{\beta}$, $\beta_j \in (0, 1]$, то вместо $H^{j,\omega_j}(R^m)$ будем писать $H^{j,\beta_j}(R^m)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ m$. Будем также писать H^{j,ω_j} вместо $H^{j,\omega_j}(R^m)$.

Для функции $x(u)$, $u \in R^m$, вектора гладкостей $\alpha = (\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = 1,\ ...,\ m$, и вектора распределения знаков $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ ...,\ \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm$, $j = 1,\ ...,\ m$, смешанная производная в смысле Маршо порядка α определяется равенством

$$(D_\varepsilon^\alpha x)(u) := A_\alpha \int_{\mathrm{R}_+^m} \Delta_{\varepsilon t} x(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt,$$

где $u \in R^m$, $A_\alpha = \prod_{j=1}^m A_{\alpha_j}$, $A_{\alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\Gamma(1-\alpha_j)}$, $\varepsilon t := (\varepsilon_1 t_1,\ ...,\ \varepsilon_m t_m)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее условие на $\alpha_j \in (0,1)$ и модули непрерывности $\omega_1(t_1),\ ...,\ \omega_m(t_m)$, $j = 1,\ ...,\ m$,

$$\int_{R_+^m} \min\{1, \omega_1(t_1),\ ...,\ \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt < \infty. \qquad (6.1)$$

Теорема 6.1. *Пусть модули непрерывности* $\omega_1(t_1), \ldots, \omega_m(t_m)$, $j = 1, \ldots, m$, *и числа* $\alpha_j \in (0,1)$ *таковы, что условие* (6.1) *выполнено. Тогда для любой функции* $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}(R^m)$ *и любого* ε *имеет место точное неравенство*

$$\|D_\varepsilon^\alpha x\|_C \leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\|x\|_C, \min_{i=\overline{1,m}} \|x\|_{\omega_i} \omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt. \quad (6.2)$$

Следствие 6.1. *Для любой функции* $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\beta_j}$ *следующее точное неравенство имеет место*

$$\|D_\varepsilon^\alpha x(\cdot)\|_C \leq \frac{2^{m-1}}{\prod_{j=1}^m \Gamma(1-\alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \|x\|_C^{1-\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \prod_{j=1}^m \|x\|_{H^{j,\beta_j}}^{\frac{\alpha_j}{\beta_j}}, \quad (6.3)$$

если $\beta_j \in (0,1]$ *и* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = \overline{1,m}$, *удовлетворяют условию* $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j} <$ < 1.

Для заданных модулей непрерывности $\omega_1,\ ...,\ \omega_m$ через $UH^{j,\omega_j}(R^m)$, $j = 1,\ ...,\ m$, обозначим единичный шар в пространстве H^{j,ω_j}.

Рассмотрим функцию $\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) := \sup_{\substack{x \in \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}, \\ \|x\|_C \leq \delta}} \|D_\varepsilon^\alpha x\|_C. \qquad (6.4)$$

Функция (6.4) называется модулем непрерывности оператора D_ε^α на множестве $\bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}$.

Из теоремы 6.1 вытекает также

Следствие 6.2. *В условиях теоремы 6.1 для любого* $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) = 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta, \min_{i=\overline{1,m}} \omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt. \qquad (6.5)$$

В частности, если $\beta_j \in (0,1]$ *и* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = \overline{1,m}$, *таковы, что* $\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j} < 1$, *то*

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\beta_j}\right) = \frac{2^{m-1}}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-\alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \delta^{1-\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.1. Докажем теорему только в случае $\varepsilon = (+,\ ...,\ +)$, так как для других ε рассуждения аналогичны. Учитывая определение дробной производной, имеем

$$\forall t \in R^m \ |D_\varepsilon^\alpha x(t)| \le A_\alpha \int_{R_+^m} \|\Delta_{\varepsilon t} x(u)\|_C \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt. \qquad (6.6)$$

Будем использовать следующие неравенства:

$$\|\Delta_t x\|_C \le 2^m \|x\|_C,$$

$$\|\Delta_t x\|_C \le 2^{m-1} \left\|\Delta_{t_j e_j} x\right\|_C \le 2^{m-1} \|x\|_{\omega_j} \omega_j(|t_j|), \quad j = 1,\ ...,\ m.$$

Комбинируя эти оценки, получаем

$$\|\Delta_t x\|_C \le 2^{m-1} \min\{2 \|x\|_C ; \min_j (\|x\|_{\omega_j} \omega_j(|t_j|))\}.$$

Применяя последнюю оценку в правой части (6.6), получаем, что $\forall t \in$ $\in R^m$

$$|D_\varepsilon^\alpha x(t)| \le 2^{m-1} A_\alpha \int_{\mathrm{R}_+^m} \min\{2 \|x\|_C, \min_{i=\overline{1,m}} \|x\|_{\omega_i} \omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt. \qquad (6.7)$$

Покажем, что для любой функции $x \in \bigcap_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$ ее дробная производная $D_\varepsilon^\alpha x(t)$ непрерывно зависит от t.

Пусть

$$\omega(x,\theta) := \sup_{|t|<\theta} \|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_C \,,$$

где $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + ... + t_m^2}$, $t = (t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m)$.

Применяя неравенство (6.7) к разности $x(t) - x(t+\delta)$, $\delta \in R^m$, получаем

$$|D_\varepsilon^\alpha x(t) - D_\varepsilon^\alpha x(t+\delta)|_C \leq$$

$$\leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\omega(x,|\delta|), 2\,\|x\|_{\omega_1} \omega_1(t_1), ..., 2\,\|x\|_{\omega_m} \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt.$$

Отметим, что семейство функций

$$\min\{2\omega(x,|\delta|), \|x\|_{\omega_1} \omega_1(t_1), ..., \|x\|_{\omega_m} \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}$$

равномерно стремится к нулю на любом множестве t таких, что $t_j \in$ $\in [\sigma_j, \infty)$ $(\sigma_j > 0,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m)$, и интеграл

$$\int_{\mathrm{R}_+^m} \min\{2\omega(x,|\delta|), 2\,\|x\|_{\omega_1} \omega_1(t_1),\ ...,\ 2\,\|x\|_{\omega_m} \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt$$

равномерно сходится.

Следовательно,

$$|D_\varepsilon^\alpha x(t) - D_\varepsilon^\alpha x(t+\delta)| \to 0,\ |\delta| \to 0,$$

что доказывает непрерывность $D_\varepsilon^\alpha x(t)$ для всех $t \in R^m$.

Таким образом, из (6.7) получаем:

$$\|D_\varepsilon^\alpha x(\cdot)\|_C \leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\,\|x\|_C \,, \min_{i=\overline{1,m}} \|x\|_{\omega_i} \omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt,$$

и неравенство (6.2) доказано. Построим функцию $f(t)$, которая обращает неравенство (6.2) в равенство. Мы определим $f(u)$ для $u \in R_+^m$, а затем продолжим ее на все пространство R^m четным образом по каждой переменной. Для $u = (u_1,\ ...,\ u_m) \in R_+^m$ и $\delta > 0$ положим

$$\omega_j^\delta(u_j) = \min\{\omega_j(u_j),\ 2\delta\}.$$

Рассмотрим вектор $\omega^\delta(u) = (\omega_1^\delta(u_1),\ ...,\ \omega_m^\delta(u_m))$ и положим $v = v(u) := (v_1(u),\ ...,\ v_m(u)) = (\omega^\delta(u))^*$, где $(\omega^\delta(u))^*$ — перестановка чисел

$$\omega_1^\delta(u_1),\ ...,\ \omega_m^\delta(u_m)$$

в невозрастающем порядке. Определим функцию f, полагая для $u \in R_+^m$

$$f(u) = v_1(u) - v_2(u) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u) - \delta.$$

Так как $0 \le \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1}v_j(u) \le 2\delta$, имеем $\|f\|_C \le \delta$. Проверим, что $f \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$, и оценим нормы $\|f\|_{\omega_j}$, $j = 1,\ ...,\ m$. Для этого рассмотрим разность $(h > 0)$

$$f(u + he_j) - f(u) = v_1(u + he_j) - v_2(u + he_j) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u + he_j) -$$

$$-(v_1(u) - v_2(u) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u)).$$

Вектор $u + he_j$ отличается от вектора u только j-й координатой, которая больше, чем j-я координата вектора u. Поэтому $v(u + he_j)$ отличается от $v(u)$ следующим образом. Пусть число $\omega_j^\delta(u_j)$ является ν-й координатой вектора $v(u)$. Тогда найдется $\mu \le \nu$ такое, что $\omega_j^\delta(u_j + he_j)$ является μ-й координатой $v(u + he_j)$. Более того, координаты $v(u + he_j)$ совпадают с координатами $v(u)$, если их номера меньше, чем μ, или больше, чем ν.

Таким образом,

$$f(u + he_j) - f(u) = (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j + h) + (-1)^\mu v_\mu(u) + ... + (-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u) -$$

$$-(-1)^{\mu-1}v_\mu(u) - ... - (-1)^{\nu-2}v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j) =$$

$$= (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j + h) + 2(-1)^\mu v_\mu(u) + ... + 2(-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j).$$

Так как

$$\omega_j^\delta(u_j + h) \ge v_\mu(u) \ge ... \ge v_{\nu-1}(u) \ge \omega_j^\delta(u_j),$$

нетрудно проверить, что

$$\omega_j^\delta(u_j) - \omega_j^\delta(u_j + h) \leq$$

$$\leq (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j+h)+2(-1)^\mu v_\mu(u)+...+2(-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u)-(-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j) \leq$$

$$\leq \omega_j^\delta(u_j + h) - \omega_j^\delta(u_j). \tag{6.8}$$

Учитывая, что

$$\omega_j^\delta(u_j + h) - \omega_j^\delta(u_j) \leq \omega_j(u_j + h) - \omega_j(u_j) \leq \omega_j(h),$$

получаем $f \in H^{j,\omega_j}$ и $\|f\|_{\omega_j} \leq 1$, $j = 1, \ ..., \ m$.

Теперь вычислим $|(D_\varepsilon^\alpha f)(0)|$, где $\varepsilon = (+, \ ..., \ +)$. Для этого мы сначала покажем, что для всех $t \in R_+^m$

$$\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m} f(0,...,0) = -2^{m-1}\min\{2\delta, \omega_1(t_1), \ ..., \ \omega_m(t_m)\} =$$

$$= -2^{m-1}\min\{\omega_1^\delta(t_1), \ ..., \ \omega_m^\delta(t_m)\}.$$

Докажем это с помощью индукции по m. Для $m = 2$ (базис индукции) этот факт проверяется непосредственно.

Вычисляя $\Delta_{t_1}... \ \Delta_{t_m} f(0, \ ..., \ 0)$, можем брать $\Delta_{t_1}, \ ..., \ \Delta_{t_m}$ в любом удобном порядке, так как операторы Δ_{t_i} и Δ_{t_j} коммутируют. Для определенности предположим, что $\omega_1^\delta(t_1)$ — самое большое число среди

$$\omega_1^\delta(t_1), \ ..., \ \omega_m^\delta(t_m).$$

Будем вычислять разность по t_1 в последнюю очередь. Представим разность $\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m} f(0, \ ..., \ 0)$ следующим образом:

$$\Delta_{t_1} \ ... \ \Delta_{t_m} f(0, \ ..., \ 0) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_1+...+j_m}\cdot f(j_1t_1, \ j_2t_2, \ ... \ j_mt_m) =$$

$$= \sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+...+j_m}\cdot f(0, \ j_2t_2, \ ... \ j_mt_m) -$$

$$-\sum_{j_2=0}^{1}\dots\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+\ldots+j_m}\cdot f(t_1,\ j_2t_2,\ \ldots\ j_mt_m).$$

По предположению индукции

$$\sum_{j_2=0}^{1}\dots\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+\ldots+j_m}\cdot f(0,\ j_1t_2,\ \ldots\ j_mt_m)=$$
$$=-2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}.$$

Используя тот факт, что $\omega_1^\delta(t_1)$ — самое большое число среди

$$\omega_1^\delta(t_1),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m),$$

а также определение f, получаем

$$f(t_1,\ j_1t_2,\ \ldots\ j_mt_m)=\omega_1^\delta(t_1)-f(0,\ j_1t_2,\ \ldots\ j_mt_m).$$

Таким образом,

$$-\sum_{j_2=0}^{1}\dots\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+\ldots+j_m}(\omega_1^\delta(t_1)-f(0,\ j_1t_2,\ \ldots\ j_mt_m))=$$
$$=-2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}$$

(здесь мы снова воспользовались предположением индукции).

Окончательно получаем

$$\Delta_{t_1}\ \ldots\ \Delta_{t_m}f(0,\ \ldots,\ 0)=$$

$$=-2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}-2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}=$$

$$=-2^{m-1}\min\{\omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}=-2^{m-1}\min\{\omega_1^\delta(t_1),\ \omega_2^\delta(t_2),\ \ldots,\ \omega_m^\delta(t_m)\}.$$

Для $\varepsilon=(+,\ \ldots,\ +)$ оценим $\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C$ снизу:

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C\geq|(D_\varepsilon^\alpha f)(0,\ \ldots,\ 0)|=2^{m-1}A_\alpha\int_{R_+^m}\prod_{j=1}^{m}t^{-\alpha_j-1}\cdot\Delta_tf(0,\ \ldots,\ 0)\,dt=$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta,\ \omega_1(t_1),\ ...,\ \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t^{-\alpha_j - 1} dt \geq$$

$$\geq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\,\|f\|_C\,,\ \min_{i=\overline{1,m}} \|f\|_{\omega_i}\,\omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt. \qquad (6.9)$$

Комбинируя (6.2) (с функцией f) и (6.9), видим, что для f будет

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C = 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t^{-\alpha_j - 1} dt =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int_{\mathrm{R}_+^m} \min\{2\,\|f\|_C\,, \min_{i=\overline{1,m}} \|f\|_{\omega_i}\,\omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt, \qquad (6.10)$$

т. е. соотношение (6.2) превращается в равенство.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 6.1. Снова доказательство проведем только в случае $\varepsilon = (+, ..., +)$. Из теоремы 6.1 получаем

$$\|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \leq A_\alpha \int_{R_+^m} \|\Delta_{\varepsilon t} x(u)\|_\infty \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt \leq$$

$$\leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{\mathrm{R}_+^m} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} \min\{2\,\|x\|_\infty\,; \min_j (\|x\|_{H^{\beta_j}}\,|t_j|^{\beta_j})\}\ dt. \qquad (6.11)$$

Применим (6.11) к функции

$$y(u) = \frac{1}{b} x(d_1 u_1, ..., d_m u_m), \quad b > 0,\ d_j > 0.$$

Так как

$$\|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha y\|_\infty = \left(\frac{1}{b} \prod_{j=1}^{m} d_j^{\alpha_j} \right) \|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty\,,$$

$$\|y\|_{H^{\beta_j}} = \frac{1}{b} \sup_{t_j \neq 0} \frac{\left\|\Delta_{t_j e_j} x(d_1 u_1, ..., d_m u_m)\right\|_\infty}{|t_j|^{\beta_j}} =$$

$$= \frac{1}{b} d_j^{\beta_j} \sup_{t_j \neq 0} \frac{\left\| \Delta_{t_j e_j} x(d_1 u_1, ..., d_m u_m) \right\|_\infty}{|d_j t_j|^{\beta_j}} = \frac{1}{b} d_j^{\beta_j} \left\| x \right\|_{H^{\beta_j}},$$

то

$$\|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \left(\frac{1}{b} \prod_{j=1}^m d_j^{\alpha_j} \right) \leq$$

$$\leq A_\alpha 2^{m-1} \int_{R_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \min \left\{ \min_j \left(\frac{1}{b} d_j^{\beta_j} t_j^{\beta_j} \left\| x \right\|_{H^{\beta_j}} \right); \frac{2}{b} \left\| x \right\|_\infty \right\} dt.$$

Положим здесь

$$b = 2 \left\| x \right\|_\infty, \quad d_j^{\beta_j} = \frac{b}{\left\| x \right\|_{H^{\beta_j}}} = \frac{2 \left\| x \right\|_\infty}{\left\| x \right\|_{H^{\beta_j}}}.$$

Тогда получим

$$\|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \frac{1}{2 \left\| x \right\|_\infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{2 \left\| x \right\|_\infty}{\left\| x \right\|_{H^{\beta_j}}} \right)^{\frac{\alpha_j}{\beta_j}} \leq$$

$$\leq A_\alpha 2^{m-1} \int_{\mathrm{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}; 1 \right\} dt,$$

т. е.

$$\|\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \leq \left\| x \right\|_\infty^{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \prod_{j=1}^m \left\| x \right\|_{H^{\beta_j}}^{\frac{\alpha_j}{\beta_j}} A_\alpha 2^{m-1} 2^{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot I, \tag{6.12}$$

где

$$I = \int_{\mathrm{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}; 1 \right\} dt.$$

Для вычисления I область интегрирования R_+^m разобьем на множества

$$A_0 = \left\{ t \in R_+^m \; : \; \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}; 1 \right\} = 1 \right\},$$

$$A_i = \left\{ t \in R_+^m \ : \ \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}; 1 \right\} = t_i^{\beta_i} \right\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Так как $R_+^m = \bigcup_{i=0}^m A_i$ и попарные пересечения множеств A_i имеют нулевую меру, то

$$I = \sum_{i=0}^m I_i,$$

где

$$I_i = \int_{A_i} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}; 1 \right\} dt.$$

Ясно, что

$$I_0 = \int_{A_0} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt = \prod_{j=1}^m \int_1^\infty t_j^{-\alpha_j-1} dt_j = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j}.$$

Все интегралы $I_j, \ j = \overline{1, m}$, вычисляются одинаково. Вычислим, например, I_1. Имеем

$$I_1 = \int_{A_1} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} t_1^{\beta_1} dt =$$

$$= \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1} \left(\int_{t_1^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}}^{+\infty} \dots \int_{t_1^{\frac{\beta_1}{\beta_m}}}^{+\infty} \prod_{j=2}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt_m \dots dt_2 \right) dt_1 =$$

$$= \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1} \prod_{j=2}^m \frac{1}{\alpha_j} \frac{1}{t_1^{\alpha_j \frac{\beta_1}{\beta_j}}} dt_1 = \prod_{j=2}^m \frac{1}{\alpha_j} \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1-\sum_{j=2}^m \beta_1 \frac{\alpha_j}{\beta_j}} dt_1 =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}.$$

Аналогично,

$$I_i = \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$I = \sum_{i=0}^{m} I_i = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_j} + \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}} = \frac{\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_j}}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}.$$

Отсюда и из (6.12) получаем (6.3).

Следствие 6.1 доказано.

Доказательство следствия 6.2. Из равенства (6.2) следует, что для любого $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) \le 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Для построенной в доказательстве теоремы 6.1 функции f

$$\|f\|_C \le \delta,\ f \in \bigcap_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}.$$

Используя (6.10), получаем

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) \ge \|D_\varepsilon^\alpha f\|_C =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Следствие доказано.

6.2. Неравенства типа Колмогорова для гиперсингулярных интегралов со знакопостоянной характеристикой

Один из путей обобщения понятия дробного дифференцирования на случай функций многих переменных состоит во введении дробной производной по направлению в форме Маршо (см., например, [16, с. 348]).

Пусть для $u \in R^m$ величина $|u| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}$ – это обычное евклидово расстояние.

Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Через $H^\omega(R^m)$ обозначим множество функций $x \in C(R^m)$, для которых

$$\|x\|_{H^\omega(R^m)} := \sup_{\substack{u,v\in R^n \\ u\neq v}} \frac{|x(u)-x(v)|}{\omega\left(|u-v|\right)} < \infty.$$

Если $\omega(t) = t^\beta,\ 0 < \beta \le 1$, то вместо $H^\omega(R^m)$ будем писать $H^\beta(R^m)$.

Дробная производная порядка $\alpha \in (0;1)$ по направлению $\theta \in R^m$, $|\theta| = 1$, функции $x : R^m \to R$ в форме Маршо определяется формулой

$$\left(D^\alpha_\theta x\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{x(u) - f(u-\xi\theta)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi$$

(если этот интеграл существует).

Другой путь — определение дробного дифференцирования по Риссу (см., например, [16, с. 367–370]).

Дробная производная по Риссу порядка $\alpha \in (0;1)$ функции $x : R^m \to$ $\to R$ определяется формулой

$$\left(D^\alpha x\right)(u) = \frac{1}{d_{m,1}\left(\alpha\right)} \int_{R^m} \frac{x(u) - x(u-\xi)}{|\xi|^{m+\alpha}} d\xi$$

(если этот интеграл существует), где

$$d_{m,1}\left(\alpha\right) = \frac{\pi^{1+m/2}}{2^\alpha \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Еще одно направление обобщения понятия дробного дифференцирования на многомерный случай состоит в рассмотрении гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой.

Для $\alpha \in (0;1)$ эти интегралы определяются следующим образом:

$$\left(D^\alpha_\Omega x\right)(u) = \frac{1}{d_{m,1}\left(\alpha\right)} \int_{R^m} \frac{x(u) - x(u-\xi)}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi,$$

где функция Ω, которая называется характеристикой, является однородной степени 0 по ξ.

Такой подход также позволяет, в частности, с единой точки зрения рассматривать задачи, связанные с производными по направлению и производными Рисса. Дальнейшие результаты приведены для случая гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой.

Для заданного модуля непрерывности ω через $UH^\omega(R^m)$ обозначим единичный шар в пространстве $H^\omega(R^m)$, т. е. множество функций $x \in$ $\in C(R^m)$ таких, что $\|x\|_{H^\omega(R^m)} \le 1$.

Будем рассматривать функцию $\Omega\left(\delta, UH^\omega(R^m)\right)$, $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, UH^{\omega}(R^m)\right) := \sup_{\substack{x \in UH^{\omega}(R^m),\\ \|x\|_{C(R^m)} \le \delta}} \|D^{\alpha}_{\Omega}x\|_{C(R^m)}.$$

Эта функция называется модулем непрерывности оператора D^{α}_{Ω} на множестве $UH^{\omega}(R^m)$.

Пусть B^m_h — шар радиуса h с центром в начале координат в пространстве R^m.

Теорема 6.2. *Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, $\Omega(u)$ — неотрицательная, однородная степени 0 по u функция, интегрируемая на единичной сфере $S_{m-1} \subset R^m$. Пусть также $\alpha \in (0;1)$ таково, что интеграл $\int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho^{1+\alpha}}d\rho$ сходится. Тогда для произвольной функции $x \in H^{\omega}\left(R^m\right)$ и произвольного $h > 0$ справедливо точное неравенство*

$$\|D^{\alpha}_{\Omega}x\|_{C(R^m)} \le \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S_{m-1}} \Omega\left(\xi'\right) d\xi' \left(\|x\|_{H^{\omega}(R^m)} \int_0^1 \frac{\omega\left(\rho h\right)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho + \frac{2\left\|x\right\|_{C(R^m)}}{\alpha}\right) \tag{6.13}$$

с экстремальной функцией

$$f_h(u) = \begin{cases} \omega\left(|u|\right) - \frac{\omega(h)}{2}, & u \in B^m_h; \\ \frac{\omega(h)}{2}, & u \in \mathrm{P}^m \backslash B^m_h. \end{cases} \tag{6.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как норма инвариантна относительно сдвига, а гиперсингулярный интеграл коммутирует со сдвигом, то можно считать, что норма достигается в точке 0. Тогда для произвольного $h > 0$ будем иметь

$$\|D^{\alpha}_{\Omega}x\|_{C(R^m)} = \left|\left(D^{\alpha}_{\Omega}x\right)(0)\right| = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \left| \int_{R^m} \frac{x(0) - x(\xi)}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right| \le$$

$$\le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \left(\int_{B^m_h} \frac{|x(0) - x(\xi)| \cdot \omega(|\xi|)}{\omega(|\xi|)|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{R^m \backslash B^m_h} \frac{|x(0) - x(\xi)|}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right).$$

Используя принадлежность функции x пространству $H^{\omega}\left(R^m\right)$ (и ее ограниченность), получаем

$$\|D_\Omega^\alpha x\|_{C(R^m)} \le$$

$$\le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \left(\|x\|_{H^\omega(R^m)} \int_{B_h^m} \frac{\omega(|\xi|)}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi + \right.$$

$$\left. +2\,\|x\|_{C(R^m)} \int_{R^m \setminus B_h^m} \frac{1}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right) =$$

$$= \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \left(\|x\|_{H^\omega(R^m)} \int_{B_1^m} \frac{\omega(|\xi h|)}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi + \right.$$

$$\left. +2\|x\|_{C(\mathbb{R}^m)} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1^m} \frac{1}{|\xi|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right).$$

Переходя в интегралах к полярным координатам, получаем

$$\|D_\Omega^\alpha x\|_{C(\mathbb{R}^m)} \le$$

$$\le \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{S_{m-1}} \Omega\left(\xi'\right) d\xi' \left(||x||_{H^\omega(R^m)} \int_0^1 \frac{\omega\left(\rho h\right)}{\rho^{m+\alpha}} \rho^{m-1} d\rho + \right.$$

$$\left. +2\,\|x\|_{C(R^m)} \int_1^\infty \frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}} d\rho \right) =$$

$$= \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{S_{m-1}} \Omega\left(\xi'\right) d\xi' \left(\|x\|_{H^\omega(R^m)} \int_0^1 \frac{\omega\left(\rho h\right)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho + \frac{2\,\|x\|_{C(R^m)}}{\alpha} \right),$$

т. е. неравенство (6.13). Покажем, что оно будет точным. Для функции (6.14) имеем

$$\|f_h\|_{C(R^m)} = \frac{\omega(h)}{2}, \|f_h\|_{H^\omega(\mathbb{R}^m)} = 1,$$

так что функция f_h принадлежит пространству $H^\omega\left(R^m\right)$ и для нее имеет место неравенство (6.13):

$$\|D_\Omega^\alpha f_h\|_{C(R^m)} \le \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{S_{m-1}} \Omega\left(\xi'\right) d\xi' \left(\int_0^1 \frac{\omega\left(\rho h\right)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho + \frac{\omega(h)}{\alpha} \right).$$

С другой стороны,

$$\|D^{\alpha}_{\Omega}f_h\|_{C(R^m)} \geq |(D^{\alpha}_{\Omega}f_h)(0)| = \frac{h^{-\alpha}}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S_{m-1}} \Omega(\xi')\,d\xi' \left(\int_0^1 \frac{\omega(\rho h)}{\rho^{\alpha+1}}d\rho + \frac{\omega(h)}{\alpha}\right).$$

Сравнивая полученные оценки для нормы $\|D^{\alpha}_{\Omega}f_h\|_{C(R^m)}$, приходим к равенству, которое и доказывает точность неравенства (6.13).

Теорема доказана.

Следствие 6.3. *Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\Omega(x)$ — неотрицательная, однородная степени 0 по и функция, интегрируемая на единичной сфере $S_{m-1} \subset R^m$. Для произвольной функции $x \in H^{\beta}(R^m)$ справедливо точное неравенство*

$$\|D^{\alpha}_{\Omega}x\|_{C(R^m)} \leq \frac{2^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \beta}{\alpha(\beta-\alpha)d_{m,1}(\alpha)} \int_{S_{m-1}} \Omega(\xi')\,d\xi'\, \|x\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}_{C(R^m)} \|x\|^{\frac{\alpha}{\beta}}_{H^{\beta}(R^m)}$$

с экстремальными функциями вида

$$f_h(u) = \begin{cases} |u|^{\beta} - \frac{h^{\beta}}{2}, & u \in B^m_h; \\ \frac{h^{\beta}}{2}, & u \in R^m \backslash B^m_h, \end{cases}$$

$$h > 0.$$

Следствие 6.4. *Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\Omega(x)$ — неотрицательная, однородная степени 0 по и функция, интегрируемая на единичной сфере $S_{m-1} \subset R^m$. Тогда*

$$\Omega\left(\delta, UH^{\beta}(R^m)\right) = \frac{2^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \beta}{\alpha(\beta-\alpha)d_{m,1}(\alpha)} \int_{S_{m-1}} \Omega(\xi')\,d\xi'\, \|x\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}_{C(R^m)} \|x\|^{\frac{\alpha}{\beta}}_{H^{\beta}(R^m)}.$$

§ 7. Некоторые приложения

В данном параграфе проиллюстрируем некоторые приложения изложенного материала. При этом ограничимся случаем функций многих переменных, рассмотренным в п. 6.1.

7.1. Аппроксимация оператора смешанного дифференцирования дробного порядка ограниченными операторами

Задача вычисления модуля непрерывности оператора на заданном множестве тесно связана с задачей аппроксимации неограниченных операторов ограниченными.

Рассмотрим общую постановку этой задачи.

Пусть X и Y — банаховы пространства, $L(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов $S : X \to Y$ и пусть $A : X \to Y$ — оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D_A \subset X$. Пусть $Q \subset D_A$ — некоторый класс элементов.

Для заданного числа $N > 0$ величина

$$E_N(A,Q) = \inf_{\substack{S \in L(X,Y) \\ \|S\| \le N}} \sup_{x \in Q} \|Ax - Sx\|_Y \tag{7.1}$$

называется наилучшим приближением оператора A линейными ограниченными операторами $S : X \to Y$ такими, что $\|S\| = \|S\|_{X\to Y} \le N$, на множестве Q.

Задача состоит в том, чтобы найти величину (7.1) и найти экстремальный оператор, т.е. оператор, реализующий точную нижнюю грань в правой части (7.1).

Функция

$$\Omega(\delta, Q) := \sup_{\substack{x \in Q \\ \|x\|_X \le \delta}} \|Ax\|_Y, \ \ \delta > 0,$$

называется модулем непрерывности оператора A на множестве Q.

Отметим, что это определение обобщает приведенное выше определение модуля непрерывности оператора D_ε^α на множестве $\bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}$.

Ясно, что задача вычисления функции $\Omega(\delta, Q)$ для заданного оператора — это абстрактная версия задачи о неравенстве типа Колмогорова. Стечкин доказал, что

$$E_N(A,Q) \ge \sup_{\delta \ge 0} \{\Omega(\delta, Q) - N\delta\}. \tag{7.2}$$

Именно неравенство (7.2) устанавливает связь между задачей Стечкина и неравенствами типа Колмогорова.

Следующая теорема дает решение задачи Стечкина для оператора D_ε^α на классе $\bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}$.

Теорема 7.1. *Пусть строго возрастающие модули непрерывности $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$ и числа $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, ..., m$, таковы, что условие (6.1) выполнено. Пусть $h^N = (h_1^N, \dots, h_m^N) \in R_+^m$ таково, что*

$$\omega_1(h_1^N) = \ldots = \omega_m(h_m^N)$$

и

$$\frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^m (h_j^N)^{-\alpha_j} = N. \tag{7.3}$$

Пусть

$$G(h^N) := \{u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m \ : \ |u_1| \geq h_1^N, \dots, |u_m| \geq h_m^N\}.$$

Тогда

$$E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) = 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m \setminus G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Кроме того, оператор

$$B_{h^N} x(u) = A_\alpha \int\limits_{G(h^N)} \Delta_{\varepsilon t} x(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt$$

является экстремальным.

Отметим, что оценка снизу для $E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right)$ будет получена с помощью следствия 6.2. Для оценки сверху величины

$$E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right)$$

оценим сверху величину $\|D_\varepsilon^\alpha x - B_h x\|_C$ на классе $\bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}$.

Доказательство теоремы 7.1. Пусть снова $\varepsilon = (+, ..., +)$. Напомним, что для заданного $N > 0$ вектор $h^N = (h_1^N, h_2^N, ..., h_m^N) \in R_+^m$ определяется следующими условиями:

$$\omega_1(h_1^N) = \ldots = \omega_m(h_m^N), \qquad \frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^m (h_j^N)^{-\alpha_j} = N$$

и

$$G(h^N) := \{u = (u_1, \ldots, u_m) \in R^m \ : \ |u_1| \geq h_1^N, \ldots, |u_m| \geq h_m^N\}.$$

Определим оператор B_{h^N}, полагая

$$B_{h^N} x(u) = A_\alpha \int_{G_N^h} \Delta_{\varepsilon t} x(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt.$$

Покажем, что B_{h^N} — ограниченный оператор из $C(R^m)$ в $C(R^m)$, и что $\|B_{h^N}\| \leq N$. Действительно, для любого $x \in C(R^m)$

$$\|B_{h^N}(x)\|_C \leq 2^m A_\alpha \int_{G(h^N)} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt \cdot \|x\|_C =$$

$$= \frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^m \left(h_j^N\right)^{-\alpha_j} \|x\|_C = N \|x\|_C .$$

Для произвольного $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$ оценим отклонение $\|D_\varepsilon^\alpha x - B_{h^N} x\|_C$. Имеем

$$\|D_\varepsilon^\alpha x - B_{h^N} x\|_C \leq \left\| A_\alpha \int_{R_+^m \setminus G(h^N)} \Delta_t x(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt \right\|_C \leq$$

$$\leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m \setminus G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} dt.$$

Мы получили оценку величины $E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right)$ сверху.

Оценим эту величину снизу. Из (7.2) получаем

$$E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \geq \sup_{\delta > 0} \left\{\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) - N\delta\right\}. \tag{7.4}$$

Используя следствие 6.2 и условие (7.3), находим

$$E_N\left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \geq$$

$$\geq \sup_{\delta>0} \left\{ 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt - \right.$$

$$\left. -2^m A_\alpha \delta \int_{G(h^N)} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1} dt \right\}. \tag{7.5}$$

Положим

$$\delta_N = \omega_1(h_1^N) = ... = \omega_m(h_m^N).$$

Отметим, что для $t \in G(h^N)$

$$\min\{2\delta_N, \omega_1(t_1), ..., \omega(t_m)\} = 2\delta_N$$

и для $t \in R_+^m \backslash G(h^N)$

$$\min\{2\delta_N, \omega_1(t_1), ..., \omega(t_m)\} = \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega(t_m)\}.$$

Из (7.5) выводим

$$E_N \left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j} \right) \geq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\delta_N, \min_{i=\overline{1,m}} \omega_i(t_i)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1} dt -$$

$$-2^{m-1} A_\alpha \int_{G(h^N)} \min\{2\delta_N, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1} dt =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int_{\mathrm{R}_+^m \backslash G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1} dt.$$

Мы получили требуемую оценку снизу.

Теорема доказана.

7.2. Решение задачи Колмогорова

Рассмотрим задачу Колмогорова в следующей постановке. Требуется найти необходимые и достаточные условия на числа $M_0, M_\alpha, M_{\omega_1}, ..., M_{\omega_m}$, которые обеспечивают существование функции

$$x \in \bigcap_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}(R^m)$$

такой, что

$$\|x\|_{C(R^m)} = M_0,\ \|D_\varepsilon^\alpha x\|_{C(R^m)} = M_\alpha,\ \|x\|_{\omega_j} = M_{\omega_j}\ (j = 1, 2, ..., m).$$

Теорема 7.2. *Пусть модули непрерывности* $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$ *и числа* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, ..., m$, *таковы, что* (6.1) *выполняется, и пусть числа* $M_0, M_\alpha, M_{\omega_1}, ..., M_{\omega_m}$ *заданы. Для того чтобы нашлась функция* $x \in \bigcap_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}(R^m)$ *такая, что*

$$M_0 = \|x\|_{C(R^m)},\ M_\alpha = \|D_\varepsilon^\alpha x\|_{C(R^m)},$$

$$M_{\omega_1} = \|x\|_{H^{1,\omega_1}(R^m)}, ..., M_{\omega_m} = \|x\|_{H^{m,\omega_m}(R^m)},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$M_\alpha \le 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2M_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова рассмотрим только случай $\varepsilon = (+, ..., +)$. Для $\delta > 0$ и модулей непрерывности $\omega_1, ..., \omega_m$, через $f(\cdot; \delta; \omega_1, ..., \omega_m)$ обозначим функцию, построенную в доказательстве теоремы 6.1. Предположим, что неравенство (7.6) имеет место и выберем $0 < L_0 \le M_0$ так, чтобы

$$M_\alpha = 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2L_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Для функции $f(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)$ имеем

$$\|f(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_{C(R^m)} \le L_0 \le M_0.$$

Легко проверить, что

$$\|f(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_{H^{j,\omega_j}(R^m)} = M_{\omega_j},\ \ j = 1, ..., m.$$

Как и в доказательстве теоремы 6.1, получаем

$$\|D_\varepsilon^\alpha f(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_{C(R^m)} =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2L_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1} dt = M_\alpha.$$

Теперь определим функцию

$$x(u) = f(u; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m) + M_0 - \|f(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_{C(R^m)}.$$

Очевидно, что $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$ и

$$\|x\|_{C(R^m)} = M_0,\ \|D_\varepsilon^\alpha x\|_{C(R^m)} = M_\alpha,\ \|x\|_{H^{j,\omega_j}(R^m)} = M_{\omega_j},\ j = 1, 2, ..., m.$$

Теорема 7.2 доказана.

Список литературы

1. *Application* of fractional calculus in Phisics Hitler R., ed, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scietific, 2000.

2. *Arestov V.V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory, Banach center publications. – 1979. – V. 4. – P. 19-34.

3. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 88—124.

4. *Арестов В.В., Габушин В.Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42-63.

5. *Бабенко В.Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 1. – С. 9-29.

6. *Бабенко В.Ф.* О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Допов. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 7-11.

7. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – К.: Наук. думка, 2003. – 590 с.

8. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Proc. of Mannheim Conf. "Multivariate Approximation and Splines 1996 / G. Nurnberger, J. Schmidt, G. Walz (eds.). – 1997. – P. 1-12.

9. *Бабенко В.Ф., Левченко Д.О.* Нерівності типу Колмогорова для гіперсингулярних інтегралів зі знакозмінною характеристикою // В кн. "Проблеми математичного моделювання". Тези доповідей міждержавної науково-методичної конференції (травень 2008 р., м. Дніпродзержинськ), Дніпродзержинськ, 2008. – С. 7-8.

10. *Бабенко В.Ф., Матвеева Т.В.* Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Вісник Дніпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – 2008. – Вип. 6. – С. 16-20.

11. *Babenko V.F., Pichugov S.A.* Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables// East J. on Approx. – 2007. – V. 13, N 3. – P. 321-329.

12. *Бабенко В.Ф., Парфинович Н.В., Пичугов С.А.* Неравенства типа Колмогорова для норм дробных производных функций многих переменных и некоторые их приложения // В кн. "Проблеми математичного моделювання". Тези доповідей міждержавної науково-методичної конференції (травень 2008 р., м. Дніпродзержинськ), Дніпродзержинськ, 2008. – С. 10-11.

13. *Бабенко В.Ф., Парфинович Н.В., Пичугов С.А.* Точные неравенства типа Колмогорова для норм дробных производных функций многих переменных // В кн. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". Тези доповідей міжнародної наукової конференції (червень, 2008 р., Мелітополь), Інститут математики НАН України, 2008. – С. 12.

14. *Бабенко В.Ф., Чурілова М.Г.* Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку // Вісник Дніпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 16-20.

15. *Babenko V.F., Churilova M.G.* On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives // East J. on Approx. – 2002. – V. 8, N 4. – P. 437-446.

16. *Бабенко В.Ф., Чурилова М.Г.* О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных в многомерном случае // Вісник Дніпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – 2003. – Вип. 8. – С. 26-30.

17. *Babenko V.F., Churilova M.G.* Kolmogorov type inequalities for hipersingular integrals with homogeneous characteristic // Banach Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 1, N 1. – P. 66-77.

18. *Бабенко В.Ф., Чурилова М.Г.* Неравенства типа Колмогорова для дробных производных на оси и полуоси // В кн. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". Тези доповідей міжнародної наукової конференції (червень, 2008 р., Мелітополь), Інститут математики НАН України, 2008. — С. 15.

19. *Бабенко В.Ф., Чурилова М.Г.* Неравенства типа Колмогорова для дробных производных на оси // В кн. "Проблеми математичного моделювання". Тези доповідей міждержавної науково-методичної конференції (травень 2008 р., м. Дніпродзержинськ), Дніпродзержинськ, 2008. — С. 15—17.

20. *Буслаев А.П., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных в многомерном случае // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, № 1. – С. 59-73.

21. *Гейсберг С.П.* Обобщение неравенства Адамара. Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций // Сб. научных трудов ЛМИ. – 1965. – Т. 50. – С. 42-54.

22. *Динь-Зунг, Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных в L_2-метрике // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. – 1979. – Т. 2. – С. 7-11.

23. *Kwong M.K., Zettl A.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences, Berlin etc. Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. V. 1536), 1992.

24. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Ученые записки МГУ. Математика. – 1939. — Т. 30, № 3. – С. 3-13 (см. также Избранные труды А. Н. Колмогорова. – М.: Наука. – 1985. – С. 252-263).

25. *Коновалов В.Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, № 1. – С. 67-78.

26. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

27. *Magarill-Il'jaev G.G., Tikhomirov V.M.* On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal.Math. – 1981. – V. 7. – P. 37-47.

28. *Marchaud A.* Sur de derivћes et sur les diffћrences des fonctions de variables rћelles // J. Math. Pures et Appl. – 1927. – V. 6. – P. 337-425.

29. *Mitrinović D.S., Pecarić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and derivatives // Dordrecht, Boston, London: Kluver Academic Publishers, 1991.

30. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. – N. Y., London, Acad. Press, 1974. – 234 P.

31. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

32. *Stein E.M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – V. 65, N 3. – P. 582-592.

33. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137-148.

34. *Субботин Ю.Н.* Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами. Докт. дисс. – Свердловск, 1973.

35. *Тайков Л.В.* Уточнение неравенства Харди, содержащего оценку промежуточной производной функции// Мат. заметки. – 1991. – **50**, № 4. – С. 114-122.

36. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 5. – С. 676-689.

37. *Тимошин О.А.* Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344, № 1. – С. 20-22.

38. *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. – URSS, 2006. – 456 с.

39. *Чурилова М.С.* О неравенствах типа Ландау–Колмогорова для дробных производных на отрезке // Вiсник Днiпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – 2005. – № 6, вип. 10. – С. 127-134.

40. *Чурилова М.С.* О неравенствах для дробных производных банаховозначных функций из гельдеровых пространств // Вiсник Днiпропетровськ. ун-та. Сер. Математика. – 2006. – № 11, вип. 10. – С. 120-127.

41. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

ГЛАВА 3

СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ P(Г) НА ГРАНИЦЕ

§1. Введение

Пусть X — хаусдорфово компактное топологическое пространство. Обозначение $C(X)$ будем использовать для алгебры всех непрерывных *комплексных* функций f на X с нормой

$$\|f\|_X := \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

Равномерными алгебрами на X будем называть равномерно замкнутые подалгебры алгебры $C(X)$, содержащие константы и разделяющие точки из X. Алгебра *действительных* непрерывных на X функций будет обозначаться через $C_{\mathbb{R}}(X)$. Считаем, что $C_{\mathbb{R}}(X) \subseteq C(X)$ и что норма на $C_{\mathbb{R}}(X)$ индуцирована из $C(X)$. В этой главе нас будет интересовать алгебра $\mathbf{P}(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, являющаяся равномерным замыканием полиномов от z на Γ—границе некоторой односвязной ограниченной области $G \subseteq \mathbb{C}$. Будет установлено, что для алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ теорема Риссов об абсолютной непрерывности мер, теорема Вермера о максимальности, а также совпадение множеств пика и интерполяционных множеств с множествами гармонической меры ноль возможно только, если G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связно. Для таких областей G будет доказан также новый вариант теоремы Рудина о м.м. алгебрах (maximum modulus algebras) и некоторые другие результаты.

§ 2. Теорема Риссов. Ортогональность полиномам и абсолютная непрерывность мер

Пусть $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг с центром в нуле, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, а m — линейная нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Так как мера m в этом случае совпадает с гармонической мерой на $\partial\mathbb{D}$, взятой относительно точки 0, то знаменитая теорема Ф. и М. Риссов об абсолютной непрерывности аналитических мер [12, гл. II] может быть записана в следующем виде.

Теорема 2.1. *Если μ — конечная комплексная борелевская мера на $\partial\mathbb{D}$, для которой*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} z^n \, d\mu(z) = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

то μ абсолютно непрерывна относительно ω, $\mu << \omega$.

2.1. Постановка задачи и основной результат

Пусть теперь G — односвязная, ограниченная область на плоскости, z_0 — точка из G, $\Gamma = \partial G$ — граница G и ω — гармоническая мера на Γ относительно точки z_0. В теореме 2.2, приведенной ниже, дается ответ на следующий вопрос. Какие условия нужно наложить на геометрию области G, для того, чтобы сформулированная выше теорема братьев Рисс оставалась верной после замены круга $\mathbb{D}$ областью G и точки 0 точкой z_0? Оказывается, что искомыми необходимыми и достаточными условиями являются каратеодориевость области G и связность дополнения к $\overline{G}$.

Напомним некоторые обозначения и определения. Как обычно, $\mathbf{P}(\overline{G})$– это алгебра функций, допускающих равномерную аппроксимацию полиномами от z на множестве $\overline{G}$ — замыкании области G. Положим

$$\mathbf{P}_0(\overline{G}) := \{f \in \mathbf{P}(\overline{G}) : f(z_0) = 0\},$$

$$\mathbf{P}(\Gamma) := \{f : f = g|_\Gamma,\ g \in \mathbf{P}(\overline{G})\},$$

$$\mathbf{P}_0(\Gamma) := \{f : f = g|_\Gamma,\ g \in \mathbf{P}_0(\overline{G})\},$$

т.е. $\mathbf{P}_0(\overline{G})$ — класс функций из $\mathbf{P}(\overline{G})$, обращающихся в ноль в точке z_0, а $\mathbf{P}(\Gamma)$ и $\mathbf{P}_0(\Gamma)$ есть множества следов функций из $\mathbf{P}(\overline{G})$ и, соответственно, из $\mathbf{P}_0(\overline{G})$ на Γ. Кроме того, обозначим через $\mathbf{P}_0^{\perp}(\Gamma)$ множество всех комплексных мер Радона, сосредоточенных на Γ и ортогональных $\mathbf{P}_0(\Gamma)$, т.е.

$$\left(\mu \in \mathbf{P}_0^{\perp}(\Gamma)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall f \in \mathbf{P}_0(\Gamma) : \int f\, d\mu = 0\right) \ \& \ (\operatorname{supp} \mu \subseteq \Gamma)\right).$$

Отметим, что здесь и далее Γ есть граница области G в естественной топологии плоскости и что эта граница, вообще говоря, не совпадает с границей G, получающейся пополнением простыми концами по Каратеодори. Хорошо известно, что любая односвязная ограниченная область является регулярной для задачи Дирихле. Следовательно,

$$\forall f \in C(\Gamma) \ \exists! \hat{f} \in C\left(\overline{G}\right) \bigcap C^2(G) : \left(\hat{f}|_{\Gamma} = f\right) \ \& \ \left(\forall z \in G : \nabla \hat{f}(z) = 0\right),$$

где ∇ — оператор Лапласа. Рассмотрим на $C(\Gamma)$ непрерывный линейный функционал $\varphi_0 : C(\Gamma) \to \mathbb{C}$ такой, что

$$\forall f \in C(\Gamma) : \varphi_0(f) = \hat{f}(z_0). \tag{2.1}$$

По теореме Рисса (см., например, [16, с. 112]) для любого непрерывного линейного функционала на $C(\Gamma)$ существует единственная мера Радона, представляющая этот функционал. Следуя [16], под гармонической мерой ω на Γ относительно точки $z_0 \in G$ мы понимаем меру, представляющую линейный функционал φ_0, т.е.

$$\forall f \in C(\Gamma) : \varphi_0(f) = \int_{\Gamma} f\, d\omega = \hat{f}(z_0). \tag{2.2}$$

Через G_∞ всюду в дальнейшем будем обозначать неограниченную компоненту связности множества $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$. Напомним, что G называется областью Каратеодори [5, с. 25], если Γ совпадает с внешней границей области G, т.е

$$\partial G = \partial G_\infty.$$

Следующая теорема полностью характеризует ограниченные односвязные области, для которых

$$\left(\mu \in P_0^{\perp}(\Gamma)\right) \Rightarrow (\mu << \omega).$$

Теорема 2.2. *Пусть G — односвязная, ограниченная область на плоскости, z_0 — точка из G, $\Gamma = \partial G$ — граница G, и ω — гармоническая мера на Γ относительно точки z_0. Все меры $\mu \in \mathbf{P}_0^{\perp}(\Gamma)$ являются абсолютно непрерывными относительно гармонической меры ω тогда и только тогда, когда G – область Каратеодори и $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ – связно.*

Эта теорема является основным результатом настоящего параграфа и будет неоднократно использована в дальнейшем.

2.2. Леммы и доказательства

Перед тем как переходить к доказательству теоремы 2.2, остановимся на необходимых леммах.

Лемма 2.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область на плоскости и z_0 — точка из G. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Мера ω не имеет атомов, т.е.*

$$\forall x \in \Gamma : \omega\left(\{x\}\right) = 0,$$

где $\{x\}$ — одноточечное множество, состоящее из единственной точки x.

(ii) *Пусть E_1 — множество достижимых граничных точек на Γ, тогда существует множество E типа F_σ такое, что*

$$E \subseteq E_1, \quad \omega(E) = 1.$$

Замечание 2.1.Точка $z_1 \in \Gamma$ называется достижимой (в области G), если она является концом некоторой жордановой дуги γ, стремящейся к z_1, так, что $\gamma\setminus\{z_1\} \subseteq G$.

Доказательство леммы 2.1. Проверим *(ii)*. Пусть ψ — функция, отображающая конформно и однолистно единичный круг $\mathbb{D}$ на область G и нормированная условиями

$$\psi(z_0) = z_0, \qquad \psi'(z_0) > 0.$$

Так как ψ является ограниченной аналитической функцией, то по теореме Фату она имеет угловые пределы m-почти всюду на $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Предельная функция $\tilde{\psi}$ ограничена и измерима по Лебегу. Используя C-свойство

Лузина, построим последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ компактных подмножеств окружности $\mathbb{T}$ так, что:

(a) $T_k \supseteq T_l$ при $k \geq l$;

($б$) ограничение $\tilde{\psi}|_{T_k}$ непрерывно при любом k и

$$\lim_{k\to\infty} m(T_k) = 1.$$

Положим

$$B := \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, \qquad E := \tilde{\psi}\,(B)\,. \tag{2.3}$$

Легко показать, что все точки множества E достижимы, т.е. $E \subseteq E_1$. Так как

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}\ (T_k)$$

и функция $\tilde{\psi}$ непрерывна на компакте T_k, то $\tilde{\psi}(T_k)$ также являются компактами и, следовательно, E имеет тип F_σ. Докажем, что $\omega(E) = 1$. Для этого рассмотрим следующую меру $\tilde{\omega}$ на σ-алгебре $\mathbf{A}$ борелевских подмножеств множества Γ. Положим

$$\tilde{\omega}(A) := m((\tilde{\psi}|_B)^{-1}(A)) \tag{2.4}$$

для любого $A \in \mathbf{A}$. Проверим, что ω и $\tilde{\omega}$ совпадают на $\mathbf{A}$. Для этого достаточно установить, что

$$\int_\Gamma f(z)\, d\tilde{\omega}(z) = \int_\Gamma f(z)\, d\omega(z) \tag{2.5}$$

при всех $f \in C(\Gamma)$. В силу (2.1), (2.2)

$$\hat{f}(0) = \int_\Gamma f(z)\, d\omega(z)$$

для всех $f \in C(\Gamma)$. Функция $\hat{f}$ является гармонической в G и непрерывной в $\overline{G}$. Следовательно, суперпозиция $\hat{f} \circ \psi$ — ограниченная гармоническая функция в единичном круге $\mathbb{D}$. В силу (б) и (2.3) эта функция имеет некасательные предельные значения во всех точках $\eta \in B$ и эти пределы совпадают с $f(\tilde{\psi}(\eta))$ для любой $\eta \in B$. Так как ограниченная гармоническая функция в единичном круге может быть восстановлена по ее предельным значениям на множестве полной меры посредством интеграла Пуассона–Лебега (см., например, [14, с. 63]), то

$$\hat{f}\left(\psi\left(w\right)\right) = \int_{\mathbb{T}} Re\left(\frac{\eta + w}{\eta - w}\right) f\left(\tilde{\psi}\left(\eta\right)\right)\,dm\left(\eta\right)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. В частности, принимая во внимание нормализацию функции ψ, получаем при $w = 0$

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}} f(\tilde{\psi}(\eta))\,dm(\eta).$$

Наконец, делая «замену переменных» (2.4), получаем

$$\int_{\mathbb{T}} f(\tilde{\psi}(\eta))\,dm(\eta) = \int_{\Gamma} f(z)\,d\tilde{\omega}(z),$$

что и доказывает равенство (2.5). Теперь легко завершить доказательство утверждения *(ii)*. Действительно,

$$\omega(E) = \tilde{\omega}(E) = m(B) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(T_k) = 1.$$

Для доказательства *(i)* предположим, что существует $x \in \Gamma$ такая, что $\omega(x) > 0$. Тогда точка x достижима и, учитывая (2.4), можно утверждать, что для некоторого борелевского множества $B_x \subseteq B$ мы имеем

$$m(B_x) > 0 \quad \text{и} \quad \forall \eta \in B_x : \tilde{\psi}(\eta) = x.$$

Последнее противоречит граничной теореме единственности для аналитических функций [14, с. 70] и доказывает *(i)*.

Две следующие леммы — это хорошо известные результаты из теории алгебр Дирихле: лемма 2.2 — один из абстрактных вариантов теоремы братьев Рисс, а лемма 2.3 — часть теоремы Сегё–Колмогорова–Крейна.

Напомним, что равномерная алгебра $\mathbf{B}$ на хаусдорфовом компакте X называется алгеброй Дирихле, если множество

$$Re(\mathbf{B}) := \{Re(f) : f \in \mathbf{B}\}$$

равномерно плотно в $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Пусть $\mathbf{B}_0$ — максимальный идеал алгебры Дирихле $\mathbf{B}$ на X, $\varphi_0 : \mathbf{B} \to$ $\to \mathbb{C}$ – мультипликативный линейный функционал, порожденный идеалом $\mathbf{B}_0$, а μ – произвольная конечная регулярная комплексная борелевская мера на X. Обозначим через ω меру, представляющую φ_0. Пусть

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

есть декомпозиция Лебега меры μ на абсолютно непрерывную μ_a и сингулярную μ_s компоненты относительно меры ω.

Лемма 2.2. *Если мера μ ортогональна максимальному идеалу $\mathbf{B}_0$, то ее абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты тоже ортогональны $\mathbf{B}_0$:*

$$(\mu \perp \mathbf{B}_0) \Rightarrow ((\mu_a \perp \mathbf{B}_0) \& (\mu_s \perp \mathbf{B}_0)).$$

Доказательство можно найти, например, в [6, с. 66].

В соответствии с общепринятой терминологией [2, с. 11], любая функция $y \in \mathbf{B}$, для которой существует функция $p \in \mathbf{B}$ такая, что при всех $t \in X$

$$y(t)p(t) = 1,$$

называется единичным элементом алгебры $\mathbf{B}$.

Лемма 2.3. *Если μ – положительная конечная мера на X,*

$$d\mu_a = \frac{d\mu_a}{d\omega} d\omega$$

и y – единичный элемент алгебры $\mathbf{B}$, то

$$\inf_{f \in \mathbf{B}_0} \int_X |y - f|^2 \, d\mu = \inf_{f \in \mathbf{B}_0} \int |y - f|^2 \, d\mu_a. \tag{2.6}$$

Замечание 2.2. Достаточно общая формулировка теоремы Сегё–Колмогорова–Крейна, которой мы будем неоднократно пользоваться в этой главе, может быть найдена в [18, с. 236]. Формула (2.6) при $y(t) \equiv 1$ является частным случаем этой теоремы. Доказательство, приведенное ниже, показывает, как получить лемму 2.3 из этого стандартного случая.

Доказательство леммы 2.3. Так как $\mathbf{B}_0$ — идеал алгебры $\mathbf{B}$, то

$$y\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}_0,$$

где $y\mathbf{B}_0 = \{yx : x \in \mathbf{B}_0\}$. В силу того, что y является единичным элементом алгебры $\mathbf{B}$, любой элемент $x \in \mathbf{B}_0$ представляется в виде произведения

$$x = y \cdot z,$$

где $z \in \mathbf{B}_0$. Следовательно, $y\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{B}_0$, но тогда $y\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0$. Последнее равенство дает соотношение

$$\inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |y-f|^2\, d\mu = \inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |1-f|^2\, |y|^2\, d\mu.$$

Рассмотрим меру ν, для которой

$$d\nu = |y^2|d\mu.$$

Вычисляя производную Радона–Никодима, находим

$$d\nu_a = |y^2|d\mu_a.$$

Теперь, используя теорему Сегё–Колмогорова–Крейна, получаем

$$\inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |y-f|^2 d\mu = \inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |1-f|^2 d\nu =$$

$$= \inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |1-f|^2 d\nu_a = \inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |y-yf|^2 d\mu_a =$$

$$= \inf_{f\in\mathbf{B}_0} \int_X |y-f|^2 d\mu_a.$$

Равенство (2.6) доказано.

Следующее утверждение представляет собой специальный случай хорошо известной теоремы Уолша–Лебега.

Теорема 2.3. *Для того чтобы любая функция f, непрерывная на компактном подмножестве X плоскости $\mathbb{C}$ и гармоническая в $Int X$, могла быть равномерно на X аппроксимирована гармоническими полиномами, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\partial X = \partial Pc(X),$$

где $Pc(X)$ — полиномиально-выпуклая оболочка X.

Доказательство можно найти в [6, с. 56] или [37].

Лемма 2.4. *Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости и $\Gamma = \partial G$. Следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) *G является областью Каратеодори.*

(ii) $\mathbf{P}(\Gamma)$ *есть алгебра Дирихле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно использовать сформулированную выше теорему Уолша–Лебега, положив $X = \partial G$. Так как, в силу определения области Каратеодори, имеется равенство $\partial G = \partial G_\infty$, а

$$Pc(\partial G) = \mathbb{C} \backslash G_\infty,$$

то для построения полиномиально-выпуклой оболочки плоского компакта достаточно просто «заклеить в нем дыры», т.е. присоединить все ограниченные компоненты связности его дополнения.

Обозначим через $\mathbf{A}(\overline{G})$ подалгебру тех функций из $C(\overline{G})$, которые являются голоморфными в G. Из теоремы Мергеляна следует, что если G – область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ – связно, то

$$\mathbf{P}(\overline{G}) = \mathbf{A}(\overline{G}).$$

Положим кроме того,

$$\mathbf{A}_0(\overline{G}) := \{f \in \mathbf{A}(\overline{G}) : f(z_0) = 0\},$$

$$\mathbf{A}(\Gamma) := \{f : f = g|_\Gamma,\ g \in \mathbf{A}(\overline{G})\},$$

$$\mathbf{A}_0(\Gamma) := \{f : f = g|_\Gamma,\ g \in \mathbf{A}_0(\overline{G})\}.$$

Следующая теорема есть «половина» теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Если* $\mathbf{A}(\Gamma)$ *– алгебра Дирихле на* Γ *и* $\mu \in \mathbf{A}_0^\perp(\Gamma)$, $supp\mu \subseteq \subseteq \Gamma$, *то* $\mu << \omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\mathbf{A}_0(\Gamma)$ есть максимальный идеал алгебры $A(\Gamma)$ и ω – представляющая мера мультипликативного линейного функционала, соответствующего $A_0(\Gamma)$. В соответствии с леммой 2.2, допущение $\mu \perp A_0(\Gamma)$ влечет соотношения

$$\mu_a \perp A_0(\Gamma) \quad \text{и} \quad \mu_s \perp A_0(\Gamma),$$

где $\mu = \mu_a + \mu_s$ – декомпозиция Лебега μ относительно ω. Покажем, что сингулярная часть меры μ равна нулю,

$$\mu_s = 0. \tag{2.7}$$

(Отметим, что в случае произвольных алгебр Дирихле последнее равенство не обязано выполняться. Контрпример может быть найден в [8, с. 90].) Для доказательства (2.7) заметим, что как следует из теоремы Витушкина (см., например, [5, с. 284], [3]), любая непрерывная функция на Γ может быть равномерно аппроксимирована рациональными функциями с полюсами вне Γ. Следовательно, достаточно проверить, что преобразование Коши меры μ_s обращается в нуль всюду вне Γ, т.е.

$$\hat{\mu}_s(\zeta) := \int_\Gamma \frac{d\mu_s(z)}{\zeta - z} = 0 \tag{2.8}$$

для всех $\zeta \notin \Gamma$.

Пусть вначале $\zeta \notin \overline{G} = G \bigcup \Gamma$. Тогда функция $y(z) = (\zeta - z)^{-1}$ является единицей алгебры $\mathbf{A}(\Gamma)$. По лемме 2.3 существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty,\ f_n \in \mathbf{A}_0(\Gamma)$ такая, что для сингулярной положительной меры τ, равной полной вариации меры μ_s, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \left|(\zeta - z)^{-1} - f_n(z)\right|^2 d\tau(z) = 0. \tag{2.9}$$

Так как все $f_n \in \mathbf{A}_0(\Gamma)$ и $\mu_s \perp \mathbf{A}_0(\Gamma)$, то

$$\int_\Gamma f_n(z)\, d\mu_s(z) = 0$$

при всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Последнее равенство и (2.9) дают (2.8) для $\zeta \notin \overline{G}$. Действительно,

$$\hat{\mu}(\zeta) = \int_\Gamma \left((\zeta - z)^{-1} - f_n(z)\right) d\mu_s(z) + \int_\Gamma f_n(z)\ d\mu_s(z) =$$

$$= \int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} - f_n(z)\ d\mu_s(z)\,.$$

Следовательно,

$$|\hat{\mu}(\zeta)| \le \int_\Gamma \left|(\zeta - z)^{-1} - f_n(z)\right|\ d\tau(z)$$

и по неравенству Гельдера получаем (2.8). Перед тем как рассматривать случай $\zeta \in G$, заметим, что

$$\int_\Gamma d\mu_s(z) = 0. \tag{2.10}$$

Действительно, пусть $\zeta \notin \overline{G}$, тогда

$$\int_\Gamma d\mu_s(z) = (\zeta - z_0)\int_\Gamma \frac{d\mu_s(z)}{\zeta - z} - \int_\Gamma \frac{z - z_0}{\zeta - z}\, d\mu_s(z) = 0,$$

так как первый интеграл равен нулю по уже доказанному, а равенство нулю второго дает лемма 2.2 в силу того, что функция $f(z) = \frac{z-z_0}{\zeta - z}$ принадлежит $\mathbf{A}_0(\Gamma)$.

Пусть теперь $\zeta \in G$. Так как $\operatorname{supp}\mu_s \subseteq \operatorname{supp}\mu \subseteq \Gamma$, а преобразование Коши есть функция голоморфная вне носителя меры, то достаточно установить, что все производные функции $\hat{\mu}_s(\zeta)$ равны нулю в точке z_0. Определим новую меру τ_1, положив

$$d\tau_1(z) = (z - z_0)^{-1} d\mu_s(z).$$

Так как $\operatorname{supp}\tau_1 = \operatorname{supp}\mu_s$, то τ_1 сингулярна относительно ω. Проверим, что $\tau_1 \perp \mathbf{A}_0(\Gamma)$. Пусть $f \in \mathbf{A}_0(\Gamma)$. Положим

$$g(z) := \frac{f(z) - (z - z_0) f'(z_0)}{z - z_0},$$

тогда $g \in \mathbf{A}_0(\Gamma)$ и

$$f(z) = (z - z_0)(g(z) + f'(z)),$$

следовательно, используя (2.10), получаем

$$\int_\Gamma f(z)\, d\tau_1(z) = \int_\Gamma g(z)\, d\mu_s(z) + f'(z_0)\int_\Gamma d\mu_s(z) = 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано для $\hat{\mu}_s(\zeta)$, легко показать, что

$$\hat{\tau}_1(\zeta) = 0$$

при $\zeta \notin \overline{G}$. Теперь, аналогично (2.10), имеем

$$\int_\Gamma d\tau_1(\zeta) = 0.$$

Для любого целого $n \geq 2$ определяем меру τ_n равенством

$$d\tau_n(z) := (z - z_0)^{-1} d\tau_{n-1}(z). \tag{2.11}$$

Повторяя предыдущие аргументы, убеждаемся в том, что

$$\int_\Gamma (z - z_0)^{-n} d\mu_s(z) = 0$$

для всех целых $n \geq 0$. Следовательно, $\hat{\mu}_s(\zeta) \equiv 0$ в G. Доказательство теоремы 2.4 закончено.

Для завершения доказательства теоремы 2.2 проверим истинность еще двух утверждений.

Утверждение 2.1. *Пусть G — ограниченная односвязная область, не являющаяся областью Каратеодори и $\Gamma = \partial G$. Тогда существует мера $\mu \in \mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)$, не являющаяся абсолютно непрерывной относительно гармонической меры ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $\tilde{G}$ – компоненту связности открытого множества $Int(Pc\overline{G})$ такую, что $\tilde{G} \supseteq G$. Так как G не есть область Каратеодори, то существует точка $\tilde{z} \in \tilde{G} \bigcap \Gamma$. Пусть $\tilde{\omega}$ – гармоническая мера на $\partial\tilde{G}$ относительно точки $\tilde{z}$. Обозначим через δ меру Дирака с носителем $\{\tilde{z}\}$. Положим

$$\mu := \tilde{\omega} - \delta.$$

Для произвольного полинома P мы имеем

$$\int_{\partial\tilde{G}} P(z)\,d\mu(z) = \int_{\partial\tilde{G}} P(z)\,d\tilde{\omega}(z) - \int_{\partial\tilde{G}} P(z)\,d\delta(z) = P(\tilde{z}) - P(\tilde{z}) = 0.$$

Осталось заметить, что применяя часть *(i)* леммы 2.1 к гармонической мере $\tilde{\omega}$, получаем $\tilde{\omega}(\{\tilde{z}\}) = 0$ и

$$\mu(\{\tilde{z}\}) = \tilde{\omega}(\{\tilde{z}\}) - \delta(\{\tilde{z}\}) = -\delta(\{\tilde{z}\}) = -1 \neq 0,$$

но для любой меры ν, абсолютно непрерывной относительно ω, в соответствии с леммой 2.1 имеем

$$\nu(\{\tilde{z}\}) = 0.$$

Таким образом, μ не является абсолютно непрерывной относительно ω.

Предположим теперь, что G — область Каратеодори, но $\overline{G}$ разделяет плоскость. Обозначим через G_1 одну из ограниченных компонент связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Пусть M — множество граничных точек области G, достижимых из этой области и M_1 — множество граничных точек G_1, достижимых из G_1. Тогда $M_1 \bigcap M$ — множество точек на Γ, достижимых одновременно из G и G_1.

Утверждение 2.2. *Множество $M_1 \bigcap M$ или пусто, или содержит единственную точку.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные точки c и a, принадлежащие $M_1 \bigcap M$. Зафиксируем точку $z_1 \in G$. Пусть $l_i, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ — простые жордановы дуги, определенные на замкнутом единичном интервале $I = [0, 1]$ так, что

$$l_1(I) \subseteq \overline{G}, \quad l_1(I \backslash \{1\}) \subseteq G, \quad l_1(0) = z_0, \quad l_1(1) = a;$$

$$l_2(I) \subseteq \overline{G}_1, \quad l_2(I \backslash \{0\}) \subseteq G_1, \quad l_2(0) = a, \quad l_2(1) = z_1;$$

$$l_3(I) \subseteq \overline{G}_1, \quad l_3(I \backslash \{1\}) \subseteq G_1, \quad l_3(0) = z_1, \quad l_1(1) = c;$$

$$l_4(I) \subseteq \overline{G}, \quad l_4(I \backslash \{0\}) \subseteq G, \quad l_4(0) = c, \quad l_4(1) = z_0;$$

$$l_1(I) \bigcap l_4(I) = \{z_0\}, \qquad l_2(I) \bigcap l_3(I) = \{z_1\}.$$

Пусть $\gamma = l_1 \circ l_2 \circ l_3 \circ l_4$ — замкнутая дуга Жордана, полученная как результат композиции кривых $l_i, i = 1, 2, 3, 4$. Это ясно из определения γ, что

$$\gamma(I) \bigcap G_\infty = \emptyset,$$

где, как и ранее, G_∞ – неограниченная компонента связности дополнения к $\overline{G}$. По теореме Жордана $\gamma(I)$ разделяет плоскость $\mathbb{C}$ на две области. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\gamma(I)$. Так как каждая точка, принадлежащая $\gamma(I)$, достижима из Ω, то существует дуга Жордана $l_5 : I \to \overline{\Omega}$, для которой

$$l_5(I \backslash \{0, 1\}) \subseteq \Omega, \quad l_5(0) = z_0, \quad l_5(1) = z_1.$$

Так как $z_0 \in Int\overline{G},\ z_1 \in Ext\overline{G}$, а Γ разделяет внешность и внутренность компакта $\overline{G}$, то в силу связности можно утверждать, что

$$l_5(I) \bigcap \Gamma \neq \emptyset.$$

Пусть $x \in l_5(I) \bigcap \Gamma$. Так как по предположению G – область Каратеодори, то $\Gamma = \partial G_\infty$, а значит, $x \in \partial G_\infty$. Область Ω является открытой окрестностью точки x. Следовательно, найдется точка $x_1 \in G_\infty \bigcap \Omega$. Учитывая линейную связность области G_∞, можно построить дугу l_6, полностью лежащую в G_∞, начинающуюся в точке x_1 и уходящую на бесконечность. Так как $\gamma(I)$ отделяет точку x_1 от ∞, то дуга l_6 пересекает γ. Но это противоречит конструкции l_6 и тому факту, что $\gamma(I)\bigcap G_\infty=\emptyset$.

Окончание доказательства теоремы 2.2. Предположим, как и в утверждении 2.2, что G – область Каратеодори, $\overline{G}$ разделяет плоскость, G_1 – одна из ограниченных компонент связности $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ и $z_1\in$ $\in G_1$. Обозначим через ω_1 гармоническую меру на ∂G_1 относительно точки z_1. Учитывая лемму 2.1 и утверждение 2.2, легко видеть, что меры ω и ω_1 взаимно сингулярны, $\omega\perp\omega_1$. Рассмотрим теперь комплексную меру ω_2, определенную равенством

$$d\omega_2(z):=(z-z_1)d\omega_1(z).$$

Заметим, что

$$supp(\omega_2)=supp(\omega_1)\subseteq\partial G_1.$$

Так как G_1 – компонента связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, то

$$\partial G_1\subseteq\partial(\mathbb{C}\backslash\overline{G}),$$

(см., [32, с. 78]), но так как

$$\partial(\mathbb{C}\backslash\overline{G})=\partial\overline{G}\subseteq\partial G,$$

то

$$\partial G_1\subseteq\partial G,$$

а значит, и

$$supp(\omega_2)\subseteq\partial G.$$

Далее для любого полинома $P(z)$ имеем

$$\int_\Gamma P(z)d\omega_2(z)=(z-z_1)P(z)|_{z=z_1}=0.$$

Следовательно, $\omega_2\in\mathbf{P}^\perp(\Gamma)$. Осталось заметить, что из абсолютной непрерывности ω_2 относительно ω_1 и сингулярности ω_1 относительно ω следует сингулярность ω_2 относительно ω. Теорема 2.2 доказана полностью.

Анализируя окончание доказательства теоремы 2.2, видим, что справедливо следующее

Утверждение 2.3. *Пусть G — область Каратеодори такая, что $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ не связно, G_1 — какая-то ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ и $z_0 \in G$, $\quad z_1 \in G_1$. Обозначим через ω гармоническую меру на ∂G относительно точки z_0, а через ω_1 — гармоническую меру на ∂G_1 относительно z_1. Тогда:*

(i) G_1 *– область Каратеодори;*

(ii) $\partial G_1 \subseteq \partial G$;

(iii) $\omega_1 \perp \omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства *(ii)* и *(iii)* уже установлены. Для доказательства *(i)* в силу теоремы Уолша–Лебега достаточно показать, что любая $f \in C(\partial G_1)$ может быть равномерно на ∂G_1 аппроксимирована гармоническими полиномами. Это можно сделать, продолжив f по теореме Титце–Урысона до функции непрерывной ∂G и еще раз использовав теорему Уолша–Лебега.

2.3. Комментарии

Оригинальная теорема братьев Рисс была впервые опубликована в [33]. Приведенное доказательство теоремы 2.2 следует в основном [23]. Использованная при определении гармонической меры регулярность границы ограниченной односвязной области для задачи Дирихле доказана И. Г. Петровским [13]. Часть *(i)* леммы 2.1 хорошо известна [28, с. 22] , но то, что отсутствие атомов у гармонической меры следует из граничной теоремы единственности, впервые, видимо, отмечено в [23]. Часть *(ii)* леммы 2.1, скорее всего, также известна, хотя точную ссылку дать трудно. Теорему 2.4 можно извлечь из статей Бишопа [19, 20], переведенных в [4]. Меры, аналогичные (2.11), использованы для доказательства одного из вариантов теоремы братьев Рисс, данном Хельсоном и Лауденслегером [30]. Утверждение 2.2 о числе граничных точек, достижимых одновременно из двух различных ограниченных компонент связности множества $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, является точным в том смысле, что оба эти случая реализуются. «Внешняя змейка» (см. рис. 2) дает пример области Каратеодори, для которой $M \bigcap M_1 = \emptyset$. «Крабик» на рис. 1 реализует случай одноточечного $M \bigcap M_1$. Пункт *(i)* утверждения 2.3 может быть конечно доказан элементарными топологическими рассуждениями без использования теоремы Уолша–Лебега, но приведенное доказательство может, по мнению автора, быть оправдано своей прозрачностью.

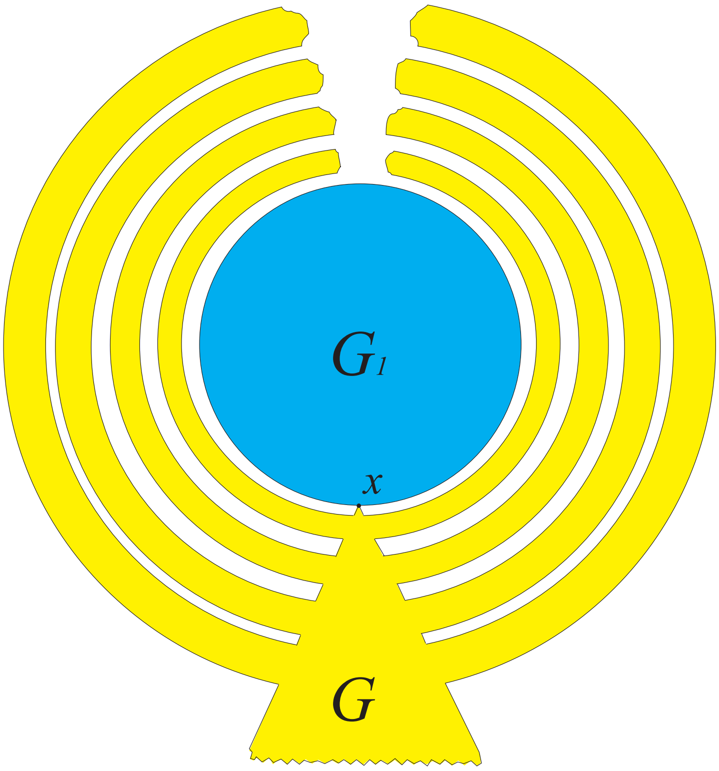

Рис. 1. «Хвост и лапки краба» образуют область Каратеодори G, «панцирь» — это область G_1 — ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, x — единственная точка, достижимая одновременно из G и G_1.

§ 3. О максимальности алгебры $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Gamma})$

Пусть K — компактное непустое подмножество комплексной плоскости. Замкнутая подалгебра $\mathbf{A}$ алгебры $C(K)$ называется *максимальной*, если для любой замкнутой подалгебры $\mathbf{B} \subseteq C(K)$ имеем

$$(\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}) \Rightarrow ((\mathbf{B} = \mathbf{A}) \vee (\mathbf{B} = C(K))), \tag{3.1}$$

т.е. не существует замкнутых подалгебр, лежащих «строго между» $\mathbf{A}$ и $C(K)$.

Дж. Вермер в [38] показал, что алгебра граничных значений функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{D}}$, является максимальной подалгеброй $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ и дал применение этого результата, получив красивое доказательство теоремы Рудина о подалгебрах из $C(\overline{\mathbb{D}})$, элементами которых являются функции, максимум модуля которых достигается на $\mathbb{T}$.

В настоящем параграфе доказывается, что класс областей G, для которых алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ максимальна в $C(\Gamma)$, совпадает с классом областей Каратеодори, для которых $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. Этот результат и инвариантность таких областей G при вложениях $\overline{G}$ в $\mathbb{C}$, которая также устанавливается в настоящем параграфе, позволяет получить для этого класса теорему, аналогичную вышеупомянутой теореме Рудина.

3.1. Вспомогательные утверждения

Начнем с элементарной геометрической характеристики областей Каратеодори, для которых $\overline{G}$ не разбивает плоскость.

Утверждение 3.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область такая, что $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. Область G является областью Каратеодори тогда и только тогда, когда*

$$G = Int\overline{G}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению G является областью Каратеодори тогда и только тогда, когда

$$\partial G = \partial G_\infty, \tag{3.3}$$

где G_∞ — неограниченная компонента связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Кроме того, очевидно, что $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}\backslash\overline{G} = G_\infty$. Хорошо известно, что для любого множества Q в произвольном топологическом пространстве выполняются включения

$$\partial Q \supseteq \partial\overline{Q} \qquad \text{и} \qquad \partial Q \supseteq \partial(IntQ).$$

Следовательно,

$$\partial G \supseteq \partial\overline{G} \supseteq \partial(Int\overline{G}). \tag{3.4}$$

Так как $\overline{G}$ не разделяет плоскость, то

$$\partial\overline{G} = \partial(\mathbb{C}\backslash\overline{G}) = \partial G_\infty. \tag{3.5}$$

Таким образом, если (3.2) выполнено, то из (3.4) следует

$$\partial G = \partial\overline{G} = \partial(Int\overline{G}),$$

что вместе с (3.5) дает (3.3).

Обратно, если G — область Каратеодори, то (3.5) и (3.3) дают равенство

$$\partial G = \partial \overline{G}.$$

Используя это равенство, мы получаем

$$Int\overline{G} = Int\bar{G} \bigcap ((IntG) \bigcup (\partial G) \bigcup (\mathbb{C} \backslash \overline{G})) =$$

$$= (Int\overline{G} \bigcap IntG) \bigcup (Int\overline{G} \bigcap \partial G) = G \bigcup (Int\overline{G} \bigcap \partial \overline{G}) = G.$$

Равенство (3.2) доказано.

Если G — область Жордана, а непрерывное отображение $\varphi : \overline{G} \to \to \mathbb{C}$ — инъективно на $\overline{G}$ и голоморфно в G, то используя теорему Каратеодори (см., например, [7, с. 46]), легко видеть, что $\varphi(G)$ тоже является областью Жордана. Следующая теорема показывает, что аналогичная инвариантность имеет место и для класса областей Каратеодори со связным $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$.

Теорема 3.1. *Пусть G — область Каратеодори и $\overline{G}$ не разделяет плоскость. Тогда, если $\varphi : \overline{G} \to \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение и*

$$\Omega = \varphi(G),$$

то Ω — область Каратеодори и $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость.

Доказательство. Обозначим через φ_0 единственное отображение из $\overline{G}$ на $\varphi(\overline{G})$ такое, что $\varphi(z) = \varphi_0(z)$ при всех $z \in \overline{G}$. Так как отображение

$$\varphi_0 : \overline{G} \to \varphi(\overline{G})$$

есть гомеоморфизм, то Ω представляет собой ограниченную односвязную область. В соответствии с теоремой Эйленберга об инвариантности (см. [26] или [11, с. 543]) число компонент связности множества $\mathbb{C} \backslash \varphi(\overline{G})$ равно числу компонент связности $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$. Следовательно, множество $\mathbb{C} \backslash \varphi(\overline{G})$ связно. Кроме того, выполнено равенство

$$\partial(\varphi(\overline{G})) = \partial(\mathbb{C} \backslash \varphi(\overline{G})).$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\partial\Omega = \partial(\varphi(\overline{G})) \tag{3.6}$$

и что

$$\overline{\Omega} = \varphi(\overline{G}). \tag{3.7}$$

Для доказательства этих равенств заметим вначале, что

$$\partial\Omega = \partial_{\varphi(\overline{G})}\Omega, \tag{3.8}$$

т.е. границы Ω совпадают в $\mathbb{C}$ и в $\varphi(\overline{G})$, так как Ω — открытое множество, $\varphi(\overline{G})$ — компактно, а следовательно, замкнуто и $\varphi(\overline{G}) \supseteq \Omega$. Аналогично, для области G будем иметь

$$\Gamma = \partial G = \partial_{\overline{G}}(G). \tag{3.9}$$

Так как отображение

$$\varphi_0 : \overline{G} \longrightarrow \varphi(\overline{G})$$

является гомеоморфизмом, формулы (3.8) и (3.9) влекут

$$\partial\Omega = \partial_{\varphi(\overline{G})}\Omega = \varphi(\partial_{\overline{G}}(G)) = \varphi(\Gamma). \tag{3.10}$$

Кроме того, используя (3.2) и теорему Брауэра об инвариантности области, получаем

$$Int\varphi(\overline{G}) = \varphi(Int\overline{G}) = \varphi(G) = \Omega. \tag{3.11}$$

Равенство (3.6) следует из (3.9), (3.10) и (3.11), так как

$$\partial(\varphi(\overline{G})) = \varphi(\overline{G}) \backslash Int(\varphi(\overline{G})) = (\varphi(\overline{G})) \backslash (\varphi(G)) = \varphi(\overline{G} \backslash G) = \varphi(\Gamma) = \partial\Omega.$$

Остается заметить, что (3.6) и (3.11) дают (3.7),

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega = Int(\varphi(\overline{G})) \bigcup \partial(\varphi(\overline{G})) = \varphi(\overline{G}).$$

Замечание 3.1. Если G — область Каратеодори, $\varphi : \overline{G} \to \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение, но $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$ не является связным, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что $\varphi(G)$ является областью Каратеодори (см. рис. 2).

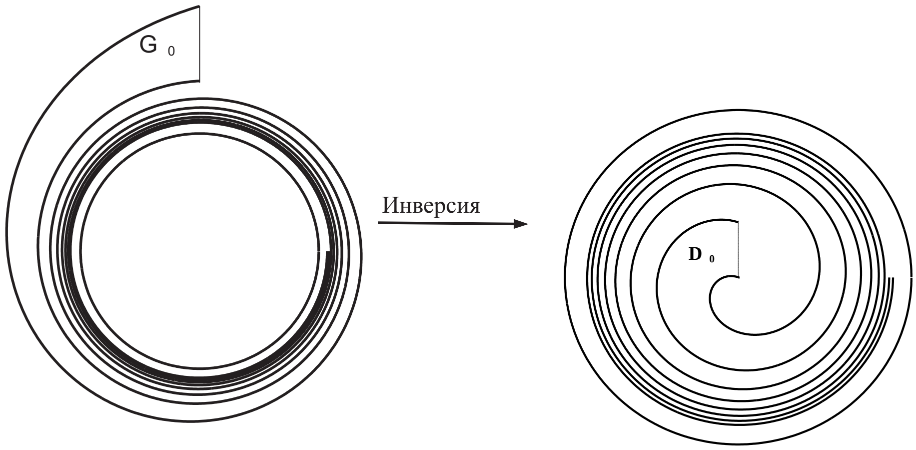

Рис. 2. Инверсия относительно окружности, на которую наматывается «внешняя змейка» G_0, переводит ее во «внутреннюю змейку» D_0.

Сформулируем теперь версию граничной теоремы единственности аналитических функций для произвольных односвязных ограниченных областей.

Утверждение 3.2. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ, точка $a \in G$ и ω — гармоническая мера на Γ относительно точки a. Тогда для любых двух голоморфных в G и непрерывных в $\overline{G}$ функций f_1 и f_2 и любого борелевского множества $A \subseteq \Gamma$ с $\omega(A) > 0$ равенство*

$$f_1|_A = f_2|_A \tag{3.12}$$

влечет совпадение этих функций,

$$f_1 = f_2.$$

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to G$ — конформное и однолистное отображение, для которого $\varphi(0) = a$. Используя теорему Фату (см., например, [10, с. 33]), можно утверждать, что функция φ имеет радиальные предельные значения $\tilde{\varphi}(e^{i\theta})$ на некотором подмножестве $\tilde{\mathbb{T}}$ окружности $\mathbb{T}$, для которого $m_1(\tilde{\mathbb{T}}) = 1$. Функция $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{T}} \to \Gamma$ измерима по Лебегу как предел поточечно сходящейся последовательности непрерывных функций $\{\varphi_n\}_{n=2}^{\infty}$, $\varphi_n\left(e^{i\theta}\right) = \varphi\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i\theta}\right)$. Следовательно, множество $\tilde{\varphi}^{-1}(A)$ измеримо по Лебегу. Из инвариантности гармонической меры при конформных отображениях, используя нормировку функции φ, получаем

$$m_1(\tilde{\varphi}^{-1}(A)) = \omega(A) > 0. \tag{3.13}$$

Так как функции f_1 и f_2 непрерывны в $\overline{G}$, то равенство (3.12) и определение множества $\tilde{\varphi}^{-1}(A)$ дают совпадение радиальных пределов функций $f_1 \circ \varphi$ и $f_2 \circ \varphi$ на множестве $\tilde{\varphi}^{-1}(A)$. В соответствии с граничной теоремой единственности (см., например, [14, с. 70]) из (3.12) и (3.13) следует, что

$$f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi,$$

но тогда $f_1 = f_2$.

Утверждение 3.2 будет часто использоваться в следующей форме.

Утверждение 3.3. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ. Если A — непустое открытое подмножество Γ и f_1, f_2 — функции, голоморфные в G и непрерывные в $\overline{G}$, то из равенства* (3.12) *следует, что $f_1 = f_2$.*

Это очевидным образом выводится из утверждения 3.2 и следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ, a — точка области G, ω — гармоническая мера на Γ относительно точки a. Тогда носитель меры ω совпадает с Γ,*

$$supp\omega = \Gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что

$$B := \Gamma \backslash (supp\omega) \neq \emptyset.$$

Выберем замкнутое в Γ подмножество $A \subseteq B$. Используя теорему Титце–Урысона, построим функцию f — неотрицательную на Γ, равную единице на A и равную нулю на $supp\omega$. В силу регулярности G для задачи Дирихле существует гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$ функция $\hat{f}$ такая, что

$$\hat{f}|_\Gamma = f. \tag{3.14}$$

Так как $f \geq 0$ на Γ, то $\hat{f} \geq 0$ в $\overline{G}$. Кроме того, в силу определения гармонической меры (см. (2.1), (2.2)) и равенства $B \bigcap supp\omega = \emptyset$ имеем

$$\hat{f}(a) = \int_\Gamma f(z)\, d\omega(z) = \int_B f(z)\, d\omega(z) = 0.$$

По принципу максимума любая неотрицательная гармоническая функция, равная нулю в некоторой внутренней точке области G, есть тождественный ноль (см., например, [16, с. 46]). Следовательно,

$$\hat{f} \equiv 0$$

в G. Последнее противоречит (3.14), так как $\hat{f}$ непрерывна, а f равна 1 на A.

3.2. Теоремы Вермера и Рудина

Следующая теорема и теорема 3.3 представляют собой основные результаты настоящего параграфа. При формулировке и доказательстве использованы обозначения, введенные вначале настоящей главы.

Теорема 3.2. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ. Алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда G — область Каратеодори и $\overline{G}$ не разделяет плоскость.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно, то $G = Int\overline{G}$ в силу утверждения 3.1 . Таким образом, $\bar{G}$ — компактное подмножество комплексной плоскости со связными дополнением и внутренностью. Следовательно, выполнены предположения теоремы 6 из [19], в соответствии с которой алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ является максимальной в $C(\Gamma)$.

Предположим теперь, что G не является областью Каратеодори. Тогда $\Gamma\backslash\Gamma_\infty$ представляет собой непустое открытое подмножество множества Γ. Зафиксируем точку $a \in \Gamma\backslash\Gamma_\infty$. Обозначим через Z_a множество всех функций $f \in C(\Gamma)$, для которых

$$f(z) = 0$$

для всех $z \in \Gamma_\infty \bigcup \{a\}$, где $\{a\}$ — одноточечное множество, состоящее из единственной точки a. Так как максимум модуля функции $f \in \mathbf{P}(\Gamma)$ достигается на Γ_∞, то

$$f(z) \equiv 0$$

для любой $f \in \mathbf{P}(\Gamma) \bigcap Z_a$. Так как $\Gamma\backslash\Gamma_\infty \neq \{a\}$, то существует $f \in Z_a$ такая, что $f(z) \not\equiv 0$ на Γ. Таким образом, мы получаем

$$Z_a\backslash\mathbf{P}(\Gamma) \neq \emptyset. \tag{3.15}$$

Положим

$$\mathbf{B}(\Gamma) := \{f_1 + f_2 : f_1 \in \mathbf{P}(\Gamma),\ f_2 \in Z_a\}.$$

Так как Z_a является идеалом алгебры $C(\Gamma)$, то легко показать, что $\mathbf{B}(\Gamma)$ — подалгебра алгебры $C(\Gamma)$. Следовательно, замыкание $\overline{\mathbf{B}(\Gamma)}$ — замкнутая подалгебра $C(\Gamma)$ и в силу (3.15)

$$\overline{\mathbf{B}(\Gamma)} \neq \mathbf{P}(\Gamma). \tag{3.16}$$

Пусть $\tilde{G}$ — компонента связности внутренности множества $Pc\overline{G}$, содержащая точку a. (Напомним, что PcX — обозначение полиномиально-выпуклой оболочки X.) Обозначим через ω_a гармоническую меру на $\partial\tilde{G}$ относительно точки a и через δ_a меру Дирака в a. Легко видеть, что $\partial\tilde{G} = \Gamma_\infty \subseteq \Gamma$. Зададим непрерывный линейный функционал φ на $C(\Gamma)$ соотношением

$$\varphi(f) = \int f\, d(\omega_a - \delta_a).$$

По построению алгебра $\overline{\mathbf{B}(\Gamma)}$ принадлежит ядру функционала φ, т.е.

$$\varphi(f) = 0$$

для любой функции $f \in \overline{\mathbf{B}(\Gamma)}$. Последнее соотношение показывает, что

$$\overline{\mathbf{B}(\Gamma)} \neq C(\Gamma), \tag{3.17}$$

так как в силу леммы 2.1 мера ω_a не имеет атомов, а значит, $\omega_a - \delta_a \neq 0$. Соотношения (3.16), (3.17) доказывают, что алгебра $\overline{\mathbf{B}(\Gamma)}$ лежит «строго» между $\mathbf{P}(\Gamma)$ и $C(\Gamma)$. Таким образом, $\mathbf{P}(\Gamma)$ не является максимальной, если G не есть область Каратеодори.

Осталось доказать, что $\overline{G}$ не разделяет плоскость. Пусть G — область Каратеодори и G_1 — ограниченная компонента связности открытого множества $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, отличная от G. Обозначим через $\mathbf{P}_1(\Gamma)$ наименьшую замкнутую подалгебру алгебры $C(\Gamma)$, порожденную функцией $f_1(z) = \frac{1}{z-z_1}$, где z_1 — фиксированная точка из G_1, и алгеброй $\mathbf{P}(\Gamma)$. Если φ — произвольная функция из $\mathbf{P}_1(\Gamma)$, то существует функция $\tilde{\varphi}$ — непрерывная на $\overline{G}$ и голоморфная в G, для которой

$$\tilde{\varphi}|_\Gamma = \varphi.$$

Пусть b — произвольная точка из G, а ω — гармоническая мера на ∂G относительно этой точки b. Тогда в силу голоморфности $\tilde{\varphi}$ из определения гармонической меры имеем

$$\int_\Gamma \varphi(z)(z-b)\,d\omega(z) = \int_\Gamma \hat{\varphi}(z)(z-b)\,d\omega(z) = 0.$$

Кроме того,

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-b}(z-b)\,d\omega(z) = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{z-b} \notin \mathbf{P}_1(\Gamma).$$

Меняя местами область G и G_1 и интегрируя относительно гармонической меры ω_1, заданной на ∂G_1 относительно точки z_1, получаем, что

$$\frac{1}{z-z_1} \notin \mathbf{P}(\Gamma).$$

Мы установили, что $\mathbf{P}_1(\Gamma) \supseteq \mathbf{P}(\Gamma)$ и

$$\frac{1}{z-z_1} \in \mathbf{P}_1(\Gamma)\backslash\mathbf{P}(\Gamma), \qquad \frac{1}{z-b} \in C(\Gamma)\backslash\mathbf{P}_1(\Gamma).$$

Таким образом, если $\overline{G}$ разбивает плоскость, то алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ не является максимальной подалгеброй $C(\Gamma)$.

Определение 3.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ. Будем говорить, что замкнутая подалгебра $\mathbf{M}$ алгебры $C(\overline{G})$ является м.м.-алгеброй*[1]*, если $\mathbf{M}$ содержит константы и*

$$\max_{z\in\overline{G}} |f(z)| = \max_{z\in\Gamma} |f(z)| \tag{3.18}$$

для любой функции $f \in \mathbf{M}$.

Теорема 3.3. *Пусть G — область Каратеодори. Следующие два утверждения эквивалентны.*

(*i*) *Для любой м.м.-подалгебры $\mathbf{M}$ алгебры $C(\overline{G})$ из существования функции φ, принадлежащей $\mathbf{M}$, голоморфной в G и инъективной в $\overline{G}$, следует равенство*

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(\overline{G}). \tag{3.19}$$

[1]В англоязычной литературе используется термин maximum modulus algebras.

(ii) *Множество* $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ *является связным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем сначала доказывать импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Предположим, что $\overline{G}$ не разделяет плоскость. Если существует инъекция $\overline{G} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$, принадлежащая $\mathbf{M}$ и такая, что φ голоморфна в G, то обратное преобразование $\varphi(\overline{G}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \overline{G}$ голоморфно в области $\Omega = \varphi(G)$ и непрерывно на $\overline{\Omega} = \varphi(\overline{G})$ (см. доказательство теоремы 3.1). Кроме того, по теореме 3.1, Ω — область Каратеодори и $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость. В этом случае в соответствии с теоремой Мергеляна существует последовательность полиномов P_n, для которой

$$\varphi^{-1}(w) = \lim_{n\to\infty} P_n(w)$$

равномерно на $\overline{\Omega}$. Подставляя в последнее соотношение $\varphi(z)$ вместо w, мы видим, что функция $f\,(z) \equiv z$ принадлежит $\mathbf{M}$. А так как $\mathbf{M}$ замкнута и содержит константы, то

$$\mathbf{P}(\overline{G}) \subseteq \mathbf{M}. \tag{3.20}$$

Теперь, для доказательства (3.19), будем следовать рассуждениям Дж. Вермера [38]. Положим

$$\mathbf{A} := \{f|_\Gamma : f \in \mathbf{M}\},$$

т.е. $\mathbf{A}$ есть алгебра следов на Γ функций из $\mathbf{M}$. Из соотношения (3.18) следует, что $\mathbf{A}$ — замкнутая подалгебра $C(\Gamma)$, для которой отображение

$$\Phi : \mathbf{M} \to \mathbf{A}, \qquad \Phi(f) := f|_\Gamma$$

является изомертическим изоморфизмом. Включение (3.20) переходит в

$$\mathbf{A} \supseteq \mathbf{P}(\Gamma).$$

Теперь в соответствии с теоремой 3.2 и формулой (3.1) имеем или $\mathbf{A} = C(\Gamma)$, или $\mathbf{A} = \mathbf{P}(\Gamma)$. Предположим, что

$$\mathbf{A} = C(\Gamma). \tag{3.21}$$

Пусть a — произвольная точка области G. Рассмотрим отображение $\mathbf{A} \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathbf{M} \xrightarrow{g_a} \mathbb{C}$, где

$$g_a\,(f) = f\,(a) \tag{3.22}$$

для любой функции $f \in \mathbf{M}$. Из условия максимальности (3.18) и (3.21) вытекает, что отображение $g_a \circ \Phi^{-1}$ представляет собой непрерывный гомоморфизм $C(\Gamma)$ на $\mathbb{C}$ (напомним, что $\mathbf{M}$, а значит, и $\mathbf{A}$ содержат константы). Следовательно, существует точка $b \in \Gamma$ такая, что

$$g_a\left(\Phi^{-1}(y)\right) = y(b) \tag{3.23}$$

для любой функции $y \in \mathbf{A}$ [6, с. 16]. Выберем теперь в качестве y инъекцию $\overline{G} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$, тогда по (3.22) и (3.23)

$$\varphi(a) = \varphi(b), \qquad a \in G, \quad b \in \Gamma,$$

что противоречит инъективности φ. Следовательно, (3.21) ложно и $\mathbf{A} = \mathbf{P}(\Gamma)$. Осталось заметить, что

$$\Phi(\mathbf{P}(\overline{G})) = \mathbf{P}(\Gamma) = \mathbf{A},$$

значит, $\mathbf{M} = \mathbf{P}(\overline{G})$.

Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что существует ограниченная связная компонента G_1 открытого множества $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ такая, что $G_1 \neq G$. Тогда G_1 — область Каратеодори и $\Gamma_1 = \partial G_1 \subseteq \partial G$ (см. утверждение 2.3). Тогда $\mathbf{P}(\Gamma_1)$ есть алгебра Дирихле на Γ_1 (лемма 2.4) и по теореме Сегё–Колмогорова–Крейна [18, с. 236] для любой точки $z_1 \in G$

$$\inf_{f \in \mathbf{P}(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} |1 - (z - z_1) f(z)| \, d\omega_{z_1}(z) = 1,$$

где ω_{z_1} — гармоническая мера на ∂G_1 относительно точки z_1. Следовательно,

$$\inf_{f \in \mathbf{P}(\Gamma_1)} \int \left| \frac{1}{z - z_1} - f(z) \right| d\omega_{z_1}(z) > 0. \tag{3.24}$$

Пусть $\mathbf{M}$ — замкнутая подалгебра алгебры $C(\overline{G})$, порожденная 1 и инъективной голоморфной функцией

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - z_1},$$

где z_1 — некоторая точка из G_1. Из принципа максимума модуля для голоморфных функций вытекает, что $\mathbf{M}$ является м.м. подалгеброй $C(\overline{G})$. Легко видеть, что для $\mathbf{M}$ равенство (3.19) не выполнено, так как это равенство влечет принадлежность $\varphi \in \mathbf{P}(\overline{G})$, что противоречит (3.24). Теорема 3.3 доказана.

3.3. Комментарии

Основные результаты настоящего параграфа впервые опубликованы в [24], а в окончательной форме — в [25]. Открытые множества, для которых выполнено условие (3.2), в общей топологии называют *канонически открытыми* [17, с. 45]. Используя теорию этих множеств, можно получить ряд утверждений об областях Каратеодори. В качестве примера приведем двойственную форму утверждения 3.1.

Утверждение 3.4. *Пусть G — односвязная ограниченная область, для которой $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. В этом случае G является областью Каратеодори тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}\backslash G$ — каноническое замкнутое множество,*

$$\mathbb{C}\backslash G = \overline{Int(\mathbb{C}\backslash G)}.$$

Доказательство мгновенно следует из того, что множество является канонически открытым тогда и только тогда, когда его дополнение канонически замкнуто.

Интересно отметить, что впервые граничная теорема единственности (для радиальных пределов и ограниченных аналитических функций в единичном круге), использованная в утверждении 3.2, появилась в работе Ф. и М. Риссов [33] вместе с их теоремой, обобщению которой посвящен параграф 2. При доказательстве теоремы 3.2 была сделана ссылка на работу Э. Бишопа [19], содержащую, в частности, обобщение теоремы Вермера о максимальности диск-алгебры. Приведенное в [19] доказательство Э. Бишоп приписывает К. Гофману. Теорема 3.3 имеет в качестве следствия следующий результат У. Рудина из [34].

Теорема 3.4. *Пусть G — область Жордана и $\mathbf{M}$ — м.м. подалгебра алгебры $C(\overline{G})$. Если в $\mathbf{M}$ найдется функция, голоморфная в G и инъективная $\overline{G}$, то каждая функция из $\mathbf{M}$ голоморфна в G.*

§ 4. Множество пика и интерполяционные множества алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$

Пусть $\mathbf{Y}$ — замкнутое подпространство пространства $C(S)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на компакте $S \subseteq \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_S = \max_{z\in S} |f(z)|.$$

Обозначим через $\mathbf{Y}^{\perp}$ множество всех комплексных конечных регулярных борелевских мер μ с $\operatorname{supp}\mu \subseteq S$ и ортогональных $\mathbf{Y}$.

4.1. Интерполяционная теорема Рудина–Карлесона

Следующее утверждение есть известная интерполяционная теорема Рудина–Карлесона.

Теорема 4.1. *Пусть* K *— непустое компактное подмножество* S*. Тогда, если для любой меры* $\mu \in \mathbf{Y}^{\perp}$ *выполняется равенство*

$$|\mu|(K) = 0,$$

где $|\mu|$ *— полная вариация меры* μ*, то для любой функции* $f \in C(K)$ *найдется функция* $g \in \mathbf{Y}$ *такая, что*

$$g|_K = f. \tag{4.1}$$

Причем, если $\|f\|_K < 1$*, то функцию* g *можно выбирать так, что* $\|g\|_S < 1$.

Доказательство можно найти в [36, с. 124].

В теории равномерных алгебр принимают следующее

Определение 4.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— замкнутая подалгебра алгебры* $C(S)$*. Непустое подмножество* K *множества* S *называется интерполяционным множеством для* A*, если для любой* $f \in C(K)$ *существует функция* $g \in \mathbf{A}$ *такая, что выполнено* (4.1)*, т.е. отображение сужения* $\Phi : \mathbf{A} \to C(K),\ \Phi(g) = g|_K$*, является сюръективным.*

В частном случае, когда S есть граница Γ области Каратеодори G и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно, то из теоремы Рудина–Карлесона 4.1 и теоремы 2.2 следует, что компакты нулевой гармонической меры являются интерполяционными множествами для $\mathbf{P}(\Gamma)$ (и даже для $\mathbf{P}_0(\Gamma)$). Более того, это утверждение допускает полное обращение.

Теорема 4.2. *Пусть* G *— односвязная ограниченная область с границей* Γ *и* ω *— гармоническая мера на* Γ *относительно некоторой точки* $z_0 \in \in G$*. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) *Семейство замкнутых интерполяционных для* $\mathbf{P}(\Gamma)$ *множеств совпадает с семейством непустых компактов* $K \subseteq \Gamma$ *с* $\omega(K) = 0$.

(ii) *Область* G *является областью Каратеодори и* $\overline{G}$ *не разбивает плоскость.*

Для доказательства используем следующую элементарную лемму.

Лемма 4.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ и ω — гармоническая мера на Γ относительно некоторой точки $z_0 \in G$. Тогда, если K — компактное подмножество Γ такое, что*

$$\omega(K) > 0, \tag{4.2}$$

то K не является интерполяционным множеством для алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество Γ и $\omega(K) > 0$. Выберем замкнутые непустые множества $K_0 \subseteq K$ и $K_1 \subseteq K$ так, что

$$K_0 \bigcap K_1 = \emptyset \quad \text{и} \quad \omega(K_0) > 0.$$

Найдется функция $f_0 \in C(K)$, для которой

$$f_0(z) = 1, \quad \text{если} \quad z \in K_1, \qquad \text{и} \quad f_0(z) = 0, \quad \text{если} \quad z \in K_0.$$

Предположим, что K интерполяционное множество для $\mathbf{P}(\Gamma)$. Тогда при $f = f_0$ уравнение (4.1) имеет некоторое решение $g \in \mathbf{P}(\Gamma)$. Обозначим через $\tilde{g}$ голоморфную в G и непрерывную в $\overline{G}$ функцию, для которой $\tilde{g}|_\Gamma = g$. Тогда $\tilde{g}|_{K_0} = 0$, а так как $\omega(K_0) > 0$, то в силу граничной теоремы единственности (см. утверждение 3.2) имеем

$$\tilde{g}(z) = 0$$

для всех $z \in \overline{G}$. Последнее противоречит равенствам

$$f_0|_{K_1} = g|_{K_1} = \tilde{g}|_{K_1} = 1.$$

Доказательство теоремы 4.2. Проверим вначале импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Для этого воспользуемся теоремой Рудина–Карлесона 4.1. Предположим, что G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. Пусть K — непустое компактное подмножество Γ с $\omega(K) = 0$. Докажем, что K — интерполяционное множество для алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$. В силу теоремы Рудина–Карлесона достаточно проверить, что

$$\forall \mu \in \mathbf{P}^\perp(\Gamma) : |\mu|(K) = 0. \tag{4.3}$$

Пусть μ — произвольная мера из $\mathbf{P}^\perp(\Gamma)$. Тогда, очевидно, $\mu \in \mathbf{P}_0^\perp(\Gamma)$, следовательно, по теореме 2.2 $\mu << \omega$. По определению (см., например, [22, с. 134]) $\mu << \omega$ тогда и только тогда, когда $|\mu| << \omega$. Формула (4.3) доказана. Кроме того, в силу леммы 4.1, гармоническая мера любого замкнутого интерполяционного множества $\mathrm{K} \subseteq \Gamma$ равна нулю. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ установлена.

Проверим выполнение импликации $(i) \Rightarrow (ii)$.

Пусть *(i)* выполнено. Нужно доказать, что G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. Предположим, что G не является областью Каратеодори. Тогда в силу определения $\Gamma\backslash\Gamma_\infty \neq \emptyset$. Выберем компактное счетное подмножество A множества $\Gamma\backslash\Gamma_\infty$. Такое A существует, потому что Γ — связно, а $\Gamma\backslash\Gamma_\infty$ — открыто. Пусть w_1 — некоторая точка из Γ_∞. Положим

$$K := \{w_1\} \cup A, \qquad f(z) := \begin{cases} 0 & \text{при } z \in A, \\ 1 & \text{при } z = w_1. \end{cases}$$

Так как K — счетное множество, а гармоническая мера не имеет атомов (см. лемму 2.1), то

$$\omega(K) = 0.$$

Множество A компактно, следовательно, компактным является и множество K. Таким образом, в соответствии с (i) K должно быть интерполяционным множеством алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$. Из компактности A и того, что $w_1 \notin A$, легко следует, что w_1 — изолированная точка компакта K. Следовательно, $f \in C(K)$, а значит, можно выбрать $g \in \mathbf{P}(\Gamma)$ так, что выполнено (4.1). Обозначим через $\tilde{G}$ компоненту связности множества $\mathbb{C}\backslash\Gamma_\infty$, содержащую область G. Так как g принадлежит $\mathbf{P}(\Gamma)$, то существует продолжение $\tilde{g}$ функции g до функции, голоморфной в $\tilde{G}$ и непрерывной в замыкании области $\tilde{G}$. Заметим далее, что компакт A содержит хотя бы одну предельную точку и

$$A \subseteq \Gamma\backslash\Gamma_\infty \subseteq \tilde{G}.$$

Так как

$$\tilde{g}|_A = g|_A = f|_A = 0,$$

то в соответствии с внутренней теоремой единственности получаем $\tilde{g}(z) \equiv$ $\equiv 0$,что противоречит равенствам

$$\tilde{g}(w_1) = g(w_1) = f(w_1) = 1.$$

Таким образом, из *(i)* следует, что G — область Каратеодори. Осталось доказать, что $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связное множество. Предположим, что существует ограниченная компонента G_1 множества $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ отличная от G. В силу пункта *(iii)* утверждения 2.3 имеем

$$\omega \perp \omega_1, \tag{4.4}$$

где ω_1 — гармоническая мера на ∂G_1 относительно некоторой выбранной точки $z_1 \in G_1$. Так как ω_1 и ω — регулярные борелевские вероятностные меры на Γ, то из соотношения (4.4) следует существование замкнутого множества K такого, что

$$K \subseteq \partial G_1 \subseteq \Gamma \quad \text{и} \quad 0 = \omega(K) < \omega_1(K).$$

Так как мы предполагаем, что пункт *(i)* доказываемой теоремы выполнен, то

(a) K — интерполяционное множество алгебры $P(\Gamma)$,

но в соответствии с леммой 4.1

($б$) K не является интерполяционным множеством алгебры $P(\partial G_1)$.

Покажем, что (a) противоречит ($б$). Действительно, так как $\partial G_1 \subseteq \Gamma$, то отображение сужения $\Phi : \mathbf{P}(\Gamma) \to C(K), \quad \Phi(g) = g|_K$, можно представить в виде суперпозиции

$$\Phi = \Phi_1 \circ F, \tag{4.5}$$

где $F : \mathbf{P}(\Gamma) \to \mathbf{P}(\partial G_1)$ — сужение на ∂G_1 функций из $\mathbf{P}(\Gamma)$, $F(g) = g|_{\partial G_1}$, а $\Phi_1 : \mathbf{P}(\partial G_1) \to C(K)$ — сужение на K функций из $\mathbf{P}(\partial G_1)$. Утверждение (a) равносильно тому, что Φ сюръективно, а ($б$) — тому, что Φ_1 не является сюръекцией (см. определение 4.1), что невозможно в силу (4.5).

Замечание 4.1. Легко видеть, что любое интерполяционное множество K алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ всегда замкнуто. Действительно, если K не замкнуто и a — предельная точка для K такая, что $a \notin K$, то (4.1) не разрешимо при

$$f(z) = \frac{1}{|z-a|}, \qquad z \in K.$$

Таким образом, утверждение *(i)* из теоремы 4.2 допускает следующую формулировку.

(i') *Непустое подмножество* K *множества* Γ *является интерполяционным для* $\mathbf{P}(\Gamma)$ *тогда только тогда, когда* K *компакт с* $\omega(K) = 0$.

Если G не есть область Каратеодори или $\overline{G}$ разбивает плоскость, то теорема 4.2 и лемма 4.1 показывают, что найдется непустой компакт $K \subseteq \Gamma$, который не является интерполяционным для $\mathbf{P}(\Gamma)$, но имеет нулевую гармоническую меру. Следовательно, области Каратеодори G со связным $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ характеризуются как односвязные ограниченные области, для которых алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ имеет, в определенном смысле, наибольший запас интерполяционных множеств.

Другое очевидное следствие теоремы 4.2 — это взаимная абсолютная непрерывность гармонических мер, заданных на границе области Каратеодори G со связным $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ относительно различных точек из G. Конечно, это хорошо известный факт, который можно доказать, используя неравенство Гарнака, в намного более общей ситуации.

Вернемся к теореме Рудина–Карлесона 4.1. Вторая часть этой теоремы утверждает, что если для функции f в (4.1) имеем $\|f\|_K < 1$, то можно выбрать функцию g, интерполирующую f на K так, что $\|g\|_S < 1$. Ниже будет показано, что в случае областей Каратеодори со связным $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ непустые интерполяционные множества K алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ являются множествами пика этой алгебры и это позволит выбрать функцию g, интерполирующую f так, что $\|g\|_\Gamma = \|f\|_K$.

4.2. Множества пика, логмодулярные алгебры

Напомним терминологию. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Равномерная алгебра $\mathbf{A} \subseteq C(X)$ называется *логмодулярной*, если множество

$$\ln|\mathbf{A}^{-1}| := \{\ln|f| : f\text{–единичные элементы}^2\, \mathbf{A}\}$$

равномерно плотно в $C_\mathbb{R}(X)$. Пусть теперь $\mathbf{A}$ — замкнутое линейное подпространство $C(X)$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой пика для $\mathbf{A}$, если существует $f \in \mathbf{A}$ такая, что

$$f(x_0) = 1 \quad \text{и} \quad |f(t)| < 1 \tag{4.6}$$

для всех $t \in X\backslash\{x_0\}$. Более общим образом непустое множество $F \subseteq X$ называется множеством пика для A, если для некоторой $f \in A$

[2]Здесь использована терминология, принятая в §2. При определении логмодулярных алгебр чаще говорят об обратимых элементах из $\mathbf{A}$.

$$f(t) = 1 \text{ при всех } t \in F$$

и $|f(t)| < 1$ при всех $t \in X \backslash F$. Очевидно, что любое множество пика является замкнутым подмножеством X.

Теорема 4.3. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ и ω — гармоническая мера на Γ относительно некоторой точки $z_0 \in \in G$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) *Замкнутое, собственное подмножество F множества $\overline{G}$ является множеством пика алгебры $\mathbf{P}(\overline{G})$ тогда и только тогда, когда $F \subseteq \Gamma$ и $\omega(F) = 0$.*

(ii) *G — область Каратеодори и $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$ связно.*

Докажем сначала «ослабленный» вариант сформулированной теоремы, характеризующий каратеодориевость G в терминах точек пика $\mathbf{P}(\overline{G})$.

Утверждение 4.1. *Пусть G — односвязная, ограниченная область с границей Γ. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *G — область Каратеодори.*

(ii) *$\mathbf{P}(\Gamma)$ — логмодулярная алгебра.*

(iii) *Точка x множества $\overline{G}$ является точкой пика алгебры $\mathbf{P}(\overline{G})$ тогда и только тогда, когда $x \in \Gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть G — область Каратеодори. В таком случае, как уже отмечалось ранее, $\mathbf{P}(\Gamma)$ является алгеброй Дирихле (см. лемму 2.4). Осталось заметить, что любая алгебра Дирихле логмодулярна. Классический способ проверки последнего утверждения основан на следующих двух замечаниях. Для любой равномерной алгебры $\mathbf{A}$ и функции $f \in \mathbf{A}$ функция $\exp(f)$ является единичным элементом алгебры A, так как $\exp(\pm f) \in \mathbf{A}$ и $\exp(f)\exp(-f) = \exp 0 = 1$. Кроме того, из определения функции exp имеем

$$Ref = \ln|\exp(f)|.$$

Пусть теперь $\mathbf{P}(\Gamma)$ — логмодулярная алгебра, проверим, что выполнено *(iii)*. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума модуля точки пика для алгебр $\mathbf{P}(\overline{G})$ и $\mathbf{P}(\Gamma)$ совпадают. Значит, достаточно доказать, что любая $x \in \Gamma$ является точкой пика для $\mathbf{P}(\Gamma)$. Как известно, для компактных метрических пространств X любая точка $x \in X$ является точкой пика равномерной алгебры $\mathbf{A} \subseteq C(X)$, если любой линейный мультипликативный функционал $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$ имеет единственную представляющую меру [31, с. 81]. Осталось вспомнить, что логмодулярность алгебры влечет единственность представляющих мер комплексных гомоморфизмов $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$ [31, с. 116].

Для завершения доказательства проверим импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$. Предположим, что G не является областью Каратеодори. Тогда $\Gamma \backslash \Gamma_\infty \neq$ $\neq \emptyset$. Пусть x_0 — некоторая точка из $\Gamma \backslash \Gamma_\infty$, и f — произвольная функция из $P(\overline{G})$. Так как f продолжается до функции голоморфной в области $\tilde{G} \supseteq \{x_0\} \bigcup G$, то в силу принципа максимума модуля соотношения (4.6) не могут быть выполнены. Следовательно, непустое подмножество $\Gamma \backslash \Gamma_\infty$ множества Γ состоит из точек, не являющихся точками пика для алгебры $\mathbf{P}(\overline{G})$.

Следующие две леммы будут использованы при доказательстве теоремы 4.3.

Лемма 4.2. *Пусть K — непустое компактное подмножество плоскости и $\mathbf{A}$ — замкнутое линейное подпространство $C(K)$. Тогда, если F — пересечение произвольного семейства множеств пика для пространства $\mathbf{A}$ и $F \neq \emptyset$, то F также является множеством пика для $\mathbf{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset,$$

где I — некоторое множество индексов, а F_i — множества пика при любом $i \in I$. Так как непустое пересечение счетного семейства множеств пика само является множеством пика (см., например, [31, с. 160]), то достаточно найти счетное $I_0 \subseteq I$, для которого

$$F = \bigcap_{i \in I_0} F_i.$$

Последнее следует из теоремы Линделёфа [9, с. 76], если применить ее к покрытию $\{\mathbb{C} \backslash F_i : i \in I\}$ пространства $\mathbb{C} \backslash F$.

Лемма 4.3. *Пусть G — область Каратеодори с границей Γ и F — непустое компактное подмножество Γ. Множество F является мно-*

жеством пика для $\mathbf{P}(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда для любой меры* $\mu \in \mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)$ *ее ограничение* μF[3] *тоже принадлежит* $\mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как G — область Каратеодори, то $P(\Gamma)$ — логмодулярная алгебра (см. утверждение 4.1). Для произвольной логмодулярной алгебры $\mathbf{A}$ на хаусдорфовом компакте X известно, что компактное множество $\mathbf{F} \subseteq X$ является пересечением множеств пика (для алгебры $\mathbf{A}$) тогда и только тогда, когда

$$\mu F \in \mathbf{A}^{\perp}$$

для любой меры μ из $\mathbf{A}^{\perp}$ [31, с. 192]. Осталось применить лемму 4.2.

Перейдем, наконец, к последнему утверждению, которое будет использовано для доказательства теоремы 4.3.

Утверждение 4.2. *Пусть* G *— односвязная ограниченная область с границей* Γ. *Следующие два свойства эквивалентны.*

(i) *Для любого замкнутого* $K \subseteq \Gamma$ *такого, что* $\emptyset \neq K \neq \Gamma$, *любая функция* $g \in C(K)$ *допускает равномерную полиномиальную аппроксимацию на* K.

(ii) *Равенство*

$$\partial G_i = \Gamma \tag{4.7}$$

выполнено для любой компоненты связности G_i *множества* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено *(ii)* и пусть K — собственное замкнутое подмножество Γ. Положим

$$V := \Gamma \backslash K,$$

тогда V — непустое подмножество Γ. Так как для любой компоненты G_i множества $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ имеют место включения

$$G_i \subseteq G_i \bigcup V \subseteq \overline{G}_i,$$

и множества G_i и $\overline{G}_i$ являются связными, то все множества $G_i \bigcup V$ также являются связными [9, с. 82]. Следовательно, $\bigcup_i (G_i \bigcup V)$ — связное множество как объединение связных множеств, имеющих общее непустое

[3] Мера μF определяется соотношением $\mu F(A) := \mu(A \bigcap F)$ для любого борелевского $A \subseteq \Gamma$.

подмножество. Таким образом, K — компактное множество со связным дополнением и пустой внутренностью. Теорема Лаврентьева [6, с. 70] утверждает, что в этом случае полиномы равномерно плотны в $C(K)$. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ установлена.

Пусть теперь *(ii)* не выполнено. Например, допустим

$$\Gamma \neq \Gamma_\infty = \partial G_\infty.$$

В этом случае Γ_∞ — собственное замкнутое подмножество Γ, разделяющее $\mathbb{C}$. Опять используя теорему Лаврентьева, видим, что

$$C(\Gamma_\infty) \neq \mathbf{P}(\Gamma_\infty),$$

т.е. *(i)* не выполнено. Точно так же доказывается, что *(i)* ложно, если (4.7) не выполнено для какой-нибудь ограниченной компоненты связности множества $\mathbb{C} \backslash \Gamma$.

Доказательство теоремы 4.3. Предположим, что G — область Каратеодори и множество $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$ связно. Нужно доказать утверждение *(i)*. В соответствии с леммой 4.3, это утверждение выполняется тогда и только тогда, когда

$$((\mu F) \in \mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)) \Leftrightarrow (\omega(F) = 0) \tag{4.8}$$

для любой меры μ ортогональной алгебре $\mathbf{P}(\Gamma)$ и любого собственного компактного подмножества F границы Γ области G. Обозначим через z_0 точку из G, относительно которой берется мера ω. Пусть F — компактное подмножество границы Γ, для которого $\omega(F) = 0$ и μ — произвольная мера из $\mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)$. Тогда очевидно, что $\mu \in \mathbf{P}^{\perp}_{z_0}(\Gamma)$, где z_0 — точка, выбранная выше. По теореме 2.2 мера μ абсолютно непрерывна относительно ω, но тогда и для ее сужения

$$\mu F << \omega.$$

Кроме того, так как $\omega(F) = 0$, то μF — сингулярна относительно ω. Любая мера, одновременно сингулярная и абсолютно непрерывная, равна нулю. Следовательно, $\mu F = 0$, а значит, $\mu F \in \mathbf{P}^{\perp}(\Gamma)$. Для завершения доказательства (4.8) предположим, что F — компактное собственное подмножество Γ, для которого $\omega(F) > 0$. Положим

$$d\mu(z) := (z - z_0)\, d\omega(z),$$

тогда равенство

$$\int_\Gamma f(z)\,d\mu(z) = \int_\Gamma f(z)(z-z_0)\,d\omega(z) = 0$$

имеет место для всех $f \in \mathbf{P}(\Gamma)$. Следовательно, мера μ принадлежит $\mathbf{P}^\perp(\Gamma)$. Если и $\mu F \in \mathbf{P}^\perp(\Gamma)$, то для любой функции f, принадлежащей $\mathbf{P}(\Gamma)$, имеем

$$\int_F f(z)(z-z_0)\,d\omega(z) = 0. \tag{4.9}$$

Так как $F \neq \Gamma$, то можно использовать утверждение 4.2, в силу которого существует последовательность полиномов P_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = \frac{1}{z-z_0}$$

равномерно на F. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_F P_n(z)(z-z_0)\,d\omega(z) = \int_F d\omega(z) = \omega(F) > 0,$$

что противоречит (4.9). Доказательство эквивалентности (4.8) закончено.

Предположим теперь, что утверждение *(i)* теоремы 4.3 выполнено. Нужно доказать, что G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ связно. Так как $\omega(\{a\}) = 0$ для любой точки $a \in \Gamma$, то каратеодориевость области G следует из утверждения 4.1 в силу *(i)*. Предположим теперь, что $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ не является связным множеством. Тогда найдется ограниченная открытая область G_1, являющаяся компонентой связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Пусть ω_1 — гармоническая мера на ∂G_1 относительно некоторой точки $z_1 \in G_1$. В силу пункта *(iii)* утверждения 2.3 имеем $\omega \perp \omega_1$, а в силу пункта *(ii)* этого утверждения $\partial G_1 \subseteq \partial G = \Gamma$. Следовательно, существует борелевское множество $B \subseteq \partial G$, для которого

$$\omega_1(B) = \omega_1(\partial G_1) = 1 \quad \text{и} \quad \omega(B) = 0.$$

Так как гармонические меры регулярны, то можно выбрать два компактных подмножества F и S так, что $F \cup S \subseteq B$ и

$$\omega_1(F) > 0, \quad \omega_1(S) > 0, \quad F \cap S = \emptyset.$$

В силу *(i)* множество F является множеством пика для $\mathbf{P}(\Gamma)$, так как $\omega(F) = 0$. Следовательно, существует функция $f \in \mathbf{P}(\Gamma)$ такая, что

$$\forall x \in F : f(x) = 1 \tag{4.10}$$

и

$$\forall x \in S : |f(x)| < 1. \tag{4.11}$$

В силу определения алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ включение $\partial G_1 \subseteq \Gamma$ гарантирует возможность продолжения функции $f|_{\partial G_1}$ до функции $\tilde{f}$, голоморфной в G_1 и непрерывной в $\overline{G}_1$. Утверждение 3.2 и формула (4.10) показывают, что

$$\forall x \in \overline{G}_1 : \tilde{f}(x) \equiv 1,$$

что противоречит (4.11). Таким образом, $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связное множество. Доказательство теоремы закончено.

4.3. Следствия

Перед тем как переходить к обещанным следствиям теоремы 4.3, остановимся на интересном следствии утверждения 4.1. Напомним вначале одно определение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $\mathbf{A}$ — линейное подпространство в $C(X)$, содержащее постоянные. Будем обозначать через $M(\mathbf{A})$ множество непрерывных линейных функционалов $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\varphi(1) = 1 = \|\varphi\|.$$

Множество $M(\mathbf{A})$ — непустое, выпуклое, компактное (в слабой топологии) подмножество пространства $\mathbf{A}^*$. Если точка $x \in X$, то через x^* обозначим элемент из $M(\mathbf{A})$, для которого

$$x^*(f) = f(x) \text{ для всех } f \in \mathbf{A}.$$

Определение 4.2. *Границей Шоке для $\mathbf{A}$ называется множество всех точек x, принадлежащих X, для которых линейный функционал x^* есть крайняя точка выпуклого множество $M(\mathbf{A})$.*

Если пространство X метризуемо, а $\mathbf{A}$ — равномерная алгебра на X, то в соответствии с теоремой Бишопа (см., например, [15, с. 50]) граница Шоке для $\mathbf{A}$ совпадает с множеством точек пика алгебры $\mathbf{A}$. Значит, учитывая утверждение 4.1, мы имеем

Следствие 4.1. *Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ. Следующие условия эквивалентны.*

(*i*) *G — область Каратеодори.*

(*ii*) *Граница Шоке алгебры* $\mathbf{P}(\overline{G})$ *совпадает с* Γ.

Теоремы 4.2 и 4.3 мгновенно дают

Следствие 4.2. *Пусть* G *— область Каратеодори и* $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ *— связное множество. Предположим, что* K *— непустое замкнутое подмножество границы* Γ. *Тогда* K *является множеством пика для алгебры* $\mathbf{P}(\overline{G})$ *в том и только том случае, когда* K *является интерполяционным множеством для* $\mathbf{P}(\Gamma)$.

Следующее следствие чуть менее очевидно.

Следствие 4.3. *Пусть* G *— область Каратеодори с границей* Γ *и* $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ *связно. Предположим, что* K *— замкнутое, непустое интерполяционное множество для* $\mathbf{P}(\Gamma)$. *Тогда для любой функции* $f \in C(K)$ *существует функция* $g \in \mathbf{P}(\overline{G})$ *такая, что*

$$f = g|_K, \qquad \|f\|_K = \|g\|_{\overline{G}}$$

и, если $\|f\|_K \neq 0$, *то*

$$|g(x)| < \|f\|_K$$

для всех $x \in \overline{G}\backslash K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\|f\|_K = 0$ следствие тривиально, поэтому будем считать, что $\|f\|_K > 0$. Продолжим сначала f с сохранением нормы до функции $g_1 \in \mathbf{P}(\Gamma)$. Для существования такого продолжения достаточно, чтобы

$$\forall \mu \in \mathbf{P}^{\perp}(\Gamma) : \mu K = 0, \tag{4.12}$$

(см., например, [31, с. 191]). Так как в соответствии с теоремой 4.2 мы имеем $\omega(K) = 0$, то, повторяя рассуждения проведенные при доказательстве (4.8), видим, что (4.12) выполнено. Пусть теперь g_2 — продолжение функции g_1 до функции из $\mathbf{P}(\overline{G})$. В силу принципа максимума это продолжение тоже сохраняет норму,

$$\|f\|_K = \|g_1\|_\Gamma = \|g_2\|_{\overline{G}}, \qquad g_2|_K = f.$$

В соответствии со следствием 4.2, компакт K является множеством пика для алгебры $\mathbf{P}(\overline{G})$. Следовательно, существует функция $\psi \in P(\overline{G})$, для которой $\psi(x) = 1$, если $x \in K$, и $|\psi(x)| < 1$, если $x \in \overline{G}\backslash K$. Легко видеть, что произведение

$$g(x) := \psi(x) \cdot g_2(x), \quad x \in \overline{G}$$

дает искомую функцию $g \in \mathbf{P}(\overline{G})$.

Используя теоремы 4.2 и 4.3, можно получить характеризацию областей Каратеодори G со связным $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ в терминах нулевых множеств функций из $\mathbf{P}(\overline{G})$.

Следствие 4.4. *Пусть G — односвязная, ограниченная область с границей Γ, а ω — гармоническая мера на Γ относительно некоторой точки $z_0 \in G$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(*i*) *Для любого непустого компакта $K \subseteq \Gamma$ с $\omega(K) = 0$ существует $f \in \mathbf{P}(\overline{G})$ такая, что*

$$\{x \in \overline{G} : f(x) = 0\} = K.$$

(*ii*) *G есть область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено *(ii)*. Предположим, что K — непустое, компактное подмножество Γ и $\omega(K) = 0$. Тогда, по теореме 4.3, K — множество пика для $P(\overline{G})$, а значит, существует функция $f \in P(G)$ такая, что

$$f|_K = 1 \quad \text{и} \quad |f(x)| < 1 \text{ для всех } x \in \overline{G}\backslash K\,.$$

В этом случае при $g(x) = 1 - f(x)$ имеем

$$K = \{x \in \overline{G} : g(x) = 0\},$$

так как при $x \in \overline{G}\backslash K$

$$|g(x)| \geq 1 - |f(x)| > 0.$$

Пусть теперь выполнено (i). Доказательство того, что в этом случае G — область Каратеодори, можно провести как в теореме 4.2. Действительно, если $\Gamma \neq \Gamma_\infty$, то найдется счетное компактное $K \subseteq \Gamma\backslash\Gamma_\infty$, которое не может быть нулевым множеством функции из $\mathbf{P}(\overline{G})$ в силу внутренней теоремы единственности. А если G — область Каратеодори, то для доказательства связности $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ можно рассуждать как при доказательстве импликации $(i) \Rightarrow (ii)$ из теоремы 4.3. Предположим, что множество $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ не связно. Тогда существует компонента связности $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, отличная от G_∞. Эта компонента является ограниченной односвязной областью G_1 с границей $\partial G_1 \subseteq \partial G$. На ∂G_1 выбираем замкнутое F так, что

$$\omega(F) = 0 \neq \omega_1(F) \neq 1,$$

где ω_1 — гармоническая мера на ∂G_1 относительно точки $z_1 \in G_1$. Используя теорему единственности, убеждается в том, что F не является множеством нулей ни для какой $f \in \mathbf{P}(\overline{G})$.

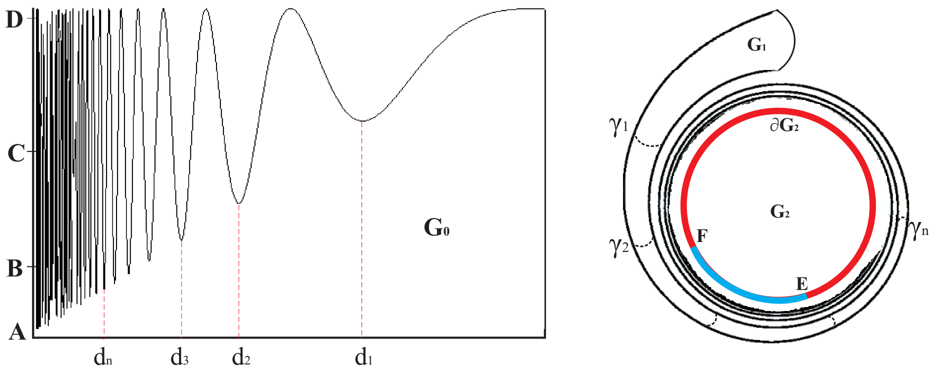

Рис. 3. Замкнутый отрезок $[BC]$ является нулевым множеством некоторой функции из $\mathbf{P}(\overline{G}_0)$, но замкнутая дуга $\overset{\frown}{EF}$ не есть нулевое множество ни для какой функции из $\mathbf{P}(\overline{G}_1)$

Пример 4.1. Для иллюстрации следствия 4.4 обратимся к рис. 3. Замкнутый отрезок $[AD]$, лежащий на границе области Каратеодори G_0, является телом простого конца, определяемого цепью разрезов $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$. (Необходимые сведения из теории простых концов можно найти в [10, гл. 9]). Из инвариантности гармонической меры при конформных отображениях следует, что $\omega([AD]) = 0$, а так как $\mathbb{C}\setminus\overline{G}_0$ — связное множество, то $[AD]$ и любое его непустое замкнутое подмножество, например, отрезок $[BC]$ является по следствию 4.4 нулевым множеством некоторой функции из $\mathbf{P}(\overline{G}_0)$. Внешняя змейка G_1 — классический пример области Каратеодори, замыкание которой разбивает плоскость. На рис. 3 круг G_2 является ограниченной компонентой связности множества $\mathbb{C}\setminus\overline{G}_1$. Окружность ∂G_2 является телом простого конца, определенного цепью сечений $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$. Гармоническая мера окружности ∂G_2 равна нулю относительно любой точки $z \in G_1$. Заметим далее, что тела всех других граничных простых концов области G_1 являются точками множества $\partial G_1 \setminus \partial G_2$. Пусть теперь φ — конформное однолистное отображение области G_1 на круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, при котором простой конец, определенный цепью $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, соответствует точке $1 + 0i$. По теореме Фаррела [27] функция φ допускает продолжение до функции $\tilde{\varphi} \in \mathbf{P}(\overline{G}_1)$. Легко видеть, что множество нулей функции

$$f(z) = 1 - \tilde{\varphi}(z), \qquad z \in \overline{G},$$

совпадает с окружностью ∂G_2. Осталось заметить, что в соответствии с рассуждениями, проведенными при доказательстве следствия 4.4, никакое замкнутое собственное подмножество A окружности ∂G_2 не является нулевым множеством для функций из $\mathbf{P}(\overline{G}_1)$, если линейная мера Лебега множества A положительна.

4.4. Комментарии

Теоремы 4.2, 4.3 и их следствия опубликованы в [24, 25]. В оригинальных статьях Рудина [35] и Карлесона [21] были описаны множества пика в классическом случае алгебры функций, непрерывных на окружности и аналитических в круге. Лемма 4.1 остается истинной, если в ее формулировке заменить «интерполяционные множества» на «множества пика» или «нуль множества». Фактически это устанавливалось при доказательстве теоремы 4.3. Как и в случае интерполяционных множеств, множества пика алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ являются замкнутыми. Заметим, что Γ — единственное множество пика алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$, не являющееся интерполяционным множеством этой алгебры. Все замечания к теореме 4.2 можно переформулировать для множеств пика. В частности, получаем следующую переформулировку части *(i)* из теоремы 4.3.

(i'') *Непустое подмножество K множества Γ является множеством пика алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда K — компакт, для которого $\omega^2(K) = \omega(K)$.*

Все рассуждения, использованные при доказательстве утверждения 4.1, хорошо известны. Утверждение, использованное при доказательстве леммы 4.3, представляет собой известную теорему Гликсберга о множествах пика, полученную в его работе [29]. Первый нетривиальный пример областей Каратеодори, удовлетворяющих свойству *(ii)* из утверждения 4.2, построил японский геометр K. Yoneyama в 1917 году [39]. Выразительное описание процесса построения таких областей можно найти в книге [1, с. 126—127]. В связи со следствием 4.1 стоит отметить, что для любой крайней точки x^* множества $M(\mathbf{A})$, соответствующее x, принадлежит границе Шоке для $\mathbf{A}$.

Список литературы

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 367 с.

2. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – М.: Мир, 1972. – 160 с.

3. *Витушкин А.Г.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. – 1967. – Т. 22, № 6. – С. 141-199.

4. Некоторые вопросы теории приближений: в научн. тр. – М.: ИЛ, 1963. – 133 с.

5. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

6. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 334 с.

7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

8. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ., 1963. – 311 с.

9. *Келли Дж.* Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.

10. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

11. *Куратовский К.* Топология. Том 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.

12. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 366 с.

13. *Петровский И.Г.* Метод Перрона решения задачи Дирихле // УМН. – 1941. – № 8. – С. 107-114.

14. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.

15. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968. – 112 с.

16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. Том 1. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

17. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

18. *Browder A.* Introduction to function algebras. – W. A. Benjamin, New York, 1969. – 273 p.

19. *Bishop E.* The sructure of certain measures // Duke Math. J. – 1958. – V. 25, № 2. – P. 283-289.

20. *Bishop E.* Boundary measure of analytic differentials // Duke Math. J. – 1960. – V. 27, № 3. – P. 331-340.

21. *Carleson L.* Representations of continuous functions // Mth. Z. – 1957. – V. 66. – P. 447-451.

22. *Cohn D.L.* Measure Theory. – Birkhäuser, Boston, 1980. – 373 p.

23. *Dovgoshei A.A.* The F. and M. Riesz' theorem and Carathéodory domains // Analysis Mathematica. – 1995. – V. 21. – P. 165-175.

24. *Dovgoshey O.* From the disk to the Carathéodory domains // Reports in Math. University of Helsinki. – 2005. – № 415.

25. *Dovgoshey O.* Certain Characterizations of Carathéodory Domains // Comput. Methods Func. Theory. – 2005. – V. 5, № 2. – P. 489-503.

26. *Eilenberg S.* An invariance theorem for subsets of $\mathbb{S}^n$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – V. 47. – P. 73-75.

27. *Farrell O.J.* On approximation to a mapping function by polynomials // Amer J. Math. – 1932. – V. 54. – P. 571-578.

28. *Fisher S.D.* Function Theory on Planar Domains. A Second Course in Complex Analysis. – John Wiley & Sons, New York etc., 1980. – 269 p.

29. *Glicksberg I.* Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry // Trans Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 105. – P. 415-435.

30. *Helson H., Lowdenslager D.* Prediction theory and Fourier series in several variables // Acta Math. – 1958. – V. 99. – P. 165-202.

31. *Leibowitz G.M.* Lectures on complex function algebras. – Scott, Foresmann and Company, Glenview, Illions, 1970. – 248 p.

32. *Newman M.H.* A. Elements of the topology of plane sets of points. – 2nd ed., Dover Publications, New York, 1992. – 214 p.

33. *Riesz F., Reisz M.* Über die Randwerte einer analytishen Funktion // 4 Congres Math. Scand., Stokholm, 1916, Almqvist-Wiksell, Uppsala, 1920. – P. 27-44.

34. *Rudin W.* Analyticity and the maximum modulus principle // Duke Math. J. – 1953. – V. 20. – P. 449-457.

35. *Rudin W.* Boundary values of continuous analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 7. – P. 808-811.

36. *Rudin W.* Functionl analysis. – McGraw-Hill, Singapore, 1991. – 224 p.

37. *Walsh J. L.* The approximation of harmonic functions by harmonic polinomials and by harmonic rational functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1929. – V. 35. – P. 499-544.

38. *Wermer J.* On algebras of continuous functions // Proc Amer. Math. Soc. – 1953. – V. 4. – P. 866-869.

39. *Yoneyama K.* Theory of continuous sets of points // Tohoku Math. Jour. – 1917. – V. 11. – P. 43-158.

ГЛАВА 4

АППРОКСИМАЦИЯ В СРЕДНЕМ: ПОЛИНОМАМИ, НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§1. Введение

В настоящей главе рассматриваются задачи полиномиальной и рациональной аппроксимации в $L^t(\mu)$ для случая мер μ, носители которых лежат на границе односвязной ограниченной области $G \subseteq \mathbb{C}$, и задачи об одновременной аппроксимации функций из классов Харди $H^{p_i}(G_i)$ для семейства непересекающихся односвязных областей $G_i \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

Установлено, в частности, что для класса областей Каратеодори со связным дополнением $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ условие Сегё расходимости логарифмического интеграла $\int \ln(\frac{d\mu}{d\omega})d\omega$, где ω — гармоническая мера на ∂G, равносильно плотности полиномов в $L^t(\mu)$. Доказано, что непрерывные в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфные в $\cup G_i$ функции плотны в топологии прямого произведения $\prod\limits_i H^{p_i}(G_i)$, $p_i > 0$, тогда и только тогда, когда $\overline{\mathbb{C}}\backslash \cup G_i$ — континуум Дирихле. Для случая постоянных $p_i = p > 0$ найдена структурная характеристика голоморфных в $\cup G_i$ функций, которые могут быть приближены функциями из $H^\infty(\cup G_i)$ по норме $\sup\limits_i \|\cdot\|_{H^p(G_i)}$.

§ 2. Теорема Сегё–Колмогорова–Крейна

Пусть K — непустое компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а M — семейство всех конечных положительных мер Бореля μ, имеющих компактные носители $\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathbb{C}$. Положим

$$M(K) := \{\mu \in M : \operatorname{supp} \mu \subseteq K\}.$$

Кроме того, через Π будем обозначать множество всех полиномов от переменной z с коэффициентами из $\mathbb{C}$ и пусть для точки $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\Pi_{z_0} := \{p \in \Pi : p(z_0) = 0\}.$$

Кроме того, будем считать, что при $t > 0$

$$P^t(K) := \{\mu \in M(K) : L^t(\mu) = \mathrm{Cl}_{L^t(\mu)}(\Pi)\},$$

$$P^t(K, z_0) := \{\mu \in M(K) : 1 \in \mathrm{Cl}_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})\},$$

т.е. $P^t(K)$ состоит из всех мер μ с носителями в K, для которых полиномы плотны в $L^t(\mu)$, а мера μ принадлежит $P^t(K, z_0)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp} \mu \subseteq K$ и единица может быть приближена в $L^t(\mu)$ полиномами, имеющими ноль в точке z_0.

В случае $K = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ классическая теорема Сегё–Колмогорова–Крейна утверждает, что для любой $\mu \in M(\mathbb{T})$ и любого $t > 0$ имеет место равенство

$$\inf_{p \in \Pi_0} \int |1 - p|^t d\mu = \exp \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{dm_1} \right) dm_1, \tag{2.1}$$

где m_1 — нормированная линейная мера Лебега на $\mathbb{T}$ (напомним, что в этом случае m_1 совпадает с гармонической мерой ω, взятой относительно точки 0), μ_a — абсолютно непрерывная составляющая мера μ в декомпозиции Лебега $\mu = \mu_a + \mu_s$ меры μ относительно m_1, а $\frac{d\mu_a}{dm_1}$ — производная Радона–Никодима меры μ_a относительно m_1.

Используя эту теорему, легко показать, что для любой меры $\mu \in$ $\in M(\mathbb{T})$ следующие утверждения эквивалентны.

– Имеет место равенство

$$\int \ln \left(\frac{d\mu_a}{dm_1} \right) dm_1 = -\infty.$$

– Мера μ принадлежит $P^t(\mathbb{T})$ для любого $t > 0$.

– Мера μ принадлежит $P^t(\mathbb{T}, z_0)$ для любого $t > 0$ и любого z_0 из круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Предположим теперь, что G — ограниченная односвязная область на плоскости и $\omega = \omega(z_0, G, \cdot)$ — гармоническая мера на границе Γ области G, вычисленная относительно фиксированной точки $z_0 \in G$. Для каждой меры $\mu \in M$ мы имеем ее декомпозицию Лебега относительно ω :

$$\mu = \mu_a + \mu_s,$$

где $\mu_a << \omega$ и $\mu_s \perp \omega$. Положим

$$M^-(G) = M^-(G, z_0) := \left\{ \mu \in M : \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega = -\infty \right\}, \tag{2.2}$$

где z_0 — точка области G, относительно которой берется гармоническая мера ω.

2.1. Теорема Сегё–Колмогорова–Крейна и области Каратеодори

Основное содержание настоящего параграфа составляет решение следующей задачи. Какую геометрию имеет Γ — граница области G, если для некоторого $z_0 \in G$ выполнено равенство

$$M(\Gamma) \cap M^-(G) = P^t(\Gamma)$$

или равенство

$$M(\Gamma) \cap M^-(G, z_0) = P^t(\Gamma, z_0)?$$

В следующей теореме будем полагать, что $\{G_i : i \in I\}$ есть семейство ограниченных компонент связности открытого множества $\mathbb{C} \backslash \Gamma$, $\{z_i : i \in \in I\}$ — множество точек плоскости таких, что $z_i \in G_i$ для любого $i \in I$ и

$$\{\Gamma_i : i \in I\} = \{\partial G_i : i \in I\}$$

есть семейство границ областей G_i. Кроме того, считаем, что для каждого $i \in I$ семейство мер $M^-(G_i) = M^-(G_i, z_i)$ определяется аналогично (2.2) с заменой G на G_i, а ω на $\omega_i = \omega(z_i, G_i, \cdot)$ — гармоническую меру на ∂G_i относительно точки $z_i \in G_i$. Условимся, наконец, что

$$G_0 = G, \qquad \Gamma_0 = \Gamma, \qquad M^-(G) = M^-(G_0) = M^-(G_0, z_0).$$

Теорема 2.1. *Пусть G — ограниченная односвязная область с границей Γ, и t — положительное число. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(*а*) *Если G — область Каратеодори, то*

$$M(\Gamma)\bigcap M^{-}(G,z_0)=P^t(\Gamma,z_0) \tag{2.3}$$

и

$$P^t(\Gamma)=\bigcap_{i\in I}M^{-}(G_i,z_i)\bigcap M(\Gamma). \tag{2.4}$$

(*б*) *Если* (2.3) *выполнено, то G является областью Каратеодори.*
(*в*) *Двойное равенство*

$$M(\Gamma)\bigcap M^{-}(G,z_0)=P^t(\Gamma)=P^t(\Gamma,z_0) \tag{2.5}$$

эквивалентно тому, что G — область Каратеодори и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связно.
(*г*) *Если область G не является областью Каратеодори, то*

$$(M(\Gamma)\bigcap M^{-}(G,z_0))\backslash P^t(\Gamma,z_0)\neq\emptyset. \tag{2.6}$$

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем некоторые замечания. Предположим, что $\mathbf{B}$ — алгебра Дирихле на непустом компакте $K\subseteq\mathbb{C}$, $\varphi:\mathbf{B}\to\mathbb{C}$ — мультипликативный линейный функционал, ν — представляющая мера функционала φ, а $\mathbf{B}_0$ — его ядро, т.е.

$$\mathbf{B}_0=\ker(\varphi):=\{f\in\mathbf{B}:\varphi(f)=0\}.$$

В этом случае для любой меры $\mu\in M(\mathrm{K})$ справедлива формула, аналогичная (2.1) (см., например, [24, с. 236]),

$$\inf_{f\in\mathbf{B}_0}\int|1-f|^t d\mu=\exp\int\ln\left(\frac{d\mu_0}{d\nu}\right)d\nu, \tag{2.7}$$

где t — произвольное положительное число, а μ_0 — абсолютно непрерывная часть меры μ относительно ν.

Обозначим через G_∞ неограниченную компоненту связности множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$.

Лемма 2.1. *Пусть G — область Каратеодори с границей Γ, алгебра $\mathbf{P}(\Gamma)$ — равномерное замыкание множества полиномов Π на Γ, z_i — произвольная точка множества $\mathbb{C}\backslash\overline{G}_\infty$, $f\in\mathbf{P}(\Gamma)$ и $\tilde{f}$ — продолжение функции f до функции, непрерывной на $\mathbb{C}\backslash G_\infty$ и голоморфной в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}_\infty$. Тогда функционал*

$$\varphi_{z_i} : \mathbf{P}(\Gamma) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_{z_i}(f) := \tilde{f}(z_i) \tag{2.8}$$

мультипликативен на $\mathbf{P}(\Gamma)$*, а его ядро представляет собой замыкание множества* Π_{z_i} *в* $C(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что в силу принципа максимума модуля функционал φ_{z_i}, определенный в (2.8), является непрерывным на $\mathbf{P}(\Gamma)$. Кроме того, этот функционал, очевидно, мультипликативен на $\Pi \subseteq \mathbf{P}(\Gamma)$. Осталось заметить, что Π — всюду плотная подалгебра равномерной алгебры $\mathbf{P}(\Gamma)$, а значит, φ_{z_i} мультипликативен и на всей $\mathbf{P}(\Gamma)$. Далее очевидно, что

$$\Pi_{z_i} \subseteq \ker(\varphi_{z_i}),$$

но в силу непрерывности φ_{z_i} его ядро замкнуто, а значит,

$$\overline{\Pi}_{z_i} \subseteq \ker(\varphi_{z_i}).$$

Для доказательства включения

$$\overline{\Pi}_{z_i} \supseteq \ker(\varphi_{z_i})$$

воспользуемся теоремой Уолша о равномерной полиномиальной аппроксимации с одновременной интерполяцией (см. [30, с. 121] или [22, с. 370]). В силу этой теоремы, если функцию f можно равномерно приблизить полиномами на непустом компакте $K \subseteq \mathbb{C}$, то для любого конечного набора точек $\{z_j\}_{j=1}^n$, $z_j \in K$, можно найти последовательность полиномов p_m, равномерно сходящуюся к f на K и такую, что для любого m

$$p_m(z_j) = f(z_j), \qquad j = 1, \ \ldots, \ n.$$

Выбрав $K = \mathbb{C} \backslash G_\infty$ и $f \in \ker \varphi_{z_i}$ завершаем доказательство.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Начнем с доказательства утверждения (a). Пусть G — область Каратеодори и $\mu \in M(\Gamma)$. В этом случае, по лемме 2.4 из главы 3, $\mathbf{P}(\Gamma)$ есть алгебра Дирихле на Γ. Заменив меру ν в (2.7) гармонической мерой $\omega_i = \omega(z_i, G_i, \cdot)$, где $i \in I$, и учитывая, что в силу леммы 2.1 ядро функционала (2.8) есть $\overline{\Pi}_{z_i}$, получаем при любом $i \in I$ равенство

$$\inf_{p \in \Pi_{z_i}} \int |1-p|^t d\mu = \exp \int \ln \left(\frac{d\mu_{a_i}}{d\omega_i} \right) d\omega_i, \tag{2.9}$$

где μ_{a_i} — абсолютно непрерывная часть меры μ в ее декомпозиции относительно ω_i. Следовательно,

$$\forall i \in I : M(\Gamma) \bigcap M^-(G_i, z_i) = P^t(\Gamma, z_i). \tag{2.10}$$

Так как $G := G_0$, то из (2.10) при $i = 0$ имеем (2.3).

Проверим (2.4). Очевидно, что для любой $\mu \in M(\Gamma)$, любого $i \in I$ и любого полинома $p \in \Pi$ имеет место двойное неравенство:

$$(d_{1i})^{-t} \int_\Gamma |1 - (z - z_i)p(z)|^t \, d\mu(z) \le \int_\Gamma \left| \frac{1}{z - z_i} - p(z) \right|^t d\mu(z) \le$$

$$\le (d_{2i})^{-t} \int_\Gamma |1 - (z - z_i)p(z)|^t \, d\mu(z), \tag{2.11}$$

где

$$d_{1i} = \max\{|z - z_i| : z \in \Gamma\}, \qquad d_{2i} = \min\{|z - z_i| : z \in \Gamma\}.$$

Отсюда и из (2.9), используя стандартные рассуждения, получаем порядковое равенство:

$$\inf_{p\in\Pi} \int_\Gamma \left| \frac{1}{z - z_i} - p(z) \right|^t d\mu(z) \asymp \exp \int \ln \left(\frac{d\mu_{a_i}}{d\omega_i} \right) d\omega_i, \tag{2.12}$$

где значок $\asymp$ означает слабую эквивалентность[4]. Если $\mu \in P^t(\Gamma)$, то левая часть в (2.12) есть ноль при любом $i \in I$. Следовательно,

$$(\mu \in P^t(\Gamma)) \Rightarrow \left(\mu \in \bigcap_{i\in I} M^-(G_i, z_i) \right). \tag{2.13}$$

Для того чтобы проверить (2.4), нужно доказать и обратную импликацию.

Пусть $\operatorname{supp} \mu \subseteq \Gamma$ и

$$\mu \in \bigcap_{i\in I} M^-(G_i, z_i).$$

[4]Величины x и y слабо эквивалентны, если найдется постоянная $c \ge 1$ такая, что $\frac{1}{c}x \le y \le cx$. Порядковое равенство (2.12) показывает, в частности, что его правая и левая части могут равняется нулю только одновременно.

Так как алгебра непрерывных функций $C(\Gamma)$ плотна в $L^t(\mu)$, а в соответствии с теоремой Витушкина любая $f \in C(\Gamma)$ может быть равномерно аппроксимирована на Γ рациональными функциями с полюсами в $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ [2, с. 282, 284], то для доказательства принадлежности

$$\mu \in P^t(\Gamma)$$

достаточно проверить, что любая рациональная функция $r(z)$ с полюсами вне Γ может быть аппроксимирована в $L^t(\mu)$ полиномами. Легко видеть, что произвольная рациональная функция с полюсами вне Γ может быть аппроксимирована (равномерно на Γ) линейными комбинациями рациональных функций вида

$$r(z) = \frac{1}{z-b}, \qquad b \notin \Gamma.$$

Если $b \in G_\infty$ то, в соответствии с теоремой Мергеляна, функция $r(z)$ может быть равномерно аппроксимирована полиномами на $\mathbb{C}\backslash G_\infty$, а значит, и на Γ. При $b \notin G_\infty$ точка b принадлежит области G_i для некоторого $i \in I$. Заменив в (2.11) z_i на b, получаем соотношение, аналогичное (2.12):

$$\inf_{p\in\Pi} \int_\Gamma \left| \frac{1}{z-b} - p(z) \right|^t d\mu(t) \asymp \exp \int \ln \left(\frac{d\mu_a^b}{d\omega^b} \right) d\omega^b, \tag{2.14}$$

где ω^b — гармоническая мера на ∂G_i относительно точки $b \in G_i$, а μ_a^b — абсолютно непрерывная составляющая в декомпозиции Лебега меры μ относительно меры ω^b. Используя неравенство Гарнака (см., например, [1, с. 191]), можно показать, что ω_i и ω^b взаимно абсолютно непрерывны и, более того, существует постоянная $c = c(z_i, b) > 0$, для которой почти всюду (относительно ω_i) выполнено двойное неравенство:

$$\frac{1}{c} \le \frac{d\omega^b}{d\omega_i}(z) \le c, \tag{2.15}$$

где $\frac{d\omega^b}{d\omega_i}$ — производная Радона–Никодима меры ω^b относительно меры ω_i. В силу взаимной абсолютной непрерывности мер ω^b и ω_i имеем равенство $\mu_a^b = \mu_{a_i}$. Следовательно,

$$\frac{d\mu_a^b}{d\omega^b} = \frac{d\mu_{a_i}}{d\omega^b} = \frac{d\mu_{a_i}}{d\omega_i} \frac{d\omega_i}{d\omega^b}$$

и, использовав (2.15), получаем

$$\frac{1}{c} \frac{d\mu_a^b}{d\omega^b} \le \frac{d\mu_{a_i}}{d\omega_i} \le c \frac{d\mu_a^b}{d\omega^b}.$$

Последнее равенство вместе с (2.12), (2.14) даст

$$\inf_{p\in\Pi}\int_\Gamma\left|\frac{1}{z-b}-p(z)\right|^t d\mu(t)\asymp \exp\int\ln\left(\frac{d\mu_{a_i}}{d\omega_i}\right)d\omega_i.$$

Следовательно, если $\mu\in M^-(G_i,z_i)$, то для любой точки $b\in G_i$ функция $\frac{1}{z-b}$ может быть аппроксимирована в $L^t(\mu)$ полиномами, что завершает проверку импликации обратной к (2.13). Утверждение (*а*) доказано полностью.

Легко видеть, что утверждение (*б*) следует из (*а*) и (*г*). Перейдем к доказательству утверждения (*г*).

Предположим, что G не является областью Каратеодори. Пусть $\tilde G$ — компонента связности внутренности множества $Pc(\overline{G})$, содержащая отмеченную точку $z_0\in G$. Тогда $\tilde G\supseteq G$ и

$$\partial(\tilde G)\subseteq\Gamma=\partial G. \tag{2.16}$$

Пусть $\tilde\omega=\omega(z_0,\tilde G,\cdot)$ — гармоническая мера на $\partial(\tilde G)$ относительно точки z_0. Для доказательства (2.6) достаточно установить, что

$$\tilde\omega\in M(\Gamma)\cap M^-(G,z_0)\quad\text{и}\quad\tilde\omega\notin P^t(\Gamma,z_0). \tag{2.17}$$

Установим первое соотношение. Принадлежность $\tilde\omega\in(M(\Gamma))$ следует из того, что $\operatorname{supp}\tilde\omega=\partial\tilde G$ (см. лемму 3.1 из главы 3) и (2.16). Далее, в силу определения носителя меры, из леммы 3.1 из главы 3 получаем неравенство $\omega(\Gamma\backslash\partial\tilde G)>0$. Следовательно,

$$\int_\Gamma\ln\left(\frac{d\tilde\omega_a}{d\omega}\right)d\omega=\int_{\Gamma\backslash\partial\tilde G}\ln\left(\frac{d\tilde\omega_a}{d\omega}\right)d\omega+\int_{\partial\tilde\Gamma}\ln\left(\frac{d\tilde\omega_a}{d\omega}\right)d\omega=-\infty, \tag{2.18}$$

где $\tilde\omega_a$ — абсолютно непрерывная компонента меры $\tilde\omega$ относительно ω. Таким образом,

$$\tilde\omega\in M^-(G,z_0).$$

Проверим последнее из соотношений (2.17). Так как

$$\operatorname{supp}\tilde\omega=\partial\tilde G\subseteq\Gamma,$$

то достаточно показать, что

$$\tilde\omega\notin P^t(\partial\tilde G,z_0).$$

Так как $\tilde{G}$ — область Каратеодори, то в соответствии с уже доказанным равенством (2.3) имеем эквивалентность

$$(\tilde{\omega} \notin P^t(\partial\tilde{G}, z_0)) \Leftrightarrow (\tilde{\omega} \notin M^-(\tilde{G}, z_0) \vee \tilde{\omega} \notin M(\partial\tilde{G})).$$

Осталось заметить, что в силу определения производной Радона–Никодима

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{\omega}} \equiv 1.$$

Следовательно,

$$\int \ln(\frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{\omega}})d\tilde{\omega} = 0 \neq -\infty,$$

а значит,

$$\tilde{\omega} \notin M^-(\tilde{G}, z_0).$$

Второе из соотношений (2.17) доказано. Доказательство утверждения (*г*) закончено.

Осталось проверить утверждение (*в*). Если G — область Каратеодори и множество $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ является связным, то двойное равенство (2.5) следует из соотношений (2.3), (2.4). Обратно, предположим что (2.5) выполнено. Тогда, в силу уже доказанного утверждения (*б*), область G является областью Каратеодори и нужно установить связность $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Для этого заметим, что «каратеодориевость» G влечет (2.4), что вместе с (2.5) даст соотношение

$$\forall i \in I : M^-(G, z_0) \cap M(\Gamma) \subseteq M^-(G_i, z_i) \cap M(\Gamma). \tag{2.19}$$

Предположим, что $G_{i_0} \neq G$ для некоторого $i_0 \in I$. В этом случае из пункта *(iii)* утверждения 2.3 главы 3 следует, что абсолютно непрерывная компонента меры $\omega_{i_0} = \omega(G_{i_0}, z_{i_0}, \cdot)$ относительно меры ω равна нулю. Но тогда, используя определение семейства мер $M^-(G, z_0)$, получаем

$$\omega_{i_0} \in M^-(G, z_0),$$

а так как $\operatorname{supp}\omega_{i_0} = \Gamma_{i_0} \subseteq \Gamma$, то

$$\omega_{i_0} \in M(\Gamma).$$

Следовательно,

$$\omega_{i_0} \in M^-(G, z_0) \cap M(\Gamma),$$

что вместе с (2.19) дает

$$\omega_{i_0} \in M^-(G_{i_0}, z_{i_0}).$$

Последнее соотношение очевидно ложно. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (*в*). Теорема доказана.

При формулировке следующего следствия использована система обозначений, принятая в теореме 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть G — область Каратеодори с границей Γ и t — положительная постоянная. Тогда равенство*

$$P^t(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} P^{t_i}(\Gamma, z_i) \tag{2.20}$$

выполнено для любых положительных t_i, $i \in I$, но равенство

$$P^t(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} P^{t_i}(\Gamma_i, z_i) \tag{2.21}$$

выполняется (хотя бы для одного набора $t_i > 0, \quad i \in I$) тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in I : \Gamma_i = \Gamma. \tag{2.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{t_i : i \in I\}$ — какой-нибудь набор положительных чисел, проиндексированный с помощью множества I, фигурирующего в теореме 2.1. Так как положительная постоянная t в формуле (2.10) произвольна, то

$$M(\Gamma) \cap M^-(G_i, z_i) = P^{t_i}(\Gamma, z_i)$$

для любого $i \in I$. Отсюда и из (2.4) получаем (2.20).

Предположим теперь, что (2.22) выполнено. Заменив в правой части (2.20) Γ на Γ_i, получаем (2.21). Пусть теперь имеет место (2.21), но существует $i_0 \in I$ такое, что

$$\Gamma_{i_0} \neq \Gamma. \tag{2.23}$$

Тогда из (2.21) и определения семейства мер $P^{t_{i_0}}(\Gamma_{i_0}, z_{i_0})$ следует, что

$$\operatorname{supp} \mu \subseteq \Gamma_{i_0} \tag{2.24}$$

для любой меры $\mu \in P^t(\Gamma)$. Из (2.23) и включения $\Gamma_{i_0} \subseteq \Gamma$ получаем $\Gamma \backslash \Gamma_{i_0} \neq \emptyset$. Пусть b — произвольная точка из $\Gamma \backslash \Gamma_{i_0}$. Очевидно, что мера Дирака δ_b принадлежит $P^t(\Gamma)$, но

$$\operatorname{supp} \delta_b = \{b\} \not\subset \Gamma_{i_0}.$$

Последнее противоречит (2.24).

2.2. Равномерная и средняя плотность алгебр рациональных функций

Остановимся теперь еще на одном применении формулы Сегё (2.7).

Пусть K — компактное подмножество комплексной плоскости. Обозначим через $\mathfrak{U}(K)$ семейство всех подалгебр $\mathbf{A}$ алгебры $C(K)$, удовлетворяющих следующим условиям:

– любой полином p принадлежит $\mathbf{A}$,

– любой элемент $r \in \mathbf{A}$ есть рациональная функция с полюсами вне K.

Заметим, что каждая алгебра $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}(K)$ разделяет точки K, но не замкнута в $C(K)$, если K содержит бесконечное число точек. Используя алгебраическую терминологию, можно сказать, что любой элемент из $\mathfrak{U}(K)$ есть модуль над кольцом П.

Если мера $\mu \in M(K)$ является достаточно «массивной», то можно ожидать, что плотность алгебры $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}(K)$ в пространстве $L^t(\mu)$ влечет плотность этой алгебры в $C(K)$. Что является критерием такой массивности? Частичный ответ на такой вопрос дается в теореме 2.2, для формулировки которой введем необходимые обозначения.

Пусть G — ограниченная односвязная область на плоскости $\Gamma = \partial G$ и t — положительное число. Обозначим через $M_*^t(\Gamma)$ семейство мер $\mu \in \in M(\Gamma)$ таких, что для любой алгебры $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}(\Gamma)$ плотность $\mathbf{A}$ в $L^t(\mu)$ влечет плотность $\mathbf{A}$ в $C(\Gamma)$. Положим при $z_0 \in G$

$$M^+(G, z_0) := M \backslash M^-(G, z_0) = \left\{ \mu \in M : \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega > -\infty \right\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть G — ограниченная односвязная область с границей Γ и пусть $t \in (0, \infty)$. В этом случае, если G является областью Каратеодори, то*

$$M_*^t(\Gamma) = \bigcap_{i\in I} M^+(G_i, z_i) \bigcap M(\Gamma), \tag{2.25}$$

а если G — произвольная односвязная область и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связное множество, то равенство

$$M_*^t(\Gamma) = M^+(G, z_0) \bigcap M(\Gamma) \tag{2.26}$$

выполнено тогда и только тогда, когда G — область Каратеодори.

Перед тем как доказывать сформулированную теорему, рассмотрим структуру семейства $\mathfrak{U}(K)$.

Для любой рациональной функции r обозначим через $\mathrm{Pol}(r)$ множество полюсов этой функции. Пусть K — произвольное компактное подмножество плоскости $\mathbb{C}$ (может быть пустое). Каждой алгебре $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}(K)$ сопоставим множество

$$\mathrm{Pol}(\mathbf{A}) := \bigcup_{r\in\mathbf{A}} \mathrm{Pol}(r), \tag{2.27}$$

очевидно, что $\mathrm{Pol}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}\backslash K$. Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{C}\backslash K)$ есть множество всех подмножеств множества $\mathbb{C}\backslash K$.

Лемма 2.2. *Отображение* $\mathrm{Pol} : \mathfrak{U}(K) \to \mathfrak{B}(\mathbb{C}\backslash K)$, *определенное правилом* (2.27), *является биективным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \subseteq \mathbb{C}\backslash K$. Обозначим через $\mathbf{A}(B)$ множество всех рациональных функций r, для которых $\mathrm{Pol}(r) \subseteq B$. Очевидно, что $\Pi \subseteq \mathbf{A}(B) \neq \emptyset$ при любом $B \subseteq \mathbb{C}\backslash K$ (в частности, если $B = \emptyset$, то $\mathbf{A}(B) = \Pi$) и что $\mathbf{A}(B)$ замкнуто относительно поточечного сложения, поточечного умножения и умножения на константы. Значит, $\mathbf{A}(B) \in \mathfrak{U}(K)$. Кроме того, из определения $\mathbf{A}(B)$ следует, что

$$\mathrm{Pol}(\mathbf{A}(B)) = B.$$

Таким образом, отображение Pol сюръективно. Проверим инъективность этого отображения. Если для некоторого $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}(K)$ выполнено равенство

$$\mathrm{Pol}(\mathbf{A}) = B, \tag{2.28}$$

то очевидно, что

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}(B).$$

Для доказательства инъективности достаточно установить включение

$$\mathbf{A}(B) \subseteq \mathbf{A}. \tag{2.29}$$

Так как алгебра $\mathbf{A}(B)$ порождается функциями вида $(z-b)^{-1}$, где $b \in B$, то включение (2.29) будет доказано, если

$$\forall b \in B : (z-b)^{-1} \in \mathbf{A}.$$

Пусть теперь b — произвольная точка из B. В силу (2.28) существует функция $r \in \mathbf{A}$, имеющая вид

$$r(z) = \frac{p_1(z) + c}{(z-b)p_2(z)},$$

где $p_1, p_2 \in \Pi$, $p_1(b) = 0$, $c \neq 0$ (возможно, что полином $p_1(z)$ есть тождественный ноль). Тогда

$$p_2(z) \cdot r(z) = \frac{c}{z-b} + p_3(z),$$

где $p_3(z)$ полином, равный $\frac{p_1(z)}{z-b}$. Следовательно,

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{c}(p_2(z)r(z) - p_3(z)).$$

Последнее равенство показывает, что $\frac{1}{z-b} \in \mathbf{A}$.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть G — область Каратеодори. Проверим выполнение равенства (2.25). Предположим, что для некоторого $i_0 \in I$ существует мера

$$\mu_0 \in M_*^t(\Gamma) \backslash M^+(G_{i_0}, z_{i_0}). \tag{2.30}$$

Рассмотрим алгебру

$$\mathbf{A}_{i_0} := \mathrm{Pol}^{-1}\left(\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \backslash G_{i_0}\right), \tag{2.31}$$

где Pol^{-1} — отображение, обратное к отображению $\mathrm{Pol} : \mathfrak{U}(\Gamma) \to \mathfrak{B}(\mathbb{C}\backslash\Gamma)$. В силу (2.30)

$$\mu_0 \in M^-(G_{i_0}, z_{i_0}) \bigcap M(\Gamma).$$

Отсюда, используя равенства (2.10) и (2.11), получаем, что

$$\forall b \in G_{i_0} : (z-b)^{-1} \in \mathrm{Cl}_{L^t(\mu_0)}(\Pi).$$

Последнее соотношение, (2.31), упоминавшаяся ранее теорема Витушкина и плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu_0)$ обеспечивают плотность алгебры $\mathbf{A}_{i_0}$ в $L^t(\mu_0)$. Однако алгебра $\mathbf{A}_{i_0}$ не является плотной подалгеброй $C(\Gamma)$. Действительно, так как

$$\Gamma_{i_0} = \partial G_{i_0} \subseteq \partial G = \Gamma,$$

то плотность $\mathbf{A}_{i_0}$ в $C(\Gamma)$ влечет плотность $\mathbf{A}_{i_0}$ в $C(\Gamma_{i_0})$. В частности, существует последовательность $\{r_n\}$, $r_n \in \mathbf{A}_{i_0}$, для которой

$$r_n(z) \rightrightarrows (z - z_{i_0})^{-1}$$

равномерно на Γ_{i_0}, но тогда

$$(z - z_{i_0}) r_n(z) \rightrightarrows 1$$

равномерно на Γ_{i_0}. Следовательно,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_{i_0}} (z - z_{i_0}) r_n(z) d\omega_{i_0}(z) = \int_{\Gamma_{i_0}} 1 d\omega_{i_0}(z) = 1, \tag{2.32}$$

где гармоническая мера $\omega_{i_0} = \omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot)$ вычисляется относительно точки $z_{i_0} \in G_{i_0}$. Противоречие, полученное в (2.32), показывает, что

$$M_*^+(\Gamma) \subseteq (\bigcap_{i\in I} M^+(G_i, z_i)) \bigcap M(\Gamma). \tag{2.33}$$

Докажем обратное включение. Пусть

$$\mu \in (\bigcap_{i\in I} M^+(G_i, z_i)) \bigcap M(\Gamma),$$

$\mathbf{A}_1$ — произвольная алгебра из $\mathfrak{U}(\Gamma)$ плотная в $L^t(\mu)$, $\quad t > 0$. Нужно доказать, что

$$\mu \in M_*^t(\Gamma),$$

т.е., что $\mathbf{A}_1$ плотна в $C(\Gamma)$. В силу леммы 2.2 найдется $B_1 \subseteq \mathbb{C}\backslash\Gamma$ такое, что

$$\mathbf{A}_1 = \mathrm{Pol}^{-1}(B_1).$$

Для плотности $\mathbf{A}_1$ в $C(\Gamma)$ достаточно (и необходимо), чтобы

$$\forall i \in I : G_i \bigcap B_1 \neq \emptyset. \qquad (2.34)$$

Если последнее ложно, то существует $i_0 \in I$ такое, что функция $(z - z_{i_0})^{-1}$, $z_{i_0} \in G_{i_0}$, может быть аппроксимирована в $L^t(\mu)$ рациональными функциями r_n, $\quad n = 1,\ 2,\ \ldots$ с полюсами, лежащими вне $\overline{G}_{i_0}$. Последовательность функций $(z - z_{i_0})r_n(z)$ сходится к единице в $L^t(\mu)$. Так как G_{i_0} — область Каратеодори (см. пункт *(i)* утверждения 2.3 главы 3), то замыкание полиномов в $C(\Gamma_{i_0})$ образуют алгебру Дирихле, а так как $\mathbf{A}_1 \supseteq \Pi$, то и замыкание алгебры $\mathbf{A}_1$ в $C(\Gamma_{i_0})$ является алгеброй Дирихле. Следовательно, можно использовать формулу Сегё (2.7), положив в ней $\nu = \omega_{i_0} = \omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot)$. Так как $\mu \in M^+(G_{i_0}, z_{i_0})$, то в силу этой формулы существует постоянная c такая, что

$$\int_\Gamma |1 - r_n(z)(z - z_{i_0})|^t d\mu(z) \geq \int_{\Gamma_{i_0}} |1 - r_n(z)(z - z_{i_0})|^t d\mu(z) \geq c > 0$$

для всех r_n. Последнее противоречит сходимости $(z - z_{i_0})r_n(z) \to 1$ в $L^t(\mu)$. Включение, обратное к (2.33), а вместе с ним и равенство (2.25) доказаны.

Пусть теперь G — ограниченная односвязная область и $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — связно. Если G есть область Каратеодори, то (2.26) выполняется как частный случай (2.25). Предположим теперь, что G не является областью Каратеодори. Пусть, как и в доказательстве теоремы 2.1, $\tilde{G}$ — компонента связности множества $\mathrm{Int}(Pc(\overline{G}))$, содержащая точку $z_0 \in G$. Тогда гармоническая мера $\tilde{\omega} = \omega(z_0, \tilde{G}, \cdot)$ не принадлежит множеству $M^+(G, z_0) \bigcap M(\Gamma)$ — это следует из формулы (2.18). Проверим принадлежность

$$\tilde{\omega} \in M^+_*(\Gamma).$$

Предположим, что для некоторого $B_1 \subseteq \mathbb{C}\backslash\Gamma$ алгебра

$$\mathbf{A}_1 := \mathrm{Pol}^{-1}(B_1)$$

является плотной в $L^t(\tilde{\omega})$, $\quad t > 0$. Заменяя в рассуждениях, приведенных после равенства (2.27), G_{i_0} на $\tilde{G}$, z_{i_0} на z_0 и обе меры μ и ω_{i_0} на $\tilde{\omega}$, получаем неравенство

$$G \bigcap B_1 \neq \emptyset.$$

Отсюда по теореме Витушкина и в силу определения семейства $\mathfrak{U}(\Gamma)$ следует плотность $\mathbf{A}_1$ в $C(\Gamma)$. Следовательно,

$$\tilde{\omega} \in M_*^t(\Gamma) \backslash (M^+(G, z_0) \bigcap M(\Gamma)),$$

что противоречит равенству (2.26). Таким образом, из (2.26) вытекает, что G — область Каратеодори, если $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$ — связно.

2.3. Комментарии

Основными результатами настоящего параграфа являются теоремы 2.1 и 2.2. Они были опубликованы в совместных с Ф.Г. Абдуллаевым работах [11, 32].

Теорема Сегё–Колмогорова–Крейна для алгебр Дирихле была доказана в работе Хельсона–Лауденслегера [36]. Формула (2.1) была установлена Г. Сегё [39] для абсолютно непрерывных мер. В общем случае это доказано А.Н. Колмогоровым [14] и М.Г. Крейном [15]. Рассуждения, использованные при доказательстве теорем 2.1 и 2.2, предполагают плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$. Заметим, что эта плотность доказывается для регулярных мер μ и $1 \leq t < \infty$. Требование регулярности μ не включено в определение множества M, так как любая конечная мера, определенная на борелевских подмножества $\mathbb{R}^n$, регулярна [28, с. 40]. Плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$ при $0 < t < 1$ легко установить, использовав неравенство Гельдера. Для произвольного компакта $K \subseteq \mathbb{C}$ семейство алгебр $\mathfrak{U}(K)$ естественным образом упорядочивается отношением $\subseteq$. В этом случае лемма 2.2 показывает, что отображение $\mathrm{Pol} : (\mathfrak{U}(K), \subseteq) \to (\mathfrak{B}(\mathbb{C} \backslash K), \subseteq)$, определенное формулой (2.27), является изоморфизмом частично упорядоченных множеств, а значит, $(\mathfrak{U}(K), \subseteq)$ есть полная структура.

§ 3. Континуумы со свойством Дирихле и произведения пространств Харди

Пусть Ω — область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и z_0 — фиксированная точка этой области. Классом Харди $H^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, называется множество голоморфных в Ω функций f, для которых $|f|^p$ имеет в Ω гармоническую мажоранту, т.е. существует гармоническая в Ω функция u, зависящая от f, для которой

$$\forall z \in \Omega : \ |f(z)|^p \leq u(z). \tag{3.1}$$

Если $f \in H^p(\Omega)$, то среди всех гармонических мажорант функции $|f|^p$ можно выбрать наименьшую гармоническую мажоранту u_f, для которой

$$|f(z)|^p \leq u_f(z) \leq u(f)$$

при всех $z \in \Omega$ и всех гармонических u, удовлетворяющих (3.1), (см. [33, с. 52]). При любом p из $(0, \infty)$ на $H^p(\Omega)$ определен неотрицательный функционал

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} := [u_f(z_0)]^{1/p}. \tag{3.2}$$

Если $p \geq 1$, то $H^p(\Omega)$ — банахово пространство с нормой (3.2), а для $0 < p < 1$, $H^p(\Omega)$ — полное метрическое пространство, расстояние между точками которого определяется формулой

$$\rho(f, g) := u_{f-g}(z_0) = \Big(\|f - g\|_{H^p(\Omega)}\Big)^p. \tag{3.3}$$

Для континуума K, лежащего на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, положим

$$G := \overline{\mathbb{C}} \backslash K.$$

Если $K \neq \overline{\mathbb{C}}$, то G — открытое множество, представляющее собой объединение односвязных областей G_i — компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$,

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i, \quad G_{i_1} \bigcap G_{i_2} = \emptyset \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2.$$

Каждой из областей G_i, $i \in I$, поставим в соответствие число $p_i > 0$ и точку $z_i \in G$, определяющие пространство $H^{(i)} := H^{p_i}(G_i)$ с метрикой (3.3) или нормой (3.2). Положим, что H есть декартово произведение пространств H^i,

$$H := \prod_{i \in I} H^{(i)}$$

снабженное тихоновской топологией [23, с. 35]. Это слабейшая топология на H, относительно которой все проекции $pr_i : H \to H^{(i)}$ непрерывны.

Пусть f — голоморфная в G функция, для которой сужение

$$f|_{G_i} \in H^{(i)}$$

при любом $i \in I$, тогда f естественным образом сопоставляется некоторый элемент $f_H \in H$, а именно тот, для которого при отображениях проектирования $pr_i : H \to H^{(i)}$ имеем

$$pr_i(f_H) = f|_{G_i} \tag{3.4}$$

для всех $i \in I$. Обозначим через $\mathbf{A}(K)$ алгебру голоморфных в G и непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$ функций и пусть

$$\mathbf{A}_H(K) := \{f_H \in H : f \in \mathbf{A}(K)\},$$

где f_H и f связаны соотношением (3.4) при любом $i \in I$.

В настоящем параграфе будет рассматриваться следующая задача: при каких условиях алгебра $\mathbf{A}_H(K)$ является плотной в тихоновской топологии пространства H?

3.1. Аппроксимация в среднем непрерывными аналитическими функциями

Ниже будет доказано, что условие плотности $\mathbf{A}_H(K)$ в H характеризует континуумы K, имеющие свойство Дирихле.

Напомним, что K имеет свойство Дирихле, если $\{f|_{\partial(K)} : f \in \mathbf{A}(K)\}$ является алгеброй Дирихле на $\partial(K)$.

Теорема 3.1. *Пусть K — континуум на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, такой, что $\emptyset \neq K \neq G$. Тогда, если K имеет свойство Дирихле, то для любой последовательности положительных чисел $p_i, \quad i \in I$, алгебра $\mathbf{A}_H(K)$ плотна в*

$$H = \prod_{i \in I} H^{p_i}(G_i).$$

Обратно, если для какой-нибудь последовательности $\{p_i\}_{i\in I}$, $0 < p_i < \infty$, алгебра $\mathbf{A}_H(K)$ плотна в H, то K имеет свойство Дирихле.

Как следствие этой теоремы получаем следующее

Утверждение 3.1. *Пусть Ω — область Каратеодори и пусть*

$$K = \overline{\Omega}.$$

Тогда для любой последовательности положительных чисел $p_i, \quad i \in I$, алгебра $\mathbf{A}_H(K)$ плотна в пространстве $H = \prod_{i\in I} H^{p_i}(G_i)$.

Для доказательства теоремы 3.1 используем известные характеристики континуумов со свойством Дирихле. Сформулируем их в виде лемм.

Пусть G — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$. Через $H^\infty(G)$ обозначим множество голоморфных в G функций, для которых

$$\|f\|_\infty := \sup_{z\in G} |f(z)| < \infty.$$

Будем говорить, что последовательность $\{g_j\}_{j=1}^\infty$, $g_j \in H^\infty(G)$, ограниченно поточечно приближает функцию $f \in H^\infty(G)$, если

$$\lim_{j\to\infty} g_j(z) = f(z) \tag{3.5}$$

для всех $z \in G$ и

$$\|g_j\|_\infty \le \|f\|_\infty \tag{3.6}$$

для всех $j = 1,\ 2,\ \ldots$.

Следующее утверждение доказано в работе Т. Гамелина и Дж. Гарнетта [34].

Лемма 3.1. *Пусть K — континуум на $\overline{\mathbb{C}}$ и $G = \overline{\mathbb{C}}\setminus K \neq \emptyset$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

- (i) *Любая $f \in H^\infty(G)$ ограниченно поточечно приближается функциями вида $g|_G$, $\quad g \in \mathbf{A}(K)$.*

- (ii) *Континуум K обладает свойством Дирихле.*

Пусть Ω — односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, имеющая более одной граничной точки, и пусть $z_0 \in \Omega$. Обозначим через ψ конформное и однолистное отображение единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на область Ω, нормированное условиями $\psi(0) = z_0$, $\psi'(0) > 0$. Следуя Гликсбергу [35], будем говорить, что Ω хорошо связна[5], если на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ найдется множество A полной меры, $m_1(A) = 1$, (m_1— нормированная линейная мера Лебега) такое, что ψ инъективно на A, т.е. во всех точках из A отображение ψ имеет угловые предельные значения и эти значения различны для различных точек из A.

Лемма 3.2. (Критерий Браудера–Вермера–Дэви)
Пусть Ω — невырожденный континуум на $\overline{\mathbb{C}}$ и $G = \overline{\mathbb{C}}\setminus K$. В этом случае K имеет свойство Дирихле тогда и только тогда, когда:

- (i) *каждая из областей G_i, $i \in I$, хорошо связна,*

[5] В оригинале nicely connected.

(ii) *для различных областей G_{i_1}, G_{i_2} гармонические меры $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}$ заданы на ∂G_{i_1} и ∂G_{i_2} относительно $z_{i_1} \in G_{i_1}$ и $z_{i_2} \in G_{i_2}$ являются взаимно сингулярными,*

$$(i_1 \neq i_2) \Rightarrow (\omega_{i_1} \perp \omega_{i_2}).$$

Хорошо известно, что при $\Omega = \mathbb{D}$ для любой $f \in H^p(\Omega)$ норма (3.2) совпадает с L^p-нормой некасательных граничных значений функции f. Следующая лемма показывает, что этот факт имеет место для всех хорошо связных областей Ω.

Лемма 3.3. *Пусть Ω — хорошо связная область на $\overline{\mathbb{C}}$, $\Gamma = \partial\Omega$, $0 < p < < \infty$, $z_0 \in \Omega, \omega$ — гармоническая мера на Γ относительно точки z_0, φ — конформное однолистное отображение Ω на $\mathbb{D}$, нормированное условиями $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$. Тогда для любой функции $f \in H^p(\Omega)$ существует борелевское множество $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ такое, что*

(i) $\omega(\Gamma_1) = 1$*;*

(ii) *каждой точке $\xi \in \Gamma_1$ можно сопоставить единственное число $\tilde{f}(\xi)$ и путь s, ведущий в точку ξ, лежащий в Ω и переходящий в некасательный при отображении φ, вдоль которого существует предел*

$$\lim_{z \to \xi} f(z) = \tilde{f}(\xi), \tag{3.7}$$

причем если s_1 — любой другой путь, ведущий в ξ, переходящий в некасательный при отображении φ и гомотопный s, то (3.7) *выполняетчя при $z \to \xi$ вдоль s_1;*

(iii) *имеет место равенство*

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = \left(\int_{\Gamma_1} |\tilde{f}(\xi)|^p d\omega(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.8}$$

где величина $\|f\|_{H^p(\Omega)}$ определена формулой (3.2).

Мы не будем останавливаться на доказательстве леммы 3.3 подробно, отметим только, что доказательство такой леммы, данное в [6] для случая ограниченной хорошо связной области на плоскости, практически дословно переносится на случай хорошо связной $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего отметим, что заключение доказываемой теоремы тривиально, если континуум K является вырожденным[6]. Действительно, в этом случае $\mathrm{card}K = 1$ и $\overline{\mathbb{C}}\backslash K$ можно считать совпадающим с $\mathbb{C}$. Так как $\overline{\mathbb{C}}$ — компакт, то все функции из $\mathbf{A}(K)$ ограничены, а значит, по теореме Лиувилля являются постоянными. Кроме того, по теореме Пикара в $\mathbb{C}$ постоянна и любая неотрицательная гармоническая функция (см., например, [1, с. 171]). Тогда из (3.1) следует ограниченность функций $f \in H^p(\mathbb{C})$. Еще раз используя теорему Лиувилля, убеждаемся в том, что каждая $f \in H^p(\mathbb{C})$ является постоянной. Кроме того, очевидно, что все постоянные в $\mathbb{C}$ функции принадлежат как $H^p(\mathbb{C})$, так и $\mathbf{A}(K)$. Следовательно, для одноточечного K множества $\mathbf{A}_H(K)$ и H «совпадают». Поэтому далее считаем, что континуум K содержит более одной точки.

Предположим, что замыкание $\mathbf{A}_H(K)$ в H совпадает со всем пространством H для некоторого набора $p_i > 0$, $i \in I$. Зафиксируем G_{i_0} — произвольную компоненту связности множества $\overline{\mathbb{C}}\backslash K$, $i_0 \in I$. Так как K — невырожденный континуум, то G_{i_0} конформно эквивалентна единичному кругу. Покажем, что область G_{i_0} хорошо связна.

Выберем функцию $f \in H$, для которой

$$pr_{i_0}(f) = \varphi_{i_0},$$

где φ_{i_0} — функция Римана, конформно и однолистно отображающая G_{i_0} на круг $\mathbb{D}$, $\varphi_{i_0}(z_{i_0}) = 0$, $\varphi'_{i_0}(z_{i_0}) > 0$. Так как $\mathbf{A}_H(K)$ плотно в $H = \prod_{i\in I} H^{p_i}(G_i)$, а сходимость в тихоновской топологии влечет покоординатную сходимость, то существует последовательность функций g_n, голоморфных в G_{i_0} и непрерывных в $\overline{G}_{i_0}$ – замыкании G_{i_0} в $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{i_0} - g_n\|_{H^{p_{i_0}}(G_{i_0})} = 0. \tag{3.9}$$

Обозначим через ψ_{i_0} отображение обратное к φ_{i_0}. Каждой функции $f \in H^{p_{i_0}}(G_{i_0})$ будет соответствовать функция $f \circ \psi_{i_0}$ — аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$, причем отображение $f \mapsto f \circ \psi_{i_0}$ есть изометрический изоморфизм пространств $H^{p_{i_0}}(G_{i_0})$ и $H^{p_{i_0}} = H^{p_{i_0}}(\mathbb{D})$. Так как при этом изоморфизме функция φ_{i_0} переходит в тождественное отображение единичного круга на себя, то соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - g_n\left(\tilde{\psi}_{i_0}\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^{p_{i_0}} d\theta = 0,$$

[6] Континуум K называется невырожденным, если он содержит более одной точки.

где для почти всех $\theta \in [0,\ 2\pi]$ величина $\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta})$ есть некасательное предельное значение функции ψ_{i_0} в точке $e^{i\theta}$. Заметим, что по теореме Бёрлинга [13, с. 83—84] для любой однолистной, аналитической в $\mathbb{D}$ функции ψ некасательные пределы $\tilde{\psi}$ существуют квази всюду (т.е. всюду, за исключением, быть может, множества логарифмической емкости ноль), а значит, и п.в. на $\mathbb{T}$. Пусть A — подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$, имеющее полную меру и такое, что в любой точке $e^{i\theta} \in A$ функция ψ_{i_0} имеет угловой предел $\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta})$. Так как из любой последовательности, сходящейся в среднем, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, то существует подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$ последовательности $\{g_n\}$ такая, что во всех точках $e^{i\theta}$ некоторого множества $B \subseteq \mathbb{T}$

$$\lim_{n_k \to \infty} g_{n_k}(\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta})) = e^{i\theta}, \tag{3.10}$$

причем $m_1(B) = m_1(\mathbb{T})$. Пусть теперь точки $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_2}$ принадлежат пересечению множеств A и B. Предположим, что в точках $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_2}$ функция ψ_{i_0} имеет одинаковые некасательные пределы $\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta_1}) = \tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta_2})$. В силу непрерывности функций g_n в $\overline{G}_{i_0}$ из последнего равенства следует, что

$$g_{n_k}(\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta_1})) = g_{n_k}(\tilde{\psi}_{i_0}(e^{i\theta_2}))$$

для любого n_k. Отсюда при $n_k \to \infty$ получим $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. Таким образом, область G_{i_0} — хорошо связна.

Пусть теперь G_{i_0} и G_{i_1} — различные компоненты связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$. Обозначим через ω_{i_0} и ω_{i_1} гармонические меры на ∂G_{i_0} и ∂G_{i_0} относительно $z_{i_0} \in G_{i_0}$ и, соответственно, $z_{i_1} \in G_{i_1}$. Проверим, что меры ω_{i_0} и ω_{i_1} взаимно сингулярны. Для этого возьмем функцию $f \in H = \prod_{i \in I} H^{p_i}(G_i)$ такую, что

$$pr_{i_0}(f) \equiv 1 \quad \text{и} \quad pr_{i_1}(f) \equiv -1$$

и рассмотрим последовательность функций $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\chi_n \in \mathbf{A}_H(K)$, сходящуюся к f в пространстве H. Так как из сходимости $\chi_n \to f$ в H следует, что

$$\forall i \in I : pr_i(\chi_n) \to pr_i(f)$$

в $H^{p_i}(G_i)$, то, в частности,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \chi_n^{(0)} - 1 \right\|_{H^{p_{i_0}}(G_{i_0})} = \lim_{n \to \infty} \left\| \chi_n^{(1)} + 1 \right\|_{H^{p_{i_1}}(G_{i_1})} = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\chi_n^{(0)} = pr_{i_0}(\chi_n), \qquad \chi_n^{(1)} = pr_{i_1}(\chi_n), \qquad \chi_n \in A_H(K),$$

причем в силу определения алгебры $\mathbf{A}_H(K)$ для каждого n существует функция $\tilde{\chi}_n \in \mathbf{A}(K)$, для которой

$$\chi_n^{(0)} = \tilde{\chi}_n|_{G_{i_0}}, \qquad \chi_n^{(1)} = \tilde{\chi}_n|_{G_{i_1}}. \tag{3.12}$$

Выше было доказано, что для любого $i \in I$ область G_i — хорошо связна, следовательно, в силу леммы 3.3 и непрерывности функций $\tilde{\chi}_n$ можно переписать соотношения (3.11) в виде

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial G_{i_0}} \left|\tilde{\chi}_n^{(0)}(\xi) - 1\right|^{p_{i_0}} d\omega_{i_0}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial G_{i_1}} \left|\tilde{\chi}_n^{(1)}(\xi) + 1\right|^{p_{i_1}} d\omega_{i_1}(\xi) = 0, \tag{3.13}$$

где

$$\tilde{\chi}_n^{(0)} = \tilde{\chi}_n|_{\partial G_{i_0}}, \qquad \tilde{\chi}_n^{(1)} = \tilde{\chi}_n|_{\partial G_{i_1}}.$$

Используя связь между сходимостью в среднем и сходимостью почти всюду, можно считать (переходя в (3.13), если необходимо, к подпоследовательности, а затем и к подподпоследовательности), что существуют борелевские множества $B^0 \subseteq \partial G_{i_0}$ и $B^1 \subseteq \partial G_{i_1}$ такие, что

$$\omega_{i_0}(B^0) = \omega_{i_1}(B^1) = 1, \tag{3.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}_n^{(0)}(\xi) = 1 \tag{3.15}$$

для всех $\xi \in B^0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}_n^{(1)}(\xi) = -1 \tag{3.16}$$

для всех $\xi \in B^1$. Из условий (3.15), (3.16) и определения функций $\tilde{\chi}_n^{(0)}$, $\tilde{\chi}_n^{(1)}$ следует, что

$$B^0 \cap B^1 = \emptyset,$$

а с учетом (3.14) этого достаточно для взаимной сингулярности ω_{i_0} и ω_{i_1}.

Таким образом, если $\mathbf{A}_H(K)$ плотно в H, то каждая из областей G_i, $i \in I$, является хорошо связной и $\omega_{i_1} \perp \omega_{i_0}$ при $i_0, i_1 \in I$, $i_0 \neq i_1$.

Используя критерий Браудера–Вермера–Деви, можно утверждать, что K имеет свойство Дирихле.

Обратно, пусть K имеет свойство Дирихле. Нужно доказать, что для любых положительных p_i, $i \in I$, алгебра $\mathbf{A}_H(K)$ плотна в $H = \prod_{i \in I} H^{p_i}(G_i)$. При доказательстве ограничимся случаем счетного I. Случай конечного I проще и может быть рассмотрен аналогично. Пусть

$$H^\infty = \prod_{i \in I} H^\infty(G_i),$$

тогда $H^\infty \subseteq H$. Так как все G_i являются односвязными областями с невырожденными границами, то для любого $i \in I$ алгебра $H^\infty(G_i)$ плотна $H^{p_i}(G_i)$. Действительно, это хорошо известно для круга, а при изометрическом изоморфизме

$$H^{p_i}(G_i) \ni f \mapsto f \circ \psi_i \in H^{p_i}(\mathbb{D}),$$

где ψ_i — конформное и однолистное отображение $\mathbb{D}$ на G_i, для которого $\psi_i(0) = z_i$, ограниченные голоморфные функции соответствуют ограниченным голоморфным функциям. Следовательно, H^∞ — плотное подмножество H. Более того, плотным в H является подмножество $H^{\infty,\infty} \subseteq H^\infty$, определяемое правилом

$$(f_H \in H^{\infty,\infty}) \Leftrightarrow \left(\sup_{i \in I} \sup_{z \in G_i} |f_i(z)| < \infty \right),$$

где $f_i = pr_i(f_H)$. Для того чтобы убедиться в плотности $H^{\infty,\infty}$, достаточно вспомнить, что в соответствии с определением тихоновской топологии множества вида

$$O = \left(\prod_{i \in I_0} O_i \right) \times \left(\prod_{i \in I \setminus I_0} H^{p_i}(G_i) \right), \tag{3.17}$$

где I_0 — конечные подмножества I, а O_i — открытые множества в $H^{p_i}(G_i)$, образуют базу топологического пространства H. Любая функция f_H, для которой

$$\left. \begin{array}{ll} pr_i(f_H) \in O_i \cap H^\infty(G_i) & \text{при} \quad i \in I_0 \\ pr_i(f_H) = 0 & \text{при} \quad i \in I \setminus I_0 \end{array} \right\}, \tag{3.18}$$

очевидно принадлежит $O \cap H^{\infty,\infty}$. Осталось заметить, что в силу плотности $H^\infty(G_i)$ в $H^{p_i}(G_i)$ функции f_H, для которых выполнено (3.18), существуют.

Очевидно, что $\mathbf{A}_H(K) \subseteq H^{\infty,\infty}$, поэтому достаточно доказать, что $A_H(K)$ — плотное подмножество $H^{\infty,\infty}$ в топологии, индуцированной из декартова произведения $\prod_{i\in I_0} H^{p_i}(G_i)$. Пусть f_H — произвольная функция из $H^{\infty,\infty}$. Покажем, что f_H аппроксимируется элементами из $\mathbf{A}_H(K)$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\sup_{i\in I} \sup_{z\in G_i} |f_i(z)| \leq 1, \tag{3.19}$$

где $f_i = pr_i f_H$, $i \in I$. Как следует из леммы 3.1, функция $f \in H^\infty(G)$, $f|_{G_i} = f_i$, может быть ограниченно поточечно приближена функциями из $\mathbf{A}(K)$, т.е. существует последовательность функций $\{g_j\}_j^\infty$, $g_j \in \mathbf{A}(K)$, для которых выполнены условия (3.5) и (3.6).

Пусть $g_j^{(i)} = g_j|_{G_i}$, тогда из (3.19) и (3.6) следует, что $g_j^{(i)}$ принадлежат единичному шару пространства $H^{p_i}(G_i)$, т.е.

$$\left\|g_j^{(i)}\right\|_{H^{p_i}(G_i)} \leq 1,$$

$i \in I$, $j \in \mathbb{N}$. Так как мы рассматриваем счетное I, то можно считать, что $I = \mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Кроме того, предположим вначале, что $p_i > 1$ при всех $i \in I$. Так как $p_1 > 1$, то $H^{p_1}(G_1)$ — рефлексивное банахово пространство. Единичный шар в $H^{p_1}(G_1)$ слабо компактен [12, с. 180], и из последовательности $\{g_j\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{j,(1)}\}$ такую, что $\{g_{j,(1)}^{(1)}\}$, $g_{j,(1)}^{(1)} = g_{j,(1)}|_{G_1}$, слабо сходится в $H^{p_1}(G_1)$. Аналогично, $H^{p_2}(G_2)$ — рефлексивно, и из $\{g_{j,(1)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{j,(2)}\}$, для которой $\{g_{j,(2)}^{(2)}\}$ слабо сходится в $H^{p_2}(G_2)$. Повторяя процесс, получаем семейство последовательностей $\{g_{j,(n)}\}$, $n = \overline{1,\ 2,\ \ldots}$. Применяя к этому семейству канторовский диагональный процесс, получаем последовательность $\{l_j\}_{j=1}^\infty$, $l_j := g_{j(j)}$, для которой каждая $\{l_j^{(i)}\}$, $l_j^{(i)} := l_j|_{G_i}$, слабо сходится в $H^{p_i}(G_i)$. Так как для любой точки z, принадлежащей G,

$$\lim_{j\to\infty} l_j(z) = \lim_{j\to\infty} g_j(z) = f(z),$$

а соответствующий линейный функционал $\mu_z^{(i)}$

$$\forall z \in G_i, \quad \forall f \in H^{p_i}(G_i): \quad \mu_z^{(i)}(f) := f(z)$$

непрерывен в $H^{p_i}(G_i)$, то слабый предел $\{l_j^{(i)}\}_{j=1}^\infty$ равен $f^{(i)} = f|_{G_i}$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Используя теорему Мазура [12, с. 173], находим выпуклую линейную комбинацию d_1 :

$$d_1 = \sum_{j=1}^{N_1} \beta_{1,j} l_j, \quad \beta_{1,j} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N_1} \beta_{1,j} = 1,$$

для которой

$$\left\| f^{(1)} - d_1^{(1)} \right\|_{H^{p_1}(G_1)} \leq \varepsilon_1, \quad f^{(1)} = f|_{G_1}, \quad d_1^{(1)} = d_1|_{G_1}.$$

Аналогично находится выпуклая линейная комбинация d_2 :

$$d_2 = \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \beta_{2,j} l_j, \quad \beta_{2,j} \geq 0, \quad \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \beta_{2,j} = 1,$$

для которой $\left\| f^{(1)} - d_2^{(1)} \right\|_{H^{p_1}(G_1)} \leq \varepsilon_2$; $d_2^{(1)} = d_2|_{G_1}$ и т.д.

Последовательность $\{d_j^{(1)}\}$ сходится по норме $H^{p_1}(G_1)$ к $f^{(1)}$, а любая из $\{d_j^{(i)}\}$ при $i \geq 2$ слабо сходится к $f|_{G_i}$ в $H^{p_i}(G_i)$.

Повторим этот процесс, взяв вместо последовательности $\{l_j\}$ последовательность $D_1 = \{d_j\}_{j=1}^{\infty}$, а вместо пространства $H^{p_1}(G_1)$ — пространство $H^{p_2}(G_2)$. В результате получим последовательность D_2, элементы которой сильно сходятся к $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ в $H^{p_1}(G_1)$ и $H^{p_2}(G_2)$ соответственно и слабо сходятся к $f^{(i)}$ в $H^{p_i}(G_i)$ при $i \geq 3$. Аналогично, взяв в качестве исходной последовательности D_2 и повторив описание выше построения, получим последовательность D_3, сходящуюся к $f^{(3)}$ по норме $H^{p_3}(G_3)$ к $f^{(2)}$ по норме $H^{p_2}(G_2)$ и к $f^{(1)}$ по норме $H^{p_1}(G_1)$ и т.д. Применив к семейству последовательностей $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ диагональный процесс Кантора, получим последовательность $\{d_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $\mathbf{A}(K)$, сильно сходящуюся к $f^{(i)}$ в $H^{p_i}(G_i)$ при любом $i \in I$. Если $\{d_{H,n}\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность функций из $\mathbf{A}_H(K)$, для которой

$$\forall i \in I : pr_i(d_{H,n}) = d_{n,n}|_{G_i},$$

то $\{d_{H,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f_H в топологии пространства $H = \prod_{i\in I} H^{p_i}(G_i)$, так как в соответствии с определение топологии произведения эта сходимость эквивалентна тому, что

$$\forall i \in I : pr_i(d_{H,n}) \to pr_i(f_H) \quad \text{в} \quad H^{p_i}(G_i) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а эти соотношения уже установлены.

Осталось рассмотреть случай, когда в произведении $H = \prod_{i\in I} H^{p_i}(G_i)$ некоторые p_i попадают в $(0,1]$. Как уже отмечалось, при определении $H^{\infty,\infty}$ это множество является плотным в $H = \prod_{i\in I} H^{p_i}(G_i)$ для любых $p_i > 0, \quad i \in I$, и достаточно проверить, что $H^{\infty,\infty} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A}_H(K))$ в H. Положим $p_i^* = \max\{p_i,\ 2\}$ и $H^* = \prod_{i\in I} H^{p_i^*}(G_i)$. Если f — произвольная функция из $H^{\infty,\infty}(G)$, то по уже доказанному найдется последовательность $\{q_n^*\}$ элементов из $\mathbf{A}_H(K)$, сходящаяся к f в пространстве H^*. Заметим далее, что $H^* \subseteq H$ [33, с. 54]. Теперь, используя неравенство Гельдера, легко убедиться в том, что $q_n^* \to f$ и в пространстве H, что и завершает доказательство.

В соответствии с теоремой 3.1 для доказательства утверждения 3.1 достаточно установить следующее.

Утверждение 3.2. *Пусть* Ω *— область Каратеодори и пусть*

$$K := \overline{\Omega}.$$

Тогда K *— континуум со свойством Дирихле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z_0 —произвольная точка области Ω и $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ отображение, для которого

$$\varphi(z) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad z = z_0, \\ z_0 & \text{при} \quad z = \infty, \\ \frac{1}{z-z_0} & \text{при} \quad z_0 \neq z \neq \infty. \end{cases}$$

Отображение φ является биголоморфным гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$. Положим

$$D := \varphi(\Omega_\infty),$$

где Ω_∞ — компонента связности множества $\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{\Omega}$, содержащая бесконечно удаленную точку. Проверим, что D — область Каратеодори. По условию Ω — область Каратеодори, следовательно,

$$\partial_{\mathbb{C}}(\Omega) = \partial_{\mathbb{C}}(\Omega_\infty\backslash\{\infty\}).$$

Так как $\infty \in \Omega_\infty$, то из последнего равенства имеем

$$\partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\Omega) = \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\Omega_\infty),$$

а так как φ — гомеоморфизм, то и

$$\partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\varphi(\Omega)) = \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(D). \tag{3.20}$$

Кроме того, D — односвязная ограниченная подобласть $\mathbb{C}$ и $\infty \in \varphi(\Omega)$. Убедимся в том, что $\varphi(\Omega)$ является компонентой связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash \mathrm{Cl}_{\overline{\mathbb{C}}}(D)$. Если это не так, то найдется связное, открытое множество A, для которого имеет место включение

$$A \subseteq \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathrm{Cl}_{\overline{\mathbb{C}}}(D) \tag{3.21}$$

и строгое включение

$$A \supset \varphi(\Omega).$$

Из последнего следует, что существует $z \in A \bigcap \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\varphi(\Omega))$. Так как z принадлежит A вместе с некоторой окрестностью, то учитывая (3.20), получаем

$$A \cap D \neq \emptyset,$$

что противоречит (3.21). Таким образом, D — односвязная, ограниченная на плоскости область и внешняя граница D совпадает с $\partial_{\mathbb{C}}(\varphi(\Omega))$, т.е. D — область Каратеодори.

Пусть теперь f — непрерывная вещественная функция на $\partial_{\overline{\mathbb{C}}}(G)$, где $G := \overline{\mathbb{C}} \backslash K$. Из канонической замкнутости K (см. утверждение 3.4 в гл. 3), и того, что Ω — область Каратеодори, следует

$$\partial_{\overline{\mathbb{C}}}(G) = \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(K) = \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\Omega_\infty). \tag{3.22}$$

Пусть g — сужение функции $f \circ \varphi^{-1}$ на $\partial_{\overline{\mathbb{C}}}(D)$. Так как D — область Каратеодори, то по теореме Уолша–Лебега существует последовательность аналитических полиномов p_n, $n = 1, 2, \ldots$, для которой

$$\max_{w \in \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(D)} |g(w) - \mathrm{Re}(p_n(w))| \to 0$$

при $n \to \infty$. Заменяя w на $\varphi(z)$ и учитывая (3.22), получаем

$$\max_{z \in \partial_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathrm{K})} |f(z) - \mathrm{Re}(p_n(\varphi(z)))| \to 0$$

при $n \to \infty$. Осталось заметить, что функции $p_n \circ \varphi$ — непрерывны на $\overline{G}$, голоморфны в G и по теореме Титце–Урысона доопределяются до функций, непрерывных на $\overline{\mathbb{C}}$.

Отметим еще одно следствие теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть G — произвольная односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$, $\mathbf{A}$ — алгебра функций, голоморфных в G и непрерывных* *в* $\overline{G}$, $0 < p < \infty$. *Алгебра* $\mathbf{A}$ *плотна в* $H^p(G)$ *тогда и только тогда, когда* G *— хорошо связна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K = (\mathbb{C}\backslash G)\bigcup\{\infty\}$. Проверим, что K — континуум. Если границей области G является простая замкнутая кривая, то это сразу следует из теоремы Жордана и того факта, что замыкание связного множества связно. Для произвольной односвязной области G существует последовательность областей Жордана G_n таких, что для любого натурального n

$$\overline{G}_n \subseteq G_{n+1} \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G.$$

Тогда

$$K = (\mathbb{C}\backslash G)\bigcup\{\infty\} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\backslash G_n\right)\bigcup\{\infty\},$$

при каждом n множество $(\mathbb{C}\backslash G_n)\bigcup\{\infty\}$ — континуум и значит K — континуум как пересечение убывающей последовательности континуумов (см., например, [38, с. 81]). Заметим далее, что

$$\mathbf{A} = \{f|_{\overline{G}} : f \in \mathbf{A}(K)\},$$

где $\mathbf{A}(K)$ — алгебра функций из теоремы 3.1. В соответствии с этой теоремой, $\mathbf{A}$ плотна в $H^p(G)$ тогда и только тогда, когда K — континуум со свойством Дирихле. Наконец, по критерию Браудера–Вермера–Дэви в случае связного G континуум K обладает свойством Дирихле тогда и только тогда, когда G — хорошо связная область.

Доказанное следствие и плотность полиномов в пространствах Харди над областями Каратеодори (см., например, [5]), дают следующее

Следствие 3.2. *Любая область Каратеодори является хорошо связной.*

Используя красивый геометрический критерий взаимной сингулярности гармонических мер (см. [26] и [27]), из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.3. *Пусть* Γ *— замкнутая кривая Жордана на сфере Римана* $\overline{\mathbb{C}}$; G_1 *и* G_2 *— односвязные области, на которые* Γ *разбивает сферу* $\overline{\mathbb{C}}$, p_1 *и* p_2 *— положительные числа;* M *— множество точек* Γ, *в которых эта кривая имеет касательную. Тогда алгебра* $\mathbf{A}(\Gamma)$ *плотна в произведении пространств* $H^{p_1}(G_1) \otimes H^{p_2}(G_2)$ *в том и только в том случае, когда одномерная мера Хаусдорфа множества* M *равна нулю.*

3.2. Комментарии

В настоящем параграфе под континуумом понимается произвольный связный компакт, который, в частности, может быть и одноточечным. Основной результат параграфа — теорема 3.1 доказана в [8].

Конформно-инвариантное определение нормы в пространствах Харди $H^p(\Omega)$, основанное на использовании гармонических мажорант, видимо, впервые появилось в работе В.И.Крылова [16]. Критерий Браудера–Вермера–Дэви был доказан Браудером и Вермером для кривых [25], а Дэви — для произвольных континуумов [29]. Аппроксимационная характеристика хорошо связных областей, близкая к следствию 3.1, получена в [9]. В работах [6, 9], автор, не зная о работе Гликсберга [35], называет хорошо связные области почти всюду жордановыми. Доказательство теоремы 3.1 существенно использует тот факт, что ограниченные аналитические функции плотны в $H^p(\Omega)$, $p > 0$, для любой односвязной области $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Отметим, что для неодносвязных областей это, вообще говоря, не справедливо, подробности можно найти в монографии [33]. Утверждение 3.2 должно быть хорошо известно специалистам, но точная ссылка на его доказательство затруднительна (или невозможна). Также обстоит дело и с элементарным доказательством связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash G$ для односвязной области G, которое включено в доказательство следствия 3.1.

§ 4. Одновременная аппроксимация функций из классов Харди ограниченными аналитическими функциями

Пусть K — континуум на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и $G = \overline{\mathbb{C}} \backslash K$ — дополнение к K в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда G — открыто, и при $K \neq \overline{\mathbb{C}}$ его компоненты связности есть односвязные области G_j, $j \in I$. Выбор числа $p \in (0, \infty)$ и множества точек $\{z_j : j \in I\}$, $z_j \in G_j$, однозначно, как и в §3, определяет набор классов Харди $H^p(G_j) = H^p(G_j, z_j)$, $j \in I$. Обозначим через $H^{p,\infty}$ множество голоморфных в G функций, для которых при всех $j \in I$

$$f|_{G_j} \in H^p(G_j) \tag{4.1}$$

и

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{j \in I} \left\| f|_{G_j} \right\|_{H^p(G_j)} < \infty, \tag{4.2}$$

где величина $\|\cdot\|_{H^p(G_j)}$ определена как в (3.2). Используя полноту пространств $H^p(G_j)$, с помощью стандартных рассуждений проверяем, что $H^{p,\infty}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{p,\infty}$ при $p \in [1, \infty)$, а при

$p \in (0,1)$ $H^{p,\infty}$ — полное метрическое пространство, расстояние между точками f и g которого есть

$$\rho(f,g) = \sup_{j \in I} \left\| f|_{G_j} - g|_{G_j} \right\|^p_{H^p(G_j)} .$$

Обозначим через $H^{\infty,\infty} = H^\infty(G)$ множество ограниченных и голоморфных в G функций. $H^\infty(G)$ — линейное подпространство $H^{p,\infty}$ при любом $p \in (0,\infty)$. Можно показать, что при $p \neq \infty$ множество $H^\infty(G)$ плотно в $H^{p,\infty}$ тогда и только тогда, когда число компонент связности множества G конечно (см. следствие из теоремы 4.1 ниже). Таким образом, при $\operatorname{card} I = \infty$ возникает задача описания замыкания $H^{\infty,\infty}$ в $H^{p,\infty}$. Структурная характеристика функций, принадлежащих этому замыканию, является основным результатом настоящего параграфа. Эта характеристика основана на понятии равномерно интегрируемого семейства функций.

4.1. Одновременная аппроксимация и равномерная интегрируемость

Пусть μ — конечная положительная мера на σ-алгебре $\mathbf{A}$ подмножеств из X и пусть F — семейство μ-суммируемых функций f, заданных на X. Будем говорить, что F — равномерно интегрируемо, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall E \in \mathbf{A} \quad \forall f \in F : (\mu(E) < \delta) \Rightarrow \left(\left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon \right). \tag{4.3}$$

Введем теперь некоторые обозначения. Если континуум K является невырожденным, то для каждой из областей G_j, $j \in I$, существует единственное конформное и однолистное отображение ψ_j единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ на G_j с нормировкой

$$\psi_j(0) = z_j, \quad \psi_j'(0) > 0,$$

где z_j — точки, фиксированные при определении $H^{p,\infty}$. Для $f \in H^{p,\infty}$ обозначим через f_j суперпозицию $f \circ \psi_j$, а через $\tilde{f}_j$ — некасательную граничную функцию функции f_j. Заметим, что $\tilde{f}_j$ существует, так как f_j принадлежит классу Харди H^p в $\mathbb{D}$. Положим

$$F(f) := \{f_j : f_j = f \circ \psi_j, j \in I\}, \quad F^p(f) := \{|\tilde{f}_j|^p : f_j \in F(f)\}. \tag{4.4}$$

Соответствие $f \mapsto F(f)$ сопоставляет функции f из $H^{p,\infty}$ семейство функций из H^p, а так как некасательные граничные функции $\tilde{f}_j$ принадлежат $L^p(m_1)$, где m_1 — нормированная линейная мера Лебега на $[-\pi, \pi]$, то $F^p(f)$ — семейство неотрицательных функций из $L^1(m_1)$.

Теорема 4.1. *Пусть K — невырожденный континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus K \neq \emptyset$, $p \in (0, \infty)$ и $f \in H^{p,\infty}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(*i*) *Функция f как угодно точно приближается функциями из $H^\infty(G)$ в $H^{p,\infty}$.*

(*ii*) *Семейство $F^p(f)$ является равномерно интегрируемым.*

Следствие 4.1. *Пусть K — континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus K \neq \emptyset$, $p \in (0, \infty)$. $H^\infty(G)$ плотно в $H^{p,\infty}$ тогда и только тогда, когда число компонент связности множества G является конечным.*

Используя конформную инвариантность метрики в $H^p(G_j)$, можно перейти от теоремы 4.1 к соответствующему утверждению о семействах функций из H^p в единичном круге.

Пусть F — непустое подмножество H^p. Аналогично (4.4) положим

$$F^p := \{|\tilde{f}|^p : f \in F\},$$

где $\tilde{f}$ — некасательная граничная функция от f. Обозначим через B_R^∞ замкнутый шар радиуса R с центром в нуле в пространстве H^∞, т.е.

$$B_R^\infty := \{f \in H^\infty : \|f\|_\infty \leq R\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Теорема 4.2. *Пусть F — непустое подмножество H^p, $0 < p < \infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(*i*) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\sup_{f \in F} \inf_{g \in B_R^\infty} \|f - g\|_{H^p} \leq \varepsilon. \tag{4.5}$$

(*ii*) *Семейство F^p является равномерно интегрируемым.*

Напомним, что в случае единичного круга для $f \in H^p, \quad 0 < p < \infty$, выполняется равенство

$$\|f\|_{H^p}^p = \int\limits_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}|^p dm_1, \tag{4.6}$$

где m_1 — нормированная линейная мера Лебега, а $\tilde{f}$ — некасательная граничная функций f.

Докажем вначале «легкую половину» теоремы 4.2.

Лемма 4.1. *Пусть F — непустое подмножество H^p, $0 < p < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что выполнено (4.5). Тогда F^p равномерно интегрируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (4.3) нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого измеримого $E \subseteq [-\pi, \pi]$ и любой функции $f \in F$

$$(m_1(E) \le \delta) \Rightarrow \left(\int_E \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 \le \varepsilon \right).$$

В соответствии с (4.5), (4.6) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_{f \in F} \inf_{g \in B_R^\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \left|\tilde{f} - \tilde{g}\right|^p dm_1 \le \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}. \tag{4.7}$$

Выберем

$$\delta(\varepsilon) = 2^{-p-1} \varepsilon R^{-p}(\varepsilon). \tag{4.8}$$

Из элементарного неравенства

$$|z_1 + z_2|^p \le 2^p \left(|z_1|^p + |z_2|^p, \right)$$

верного для всех $p \in (0, \infty)$ и $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, следует, что для всех $f \in F$, $g \in B_{R(\varepsilon)}^\infty$, и всех измеримых $E \subseteq [-\pi, \pi]$

$$\int_E \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 \le 2^p \left(\int_E \left|\tilde{f} - \tilde{g}\right|^p dm_1 + \int_E |\tilde{g}|^p dm_1 \right) \le$$

$$\le 2^p \left(\int_E \left|\tilde{f} - \tilde{g}\right|^p dm_1 + R^p m_1(E) \right).$$

Переходя в последнем интеграле к infimum по $g \in B_{R(\varepsilon)}^\infty$ и учитывая (4.7), (4.8), видим, что из неравенства $m_1(E) \le \delta(\varepsilon)$ следует

$$\int_E |\tilde{f}|^p dm_1 \le 2^p \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}} + R^p \cdot \frac{\varepsilon \cdot R^{-p}}{2^{p+1}} \right) = \varepsilon.$$

Равномерная интегрируемость F^p доказана.

Соотношение (4.5) влечет, в частности, ограниченность множества F в H^p. Покажем как эта ограниченность следует из равномерной интегрируемости F^p.

Лемма 4.2. *Пусть F — непустое подмножество H^p, $0 < p < \infty$ и пусть F^p — равномерно интегрируемо. Тогда F — ограниченное подмножество H^p.*

Доказательство. Из равномерной интегрируемости F^p следует, что найдется натуральное k такое, что для любой $f \in F$ неравенство

$$\int_E \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 \leq 1$$

выполняется, если E — измеримое подмножество $[-\pi, \pi]$ и $m_1(E) \leq \frac{1}{k}$. Разобьем $[-\pi, \pi]$ на k взаимно неперекрывающихся замкнутых интервалах $J_1,\ \dots,\ J_k$. Тогда для любой $f \in F$

$$m_1(J_n) = \frac{1}{k}, \quad n = 1,\ \dots,\ k,$$

а значит,

$$\|f\|_p^p = (\sum_{n=1}^{k} \int_{J_n} |\tilde{f}|^p dm_1) \leq k,$$

что и дает ограниченность F.

Для произвольных $f \in H^p$ и $\lambda \in [0, \infty)$ положим

$$E_f(\lambda) := \{t \in [-\pi, \pi] : |\tilde{f}(e^{it})| \geq \lambda\}. \tag{4.9}$$

Лемма 4.3. *Следующие утверждения эквивалентны для любого непустого подмножества F пространства H^p, $0 < p < \infty$.*

(i) *Семейство F^p равномерно интегрируемо.*

(ii) *Предельное соотношение*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{E_f(\lambda)} \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 = 0 \tag{4.10}$$

выполняется равномерно по $f \in F$.

Доказательство. Как известно, равномерность в (4.10) эквивалентна тому, что F^p есть ограниченное в $L^1(m_1)$ семейство равномерно интегрируемых функций [31, с. 94]. Осталось заметить, что ограниченность F^p в $L^1(m_1)$ равносильна ограниченности F в H^p и использовать лемму 4.2.

Непосредственно из (4.9) следует неравенство

$$\int_{E_f(\lambda)} \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 \geq \lambda^p m_1\left(E_f\left(\lambda\right)\right), \tag{4.11}$$

откуда, положив

$$m_f(\lambda) := m_1(E_f(\lambda)), \tag{4.12}$$

получаем неравенство

$$\int_{E_f(\lambda)} \left|\tilde{f}\right|^p dm_1 \geq \lambda^p m_f(\lambda), \tag{4.13}$$

выполняющееся для всех $f \in H^p$ *и* $\lambda \in [0, \infty)$.

Лемма 4.4. *Пусть F — непустое подмножество пространства H^p и пусть F^p — равномерно интегрируемо. Тогда функция*

$$u(\lambda) := \sup_{f \in F} \int_{E_f(\lambda)} \left|\tilde{f}\right|^p dm_1, \tag{4.14}$$

определенная на $[0, \infty)$, обладает следующими свойствами:

(*i*) *монотонно убывает и ограничена,*

(*ii*) *стремится к нулю на бесконечности*

$$\lim_{\lambda \to \infty} u(\lambda) = 0, \tag{4.15}$$

(*iii*) *неравенство*

$$m_f(\lambda) \leq \frac{u(\lambda)}{\lambda^p} \tag{4.16}$$

имеет место для всех $f \in F$ и $\lambda \in (0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция u монотонно убывает, так как в силу (4.9)

$$(\lambda_1 \geq \lambda_2) \Rightarrow (E_f(\lambda_2) \supseteq E_f(\lambda_1))$$

для любой $f \in F$. Равенство (4.15) следует из равномерности в (4.10). Неравенство (4.16) легко получить, взяв supremum по $f \in F$ в левой части (4.13). Ограниченность функции u вытекает из того, что она монотонно убывает, неотрицательна и равенства

$$u(0) = \sup_{f \in F} \|f\|_p^p ,$$

где величина, стоящая справа, конечна в силу леммы 4.2.

Доказательство теоремы 4.2. Учитывая леммы 4.1 и 4.2, видим, что достаточно доказать (i) для непустого ограниченного F с равномерно интегрируемым F^p. Будем вначале предполагать, что каждая $f \in F$ удовлетворяет неравенству:

$$|\tilde{f}(e^{it})| \geq 1 \quad \text{п.в. на} \quad [-\pi, \pi] \tag{4.17}$$

и является внешней функцией, т.е. при $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \ln\left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right| dt\right). \tag{4.18}$$

Пусть R — действительное число, большее 1. Обозначим через $|\tilde{f}_R|$ срезку функции f на уровне R, т.е. полагаем

$$\left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| = \min\left\{R,\ \left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right|\right\}$$

для всех $t \in [-\pi, \pi]$, при которых $\tilde{f}(e^{it})$ существует. Определим в круге $\mathbb{D}$ функцию $\chi_R = \chi_{R,f}$ как

$$\chi_R(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \ln\left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| dt\right).$$

Тогда χ_R — аналитическая в $\mathbb{D}$ функция и для всех $z \in \mathbb{D}$

$$|\chi_R(z)| = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \ln\left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| dt\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\ln(R)\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) dt\right) = R.$$

Следовательно, χ_R принадлежит шару B_R^∞ пространства H^∞. Достаточно показать, что при $R \to \infty$ величина $\|f - \chi_{R,f}\|_{H_p} \to 0$ равномерно по $f \in F$.

Как и ранее, обозначим через $\tilde{f}$ и $\tilde{\chi}_R$ некасательные граничные функции, соответствующие f и χ_R. Представим функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\chi}_R$ в виде

$$\tilde{f}((e^{it})) = \left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right| e^{i\tau}, \quad \tilde{\chi}_R\left(e^{it}\right) = \left|\tilde{\chi}_R\left(e^{it}\right)\right| e^{i\tau_R},$$

где $\tau = \tau(e^{it})$ и $\tau_R = \tau_R(e^{it})$ — аргументы комплексных чисел $\tilde{f}(e^{it})$ и $\tilde{\chi}_R(e^{it})$ выбираемые по правилу, описанному ниже.

Выберем в точке $z = 0$ значение многозначной функции $\mathrm{Ln}(f(z))$ так, чтобы

$$\mathrm{Ln}(f(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right| dt. \tag{4.19}$$

Так как $\mathbb{D}$ — односвязная область, а $f(z)$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$, то по теореме о монодромии существует единственная однозначная ветвь функции $\mathrm{Ln}(f(z))$, для которой выполнено (4.19). Обозначим эту ветвь через $\mathrm{Ln}_1(f(z))$. Функция $\mathrm{Ln}_1(f(z))$ имеет некасательные пределы в тех точках e^{it}, где существует отличный от нуля предел $\tilde{f}(e^{it})$. Некасательный предел функции $\mathrm{Ln}_1(f(z))$ в точке e^{it}, если он существует, обозначим через $\mathrm{Ln}_1(\tilde{f}(e^{it}))$ и положим

$$\tau(e^{it}) := \mathrm{Im}\,(\mathrm{Ln}_1(\tilde{f}(e^{it}))).$$

Заметим, что величина $\tau(e^{it})$ определена для почти всех $t \in [-\pi, \pi]$, так как в соответствии с граничной теоремой единственности множество точек t, в которых $\tilde{f}(e^{it}) = 0$, имеет меру нуль. Аналогичным образом определяем

$$\tau_R(e^{it}) := \mathrm{Im}\,(\mathrm{L}n_1(\tilde{\chi}_R(e^{it}))),$$

где ветвь $\mathrm{L}n_1(\chi_R(z))$ выделена условием

$$\mathrm{L}n(\chi_R(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| dt. \tag{4.20}$$

Отметим, что для любого $z \in \mathbb{D}$

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \ln\left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right| \, dt,$$

$$\ln|\chi_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \ln\left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| \, dt.$$

Так как функция $\ln|\tilde{f}_R|$ суммируема на $[-\pi,\pi]$ (см., например, [19, с. 111]), то по теореме Фату о некасательных граничных значениях интеграла Пуассона [17, с. 20], равенство

$$\left|\tilde{\chi}\left(e^{it}\right)\right| = \left|\tilde{f}_R\left(e^{it}\right)\right| \tag{4.21}$$

имеет место п.в. на $[-\pi,\pi]$.

Оценим $\|f-\chi_{R,f}\|_{H_p}$. При всех $p\in(0,\infty)$ имеем в соответствии (4.6), (4.19):

$$\|f-\chi_{R,f}\|^p_{H^p} = \int_{[-\pi,\pi]} ||\tilde{f}|e^{i\tau} - |\tilde{f}_R|e^{i\tau}|^p dm_1 \le$$

$$\le 2^p \int_{[-\pi,\pi]} ||\tilde{f}|-|\tilde{f}_R||^p|e^{i\tau}|dm_1 + 2^p \int_{[-\pi,\pi]} ||\tilde{f}_R|^p|e^{i\tau}-e^{i\tau_R}|^p dm_1 \le$$

$$\le 2^p \int_{E_f(R)} ||\tilde{f}|-R|^p dm_1 + 2^p R^p \int_{[-\pi,\pi]} |e^{i\tau}-e^{i\tau_R}|^p dm_1, \tag{4.22}$$

где $E_f(R)$ определено формулой (4.9). Так как $\left|\tilde{f}\right| \ge R$ п.в. на $E_f(R)$, то, учитывая (4.14), получаем

$$\int_{E_f(R)} ||\tilde{f}|-R|^p dm_1 \le \int_{E_f(R)} |\tilde{f}|^p dm_1 \le u(R). \tag{4.23}$$

Далее заметим, что

$$\left|e^{i\tau}-e^{i\tau_R}\right| \le \left((\cos\tau-\cos\tau_R)^2 + (\sin\tau-\sin\tau_R)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\,|\tau-\tau_R|\,,$$

и, следовательно,

$$\int_{[-\pi,\pi]} \left|e^{i\tau}-e^{i\tau_R}\right|^p dm_1 \le 2^{\frac{p}{2}} \int_{[-\pi,\pi]} |\tau-\tau_R|^p\, dm_1.$$

Перед тем как оценить последний интеграл, вспомним, что τ и τ_R есть некасательные предельные значения от $\mathrm{I}m(\mathrm{L}n_1(f(z)))$ и $\mathrm{I}m(\mathrm{L}n_1(\chi_R(z)))$, причем в силу нормировок (4.19) и (4.20) имеем

$$\mathrm{I}m(\mathrm{L}n_1(\chi_R(0))) = \mathrm{I}m(\mathrm{L}n_1(f(0))) = 0.$$

Значит, $(\tau - \tau_R)$ есть гармонически сопряженная функция к $\left(\ln\left|\tilde{f}\right| - \ln\left|\tilde{f}_R\right|\right)$. В силу того, что $\left|\tilde{f}\left(e^{it}\right)\right| \geq 1$ п.в. на $[-\pi, \pi]$, можно утверждать, что для любого $q > 0$ функции $\ln\left|\tilde{f}\right|$, $\ln\left|\tilde{f}_R\right|$ принадлежат $L^q(m_1)$. Пусть теперь $p > 1$. По теореме М. Рисса [17, с. 116] существует постоянная $c_p > 0$, для которой

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tau - \tau_R|^p \, dm_1 \leq c_p \int_{[-\pi,\pi]} \left|\ln\left|\tilde{f}\right| - \ln\left|\tilde{f}_R\right|\right|^p dm_1 =$$

$$= c_p \int_{E_f(R)} \left|\ln\left|\frac{\tilde{f}}{R}\right|\right|^p dm_1. \tag{4.24}$$

Последний интеграл можно записать в следующем виде (см., например, [37, с. 15])

$$\int_{E_f(R)} \left|\ln|\left|\frac{\tilde{f}}{R}\right|\right||^p dm_1 = \int_0^\infty \; m_1\{t \in E_f(R) : \left|\ln\left|\frac{\tilde{f}(e^{it})}{R}\right|\right|^p \geq s\} ds =$$

$$= \int_0^\infty \; m_f\left(R\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)\right) ds, \tag{4.25}$$

где функция m_f определена формулой (4.12). После замены $\lambda = \exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)$, используя неравенство (4.16), получаем

$$\int_0^\infty \; m_f\left(R\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)\right) ds = \int_1^\infty p\,(\ln\lambda)^{p-1}\, m_f\,(R\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda} \leq$$

$$\leq p\frac{u(R)}{R^p}\int_1^\infty \; \lambda^{-p-1}\,(\ln\lambda)^{p-1}\,d\lambda = \frac{pu(R)}{R^p}\exp\left(-p\ln p\right)\Gamma(p). \tag{4.26}$$

Соотношения (4.22)—(4.25) позволяют утверждать, что при $p > 1$ существует $k(p)$, для которой при всех $f \in F$ выполняется неравенство

$$\|f - \chi_{R,f}\|_p \leq k(p)\,(u(R))^{\frac{1}{p}}, \tag{4.27}$$

где $k(p)$ не зависит от F. Это неравенство и предельное соотношение (4.15) доказывают (4.5) при $p \in (1, \infty)$.

Перед тем как рассматривать случай $p \in (0,1]$, заметим, что при всех $p \in (0,\infty)$, $\psi \in H^{2p}$ и $g \in B_R^\infty$

$$\|\psi^2 - g^2\|_{H^p}^p = \int\limits_{[-\pi,\pi]} |\tilde{\psi}^2 - \tilde{g}^2|^p dm \le$$
$$\le \left(\int\limits_{[-\pi,\pi]} |\tilde{\psi} - \tilde{g}|^{2p} dm_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{[-\pi,\pi]} |\tilde{\psi} + \tilde{g}|^{2p} dm_1 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \|\psi - g\|_{H^{2p}}^p \left(2^p \|g - \psi\|_{H^{2p}}^{2p} + 2^p \|2\psi\|_{H^{2p}}^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|\psi - g\|_{H^{2p}}^p \left(2^p \|\psi - g\|_{H^{2p}}^{2p} + 2^{3p} \|\psi\|_{H^{2p}}^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.28}$$

Поставим в соответствие каждой функции $f \in F$ функцию

$$f^{\frac{1}{2}}(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln \left| \tilde{f}\left(e^{it}\right) \right|^{\frac{1}{2}} dt \right).$$

Тогда $f^{\frac{1}{2}} \in H^{2p}$ и $\left(f^{\frac{1}{2}}(z)\right)^2 = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Обозначим

$$F_{\frac{1}{2}} := \{f^{\frac{1}{2}} : f \in F\}, \qquad F_{\frac{1}{2}}^{2p} := \{|\tilde{\psi}|^{2p} : \psi \in F_{\frac{1}{2}}\}.$$

Тогда все функции из $F_{\frac{1}{2}}$ являются внешними и для них выполняется (4.17). Семейство $F_{\frac{1}{2}}^{2p}$ совпадает (как подмножество пространства $L^1(m_1)$) с семейством F^p, а значит, является равномерно интегрируемым. Предположим теперь, что

$$\sup_{\psi \in F_{\frac{1}{2}}} \inf_{g \in B_R^\infty} \|\psi - g\|_{H^{2p}} \le \varepsilon, \tag{4.29}$$

тогда из (4.28) получаем

$$\sup_{f \in F} \inf_{g \in B_{R^2}^\infty} \|f - g\|_{H^p}^p \le \varepsilon^p (2^p \varepsilon^{2p} + 2^{3p} \sup_{f \in F} \|f\|_{H^p}^p)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.30}$$

так как для $g \in B_R^\infty$ имеем $g^2 \in B_{R^2}^\infty$ и

$$\sup_{\psi \in F_{\frac{1}{2}}} \|\psi\|_{H^{2p}} = \sup_{f \in F} \|f\|_{H^p}^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что в силу ограниченности F в H^p правая часть в (4.30) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь, используя индукцию, легко получить утверждение *(i)* для любого $p \in (0,1]$. Действительно, при $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ имеем $F_{\frac{1}{2}} \subseteq H^{2p},\ 2p > 1$ и по уже доказанному для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$ такое, что выполнено (4.29). Следовательно, при таких R и ε для самого F выполнено (4.30), а значит, импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ доказываемой теоремы установлена при всех $p \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Повторяя это рассуждение при $p \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $p \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ и т.д., убеждаемся в том, что $(ii) \Rightarrow (i)$ выполнено при всех $p \in (0, \infty)$. Таким образом, теорема доказана при условии, что

– F — непустое ограниченное в H^p семейство,

– F^p — равномерно интегрируемо,

– все функции $f \in F$ удовлетворяют (4.17) и являются внешними.

Для того чтобы избавиться от последнего ограничения, воспользуемся каноническим представлением функций из H^p. Произвольная ненулевая функция $f \in H^p$ может быть единственным образом разложена в произведение внутреннего I_f и внешнего ϑ_f сомножителей:

$$f(z) = I_f(z)\vartheta_f(z),$$

$$I_f(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\sigma(t)\right),$$

$$\vartheta_f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, \ln|\tilde{f}(e^{it})| dt\right),$$

где σ — неотрицательная сингулярная мера на $[-\pi, \pi]$, $\quad \theta \in \mathbb{R}$, а $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по нулям функции f (см., например, [17, с. 100—103]). Введем обозначения

$$|\tilde{f}(e^{it})|^+ := \max(|\tilde{f}(e^{it})|, 1), \quad |\tilde{f}(e^{it})|^- := \min(|\tilde{f}(e^{it})|, 1) \tag{4.31}$$

и определим внешние функции ϑ_f^+ и ϑ_f^- равенством

$$\vartheta_f^{\pm}(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, \ln|\tilde{f}(e^{it})|^{\pm} dt\right).$$

Заметим, что

$$\vartheta_f(z) = \vartheta_f^-(z)\vartheta_f^+(z)$$

и п.в. на $[-\pi, \pi]$

$$|\tilde{\vartheta}_f^-(e^{it})| = |\tilde{f}(e^{it})|^-, \quad |\tilde{\vartheta}_f^+(e^{it})| = |\tilde{f}(e^{it})|^+, \tag{4.32}$$

где $\tilde{\vartheta}_f^-$, $\tilde{\vartheta}_f^+$ — некасательные граничные функции от ϑ_f^-, ϑ_f^+. Эти равенства показывают, что ϑ_f^+ — внешняя функция, удовлетворяющая условию (4.17).

Пусть теперь F — произвольное непустое ограниченное в H^p множество и F^p — равномерно интегрируемо. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\mathrm{F} \cap B_1^\infty = \emptyset.$$

Положим

$$F_+ := \{\vartheta_f^+ : f \in F\}.$$

Проверим равномерную интегрируемость семейства $F_+^p = \{|\tilde{f}|^p : f \in \in F_+\}$. Действительно, в силу (4.31), (4.32) для всех $\lambda \in (1, \infty)$ и $f \in \in F$ множество $E_f(\lambda)$ отличается от $E_{\vartheta_f^+}(\lambda)$ (см., (4.9)) не более чем на множество нулевой меры Лебега, кроме того, п.в. на $E_f(\lambda)$

$$|\tilde{f}(e^{it})| = |\vartheta_f^+(e^{it})|$$

при $\lambda \in (1, \infty)$. Следовательно, F_+^p — равномерно интегрируемо по лемме 4.3.

Отметим также, что по лемме 4.2 равномерная интегрируемость F_+^p гарантирует ограниченность F_+ в H^p. Таким образом, в соответствии с уже доказанной частью теоремы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists R > 0 : \sup_{f \in F_+} \inf_{g \in B_R^\infty} \|f - g\|_{H^p} \le \varepsilon.$$

Осталось заметить, что при любом $f \in F$ и $z \in \mathbb{D}$

$$|I_f(z)\vartheta_f^-(z)| \le 1.$$

Следовательно,

$$\sup_{f \in \mathrm{F}} \inf_{g \in B_R^\infty} \|f - g\|_{H^p} = \sup_{f \in \mathrm{F}} \inf_{g \in B_R^\infty} \left\| I_f \vartheta_f^- \vartheta_f^+ - g \right\|_{H^p} \le$$

$$\le \sup_{f \in F} \inf_{g \in B_R^\infty} \left\| I_f \vartheta_f^- \vartheta_f^+ - I_f \vartheta_f^- g \right\|_{H^p} \le \tag{4.33}$$

$$\leq \sup_{f\in F} \inf_{g\in B_R^\infty} \left\|\vartheta_f^+ - g\right\|_{H^p} = \sup_{f\in F_+} \inf_{g\in B_R^\infty} \|f-g\| \leq \varepsilon.$$

Доказательство закончено.

Теорема 4.1 следует из теоремы 4.2 при $F = F(f)$.

Доказательство следствия 4.1. Предположим, что континуум K является вырожденным. В этом случае само множество G связно, т.е. число компонент связности G равно единице, а рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.1, показывают, что

$$H^{p,\infty} = H^\infty(G).$$

Далее считаем K невырожденным континуумом.

Предположим, что число компонент связности множества G конечно. Тогда плотность $H^\infty(G)$ в $H^{p,\infty}$ следует из теоремы 4.1, так как для любого $j \in I$

$$|\tilde{f}_j|^p \in L^1(m_1)$$

и меры ν_j, определяемые на измеримых $E \subseteq [-\pi,\pi]$ равенством

$$\nu_j(E) = \int_E |\tilde{f}_j|^p \, dm_1,$$

являются абсолютно непрерывными относительно m_1 (см., например, [28, с. 131]), что, в силу конечности семейства F, равносильно его равномерной интегрируемости.

Для завершения доказательства нужно показать, что плотность $H^\infty(G)$ в $H^{p,\infty}$ влечет конечность числа компонент связности множеств G. Предположим, что G имеет счетное число компонент связности G_j, $j = 1, 2, \ldots$. Тогда существует функция $f \in H^{p,\infty}$, для которой при любом натуральном j почти всюду на $[-\pi,\pi]$ имеет место равенство

$$|\tilde{f}_j(e^{it})|^p = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [-\pi,\pi] \setminus \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right), \\ j & \text{при} \quad t \in \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right), \end{cases} \tag{4.34}$$

где $\tilde{f}_j$ определяются по f как в (4.4). Действительно, $\ln|\tilde{f}_j|$ и $|\tilde{f}_j|^p$ очевидно являются суммируемыми функциями, следовательно, используя параметрическое представление Смирнова [19, с. 111], можно найти голоморфную в G функцию f, для которой при любом натуральном j

$$f \circ \psi_j \in H^p,$$

а $\tilde{f}_j$ — некасательные предельные значения функции $f \circ \psi_j$, удовлетворяют (4.34). Простые вычисления показывают, что

$$\int_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}_j|^p dm_1 = 1 + \frac{j-1}{\pi j}.$$

Следовательно,

$$\sup_{j \in N} \|f \circ \psi_j\|^p_{H^p} = 1 + \frac{1}{\pi} < \infty,$$

а значит, $f \in H^{p,\infty}$. Убедимся в том, что эта функция не может быть приближена функциями из $H^\infty(G)$ по норме $\|\cdot\|_{p,\infty}$. В соответствии с доказанной в теореме 4.1 эквивалентностью $(i) \Leftrightarrow (ii)$ для этого достаточно указать последовательность измеримых множеств $E_j \subseteq [-\pi, \pi]$, для которой

$$\lim_{j \to \infty} m_1(E_j) = 0, \tag{4.35}$$

но

$$\lim_{j \to \infty} \sup \int_{E_j} |\tilde{f}_j| dm_1 > 0. \tag{4.36}$$

Положим $E_j := \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$, $j = 1, 2, \ldots$. Тогда (4.35) очевидно, а так как

$$\int_{E_j} |\tilde{f}_j|^p dm_1 = \int_{\left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)} j dm_1 = j \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{j} = \frac{1}{\pi},$$

то (4.36) тоже выполнено.

Следующее утверждение дает достаточный признак аппроксимируемости функции $f \in H^{p,\infty}$ ограниченными аналитическими функциями.

Утверждение 4.1. *Пусть K — континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $G = \overline{\mathbb{C}} \backslash K \neq \emptyset$, $p \in (0, \infty)$ и $f \in H^{p,\infty}$. Тогда, если множество $F(f)$ является предкомпактным в H^p, то функция f принадлежит $H^{p,\infty}$-замыканию множества $H^\infty(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда в силу известного критерия предкомпактности множества в метрическом пространстве найдется конечная ε-сеть:

$$F_n = \{f_1, \ \ldots, \ f_n\} \subseteq F(f), \quad n = n(\varepsilon).$$

Как отмечалось при доказательстве следствия 4.1, конечность F_n влечет равномерную интегрируемость семейства:

$$F_n^p = \{|\tilde{f}_j|^p : f_j \in F_n\}.$$

Следовательно, в соответствии с (4.5) существует $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\max_{f_{jn} \in F_n} \inf_{g \in B_R^\infty} \|f_{j_k} - g\|_{H^p} \le \varepsilon.$$

Если $p \in [1, \infty)$, то отсюда, используя неравенство треугольника, получаем желаемую оценку

$$\sup_{f_j \in F_n} \inf_{g \in B_R^\infty} \|f_j - g\|_{H^p} \le 2\varepsilon.$$

В случае $0 < p < 1$ расстояние между функциями g и ψ в H^p есть $\|g - \psi\|_{H^p}^p$, поэтому достаточно в двух последних неравенствах заменить $\|\cdot\|_{H^p}$ на $\|\cdot\|_{H^p}^p$.

4.2. Модуль равномерной интегрируемости

Если ввести подходящий «модуль равномерной интегрируемости» семейства $F(f)$, то скорость $H^{p,\infty}$-аппроксимации функции f ограниченными функциями можно оценить сверху через этот модуль и, наоборот, дать оценку «модуля равномерной интегрируемости» через скорость аппроксимации. Для $f \in H^{p,\infty}$ и $\lambda \in [0, \infty)$ положим

$$E_{f_j}(\lambda) := \{t \in [-\pi, \pi] : |\tilde{f}_j(e^{it})| \ge \lambda\}, \qquad f_j \in F(f),$$

и зададим искомый модуль как

$$\varkappa(\lambda) = \varkappa(\lambda, f) := \sup_{f_j \in F(f)} \int_{E_{f_j}(\lambda)} |\tilde{f}_j|^p dm_1.$$

Следуя [20, с. 94], будем говорить, что строго положительная монотонно убывающая функция $\varkappa = \varkappa(\cdot, f)$ является *мажорируемо изменяющейся*, если существует $k_0 > 1$, при котором

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\varkappa(\lambda)}{\varkappa(k_0 \lambda)} = A < \infty. \tag{4.37}$$

Теорема 4.3. *Пусть K — невырожденный континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus K \neq \emptyset$, $p \in (0, \infty)$, $f \in H^{p,\infty}$ и $F^p(f)$ — равномерно интегрируемо. Тогда, если функция $\varkappa(\cdot) = \varkappa(\cdot, f)$ является мажорируемо меняющейся, то существуют $c_1 > 0$ и $R_1 > 0$ такие, что при всех $R > R_1$*

$$\inf_{g \in B_R^{\infty,\infty}} (\|f - g\|_{p,\infty})^p \geq c_1 \, \varkappa(R), \tag{4.38}$$

где

$$B_R^{\infty,\infty} = \{g \in H^\infty(G) : \sup_{z \in G} |g(z)| \leq R\}\},$$

а $c_1 = c_1(p, k_0, A)$ — есть функция от p и параметров k_0, A, входящих в (4.37)*. Кроме того, при $1 < p < \infty$ существует $c_2 > 0$ такая, что при всех $R > 1$*

$$\inf_{g \in B_R^{\infty,\infty}} (\|f - g\|_{p,\infty})^p \leq c_2 \varkappa(R), \tag{4.39}$$

где $c_2 = c_2(p)$ зависит только от p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вторая часть теоремы фактически уже доказана. Действительно, если в доказательстве теоремы 4.2 положить $F = F(f)$, то из (4.27) следует (4.39) с $c_2 = (k(p))^p$, если все f_j являются внешними функциями с $|\tilde{f}_j(e^{it})| \geq 1$ п.в. на $[-\pi, \pi]$. Теперь для того, чтобы перейти к произвольной $f \in H^{p,\infty}$, достаточно воспользоваться оценками, проведенными в (4.33).

Докажем первую часть теоремы. Предположим, что $\varkappa(\cdot)$ является мажорируемо меняющейся функцией и проверим (4.38). В соответствии с (4.37) существует такое положительное R_1, что

$$\forall R \geq R_1 : \varkappa(R) \leq (A+1)\varkappa(k_0 R). \tag{4.40}$$

Для любого $g \in B_R^{\infty,\infty}$ имеем

$$\|f - g\|_{p,\infty}^p \geq \sup_{j \in I} \int\limits_{[-\pi,\pi]} ||\tilde{f}_j| - R|^p dm_1 \geq \sup_{j \in I} \int\limits_{E_{f_j(k_0 R)}} ||\tilde{f}_j| - R|^p \, dm_1,$$

а так как из $|\tilde{f}_j| \geq k_0 R$ следует, что

$$|\tilde{f}_j| - R \geq |\tilde{f}_j| - \frac{|\tilde{f}_j|}{k_0} = \left(\frac{k_0 - 1}{k_0}\right)|\tilde{f}_j|,$$

то

$$\sup_{j\in I} \int\limits_{E_{f_j(k_0R)}} ||\tilde{f}_j| - R|^p dm_1 \geq \left(\frac{k_0-1}{k_0}\right)^p \sup_{j\in I} \int\limits_{E_{f_j(k_0R)}} |f_j|^p dm_1 =$$

$$= \left(\frac{k_0-1}{k_0}\right)^p \varkappa(k_0R).$$

Отсюда и из (4.40) получаем при $R \geq R_0$ неравенство

$$\|f-g\|_{p,\infty}^p \geq \left(\frac{k_0-1}{k_0}\right)^p \frac{1}{(A+1)} \varkappa(R),$$

что дает (4.38), если взять infimum по $g \in B_R^{\infty,\infty}$. Теорема доказана.

Пусть $0 < p < s \leq \infty$. Как и в классическом случае пространств Харди H^p, легко проверяется наличие вложения

$$H^{s,\infty} \subseteq H^{p,\infty}.$$

Следующий результат показывает, что замыкание $H^{s,\infty}$ в $H^{p,\infty}$ фактически не зависит от s. Напомним, что

$$H^{\infty,\infty} = H^{\infty}(G).$$

Теорема 4.4. *Пусть K — континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus K \neq \emptyset$, $0 < p < p_1 \leq \infty$, $f \in H^{p,\infty}$. Тогда, если в пространстве $H^{p,\infty}$ функцию f можно приблизить с любой степенью точности функциями из $H^{p_1,\infty}$, то такое приближение можно осуществить и функциями из $H^{p_2,\infty}$ при любом $p_2 \geq p_1$.*

Для доказательства сформулированной теоремы используем известный критерий равномерной интегрируемости [31, с. 95], принимающий в нашем случае такой вид.

Лемма 4.5. *Пусть F — непустое подмножество пространства H^p, $0 < p < \infty$. Тогда равномерная интегрируемость семейства F^p имеет место тогда и только тогда, когда выполняется следующее утверждение. Существует монотонно возрастающая функция $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ — монотонно возрастает,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty, \tag{4.41}$$

и

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(|\tilde{f}(e^{it})|^p)dt < \infty. \qquad (4.42)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.4. В силу следствия 4.1 множество $H^{\infty,\infty}$ является плотным подмножеством пространства $H^{p,\infty}$, если конечно число компонент связности множества G. Так как

$$H^{p,\infty} \supseteq H^{p_1,\infty} \supseteq H^{\infty,\infty} \qquad (4.43)$$

для любого $p_1 \in (p,\infty]$, то доказываемая теорема очевидно верна для этого случая. Поэтому будем считать число компонент связности G бесконечным.

Для любого множества $A \subseteq H^{p,\infty}$ обозначим $\mathrm{Cl}_{p,\infty}(A)$ — замыкание A в пространстве $H^{p,\infty}$. В силу (4.43) включение

$$\mathrm{Cl}_{p,\infty}(H^{p_1,\infty}) \supseteq \mathrm{Cl}_{p,\infty}(H^{\infty,\infty})$$

имеет место при всех $p_1 \in (p,\infty]$. Следовательно, достаточно показать, что при таких $p_1 \in (p,\infty]$

$$\forall f \in H^{p_1,\infty} : \mathrm{Cl}_{p,\infty}(H^{\infty,\infty}) \ni f. \qquad (4.44)$$

Последнее, в силу теоремы 4.1, равносильно равномерной интегрируемости семейства $F^p(f)$. Соотношение (4.44) очевидно при $p_1 = \infty$, поэтому будем считать, что $p_1 < \infty$. Воспользуемся леммой 4.5. Положим для всех $t > 0$

$$\varphi(f) := t^{\frac{p_1}{p}}.$$

Так как $1 < \frac{p_1}{p} < \infty$, то $\varphi(t)$ монотонно возрастает и имеет место (4.41). Кроме того, из определения $\|\cdot\|_{p_1,\infty}$ следует

$$\sup_{f_j\in\mathcal{F}(f)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|\tilde{f}_j(e^{it})|^p)dt = \sup_{f_j\in\mathcal{F}(f)} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}_j(e^{it})|^{p_1}dt =$$

$$= \sup_{f_j\in\mathcal{F}(f)} \|f_j\|_{H^{p_1}}^{p_1} = \|f\|_{p_1,\infty}^{p_1} < \infty,$$

значит, (4.42) тоже выполнено.

Таким образом, в соответствии с леммой 4.5 семейство $F^p(f)$ является равномерно интегрируемым.

4.3. Комментарии

В работе [7] теорема, подобная 4.2, дана в виде результата об характеристическом свойстве точек замыкания множества ограниченных подмножеств H^∞ в λ - топологии пространств замкнутых подмножеств H^∞. Теоремы 4.3 и 4.4 были анонсированы в [10] и впервые публикуются с доказательствами в настоящей монографии.

Принятое в данном параграфе определение равномерной интегрируемости является нестандартным. Обычно это понятие определяют, используя (4.10), (см. [31, с. 94]), однако, как отмечалось в лемме 4.3, в нашей ситуации оба подхода эквивалентны. Семейства суммируемых функций, для которых выполняется (4.5), называют также семействами функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами [18, с. 144]. Первоначальный интерес к теореме 4.1 был мотивирован результатами об ограниченной поточечной аппроксимации Гамелина–Гарнетта [34] и Браудера–Вермера–Деви, упоминавшимися в леммах 3.1 и 3.2.

Функцию, определенную формулой (4.12), часто называют функцией распределения (функции $\tilde{f}$), а неравенство (4.13) – неравенством Чебышева (см., например, [4, с. 29-30]). Хотя теорема 4.1 выводится непосредственно из теоремы 4.2, но можно заметить, что эти теоремы в определенном смысле равносильны. Для вывода теоремы 4.2 из теоремы 4.1 можно, в силу сепарабельности H^p, выделить из F счетное плотное подмножество $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ и поставить ему в соответствие функцию $f \in H^{p,\infty}$ такую, что $f|_{G_j} = f_j \circ \psi_j^{-1}$ при всех j. Утверждение 4.1 не обратимо. Контрпример получим, выбрав $f \in H^{p,\infty}$ так, что функции $f \circ \psi_j$ являются внешними и при всех j

$$|\tilde{f}_j(e^{it})| = r_j(f) + 2,\ t \in [-\pi, \pi],$$

где $r_j(f)$ — функции Радемахера [3, с. 9]. Равномерная интегрируемость семейства $F(f)$ очевидна в силу $f \in H^\infty(G)$, а отсутствие предкомпактности легко проверить, используя критерий М. Рисса [21, с. 35]. Если в теореме 4.3 предположить, что $f \in H^\infty(G)$, то $\varkappa(\cdot, f)$ не будет строго положительной, а значит, и не будет мажорируемо меняющейся функцией, но для достаточно больших R неравенство (4.38) останется верным, так как обе его части обратятся в нуль.

Список литературы

1. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 213 с.

2. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 334 с.

3. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987. – 344 с.

4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.

5. *Довгошей А.А.* Об аппроксимации полиномами функций из классов Харди в односвязных областях на плоскости // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 9. – С. 1266-1271.

6. *Довгошей А.А.* Об интегральных представлениях в классах Харди и наилучших приближениях в некоторых функциональных пространствах // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 3. – С. 342-347.

7. *Довгошей А.А.* О семействах функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 178-184.

8. *Довгошей А.А.* Континуумы со свойством Дирихле и произведение пространств Харди // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 10. – С. 1337-1341.

9. *Довгошей А.А.* Приближение аналитических функций в некоторых функциональных пространствах и рациональная аппроксимация функций из классов Харди // Мат. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 64-70.

10. *Довгошей А.А.* Об одновременной аппроксимации функций из классов Харди ограниченными аналитическими функциями// Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. –Т. 14. – С. 70-73.

11. *Довгошей А.А., Абдуллаев Ф.Г.* Теорема Сегё, области Каратеодори и ограниченность вычисляющих функционалов // Мат. заметки. – 2005. – Т. 77, № 1. – С. 3-15.

12. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 625 с.

13. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

14. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных проследовательностей // Изв. АН СССР. Сер. математ. – 1941. – Т. 5, № 1. – С. 3-14.

15. *Крейн М.Г.* On a generalization of some investigations of G. Szegö, V. Smirnoff and A. Kolmogoroff // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 46, № 3. – С. 95-98.

16. *Крылов В.И.* О функциях регулярных в полуплоскости // Мат. сборник. – 1939. – Т. 6 (48) . – С. 95-138.

17. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 366 с.

18. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 470 с.

19. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. – М. - Л.: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.

20. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

21. Справочная математическая библиотека/ Под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского. Функциоанльный анализ. – М.: Наука, 1964. - – 424 с.

22. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М: Издательство иностранной литературы, 1961. – 508 с.

23. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 252 с.

24. *Browder A.* Introduction to function algebras. – W. A. Benjamin, New York, 1969. – 273 p.

25. *Browder A., Wermer J.* Some algebras of functions on an arc // J. Math. and Mech. – 1963. – V. 12. – P. 119-130.

26. *Bishop C. J.* Constructing continuous functions holomorphic off a curve // J. Funct. Anal. – 1989. – V. 82. – P. 113-137.

27. *Bishop C. J., Carleson L., Garnett J. B., Jones P. W.* Harmonic measure supported on curves // Pacif. J. Math. – 1989. – V. 138. – P. 233-236.

28. *Cohn D.L.* Measure Theory. – Birkhäuser, Boston, 1980. – 373 p.

29. *Davie A.M.* Dirichlet algebras of analytic functions // J. Funct. Anal. – 1970. – V. 6. – P. 348-356.

30. *Davis P J.* Interpolation and approximation. – Blaisdell Publishing Company, New York, 1963. – 393 p.

31. *Doob J.L.* Measure Theory. – Springer-Verlag, New York, 1994. – 210 p.

32. *Dovgoshey O. A., Abdullayev F. G.* On the Szego's theorem, harmonic measure and Carathéodory domains // Proc. of NAS of Azerbaijan. – 2002. – V. 58, № 5-6. – P. 35-39.

33. *Fisher S.D.* Function Theory on Planar Domains. A Second Course in Complex Analysis. – John Wiley & Sons. New York etc., 1980. – 269 p.

34. *Gamelin T.W., Garnett J.B.* Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras // J. Funct. Anal. – 1971. – V. 8. – P. 360-404.

35. *Glicksberg I.* Dominant representing measures and rational approximation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 130. – P. 425-462.

36. *Helson H., Lowdenslager D.* Prediction theory and Fourier series in several variables // Acta Math. – 1958. – V. 99. – P. 165-202.

37. *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. – Cambridge University Press, Cambridge, 1995. – 343 p.

38. *Newman M.H.* A. Elements of the topology of plane sets of points. – 2nd ed., Dover Publications, New York, 1992. – 214 p.

39. *Szegö G.* Beitzöge zur Theorie der Toeplitzschen Formen I // Math. Z. – 1920. – V. 6. – P. 167-202.

ГЛАВА 5

СИЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L

§ 1. Введение

Данная глава содержит результаты, касающиеся сильных сферических средних, их интегральных аналогов и сумм Бохнера–Рисса рядов Фурье функций, ограниченных почти всюду на m-мерном торе. Полученные результаты применяются для исследования интегрируемости и сходимости по сферам в метрике L кратных тригонометрических рядов.

Пусть $L_\infty(T^m)$ — пространство измеримых ограниченных почти всюду на m-мерном торе $T^m = [-\pi, \pi)^m$ функций, $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty(T^m)$, задаваемая равенством $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in T^m} |f(x)|$. Z^m — целочисленная решетка в евклидовом пространстве R^m, т.е. множество всех целочисленных векторов $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)$ из R^m, $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| = \sqrt{xx}$.

Пусть $f \in L_\infty(T^m)$,

$$\sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx} \tag{1.1}$$

— ряд Фурье-Лебега функции f с коэффициентами Фурье:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(u) e^{-iku} du.$$

Сферическая частичная сумма $S_R(f, x)$ ряда (1.1) определяется числом

$R > 0$ и имеет вид

$$S_R(f,x) = \sum_{|k|\le R} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Для норм соответствующих операторов в $L_\infty(T^m)$ (констант Лебега $S_R(f)$) справедлива следующая двусторонняя оценка[7]:

$$\sup_{|f|\le 1} \|S_R(f)\|_\infty = \sup_{|f|\le 1} |S_R(f,0)| \asymp R^{\frac{m-1}{2}}, \quad R\to\infty, \quad m = 2,\ 3,\ \ldots, \tag{1.2}$$

см. [1], ([2], оценка снизу).

Понятие сильной суммируемости последовательности было введено Харди и Литтлвудом [3]. Ими, в частности, было показано, что при любом $p > 0$ для любой функции $f \in C(T)$ равномерно по x

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,x) - f(x)|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Пусть $p > 0, \quad n \in N$. Назовем p-сильными сферическими средними ряда (1.1) следующие величины:

$$H_{n,p}(f,x) := \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,x)|^p \right)^{1/p}. \tag{1.3}$$

При $m = 1$ ограниченность по n последовательности

$$H_{n,p} := \sup_{|f|\le 1} H_{n,p}(f,x) = \sup_{|f|\le 1} H_{n,p}(f,0) = \sup_{|f|\le 1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,0)|^p \right)^{1/p}$$

равносильна p-сильной суммируемости рядов Фурье непрерывных периодических функций.

При $m = 2$ и $0 < p \le 2$ вопрос о поведении $H_{n,p}$ открыт, известно лишь ([4] при $p = 1$ и [5]), что при $1 \le p \le 2$

$$H_{n,p} \asymp \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \sup_{\{\varepsilon_l\}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \, | \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{1}{2}} \sin\left(l\alpha - \frac{\pi}{4} \right) | \, d\alpha, \tag{1.4}$$

где supremum берется по всем наборам $\{\varepsilon_l\}$, удовлетворяющим условию $\sum_{l=1}^{n} |\varepsilon_l|^q \le 1$, q — показатель, сопряженный к p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

[7] $\varphi(f,R) \asymp \psi(f,R)$ означает, что существуют постоянные $c_1, \quad c_2 > 0$, возможно различные при различных m , такие, что $c_1\varphi(f,R) \le \psi(f,R) \le c_2\varphi(f,R)$.

Заметим, что константы Лебега средних Фейера сферических сумм Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j(f)$$

ограничены в $L_\infty(T^2)$ [6].

При $m = 2$ и $p > 2$ или $m \geq 3$ и $p \geq 1$ последовательность $H_{n,p}$ неограничена по n. В [7, 8] найден точный порядок ее роста (см. также [9]).

Данная глава состоит из трех параграфов. В §2 приведены результаты о поведении $H_{n,p}$ и некоторые следствия, касающиеся интегрируемости и сходимости кратных тригонометрических рядов. В §3 рассматриваются интегральные аналоги сильных средних (1.3). Доказываются верхние и нижние оценки норм соответствующих операторов в $L_\infty(T^m)$. В §4 результаты из §3 применяются к исследованию интегральных средних сумм Бохнера-Рисса, порядок α которых меньше критического.

§ 2. Сильные сферические средние. Приложения

2.1. Сильные средние $H_{n,p}$

Пусть $m = 2$, $0 < p \leq 2$. Применяя к интегралу в (1.4) неравенство Коши-Буняковского, затем равенство Парсеваля, получаем следующую оценку:

$$H_{n,p} \leq c\sqrt{\ln(n+1)}, \tag{2.1}$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

При $m = 2$ и $p > 2$ в [7] доказано, что

$$H_{n,p} \leq c(p) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Здесь постоянная $c(p)$ стремится к ∞ при $p \to 2 + 0$. Там же показано, что снизу имеет место противоположное неравенство

$$H_{n,p} \geq c_1 n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}},$$

где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная.

При $m \geq 3$ справедлив следующий результат.

Теорема 2.1 [8]. *Пусть* $m \geq 3, \quad p \geq 1$. *Тогда*

$$H_{n,p} \asymp n^{\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)}, \tag{2.3}$$

где константы, входящие в знак $\asymp$, зависят лишь от m.

Доказательство. Нам потребуется следующий результат Э.С. Белинского ([10], теорема 1, верхняя оценка).

Пусть $\Lambda(x)$ – измеримая ограниченная функция на R^m, имеющая компактный носитель. Рассмотрим последовательность линейных операторов ($n \in N$):

$$L_n^\Lambda : f \to \sum_{k\in Z^m} \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) \hat{f}\,(k)\, e^{ikx}.$$

Теорема А.

$$\left\|L_n^\Lambda\right\|_{L_1(T^m)\to L_1(T^m)} = \left\|L_n^\Lambda\right\|_{L_\infty(T^m)\to L_\infty(T^m)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T^m} |\sum_k \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) e^{-ikx}|dx \le \int_{nT^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i}{2n\sin\frac{x_i}{2n}} |\hat{\Lambda}(x)|dx +$$

$$+c(m)\int_{\frac{1}{2\pi}T^m} \left[\sum_k \left|\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) - \Lambda\left(\frac{k+u}{n}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} du,$$

где

$$\hat{\Lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{R^m} \Lambda(u)e^{-iux}du$$

— преобразование Фурье функции $\Lambda(x)$.

Оценка снизу. При $p \ge 2$ достаточно в правой части (1.3) оставить одно слагаемое

$$(n+1)^{-\frac{1}{p}}|S_n(f,x)|$$

и применить нижнюю оценку в двустороннем неравенстве (1.2). При $p = 1$ воспользуемся приемом Салема [11]. Пусть $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j\}_0^n$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Тогда

$$H_{n,1} = \sup_{|f|\le 1}\sup_{\{\varepsilon\}} \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j S_j(f,0)\right| = \sup_{\{\varepsilon\}} \frac{(2\pi)^{-m}}{n+1}\int_{T^m}\left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j D_j(u)\right| du >>$$

$$>> \frac{1}{n+1}\int_{T^m}\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^n r_j(t) D_j(u)\right|\,dt\,du, \tag{2.4}$$

где $r_j(t) = \text{sign} \ \sin 2^{j+1}\pi t$ – функции Радемахера,

$$D_R(x) = \sum_{|k|\le R} e^{ikx}$$

— сферическое ядро Дирихле порядка R. В силу известного соотношения ([12, с. 314])

$$8\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} c_j r_j(t)\right| dt \ge \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

справедливого для любых действительных чисел c_j, получаем, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{n} r_j(t) D_j(u)\right| dt >> \left(\sum_{j=0}^{n} |D_j(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^{n} |D_j(u)|.$$

Из данного неравенства, (2.4) и нижней оценки в (1.2) следует, что

$$H_{n,1} >> \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \int_{T^m} |D_j(u)| \, du >> n^{\frac{m-2}{2}}.$$

Так как $H_{n,p}$ не убывает с ростом p, при $1 < p < 2$ имеем ту же оценку $H_{n,p} >> n^{\frac{m-2}{2}}$.

Оценка сверху. Верхнюю оценку достаточно доказать для $p \ge 2$. Из (1.3) следует, что

$$H_{n,p} = (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sup_{|f|\le 1} \ \sup_{\{\varepsilon\}} \left|\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j S_j(f,0)\right| =$$

$$= (2\pi)^{-m}(n+1)^{-\frac{1}{p}} \sup_{\{\varepsilon\}} \int_{T^m} \left|\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j D_j(u)\right| du, \quad (2.5)$$

где supremum берется по всевозможным наборам $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j\}_0^n$ действительных чисел ε_j, удовлетворяющим условию $\sum\limits_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^q \le 1$, q — показатель, сопряженный к p. Преобразуем сумму под знаком интеграла в (2.5). Пусть

$$\lambda_l = (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sum_{j=l}^{n} \varepsilon_j \quad \text{при} \quad 0 \le l \le n, \quad \lambda_{n+1} = 0,$$

$$\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1} = (n+1)^{-\frac{1}{p}}\,\varepsilon_l.$$

Тогда

$$H_{n,p} << \sup_{\{\varepsilon\}} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j \sum_{|k|\le j} e^{iku} \right| du =$$

$$= \sup_{\{\varepsilon\}} \int_{T^m} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{l-1<|k|\le l} e^{iku} \right| du. \quad (2.6)$$

Определим, исходя из последовательности λ_l, непрерывную на отрезке $[0,\ n+1]$ функцию $\varphi_n(t)$ следующим образом:

$$\varphi_n(0) = \lambda_0,\ \varphi_n(1) = \lambda_1,\ \varphi_n(t) = \lambda_l$$

$$\text{при} \quad l - 1 + \frac{1}{2(n+1)} \le t \le l,\ 2 \le l \le n+1,$$

и линейная на оставшихся промежутках. По функции $\varphi_n(t)$ определим функцию $\lambda_n(t)$, полагая $\lambda_n(\frac{t}{n+1}) = \varphi_n(t)$. Функция $\lambda_n(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, $\lambda_n(1) = 0$.

Пусть $\Lambda_n(x)$ — радиальная функция, заданная на единичном шаре $|x| \le 1$ в R^m равенством $\Lambda_n(x) = \lambda_n(|x|)$ и равная нулю вне этого шара.

Если точка $k \in Z^m$ принадлежит шаровому слою $l < |x| \le l+1$, $1 \le l \le n$, то $|k| - l > \frac{1}{2(l+1)} \ge \frac{1}{2(n+1)}$. Это означает, что шаровые слои $l < |x| \le l + \frac{1}{2(n+1)}$, $1 \le l \le n$, не содержат точек из Z^m. Поэтому получаем, учитывая (2.6) и определение функции $\Lambda_n(x)$, что

$$H_{n,p} << \sup_{\{\varepsilon\}} \int_{T^m} \left| \sum_{|k|\le n+1} \Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right) e^{iku} \right| du. \quad (2.7)$$

Для оценки интеграла в правой части (2.7) применим теорему А:

$$H_{n,p} << \sup_{\{\varepsilon\}} \left\{ \int_{(n+1)T^m} |\hat{\Lambda}_n(u)| du + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2\pi}T^m} \left[\sum_k \left| \Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right) - \Lambda_n\left(\frac{k+u}{n+1}\right) \right|^2 \right]^{1/2} du \right\}. \quad (2.8)$$

Оценим сначала второй интеграл:

$$\left[\sum_k \left|\Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right)-\Lambda_n\left(\frac{k+u}{n+1}\right)\right|^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\sum_k \left|\lambda_n\left(\frac{|k|}{n+1}\right)-\lambda_n\left(\frac{|k+u|}{n+1}\right)\right|^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left\{ \left[\lambda_n(0)-\lambda_n\left(\frac{|u|}{n+1}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n} \sum_{l-1<|k|\le l} \left[\lambda_n\left(\frac{|k|}{n+1}\right)-\lambda_n\left(\frac{|k+u|}{n+1}\right)\right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.9)$$

По определению $\lambda_n(\frac{|k|}{n+1}) = \lambda_l$ при $l-1<|k|\le l$. Так как $|u| \le \frac{\sqrt{m}}{2}$ при $u \in \frac{1}{2\pi}T^m$, то при некотором $p=p(m)\in N$ и $l-1<|k|\le l$

$$\left|\lambda_n\left(\frac{|k|}{n+1}\right)-\lambda_n\left(\frac{|k+u|}{n+1}\right)\right| \le \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j| <<$$

$$<< \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \left(\sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

где $a_+ = a$ при $a \ge 0$ и нулю при $a<0$.

Поскольку в шаровом слое $l-1<|k|\le l$ не более чем $c(m)l^{m-1}$ точек из Z^m, получаем, учитывая (2.9) и (2.10), что второй интеграл в (2.8) не превосходит

$$\frac{c_1(m)}{(n+1)^{1/p}} \left(\sum_{j=0}^{p} |\varepsilon_j|^2 + \sum_{l=1}^{n} l^{m-1} \sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2} <<$$

$$<< n^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2} = O\left(n^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}}\right). \quad (2.11)$$

Оценим первый интеграл в (2.8). Обозначим его через $I_{n,p}$. По теореме Коши-Пуассона [13, с. 263]

$$\hat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{|u|\le 1} \Lambda_n(u) e^{-iux} du = \frac{(2\pi)^{-\frac{m}{2}}}{\alpha^{\frac{m-2}{2}}} \int_0^1 \lambda_n(\rho) \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho,$$

где $\alpha = |x|$, $J_\nu(t)$ – функция Бесселя ν-го порядка. Увеличим область интегрирования в $I_{n,p}$ и перейдем к сферическим координатам. Тогда

$$I_{n,p} << \int_0^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m}{2}} \left| \int_0^1 \lambda_n(\rho)\, \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha.$$

Проинтегрируем по частям во внутреннем интеграле, используя реккурентное соотношение для функций Бесселя ([14], п. 7.2.8(50)):

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

По построению $\lambda_n(1) = 0$, а ([14], п. 7.2.1(2))

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + O\left(z^{\nu+2}\right) \text{ при } z \to 0, \quad \nu \geq 0,$$

поэтому внеинтегральный член равен нулю. Так как полная вариация функции $\lambda_n(t)$

$$V(\lambda_n) = (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 1, \tag{2.12}$$

а $J_\nu(t)$ ограничены на каждом конечном промежутке, получаем, что

$$I_{n,p} << \int_0^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int_0^1 \lambda'(\rho)\, \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha =$$
$$= \int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int_0^1 \lambda'(\rho)\, \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho) d\rho \right| d\alpha + O(1).$$

Кроме того, при $0 \leq \rho \leq \frac{1}{n+1}$ $\quad |\lambda'(\rho)| \leq |\varepsilon_0|\ (n+1)^{1-\frac{1}{p}}$ и

$$\int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int_0^{\frac{1}{n+1}} \lambda_n'(\rho)\, \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha << \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Следовательно,

$$I_{n,p} << \int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \lambda'(\rho)\, \rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho) d\rho \right| d\alpha + O(1). \tag{2.13}$$

Для дальнейших оценок воспользуемся следующей формулой для $J_\nu(t)$, $\nu \geq 0$:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Подставим в (2.13). Остаточный член есть (см. (2.12))

$$\int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-5}{2}} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 |\lambda'(\rho)|\, d\rho\, d\alpha = \begin{cases} O\left(n^{\frac{m-3}{2}}\right) & \text{при } m > 3, \\ O(\ln n)\,, & \text{при } m = 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$I_{n,p} << \int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \lambda_n'(\rho)\, \rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha + \\ + O\left((n+1)^{\frac{m-2}{2}}\right).$$

Обозначим $q_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$. Производная $\lambda_n'(t)$ равна $-2\varepsilon_l (n+1)^{2-\frac{1}{p}}$ на интервале $(\frac{l}{n+1}, \frac{l}{n+1} + q_n)$, $\quad 1 \leq l \leq n$, и нулю на смежных интервалах. Поэтому

$$I_{n,p} << (n+1)^{2-\frac{1}{p}} \int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \times \\ \times \left| \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \int_{\frac{l}{n+1}}^{\frac{l}{n+1}+q_n} \rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha. \quad (2.14)$$

Заменим подынтегральную функцию в каждом внутреннем интеграле в (2.14) ее значением в левом конце промежутка интегрирования. При $\frac{l}{n+1} \leq \rho \leq \frac{l}{n+1} + q_n$

$$\left| \rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi m}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha l}{n+1} - \frac{\pi m}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \\ \leq \left[\left(\frac{l}{n+1} + q_n\right)^{\frac{m-1}{2}} - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] + \\ + 2\left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sin\frac{\alpha q_n}{2} << q_n(1+\alpha) << q_n\alpha.$$

Поэтому погрешность такой замены не превосходит

$$q_n^2\,(n+1)^{\frac{m+5}{2}-\frac{1}{p}} = O\left((n+1)^{\frac{m-3}{2}}\right).$$

После замены имеем

$$I_{n,p} << \frac{1}{(n+1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{p}}} \int_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \times$$
$$\times \left|\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha l}{n+1} - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\alpha + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right)$$

или, заменяя $\alpha \to (n+1)\alpha$,

$$I_{n,p} << \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\pi\sqrt{m}} \left|\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(l\alpha - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\alpha + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right) <<$$

$$<< \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^{2\pi} \left|\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(l\alpha - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{l=1}^{n} |\varepsilon_l|^2 \, l^{m-1}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right) << n^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Верхняя оценка в (2.3) (см. (2.11)), а следовательно, и теорема 2.1 доказаны.

Так как $H_{n,p}$ не убывает с ростом p, верхняя оценка в (2.3) справедлива и при $0 < p < 1$. В предельном случае $p = \infty$ получаем верхнюю оценку из (1.2).

Следствие 2.1. *Для любой $f \in L_\infty(T^m)$, $m \ge 3$, и любого $p > 0$*

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} |S_j(f)|^p \right\|_\infty \le c(m,p) n^{p\left[\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)\right]} \|f\|_\infty^p. \qquad (2.15)$$

Следующая аппроксимационная теорема доказывается хорошо известным методом из (2.15). Это аналог неравенства, доказанного впервые Алексичем и Краликом для $m = 1$ в [16].

Пусть $E_n(f)$ – наилучшее приближение f в пространстве $C(T^m)$ тригонометрическими полиномами со спектром в шаре радиуса n:

$$E_n(f) = \inf_T \|f - T\|_\infty, \quad \text{где} \quad T(x) = \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}.$$

Теорема 2.2 [8]. *Для любой $f \in C(T^m)$ $(m \ge 3)$ при любом $p > 0$*

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} |f - S_j(f)|^p \right\|_\infty \le c\,(m,p) \sum_{j=0}^{n} j^{p\left[\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)\right]} E_j^p\,(f)\,.$$

В двумерном случае аналогичные неравенства следуют из оценок (2.1) и (2.2).

Применяя многомерную теорему Джексона (см., например, [15], с. 113), утверждающую, что при любом $l \in N$

$$E_n\,(f) << \omega_l \left(f, \frac{1}{n}\right),$$

где $\omega_l\,(f,t) = \sup_{h\in R^m, |h|\le t} \left\| \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(\cdot + jh) \right\|_\infty$ – l-й полный модуль гладкости функции f, получаем оценку скорости приближения f.

2.2. Неравенства Сидона

Сидон [17] при $m = 1$ доказал следующее неравенство:

$$\frac{1}{n+1} \int_{\mathrm{T}} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(x) \right| dx \le c \max_{0\le j\le n} |a_j|\,,$$

где $D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}$ — ядро Дирихле порядка n.

Прямым следствием теоремы 2.1 является аналог неравенства Сидона для сферических ядер Дирихле:

$$D_R(x) = \sum_{|k|\le R} e^{ikx}$$

при $m \ge 3$.

Теорема 2.3 [8]. *Пусть $m \ge 3$, $n \in N$. Для любого набора действительных чисел $a_j, j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, справедливо неравенство*

$$\int_{\mathrm{T}^m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(u) \right| du \le c(m) n^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^2 \right)^{1/2}. \qquad (2.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2.16) легко следует из верхней оценки в (2.3). В самом деле,

$$I_n := \frac{1}{n+1} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(x) \right| dx = \sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j S_j(f,0) \right|.$$

Тогда

$$I_n \le \sup_{|f|\le 1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,0)|^p \right)^{1/p} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}$$

при любых $p,\ q \ge 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

При $p \le 2 \quad I_n << (n+1)^{\frac{m-2}{2}} \left(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{j=0}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}$ и правая часть минимальна при $q = 2$.

При $p \ge 2 \quad I_n << n^{\frac{m-1}{2}-1} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}$ и minimum также при $q = 2$. Неравенство (2.16) доказано.

Точность данного неравенства, невозможность замены в нем $\|\{a_j\}\|_{l_2}$ на норму $\|\{a_j\}\|_{l_q}$, $q > 2$, следуют из теоремы 2.1. Если бы при некотором $q > 2$ для любых наборов $\{a_j\}_0^n$ имело место неравенство

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(x) \right| dx \le c(m) n^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q},$$

то, полагая $a_j = \operatorname{sign} S_j(f,0)$ для любой функции f с условием $|f| \le 1$, имели бы

$$\sum_{j=0}^{n} |S_j(f,0)| << n^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{q}} = n^{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{p}}$$

при некотором $p < 2$, что противоречит нижней оценке в (2.3).

Кроме того, при любом n существуют наборы $\{a_j\}_{j=0}^n$, для которых имеет место противоположное (2.16) неравенство. Достаточно положить, например, $a_j = 0, \quad j = 0, ..., n-1, \quad a_n \neq 0$.

При $m = 2$ имеет место оценка [5]

$$\int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(u) \right| du \leq cn^{\frac{1}{2}} \sqrt{\ln(n+1)} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^2 \right)^{1/2}, \qquad (2.17)$$

где c – абсолютная постоянная.

Следствие 2.2. *Пусть $m \geq 3$, $l \in N$. Для любого набора действительных чисел $\{a_j\}$ справедливо неравенство*

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} a_j D_j(u) \right| du << \left(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} j^{m-1} a_j^2 \right)^{1/2}. \qquad (2.18)$$

Для доказательства этого неравенства достаточно в (2.16) положить $n = 2^{l+1} - 1$ и $a_0 = a_1 = ... = a_{2^l - 1} = 0$.

Аналогичным образом при $m = 2$ из (2.17) получаем

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} a_j D_j(x) \right| dx << \sqrt{l+1} \left(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} j a_j^2 \right)^{1/2}. \qquad (2.19)$$

2.3. Интегрируемость кратных тригонометрических рядов

Неравенства (2.18) и (2.19) используются при исследовании интегрирования и сходимости в пространстве $L(T^m)$ m-кратных ($m \geq 2$) тригонометрических рядов

$$\sum_{k \in \mathrm{Z}^m} c_k e^{ikx} \qquad (2.20)$$

с радиальными, т.е. зависящими только от $|k|$, коэффициентами.

Тригонометрический ряд (2.20) сходится по сферам в $L(T^m)$, если существует функция $f \in L(T^m)$ такая, что

$$\lim_{R \to \infty} \int_{T^m} |S_R(x) - f(x)| \, dx = 0,$$

где $S_R(x)$ – сферическая частичная сумма ряда (2.20).

Пусть λ_n – сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел. Рассмотрим сначала тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{l-1<|k|\le l} e^{ikx}. \tag{2.21}$$

Полагаем $\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1} \quad (l = 1,\ 2,\ ...)$.

Теорема 2.4 [8]. *Если последовательность λ_n, определяющая коэффициенты ряда (2.21), сходится к нулю и, кроме того, удовлетворяет условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{l+1} \left[2^l \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} (\Delta\lambda_j)^2 \right]^{1/2} < \infty \quad \textit{при}\ m = 2 \tag{2.22}$$

или условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}\,l} \left[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} (\Delta\lambda_j)^2 \right]^{1/2} < \infty \quad \textit{при}\ m \ge 3, \tag{2.23}$$

то ряд (2.21) есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, который сходится по сферам к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n n^{\frac{m-1}{2}} = 0. \tag{2.24}$$

Данная теорема есть один из m-мерных аналогов хорошо известной теоремы Фомина [18].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$S_n(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{l-1<|k|\le l} e^{ikx}$$

— n-ая, $n \in N$, сферическая частичная сумма ряда (2.21).

Покажем сначала сходимость в $L(T^m)$ ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta\lambda_j D_j(x). \tag{2.25}$$

Из условия (2.23) (или (2.22) при $m = 2$) и неравенства (2.18) (соответственно (2.19)) следует сходимость ряда из норм

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx < \infty,$$

следовательно, в силу полноты пространства, сходимость в $L(T^m)$ ряда

$$\Delta\lambda_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x).$$

Обозначим его сумму через f. Пусть n – произвольно, выберем l_0 из условия $2^{l_0} \leq n+1 < 2^{l_0+1}$. Так как

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(x) - f(x) \right| dx \leq \int_{T^m} \left| \sum_{j=n+1}^{2^{l_0+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx + \\ + \int_{T^m} \left| f(x) - \sum_{j=0}^{2^{l_0+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx \quad (2.26)$$

и поскольку для первого слагаемого правой части (2.26) также выполнена оценка (2.18) (или (2.19)) (нужно положить $a_j = 0$ при $2^{l_0} \leq j \leq n$), получаем, что правая часть (2.26) стремится к нулю при n, а значит, и l_0, стремящемся к ∞. Сходимость ряда (2.25) в $L(T^m)$ к f доказана.

Покажем, что ряд (2.21) есть ряд Фурье функции f. Для этого нужно показать, что

$$\hat{f}(k_0) = \lambda_l \quad \text{при} \quad l-1 < |k_0| \leq l. \quad (2.27)$$

Пусть $n > l$. Тогда

$$\hat{f}(k_0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(u) e^{-ik_0 u} du = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \left[\sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(u) \right] e^{-ik_0 u} du +$$

$$+ o(1) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{j-1<|k|\leq j} e^{iku} - \lambda_n D_n(u) \right] e^{-ik_0 u} du = \\ = \lambda_l - \lambda_n + o(1).$$

Так как $n > l$ – произвольно, а $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем (2.27).

Осталось показать, что ряд (2.21) сходится к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.24). Это следует из равенства

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(x) + \lambda_{n+1} D_n(x),$$

сходимости к f ряда (2.25) и двусторонней оценки (1.2). Теорема 2.4 доказана.

Из теоремы 2.4 легко получить подобный результат для более общих тригонометрических рядов.

Пусть функция $\lambda(t)$ определена при $t \geq 0$. Ее колебание $\omega_l(\lambda)$ на отрезке $[l-1, l]$ есть

$$\omega_l(\lambda) = \sup_{l-1 \leq t_1, t_2 \leq l} \left|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)\right|.$$

По функции $\lambda(t)$ определим тригонометрический ряд

$$\sum_{k \in Z^m} \lambda\left(|k|\right) e^{ikx}. \tag{2.28}$$

Теорема 2.5 [8]. *Если функция $\lambda(t)$, определяющая коэффициенты ряда (2.28), стремится к нулю при $t \to \infty$ и выполнено условие*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{l+1} \left[2^l \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \omega_j^2(\lambda)\right]^{1/2} < \infty \quad \text{при} \quad m = 2 \tag{2.29}$$

или условие

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}\, l} \left[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \omega_j^2(\lambda)\right]^{1/2} < \infty \quad \text{при} \quad m \geq 3, \tag{2.30}$$

то ряд (2.28) есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, сходящийся по сферам к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) t^{\frac{m-1}{2}} = 0. \tag{2.31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $|\Delta\lambda(l)| \leq \omega_l(\lambda)$, из условий (2.29) и (2.30) следуют соответствующие условия (2.22) и (2.23) теоремы 2.4 для ряда (2.21) с $\lambda_l = \lambda(l)$. Поэтому достаточно показать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l-1<|k|\le l} \left[\lambda\left(|k|\right) - \lambda\left(l\right)\right] e^{ikx},$$

являющийся разностью рядов (2.28) и (2.21), сходится в $L^2(T^m)$, следовательно, и в $L(T^m)$. Для этого нужно показать, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l-1<|k|\le l} \left[\lambda\left(|k|\right) - \lambda\left(l\right)\right]^2 < \infty.$$

Но данная сумма не превосходит $\sum_{l=1}^{\infty} \omega_l^2 l^{m-1}$, которая конечна в силу условия (2.29) или (2.30).

2.4. Об одном кратном тригонометрическом ряде

Одно из возможных применений теоремы 2.5 есть доказательство критерия сходимости по сферам в $L(T^m)$ для рядов

$$\sum_{k\neq 0} \frac{b\left(|k|\right)}{|k|^{\alpha}} e^{ikx}, \tag{2.32}$$

где $\alpha > 0$, а $b(u)$ — медленно меняющаяся (по Зигмунду) функция, т.е. положительная функция, определенная при $u > 0$, и такая, что при любом $\delta > 0$ функция $b(u)u^{\delta}$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\delta}$ убывает. Одномерную теорию таких рядов см. в ([19, гл. 5]), m-мерную, при более узком классе бесконечно дифференцируемых функций $b(u)$, в [20, 21]. В частности, при любом $\alpha > 0$ ряд (2.32) есть ряд Фурье.

Из результатов работы [1] следует, что ряд

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{|k|^{\alpha}},$$

($b(u) \equiv 1$) расходится по сферам в $L(\mathrm{T}^m)$, если $\alpha < \frac{m-1}{2}$. Очевидно, что при $\alpha > \frac{m}{2}$ ряд (2.32) сходится в $L_2(T^m)$, следовательно, и в $L(T^m)$.

Теорема 2.6 [8]. *Для того чтобы ряд (2.31) сходился по сферам в $L(T^m)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{u\to\infty} b(u) u^{\frac{m-1}{2}-\alpha} = 0.$$

Чтобы доказать теорему 2.6, нам нужны следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Если $b(u)$ — медленно меняющаяся функция, то при любом $t > 0$*

$$|b(u) - b(u+t)| = o\left(\frac{tb(u)}{u}\right) \text{ *при* } u \to \infty.$$

Для дифференцируемых функций $b(u)$ лемма 2.1 доказана в [20].

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом $\delta > 0$ функция $\frac{b(u)}{u^\delta}$ убывает при $u \geq u_0(\delta)$, поэтому при этих u

$$\frac{b(u)}{u^\delta} - \frac{b(u+t)}{(u+t)^\delta} \geq 0$$

и

$$b\,(u) - b\,(u+t) > -b\,(u+t)\ \left[\left(1 + \frac{t}{u}\right)^\delta - 1\right].$$

Аналогично, поскольку при любом $\delta > 0$ $b(u)u^\delta$ возрастает при $u \geq u_1(\delta)$,

$$b\,(u) - b\,(u+t) \leq b\,(u+t)\ \left[\left(1 + \frac{t}{u}\right)^\delta - 1\right].$$

Объединяя эти два неравенства и замечая, что выражение в квадратных скобках не превосходит $\delta t/u$ при $\delta \leq 1$, получаем при $u \geq \max(u_0, u_1)$

$$|\ b\,(u) - b\,(u+t)| \leq \frac{\delta t b\,(u+t)}{u} \leq \frac{2\delta t}{u} b\,(u)\,.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если при некотором $\alpha_0 > 0$ ряд (2.32) сходится по сферам в $L(T^m)$, то он так же сходится при $\alpha > \alpha_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом $\alpha > 0$ ряд

$$\sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{|k|^\alpha}$$

есть ряд Фурье некоторой функции $g_\alpha \in L(T^m)$. Обозначим сумму ряда (2.32) при $\alpha = \alpha_0$ через f_{α_0}. Тогда ряд (2.32) при $\alpha > \alpha_0$ есть ряд Фурье свертки $f_\alpha = f_{\alpha_0} * g_{\alpha - \alpha_0}$ и

$$\int_{T^m} |f_\alpha - S_R\,(f_\alpha)|\,dx =$$

$$= \int_{T^m} \left| \int_{T^m} \left[f_{\alpha_0}(x-y) - S_R(f_{\alpha_0})(x-y) \right] g_{\alpha-\alpha_0}(y)\, dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{T^m} |g_{\alpha-\alpha_0}|\, dy \int_{T^m} |f_{\alpha_0} - S_R(f_{\alpha_0})|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.6. Применим теорему 2.5. Пусть $m \geq 3$. При любом $\alpha > 0$ последовательность $b(l)/l^\alpha$ при достаточно больших l монотонно убывает. Кроме того, по лемме 2.1

$$\omega_l \left(\frac{b(l)}{l^\alpha} \right) = \frac{b(l)}{l^\alpha} - \frac{b(l+1)}{(l+1)^\alpha} << \frac{b(l)}{l^{\alpha+1}}.$$

Поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2} l} \left[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \omega_j^2 \left(\frac{b(j)}{j^\alpha} \right) \right]^{1/2} <<$$

$$<< \sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2} l} \left(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{b^2(j)}{j^{2(\alpha+1)}} \right)^{1/2} << \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b\left(2^l\right)}{2^{l\left(\alpha - \frac{m-2}{2}\right)}}.$$

Последний ряд сходится при $\alpha > \frac{m-2}{2}$ (если сходится ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{b(j)}{j}$, то и при $\alpha = \frac{m-2}{2}$). Следовательно, если $\alpha > \frac{m-2}{2}$, то для ряда (2.32) выполнено условие (2.30) теоремы 2.5. При $m = 2$ аналогичное условие (2.29) выполнено, если $\alpha > 0$. Поэтому, если рассматривать промежуток $\alpha > \frac{m-2}{2}$, по теореме 2.5 ряд (2.32) сходится по сферам в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.31), которое совпадает с условием теоремы 2.6. То, что нет сходимости в $L(T^m)$ при $\alpha \leq \frac{m-2}{2}$, следует из леммы 2.2.

§ 3. Интегральные аналоги $H_{n,p}$-средних

Пусть $R > 0$, $p > 0$. Рассмотрим следующие величины:

$$h_{R,p}(f,x) = \left(\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f,x)|^p\, dr \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Нормы операторов (3.1) в $L_\infty(T^m)$ обозначим через $h_{R,p}$:

$$h_{R,p} = \sup_{|f| \leq 1} \|h_{R,p}(f)\|_\infty = \sup_{|f| \leq 1} h_{R,p}(f,0).$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $p \geq 1$, $m \geq 3$. *Тогда*

$$c_1(m)\, R^{\frac{m-1}{2}-\min(1,\frac{2}{p})} \leq h_{R,p} \leq c_2(m)\, R^{\frac{m-1}{2}-\min(\frac{1}{2},\frac{1}{p})}. \tag{3.2}$$

Для доказательства теоремы 3.1 нам потребуется некоторое обобщение теоремы 2.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $p \geq 1$. *При* $m \geq 3$ *для любого набора* $\{r_j\}_{j=0}^n$ *неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию* $j < r_j \leq j+1$ $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, *имеет место двустороннее неравенство*

$$\sup_{|f|\leq 1}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left|S_{r_j}(f,0)\right|^p\right)^{1/p} \asymp n^{\frac{m-1}{2}-\min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{p}\right)} \ \text{при}\ n\to\infty \tag{3.3}$$

с постоянными, зависящими только от m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку сверху достаточно доказать при $p \geq 2$. Оценим разность величин, стоящих под знаком супремума для наборов $\{r_j\}$ и $\{j\}$:

$$I_{n,p} := \left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left|S_{r_j}(f,0)\right|^p\right)^{1/p} - \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left|S_{j}(f,0)\right|^p\right)^{1/p}\right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left|S_{r_j}(f,0)-S_j(f,0)\right|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{\varepsilon_j}\frac{1}{(n+1)^{1/p}}\left|\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j\left[S_{r_j}(f,0)-S_j(f,0)\right]\right|, \tag{3.4}$$

где супремум берется по всевозможным наборам $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^n$, удовлетворяющим условию $\sum_{j=0}^n|\varepsilon_j|^q \leq 1$, q — показатель, сопряженный к p. Так как

$$S_r(f,0) = (2\pi)^{-m}\int_{T^m} f(u)\left(\sum_{|k|\leq r} e^{iku}\right)du,$$

получаем, что последняя сумма в (3.4) равна

$$\sup_{\varepsilon_j} \frac{(2\pi)^{-m}}{(n+1)^{1/p}} \left| \int_{T^m} f(u) \left(\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \sum_{j<|k|\le r_j} e^{iku} \right) du \right| .$$

Оценим $|f|$ единицей, перейдем к L_2-норме и применим равенство Парсеваля. Получим

$$\sup_{|f|\le 1} I_{n,p} \le \sup_{\varepsilon_j} \left(\frac{(2\pi)^{-m}}{(n+1)^{2/p}} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \sum_{j<|k|\le r_j} e^{iku} \right|^2 du \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{\varepsilon_j} \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \left(\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^2 \sum_{j<|k|\le r_j} 1 \right)^{1/2} .$$

В шаровом слое $j < |x| \le j+1$ содержится $O\left((j+1)^{m-1}\right)$ точек решетки Z^m. Поскольку $\left(\sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^q\right)^{1/q}$ не возрастает с ростом q и $q \le 2$, получаем, что

$$\sup_{|f|\le 1} I_{n,p} << \sup_{\varepsilon_j} \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \left(\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^2 (j+1)^{m-1} \right)^{1/2} \le (n+1)^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}} .$$

Для завершения доказательства оценим сверху $h_{R,p}$, воспользовавшись неравенством Минковского

$$\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum |a_j - b_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p}$$

и верхней оценкой в двустороннем неравенстве (2.3).

Нижняя оценка в (3.3) доказывается аналогично случаю $r_j = j$ (см. доказательство теоремы 2.1).

Следствие 3.1. *Пусть* $p > 0$ *и* $j < r_j \le j+1$ $(j = 0,\ 1,\ \dots\ n)$. *Тогда*

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left| S_{r_j}(f,0) \right|^p \right)^{1/p} << n^{\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{p}\right)} \|f\|_\infty , \quad m = 3,\ 4,\ \dots ,$$

причем радиусы r_j *в данном неравенстве могут зависеть от функции* f.

Возможность выбора $r_j = r_j(f)$ в оценке сверху видна из доказательства теоремы 3.2 (мы заменяем $|f|$ единицей, не переходя к супремуму по f).

Доказательство теоремы 3.1. *Оценка сверху.*

Очевидно, что R можно считать натуральным числом. Тогда

$$\frac{1}{R}\int_0^R |S_r(f,0)|^p\,dr = \frac{1}{R}\sum_{j=0}^{R-1}\int_j^{j+1}|S_r(f,0)|^p\,dr \le \frac{1}{R}\sum_{j=0}^{R-1}\left|S_{r_j(f)}(f,0)\right|^p,$$

где $r_j(f)$ выбираем из условия

$$\left|S_{r_j(f)}(f,0)\right| = \max_{j\le r<j+1}|S_r(f,0)|\,.$$

Для получения верхней оценки в (3.2) достаточно применить теорему 3.2 (см. следствие 3.1).

Оценка снизу. Пусть $\{r_l\}$, $0 \le r_l < R$, — радиусы сфер из R^m с центрами в начале координат, содержащих точки решетки Z^m. Упорядочим их по возрастанию и положим $\Delta_l = r_{l+1} - r_l$. Так как $S_r(f,0)$ — ступенчатая функция по r, имеет место равенство

$$\int_0^R |S_r(f,0)|^p\,dr = \sum_l |S_{r_l}(f,0)|^p\,\Delta_l. \tag{3.5}$$

Каждое r_l есть корень квадратный из натурального числа, поэтому таких радиусов не более чем R^2, а на интервале $[R-1,R)$ их не более чем $2R-1$. Кроме того, при l таком, что $R-1\le r_l<R$,

$$\Delta_l \ge \frac{1}{r_l + r_{l+1}} >> \frac{1}{R}.$$

При $p \ge 2$ достаточно оставить в (3.5) одно слагаемое с наибольшим номером, перейти к супремуму по f, $|f|\le 1$, и применить нижнюю оценку из (1.2).

Пусть $p = 1$. Воспользуемся приемом Салема [11]. По определению

$$h_{R,1} = \frac{1}{R}\sup_{|f|\le 1}\sum_l |S_{r_l}(f,0)|\,\Delta_l = \frac{1}{R}\sup_{\varepsilon_l}\int_{T^m}\left|\sum_l \varepsilon_l D_{r_l}(u)\Delta_l\right|du,$$

где $\varepsilon_l = \pm 1$.

Пусть $r_j(t) = sign\,\sin 2^{j+1}\pi t$, $0\le t\le 1$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,$ — функции Радемахера. Тогда

$$h_{R,1} \geq \frac{1}{R} \int_{T^m} \int_0^1 \left| \sum_l r_l(t)\, D_{r_l}(u)\, \Delta_l \right| dt\, du.$$

Поскольку для любых c_j

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n c_j r_j(t) \right| dt \gg \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right)^{1/2},$$

получаем, что

$$h_{R,1} >> \frac{1}{R} \int_{T^m} \left(\sum_l D_{r_l}^2(u)\, \Delta_l^2 \right)^{1/2} du =$$

$$= \frac{1}{R} \int_{T^m} \sup_{\|b\|_{l_2} \leq 1} \sum_l |b_l| \ \ |D_{r_l}(u)|\, \Delta_l\, du \geq \ldots \geq$$

$$\geq \frac{1}{R} \sup_{\|b\|_{l_2} \leq 1} \sum_{l:\, r_l \geq \frac{R}{2}} |b_l|\, \Delta_l \int_{T^m} |D_{r_l}(u)|\, du \geq \frac{1}{R} \left(\sum_{l:\, r_l \ldots \frac{R}{2}} r_l^{m-1} \Delta_l^2 \right)^{1/2} >>$$

$$>> R^{\frac{m-1}{2}-1} \left(\sum_{l:\, r_l \geq \frac{R}{2}} \Delta_l^2 \right)^{1/2} >> \ R^{\frac{m-3}{2}},$$

так как

$$\sum_{l:\, r_l \geq \frac{R}{2}} \Delta_l^2 >> \sum_{s:\, \frac{R}{2} \leq s < R} \frac{1}{s^2} \sum_{l:\, s \leq r_l < s+1} 1 = \mathrm{const}\,.$$

Нижняя оценка при $p = 1$, а следовательно, и при $1 < p < 2$ доказана.

Теорема 3.1 доказана.

Верхняя оценка в (3.2) верна и при $m = 2$, $p > 2$ с некоторой постоянной $c(p)$. Если же $m = 2$, $0 < p \leq 2$, то

$$\left\| \left(\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f)|^p\, dr \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq c\sqrt{\log R}\, \|f\|_\infty\,.$$

§ 4. Интегральные средние сумм Бохнера-Рисса

Пусть $\alpha \geq 0$. Средние Бохнера-Рисса $S_R^\alpha(f)$ функции $f \in L(T^m)$ определяются формулой

$$S_R^\alpha(f,x) = \sum_{|k|\leq R} \left(1 - \frac{|k|^2}{R^2}\right)^\alpha \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

При $\alpha = 0$ это сферические частичные суммы $S_R(f)$. Если $\alpha > \frac{m-1}{2}$, то для любой $f \in C(T^m)$ имеет место равномерная сходимость $S_R^\alpha(f)$ к f при $R \to \infty$ [22]. $\alpha = \frac{m-1}{2}$ — критический показатель.

В [23], ([24] при $p = 2$) при любом $p > 0$ доказано неравенство

$$\left\| \left(\frac{1}{R} \int_0^R \left| S_r^{\frac{m-1}{2}}(f) \right|^p dr \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq c(m,p) \left\| f \right\|_\infty . \tag{4.1}$$

Очевидно, что при $\alpha > \frac{m-1}{2}$ аналогичное неравенство также имеет место. Из теоремы 3.1 следует, что при $\alpha = 0$ и любом $p > 0$ имеет место оценка

$$\left\| \left(\frac{1}{R} \int_0^R \left| S_r(f) \right|^p dr \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq c(m) R^{\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)} \left\| f \right\|_\infty . \tag{4.2}$$

Имея оценки (4.1) и (4.2) и применяя теорему Стейна [21, гл. V] об интерполяции аналитических семейств операторов, для средних Бохнера-Рисса порядка $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$ можно получить следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $m \geq 3$, $p > 0$, $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$. Для любой $f \in$ $\in L_\infty(T^m)$ справедливо неравенство*

$$\left\| \left(\frac{1}{R} \int_0^R \left| S_r^\alpha(f) \right|^p dr \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq$$

$$\leq c(m,p,\alpha) \begin{cases} R^{\frac{m-2}{2} - \alpha\left(\frac{m-2}{m-1}\right)} \ln R \left\| f \right\|_\infty, & \text{если } 0 < p \leq 2; \\ R^{\frac{m-1}{2} - \alpha\left(1 - \frac{2}{p(m-1)}\right) - \frac{1}{p}} \ln R \left\| f \right\|_\infty, & \text{если } p > 2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Оценка (4.3) имеет место и при $m = 2$, если $p > 2$. При $m = 2$, $0 < p \leq 2$ и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\left\| \left(\frac{1}{R} \int_0^R \left| S_r^\alpha(f) \right|^p dr \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq c(\alpha) \left(\ln R\right)^{1/2-\alpha} \ln \ln R \left\| f \right\|_\infty .$$

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобится следующая

Лемма 4.1. *При любых* $\delta > -\frac{1}{2}$, $p \geq 1$ *и* β *таком, что* $0 < Re\beta \leq 1$,

$$\left(\int_0^T \left|S_r^{\delta+\beta}(f)\right|^p dr\right)^{1/p} \leq \frac{c(\delta)\ |\beta|\ e^{\frac{\pi}{2}|Im\beta|}}{Re\beta} \left(\int_0^T \left|S_r^{\delta}(f)\right|^p dr\right)^{1/p}. \qquad (4.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $Re\beta > 0$ и $Re(\delta+1) > 0$ имеет место равенство ([21, с. 311])

$$S_r^{\delta+\beta}(f) = c_{\beta\delta} R^{-2\delta-2\beta} \int_0^R (R^2 - r^2)^{\beta-1} r^{2\delta+1} S_r^{\delta}(f) dr,$$

где

$$c_{\beta\delta} = \frac{2\Gamma(\delta+\beta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \quad \text{при} \quad Re\, z > 0.$$

После замены переменной $r \to r/R$ получаем, что

$$|S_R^{\delta+\beta}(f)| \leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta+1} |S_{Rr}^{\delta}(f)| dr.$$

Возведем обе части неравенства в p-ю степень, проинтегрируем по R от нуля до T и применим к правой части обобщенное неравенство Минковского. В итоге при $\delta > -\frac{1}{2}$ имеем

$$\left(\int_0^T |S_R^{\delta+\beta}(f)|^p dR\right)^{1/p} \leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta+1} \left(\int_0^T |S_{Rr}^{\delta}(f)|^p dR\right)^{1/p} dr \leq$$

$$\leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 ((1-r))^{Re\beta-1} r^{2\delta} dr \left(\int_0^T |S_R^{\delta}(f)|^p dR\right)^{1/p}. \qquad (4.5)$$

Так как $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, то при $0 < Re\beta \leq 1$

$$\int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta} dr = \frac{\Gamma(Re\beta)\Gamma(2\delta+1)}{\Gamma(1+Re\beta+2\delta)} \leq \frac{c_1(\delta)}{Re\beta}. \qquad (4.6)$$

Оценим $|c_{\beta\delta}|$. Поскольку (см. [25, с. 136])

$$\max_{1 \leq x \leq 2} \frac{1}{|\Gamma(x+iy)|} \leq a e^{\frac{\pi}{2}|y|},$$

где a не зависит от y, то

$$|c_{\beta\delta}| \leq \frac{2\Gamma(\delta + Re\beta + 1)|\beta|}{\Gamma(\delta+1)|\Gamma(\beta+1)|} \leq c_2(\delta)|\beta|e^{\frac{\pi}{2}|\beta|}. \tag{4.7}$$

Объединяя (4.5), (4.6) и (4.7), получаем неравенство (4.4).

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $p \geq 1$, q — показатель сопряженный с p, $\gamma > 0$. Зафиксируем функцию $g \in L_q(0, R)$ с $\|g\|_q \leq 1$. При каждом z, принадлежащем вертикальной полосе

$$S = \{z \in C \,:\, \gamma \leq Re\,z \leq \frac{m-1}{2} + \gamma\},$$

рассмотрим линейный оператор:

$$T_z : f \to \int_0^R g(r) S_r^z(f) dr,$$

заданный на пространстве $L_\infty(T_m)$. Функция $T_z f$ аналитична по переменной z и имеет по ней, согласно лемме 4.1, допустимый рост на S (см. также [21, гл. V, теорема 4.1]). Кроме того,

$$\|T_z f\|_\infty \leq \left\| \left(\int_0^R |S_r^z(f)|^p \right)^{1/p} \right\|_\infty.$$

Согласно оценкам (4.4) и (4.2) ($\delta = 0$; $\beta = \gamma + iy$)

$$\|T_{\gamma+iy}\|_\infty \leq c(m) \frac{\sqrt{\gamma^2+y^2}}{\gamma} e^{\frac{\pi}{2}|y|} R^{\frac{m-1}{2} - \min(\frac{1}{2},\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{4.8}$$

Из (4.4) и (4.1) ($\delta = \frac{m-1}{2}$ и $\beta = \gamma + iy$) следует, что

$$\left\| T_{\frac{m-1}{2}+\gamma+iy} \right\|_\infty \leq c(m,p) \frac{\sqrt{\gamma^2+y^2}}{\gamma} e^{\frac{\pi}{2}|y|} R^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{4.9}$$

Обозначим через $M_0(y) = M_0(m,\gamma,y,p)$ и $M_1(y) = M_1(m,\gamma,y,p)$ множители, стоящие перед $\|f\|_\infty$ в правых частях (4.8) и (4.9). Заметим, что $M_j(y)$, $j = 0,\ 1$, не зависят от f и g и удовлетворяют оценке

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty$$

при любом $0 < b < \pi$.

Положим $\alpha = \gamma(1-t) + (\frac{m-1}{2} + \gamma)\, t = \gamma + \frac{m-1}{2}\, t$, $0 \leq t \leq 1$. По теореме Стейна существует постоянная M_t такая, что

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le M_t \|f\|_\infty ,$$

где $t = \frac{2(\alpha-\gamma)}{m-1}$, а M_t определяется равенством

$$M_t = \exp\left\{\frac{1}{2}\sin\pi t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log M_0(y)}{ch\pi y-\cos\pi t}+\frac{\log M_1(y)}{ch\pi y+\cos\pi t}\right\}\right\}dy.$$

Проинтегрируем данное равенство, учитывая, что ([21, с. 233])

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\operatorname{ch}\pi y-\cos\pi t}dy = 1-t, \quad \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\operatorname{ch}\pi y+\cos\pi t}dy = t.$$

Имеем

$$M_t \le \frac{c(m,p,\alpha)}{\gamma}R^{\left\{\frac{m-1}{2}-\min(\frac{1}{2},\frac{1}{p})+\frac{1}{p}\right\}(1-t)+\frac{t}{p}}.$$

При $0<\alpha<\frac{m-1}{2}$ получаем, что

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le \frac{c(m,p,\alpha)}{\gamma}\begin{cases} R^{\frac{m-2}{2}+\frac{1}{p}-(\alpha-\gamma)\frac{m-2}{m-1}}\|f\|_\infty , & \text{при} \quad 1\le p\le 2;\\ R^{\frac{m-1}{2}-(\alpha-\gamma)(1-\frac{2}{p(m-1)})}\|f\|_\infty , & \text{при} \quad p>2.\end{cases}$$

Минимизируем данную оценку по γ. Тогда

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le c_1(m,p,\alpha)\begin{cases} R^{\frac{m-2}{2}-\alpha\frac{m-2}{m-1}+\frac{1}{p}}\ln R\,\|f\|_\infty , & 1\le p\le 2;\\ R^{\frac{m-1}{2}-\alpha(1-\frac{2}{p(m-1)})}\ln R\,\|f\|_\infty , & p>2.\end{cases}$$

Поскольку полученная оценка $\|T_\alpha f\|_\infty$ не зависит от функции g, беря $\sup_{\|g\|_q\le 1}\|T_\alpha f\|_\infty$, получаем оценку (4.3) при $p\ge 1$, а следовательно, и при $p>0$. Теорема 4.1 доказана.

Список литературы

1. *Бабенко К.И.* О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. – 1971. – Препр. № 52 ИПМ АН СССР. – 72 с.

2. *Ильин В.А.* Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // УМН. – 1968. – Т. 29, вып. 2. – С. 61-120.

3. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Sur la serie de Fourier d'une function á carré summable // CR. – 1913. – V. 156. – P. 1303-1309.

4. *Кузнецова О.И.* К вопросу о сильном суммировании по кругам // Укр. матем. ж. – 1996. – Т. 48, № 5. – С. 629-634.

5. *Кузнецова О.И.* Об одном классе двумерных тригонометрических рядов // Вісник Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2000. – № 475. – С. 76-85.

6. *Подкорытов А.Н.* Средние Фейера сферических сумм Фурье // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1978. – № 1, вып. 1. – С. 146-149.

7. *Кузнецова О.И.* О сильных средних круговых частичных сумм Фурье // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАНУ. – 2000. – Т. 5. – С. 87-91.

8. *Кузнецова О.И.* Сильные сферические средние и сходимость в L кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. вестник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 46-63.

9. *Кузнецова О.И.* Сильные сферические средние и сходимость в L кратных тригонометрических рядов // ДАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 303-305.

10. *Белинский Э.С.* Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 19-39.

11. *Salem R.* On strong summability of Fourier series // Amer. J. Math. – 1955. – V. 77. – P. 392-402.

12. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1960. – 936 с.

13. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.

14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1966. – 295 с.

15. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Дніпропетровськ: Поліграфіст, 2000. – 320 с.

16. *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation mit starken de la Valle-Poussinschen mitteln // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1965. – V. 16. – P. 43-49.

17. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen fur den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe // J. London Math. Soc. – 1939. – V. 14, N 2. – P. 158-166.

18. *Фомин Г.А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 2. – С. 213-222.

19. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т.1. – 616 с.

20. *Wainger S.* Special trigonometric series in k-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – 1965. – V.59. – P. 102.

21. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

22. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – V. 40, N 2. – P. 175-207.

23. *Wang Kunyang, Gavin Brown.* Approximation by Bochner-Riesz means and Hardy summability // J. Beijing Normal Univ. (Natural Science). – 1994. – V.30, N 2. – P. 163-169.

24. *Wang Kunyang.* Strong uniform approximation by Bochner-Riesz means. Multivariate approximation IV // Proceedings of conference of multivariate approximation theory. – Oberwolfach. West Germany, 1989.

25. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 618 с.

ГЛАВА 6

СИЛЬНЫЕ ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Введение

В данной главе исследуется поведение различных вариантов сильных полиэдральных средних рядов Фурье непрерывных на m-мерном торе функций. Дается применение полученных результатов к вопросам интегрирования и сходимости m-кратных тригонометрических рядов.

§ 1. Сильная суммируемость

Пусть функция $f \in L\left(T^m\right), T^m = [-\pi,\ \pi)^m$,

$$\|f\|_L = \int_{T^m} |f(u)|\, du < \infty,$$

и пусть

$$\sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad kx = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m, \tag{1.1}$$

есть ее ряд Фурье с коэффициентами Фурье

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} f(u)\, e^{-iku} du,$$

Z^m — целочисленная решетка в R^m. В отличие от одномерного, в кратном случае нет канонического способа задания частичной суммы ряда (1.1).

Пусть V — замкнутая ограниченная область в R^m, содержащая начало координат O внутри себя. Полагаем для $n > 0$

$$S_{nV}f\left(x\right)=\sum_{k\in nV\bigcap Z^m}\hat{f}\left(k\right)e^{ikx},$$

где $nV=\{x\in R^m : x/n\in V\}$ — гомотет V. Сумму ряда (1.1) естественно определить как предел при $n\to\infty$, если он существует, частичных сумм $S_{nV}f$.

Заметим, что

$$S_{nV}f=(2\pi)^{-m}\,f*D_{nV}$$

— свертка функции f и ядра Дирихле порядка n

$$D_{nV}\left(x\right)=\sum_{k\in nV\bigcap Z^m}e^{ikx},$$

соответствующего множеству V.

В дальнейшем V — замкнутый ограниченный полиэдр в R^m, звездный относительно начала координат O, $O\in int\ V$, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через O. Обозначим через W множество полиэдров с указанными свойствами. Достаточные условия регулярности линейных методов суммирования в $C\left(T^m\right)$ по полиэдрам множества W изучены в [1], причем показано, что все условия в определении W являются необходимыми.

Пусть W_b — подмножество W, определенное следующим образом. Набор действительных чисел $\alpha=(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_m)$ «плохо» приближаем (рациональными числами), если неравенство

$$\|\alpha_1k_1+\ldots+\ \alpha_mk_m\|<a^{-m-1},\quad a=\max_{1\le i\le m}|k_i|\,, \tag{1.2}$$

имеет не более конечного числа решений в целых числах $k_1,\ \ldots,\ k_m$ (здесь $\|x\|$ — расстояние от x до ближайшего целого).

Полиэдр V принадлежит множеству W_b, если коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей $\sum\alpha_ix_i-1=0$, его определяющих, образуют наборы α «плохо» приближаемых чисел. Заметим, что множество наборов α, для которых неравенство (1.2) имеет бесконечно много решений в целых числах, есть множество нулевой меры Лебега в R^m ([2, с. 36]), т.е. почти все наборы α «плохо» приближаемы.

W_a — подмножество полиэдров из W_b, для которых α — наборы алгебраических чисел.

В однократном случае отрезка $[-1,\ 1]$ классическим является результат Харди-Литтлвуда [3] о p-сильном суммировании ряда Фурье непрерывной периодической с периодом 2π функции: при любом $p > 0$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|f(x)-S_j f(x)|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

равномерно по $x \in T$.

При $m = 2, 3, \ldots$ для параллелепипедов, симметричных относительно O, с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках решетки Z^m аналогичный результат получил Л.Д. Гоголадзе ([4]-кубы, [5]).

Справедлива следующая

Теорема 1.1. [6]. *Пусть полиэдр* $V \in W_b$, $f \in L_\infty(T^m)$, $p > 0$. *Тогда*

$$(n+1)^{-1}\sum_{j=0}^{n}|S_{jV}(f,\ 0)|^p \le c^p (p+1)^{mp}\|f\|_\infty^p, \tag{1.3}$$

где величина $c > 0$ *зависит лишь от размерности* m *и полиэдра* V.

Пусть Q — множество функций φ, определенных на полуоси $[0,\ \infty)$, неубывающих и непрерывных в нуле, $\varphi(0) = 0$. Для $f \in C(T^m)$, $\varphi \in Q$ и $V \in W_b$ полагаем

$$h_n(f,\ \varphi,\ V,\ x) = (n+1)^{-1}\sum_{l=0}^{n}\varphi(|f(x)-S_{lV}f(x)|).$$

Легко показать (см., например, [7]), что если $\varphi,\ \psi \in Q$ и

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} < \infty,$$

то из равенства

$$\lim_{n\to\infty} h_n(f,\ \psi,\ V,\ x) = 0,$$

выполняемого в некоторой точке $x_0 \in T^m$ или равномерно на множестве $E \subset T^m$, вытекает справедливость аналогичного равенства для функции φ, соответственно в точке x_0 или равномерно на E.

При $m = 1$ (V=[-1, 1]) для функции $\varphi(t) = e^{at} - 1$, $a > 0$, равенство

$$\lim_{n\to\infty} h_n(f,\ \varphi,\ V,\ x) = 0$$

доказано Карлеманом [8] равномерно на T. Тотик [9] показал, что для выполнения данного равенства для любой $f \in C(T)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $A > 0$ такая, что

$$\varphi(t) \le e^{At}, \quad t \in (0,\ \infty).$$

Теорема 1.2. [6] *Пусть полиэдр $V \in W_b$.*

1. *Если $\varphi \in Q$ такова, что*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi\,(u)\, u^{-1/m} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^m)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} h_n\,(f,\ \exp(\varphi) - 1,\ V,\ x) = 0. \tag{1.4}$$

2. *Если же*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi\,(u)\, u^{-1/m} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^m)$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n\,(F,\ \exp(\varphi) - 1,\ V,\ 0) = \infty.$$

Для случая, когда V — параллелепипед, симметричный относительно O, с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках решетки Z^m, теорема 1.2 доказана Л.Д. Гоголадзе [5]. Для $V \in W_a$ теоремы 1.1, 1.2 доказаны в [10].

Заметим, что утверждение II теоремы 1.2 справедливо для любого полиэдра V, $int\ V \ni O$, и следует из точной по порядку оценки нормы оператора взятия частичной суммы в $C(T^m)$ (или $L_\infty(T^m)$) ([11], оценка сверху, [12] — снизу):

$$c_1 \ln^m n \le \|S_{nV}\| = \sup_{|f|\le 1} \|S_{nV}(f)\|_{C(T^m)} = \sup_{|f|\le 1} |S_{nV}(f,\ 0)| \le c_2 \ln^m n, \tag{1.5}$$

где $c_i = c_i(V, m) > 0$, $i = 1,\ 2$.

Для доказательства теорем 1.1, 1.2 нам потребуются следующие результаты.

Лемма 1.1. *Для любого полиэдра $V \in W_b$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что множества $(n + dn^{-m-1})\, V \backslash nV$, $n \in N$, не содержат точек решетки Z^m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\Gamma = \{x \in R^m : \sum \alpha_i x_i - 1 = 0\}$ — одна из гиперплоскостей, определяющих полиэдр V, то поскольку неравенство (1.2) имеет не более конечного числа решений в целых числах, либо имеем $\sum \alpha_i k_i - n = 0$ для некоторых $k \in Z^m$ и $n \in N$ (α — набор рациональных чисел), либо существует константа $c_\Gamma > 0$ такая, что для любых $n \in N$ и $k \in Z^m$

$$\left|\sum \alpha_i k_i - n\right| > c_\Gamma a^{-m-1}, \quad a = \max\ |k_i|\,.$$

Для $k \in (n+1)\, V \backslash nV$ $a \le c\, n$ при некотором $c > 0$. Так как расстояние от точки k до грани $n\Gamma$ равно $\left|\sum \alpha_i k_i - n\right| \left(\sum \alpha_i^2\right)^{-1/2}$, полагаем

$$d = c^{-m-1} \min_\Gamma \left(c_\Gamma \left(\sum \alpha_i^2\right)^{-1/2} \right).$$

Пусть V — полиэдр, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой. Определим масштабную функцию множества V:

$$\rho\,(y) = \rho_V\,(y) = \inf\left\{\rho > 0 \mid y \in \rho V\right\}.$$

С помощью функции $\lambda \in C\ ([0,\ +\infty))$, такой что $\lambda\,(0) = 1$, $\lambda\,(t) = 0$ $\forall\ t \ge 1$, построим линейные средние:

$$\sigma_n^{(\lambda)}\,(f,\ x) = \sum_{k \in nV} \lambda \left(\frac{\rho\,(k)}{n} \right) c_k\,(f)\, e^{ikx}.$$

Обозначим $\hat{d\lambda}\,(r) = \int_0^1 e^{-irt} d\lambda\,(t)$.

Теорема A. [1] *Пусть V — полиэдр, звездный относительно начала координат, которое является его внутренней точкой, и функция λ непрерывна на $[0,\ +\infty)$, $\lambda\,(0) = 1$, $\lambda\,(t) = 0$ $\forall\ t \ge 1$. Тогда:*

1. *Если продолжение хотя бы одной грани полиэдра V проходит через начало координат, то $\sup\limits_n \left\|\sigma_n^{(\lambda)}\right\| = \infty$, и, следовательно, найдется функция $f \in C\ (T^m)$, такая что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\sigma_n^{(\lambda)}\,(f, 0)\right| = \infty$.*

2. *Если продолжения всех граней полиэдра V не проходят через начало координат, то сходимость интеграла*

$$F_m\,(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{d\lambda}\,(r)\right| \frac{\ln^{m-1}(2 + |r|)}{1 + |r|} dr \tag{1.6}$$

достаточна для ограниченности $\left\|\sigma_n^{(\lambda)}\right\|$ *в совокупности,*

$$\sup_n \left\|\sigma_n^{(\lambda)}\right\| \le c\,(m, V)\, F_m(\lambda)\,,$$

следовательно, $\forall f \in C\ (T^m)\quad \sigma_n^{(\lambda)}(f) \to f$ *при* $n \to \infty$ *равномерно на* T^m.

В частности, для справедливости аналога теоремы Фейера (ему соответствует функция $\lambda_0(t) = 1 - t$) необходимо и достаточно, чтобы продолжения граней полиэдра V не проходили через начало координат.

Доказательство теоремы 1.1. Оценим норму в $C(T^m)$ (или $L_\infty(T^m)$) оператора

$$f \mapsto \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \left(\sum_{l=0}^{n} |S_{lV}(f)|^p \right)^{1/p}.$$

$$I \stackrel{def}{=} \sup_{|f|\le 1} (n+1)^{-1/p} \left(\sum_{l=0}^{n} |S_{lV}(f,\ 0)|^p \right)^{1/p} =$$
$$= (n+1)^{-1/p} \sup_{|f|\le 1} \sup_{\varepsilon} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l S_{lV}(f,\ 0) \right|,$$

где ε_l, $0 \le l \le n$, — любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{l=0}^{n} |\varepsilon_l|^q \le 1 \quad \text{при } p > 1, \quad q = \frac{p}{p-1}; \quad |\varepsilon_l| \le 1 \quad \text{при } p = 1.$$

Получаем, переходя к sup по f,

$$I = (2\pi)^{-m} (n+1)^{-1/p} \sup_{\varepsilon} \int_{T^m} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l \sum_{k\in lV \bigcap Z^m} e^{-ikx} \right| dx.$$

Положим

$$\lambda_l = (n+1)^{-1/p} \sum_{j=l}^{n} \varepsilon_j, \quad 0 \le l \le n, \quad \lambda_{n+1} = 0.$$

Тогда, поскольку $\lambda_l - \lambda_{l+1} = (n+1)^{-1/p}\, \varepsilon_l$,

$$I = (2\pi)^{-m} \sup_{\varepsilon} \int_{T^m} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{-ikx} \right| dx.$$

Очевидно, что

$$\sum_{l=0}^{n} |\lambda_l - \lambda_{l+1}| \leq 1 \tag{1.7}$$

и для любых s, l, $1 \leq s \leq n+1$, $0 \leq l \leq n+1-s$,

$$|\lambda_l - \lambda_{l+s}| \leq \left(\frac{s}{n+1} \right)^{1/p}. \tag{1.8}$$

Исходя из последовательности λ_l, построим непрерывную на отрезке [0, 1] функцию λ. Пусть $d > 0$ — постоянная из леммы 1.1. Определим на отрезке $[0,\ 1 + dn^{-m-2}]$ непрерывную функцию $\tilde{\lambda}$ следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(0) = \lambda_0,\ \tilde{\lambda}(t) = \lambda_l \ \text{ при } \ \frac{l - 1 + dn^{-m-1}}{n} \leq t \leq \frac{l}{n}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

$$\tilde{\lambda}\left(1 + dn^{-m-2}\right) = 0$$

и линейна на оставшихся промежутках. Положим

$$\lambda \left(\frac{t}{1 + dn^{-m-2}} \right) = \tilde{\lambda}(t).$$

Тогда

$$\int_{T^m} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{-ikx} \right| dx = \int_{T^m} \left| \sum_{k \in nV} \tilde{\lambda} \left(\frac{\rho(k)}{n} \right) e^{-ikx} \right| dx =$$

$$= \int_{T^m} \left| \sum_{k \in nV} \lambda \left(\frac{\rho(k)}{n + dn^{-m-1}} \right) e^{-ikx} \right| dx. \tag{1.9}$$

Оценим последний интеграл в (1.9), воспользовавшись теоремой A (см. (1.6)):

$$I << \sup_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left| d\hat{\lambda}(r) \right| \frac{\ln^{m-1}(2 + |r|)}{1 + |r|} dr.$$

Положим $\mu(t) = \lambda(t) + \lambda_0(t-1)$ при $0 \le t \le 1$. Для функции $\lambda_0(t) = 1-t$ $F_m(\lambda_0) < \infty$. Так как $\mu(0) = \mu(1) = 0$, то $\hat{d\mu}(r) = ir\hat{\mu}(r)$, где

$$\hat{\mu}(r) = \int_0^1 e^{-irt}\mu(t)\,dt.$$

Получаем, что

$$I << \sup_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(r)| \ln^{m-1}(2 + |r|)\,dr + 1. \tag{1.10}$$

По построению (см. (1.7), (1.8)) μ — функция ограниченной вариации, $V(\mu) \le 2$, кроме того, $\mu \in Lip\frac{1}{p(m+2)}$ с константой, не зависящей от n. Проведем стандартные оценки интеграла в (1.10) (см. [13], а также [1, замечание 3]).

$$\begin{aligned} I &<< \sup_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} + \int_{-2^{j+1}}^{-2^j} \right) |\hat{\mu}(r)|\,dr << \\ &<< \sup_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \hat{\mu}(r) \sin \frac{\pi r}{2^{j+2}} \right|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} << \\ &<< \sup_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} 2^{\frac{j}{2}} \left\| \mu\left(t + 2^{-j-2}\right) - \mu\left(t - 2^{-j-2}\right) \right\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Так как $\|\cdot\|_{L_2} \le \|\cdot\|_C^{1/2} \|\cdot\|_L^{1/2}$ и для финитной функции ограниченной вариации

$$\|\mu(t+h) - \mu(t-h)\|_L = O(h),$$

получаем, что

$$I << \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} 2^{-\frac{j}{2(m+2)p}} = O\left(p^m\right).$$

Теорема 1.1 для $p \ge 1$ доказана. Поскольку I не убывает с ростом p, справедливость данной теоремы для $0 < p < 1$ следует из оценки при $p = 1$.

Пусть $E_{nV}(f) = \inf\limits_{T} \|f - T\|_{C(T^m)}$ — наилучшее приближение функции $f \in C(T^m)$ тригонометрическими полиномами со спектром в nV ($T(x) = \sum_{k \in nV} c_k e^{ikx}$).

Теорема 1.3. ([10], $V \in W_a$) *Для любых* $f \in C\left(T^m\right)$, $V \in W_b$, $p > 0$ *и* $n > n_0 > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{l=n_0}^{n} |f(x) - S_{lV}(f,x)|^p \leq c^p (p+1)^{mp} \sum_{l=[n_0/2]}^{n} E_{lV}^p(f), \tag{1.11}$$

где $c = c(m,\ V) > 0$.

Метод получения неравенств вида (1.11), при наличии оценок норм соответствующих операторов, известен (см., например, [14] при $m = 1$). Приведем лишь схему доказательства. Пусть n_0, n заданы. Выберем q, r так, чтобы $2^{q-1} \leq n_0 \leq 2^q$, $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Тогда

$$\sum_{l=n_0}^{n} |f - S_{lV}(f)|^p = \left(\sum_{l=n_0}^{2^q-1} + \sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} + \sum_{l=2^r}^{n} \right) |f - S_{lV}(f)|^p .$$

Оценим среднюю сумму. Пусть $\tilde{T}_j$ — полином наилучшего приближения со спектром в $2^j V$, т. е. $\left\| f - \tilde{T}_j \right\| = E_{2^j V}(f)$. Тогда

$$\sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} |f - S_{lV}(f)|^p \leq 2^p \sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} \left(\left| f - \tilde{T}_j \right|^p + \left| S_{lV}\left(f - \tilde{T}_j\right) \right|^p \right) \leq$$

$$\leq c^p (p+1)^{mp} \sum_{j=q}^{r-1} 2^j E_{2^j V}^p(f) \leq c^p (p+1)^{mp} \sum_{l=2^{q-1}}^{2^{r-1}-1} E_{lV}^p(V).$$

Мы воспользовались неравенством (1.3) и монотонным убыванием $E_{lV}(f)$ к нулю при $l \to \infty$. Оставшиеся суммы оцениваются аналогично.

Д о к а з а т е л ь с т в о п у н к т а I т е о р е м ы 1.2. В силу сделанного выше замечания, равенство (1.4) достаточно доказать для функции $\exp\left(u^{1/m}\right) - 1$. Пусть $n_0 \in N$, $n > n_0$. Тогда, разлагая e^x в ряд, применяя формулу Стирлинга и (1.11), получаем

$$(n+1)^{-1} \sum_{l=n_0}^{n} \exp\left(|f(x) - S_{lV}(f,x)|^{1/m} \right) - 1 =$$

$$= (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{l=n_0}^{n} |f(x) - S_{lV}(f,x)|^{s/m} \leq$$

$$\leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_1^s}{s!} \sum_{l=n_0}^{n} \left(\frac{s}{m} + 1 \right)^s \sum_{l=[n_0/2]}^{n} E_{lV}^{s/m}(f) \leq$$

$$\leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=[n_0/2]}^{n} \left(c_2 E_{lV}^{1/m} \right)^s . \tag{1.12}$$

Выбирая n_0 достаточно большим, последнюю двойную сумму в (1.12) можно сделать как угодно малой. Разбивая сумму в h_n на две, от нуля до $n_0 - 1$ и от n_0 до n и устремляя n к бесконечности, получаем требуемый результат.

Из теоремы 1.2 следует, что для любых $a > 0$ и $f \in C\ (T^m)$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \exp\left(a \left| f(x) - S_{lV} f(x) \right|^{1/m} \right) - 1 \to 0 \quad \text{при} \quad \text{n} \to \infty$$

равномерно на T^m.

Лемма 1.2. *Пусть полиэдр $V \in W_b$. Существуют постоянные $A > 0$ и $C > 0$ такие, что при любом $n \in N$*

$$\sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \exp\left(A\ \left| S_{lV} f(0) \right|^{1/m} \right) \leq C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим функцию e^z в ряд и воспользуемся оценкой (1.3) и формулой Стирлинга. Тогда

$$\sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \exp\left(A \left| S_{lV} f(0) \right|^{1/m} \right) =$$

$$= \sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{l=0}^{n} \left| S_{lV} f(0) \right|^{p/m} \leq c_1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(A e c^{1/m} \right)^p .$$

Осталось выбрать $A < \frac{1}{ec^{1/m}}$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые определения. Непрерывная выпуклая функция Φ, заданная на R, называется $\mathcal{N}$-функцией, если она четна и удовлетворяет условиям

$$\lim_{u \to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \to \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

$\mathcal{N}$-функция Φ допускает представление [15]:

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt,$$

где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty.$$

Пусть $q(s)$ — правая обратная к $p(t)$ функция,

$$\Psi(u) = \int_0^{|u|} q(s)\, ds.$$

Функции Φ и Ψ называются дополнительными друг к другу функциями.

L_Φ — пространство Орлича (см., например, [15]) функций, заданных на отрезке $[0,\ 1]$, определенное $\mathcal{N}$-функцией Φ,

$$\|u\|_\Phi = \sup \left| \int_0^1 uv dx \right|,$$

где супремум берется по всем функциям v, удовлетворяющим условию $\int_0^1 \Psi(v)\, dx \leq 1$.

Для функции $f \in L_\infty(T^m)$ и полиэдра $V \in W_b$ определим следующие величины:

$$I_n f(x) = \sum_{j=1}^{n} S_{jV} f(x)\, \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}, \tag{1.13}$$

где χ_B — характеристическая функция множества B.

Теорема 1.4. *Пусть полиэдр* $V \in W_b$, $\alpha > 0$. *Для любой* $\mathcal{N}$*-функции* Φ, *удовлетворяющей неравенству* $\Phi(u) \leq c e^{A|u|^{1/m}}$ *при достаточно больших значениях аргумента и* $c > 0$,

$$\sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(x)\|_\Phi = \sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(0)\|_\Phi \leq c(\alpha) < \infty.$$

Доказательство. Из определения нормы в пространстве L_Φ и неравенства Юнга ([15, с. 24]) следует, что

$$\|g\|_\Phi \leq \int_0^1 \Phi(g)\, dt + 1.$$

Пусть $\alpha = A$, где A — постоянная из леммы 1.2. Тогда

$$\sup_{|f|\leq 1} \|I_n f(0)\|_\Phi \leq \sup_{|f|\leq 1} \int_0^1 \Phi(I_n f(0))\, dt + 1 <<$$

$$<< \sup_{|f|\leq 1} \int_0^1 \exp\left(A\,|I_n f(0)|^{1/m}\right) dt + 1 =$$

$$= \sup_{|f|\leq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(A\,|S_{jV} f(0)|^{1/m}\right) + 1.$$

Согласно лемме 1.2 последняя сумма ограничена по n. Утверждение теоремы следует из эквивалентности, при различных $\alpha > 0$ [15, с. 133], норм в пространствах L_Φ, где $\Phi(u) = e^{\alpha|u|^{\frac{1}{m}}}$ при $u \geq u_0(\alpha)$.

§ 2. Сильная суммируемость с пропусками

Пусть $\{\nu_j\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Следуя [16], будем говорить, что $\{\nu_j\} \in p - SF\ (V)$, $0 < p < \infty$, если для любой $f \in L_\infty(T^m)$ частичные суммы $S_{nV}(f)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left|S_{\nu_j V}(f,\ 0)\right|^p \leq c\,\|f\|_\infty^p, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.1}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от f и n.

Из теоремы 1.1 следует, что если полиэдр $V \in W_b$, то последовательность $\{j\} \in p - SF\ (V)$.

При $m = 1$, если V — отрезок [-1, 1], то для того чтобы $\{\nu_j\} \in$ $\in p - SF\ (V)$, $p \geq 1$, необходимо, а если $\{\nu_j\}$ — выпукла ($\nu_{j+1} - \nu_j \uparrow$), то и достаточно, чтобы

$$\log \nu_j \leq c j^{\min(1/2,\ 1/p)}, \quad c > 0.$$

При $p = 1$ необходимость этого условия доказал Салем [17], достаточность — независимо Карлесон [18] и Н.А. Загородний и Р.М. Тригуб [19], а также Лонг [16]. При $1 < p < \infty$ это результат Лонга [16].

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. ([20], $V \in W_a$) [6] *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $0 < p < \infty$, $\{\nu_j\}$ — выпуклая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\log \nu_j \leq c j^{\min\left(\frac{1}{2m},\, \frac{1}{pm}\right)}, \quad c > 0. \tag{2.2}$$

Тогда $\{\nu_j\} \in p - SF\ (V)$.

Если V — единичный куб в R^m, теорема 2.1 при $p = 1$ приведена в [21].

Заметим, что условие (2.2) при $p \geq 1$ одновременно является и необходимым, причем, как и при $m = 1$, $\{\nu_j\}$ не обязательно выпуклая последовательность. При $p = 1$ его необходимость доказывается полностью аналогично случаю $m = 1$ [17], если учесть (1.5) (см. доказательство нижней оценки в теореме 2.1 главы 5 (прием Салема)). Следовательно, (2.2) необходимо и при $1 < p \leq 2$. При $p > 2$ достаточно в левой части (2.1) оставить одно слагаемое $n^{-1} \left|S_{\nu_n V}\,(f,\ 0)\right|^p$ и учесть (1.5).

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуется следующее утверждение, являющееся одним из аналогов теоремы Г.А. Фомина [22].

Лемма 2.1. *Пусть полиэдр* $V \in W_b$. *Для любой числовой последовательности* $\{a_j\}$, *любых* $f \in L_\infty\,(T^m)\,,\, |f| \leq 1$, *и* $q \in (1,\ \infty)$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j S_{jV}\,(f,\ 0)\right| \leq c \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l}\sum_{j=l}^{\infty} |a_j|^q\right)^{1/q}, \tag{2.3}$$

где $c = c\,(q,\ m,\ V) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2.3) следует из числового неравенства [23]:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j\right| \leq C\ (q) \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l}\sum_{j=l}^{\infty} |a_j|^q\right)^{1/q} \sup_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=l}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p},$$

$q > 1, \quad 1/p + 1/q = 1$, если положить в нем $y_j = S_{jV}\,(f,\ 0)$ и учесть, что $\{j\} \in p - SF\ (V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Неравенство (2.1) достаточно доказать при $p \geq 2$. Пусть $|f| \leq 1$. Очевидно, что

$$I \stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|S_{\nu_j}\,(f,\ 0)\right|^p\right)^{1/p} = n^{-1/p} \sup_{\varepsilon} \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j S_{\nu_j}\,(f,\ 0)\right|,$$

где sup берется по всем $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}$ таким, что $\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j|^q \leq 1, \quad 1/p + 1/q = 1$. Пусть $1 \leq s \leq \nu_n$. Положим $a_s = 0$, если $s \neq \nu_j$, и $a_{\nu_j} = \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq n$.

Пусть $\lambda_l = \sum_{s=l}^{\nu_n} a_s$ при $1 \le l \le \nu_n$ и $\lambda_l = 0$ при $l > \nu_n$, $\quad \Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1}$. Тогда

$$I = n^{-1/p} \sup_{\varepsilon} \left| \sum_{l=1}^{\nu_n} \Delta\lambda_l S_{lV}(f,\ 0) \right|.$$

Представим $\{\lambda_l\}$ в виде суммы двух последовательностей, полагая $\lambda_l^{(1)} = \lambda_1$ при $1 \le l \le \nu_1$, $\lambda_l^{(1)} = 0$ при $l > \nu_{n+1}$,

$$\lambda_l^{(1)} = \lambda_{\nu_j} + \frac{l - \nu_j}{\nu_{j+1} - \nu_j} \left(\lambda_{\nu_{j+1}} - \lambda_{\nu_j} \right), \tag{2.4}$$

при $\nu_j < l \le \nu_{j+1}$ $(1 \le j \le n)$,

$$\lambda_l^{(2)} = \lambda_l - \lambda_l^{(1)}, \quad 1 \le l \le \nu_{n+1}.$$

Тогда

$$I \le n^{-1/p} \sup (I_1 + I_2),$$

где

$$I_j = \left| \sum_{l=1}^{\nu_{n+1}} \Delta\lambda_l^{(j)} S_{lV}(f,\ 0) \right|, \quad j = 1,\ 2.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $I_j = O\left(n^{1/p}\right)$, $j = 1$, 2. Для оценки I_1 применим неравенство (2.3).

$$I_1 << \sum_{l=1}^{\nu_{n+1}} \left(\frac{1}{l} \sum_{k=l}^{\nu_{n+1}} \left| \Delta\lambda_k^{(1)} \right|^q \right)^{1/q} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=\nu_j}^{\nu_{j+1}-1} l^{-1/q} \left(\sum_{k=l}^{\nu_{n+1}} \left| \Delta\lambda_k^{(1)} \right|^q \right)^{1/q}.$$

Согласно (2.4),

$$\sum_{k=l}^{\nu_{n+1}} \left| \Delta\lambda_k^{(1)} \right|^q \le \sum_{s=j}^{n} \sum_{k=\nu_s}^{\nu_{s+1}-1} \left| \Delta\lambda_k^{(1)} \right|^q = \sum_{s=j}^{n} \frac{|\varepsilon_s|^q}{(\nu_{s+1} - \nu_s)^{q-1}}.$$

Полагая $\delta_s = \nu_{s+1} - \nu_s$, для I_1 имеем

$$I_1 << \sum_{j=1}^{n} \left(\nu_{j+1}^{1/p} - \nu_j^{1/p} \right) \left(\sum_{s=j}^{n} \frac{|\varepsilon_s|^q}{\delta_s^{q-1}} \right)^{1/q}.$$

Обозначим через j_k наименьшее j, для которого $\nu_j \geq 2^k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,$ через M — наибольшее целое, такое, что $2^M \leq \nu_{n+1}$. Тогда $2^M \leq \nu_{j_M} \leq$ $\leq \nu_{n+1} < 2^{M+1} \leq \nu_{j_{M+1}}$. Положим $\varepsilon_{n+1} = \ldots = \varepsilon_{j_{M+1}} = 0$. Учитывая (2.2), получаем

$$I_1 << \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \left(\nu_{j+1}^{1/p} - \nu_j^{1/p}\right) \left(\sum_{s=j_k}^{j_{M+1}} \frac{|\varepsilon_s|^q}{\delta_s^{q-1}}\right)^{1/q} <<$$

$$<< \sum_{k=1}^{M} 2^{k/p} \left(\sum_{s=j_k}^{j_{M+1}} \frac{|\varepsilon_s|^q}{\delta_s^{q-1}}\right)^{1/q}.$$

Последняя сумма оценена в [16] и есть $O\left(n^{1/p}\right)$ при условии более слабом, чем (2.2). Тем самым доказано, что $I_1 = O\left(n^{1/p}\right)$.

Оценим I_2. Построим, исходя из последовательности $\left\{\lambda_l^{(2)}\right\}$, непрерывную на $[0,\ 1]$ функцию $\lambda, \quad \lambda(0) = \lambda(1) = 0$. Из определения $\left\{\lambda_l^{(2)}\right\}$ следует, что $\lambda_l^{(2)} = 0$ при $0 \leq l \leq \nu_1$,

$$\lambda_l^{(2)} = -\varepsilon_j \frac{\nu_{j+1} - l}{\delta_j} \text{ при } \nu_j < l \leq \nu_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Пусть $\tilde{\lambda}$ — непрерывная ломаная, заданная на отрезке $[0,\ \nu_{n+1}]$, с узлами в точках $(0,\ 0)$, $(\nu_1,\ 0)$, $\left(l - 1 + d\nu_{n+1}^{-m-1},\ \lambda_l^{(2)}\right)$, $\left(l,\ \lambda_l^{(2)}\right)$ $(\nu_1 + 1 \leq l \leq \nu_{n+1})$, где $d = d(V) > 0$ — постоянная из леммы 1.1. Полагаем $\lambda(t) = \tilde{\lambda}(t\nu_{n+1})$, $0 \leq t \leq 1$. Согласно лемме 1.1 множества

$$\left(l + d\nu_{n+1}^{-m-1}\right) V \backslash lV, \quad \nu_1 \leq l \leq \nu_{n+1},$$

не содержат точек решетки Z^m. Поэтому

$$I_2 = \sum_{l=0}^{\nu_{n+1}} \left|\Delta\lambda_l^{(2)} S_{lV}(f,\ 0)\right| << \int_{T^m} \left|\sum_{l=0}^{\nu_{n+1}} \Delta\lambda_l^{(2)} \sum_{k \in lV \bigcap Z^m} e^{-ikx}\right| dx =$$

$$= \int_{T^m} \left|\sum_{l=0}^{\nu_{n+1}} \lambda_l^{(2)} \sum_{k \in lV \backslash (l-1)V} e^{-ikx}\right| dx =$$

$$= \int_{T^m} \left|\sum_{k \in \nu_{n+1} V} \lambda\left(\frac{\rho(k)}{\nu_{n+1}}\right) e^{-ikx}\right| dx,$$

где $\rho(y) = \rho_V(y) = \inf\{\rho > 0,\ k \in \rho V\}$ — масштабная функция полиэдра V. Из теоремы A следует, что данный интеграл не превосходит

$$c\,(V)\int_0^\infty \left|\hat{\lambda}(r)\right| \log^{m-1}(2+|r|)\,dr,$$

где $\hat{\lambda}(r) = \int_0^1 \lambda(t)\, e^{-irt}dt$ — преобразование Фурье функции $\lambda,\ c\,(V) > 0$. Следовательно,

$$I_2 << \sum_{j=1}^\infty \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\hat{\lambda}(r)\right| \log^{m-1}(2+|r|)\,dr << \sum_{j=1}^\infty j^{m-1}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\hat{\lambda}(r)\right| dr <<$$

$$<< \sum_{j=1}^\infty j^{m-1}2^{j/2}\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\hat{\lambda}(r)\right|^2 \sin^2\frac{\pi\, r}{2^{j+2}}dr\right)^{1/2} <<$$

$$<< \sum_{j=1}^\infty j^{m-1}2^{j/2}\left(\int_0^1 \left|\lambda\left(t+2^{-j-1}\right)-\lambda(t)\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Оценим величину

$$V_2(h) = \left(\int_0^1 |\lambda(t+h)-\lambda(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

при различных h.

1) $h < d\nu_{n+1}^{-m-2}$. В этом случае

$$V_2(h) = \left(\sum_{j=0}^m \int_{\nu_j/\nu_{m+1}}^{\nu_{j+1}/\nu_{m+1}} |\lambda(t+h)-\lambda(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2hd^{-1/2}\nu_{n+1}^{(m+2)/2}\left(\sum_{j=1}^n |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2hd^{-1/2}\nu_{n+1}^{(m+2)/2}\left(\sum_{j=1}^n |\varepsilon_j|^q\right)^{1/q} \le 2hd^{-1/2}\nu_{n+1}^{(m+2)/2}.$$

2) $h \ge d\nu_{n+1}^{-m-2}$. Тогда

$$V_2(h) = \left(\sum_{k=0}^{[1/h]} \int_{kh}^{(k+1)h} |\lambda(t+h)-\lambda(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le$$

$$\leq h^{1/2}\left(\sup_{0\leq t\leq h}\sum_{k=0}^{[1/h]}\left|\lambda\left(t+(k+1)\,h\right)-\lambda\left(t+kh\right)\right|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq 2h^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varepsilon_j\right|^2\right)^{1/2}\leq 2h^{1/2}.$$

Поэтому, учитывая полученные оценки, имеем

$$I_2 << \sum_{1\leq j\leq \log\nu_{n+1}^{m+2}} j^{m-1}+\nu_{n+1}^{(m+2)/2}\sum_{j>\log\nu_{n+1}^{m+2}} j^{m-1}2^{-j/2}=$$

$$=O\left(\log^m\nu_{n+1}\right)=O\left(n^{1/p}\right).$$

Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любой $f\in C\left(T^m\right)$ равномерно на T^m*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f\left(x\right)-S_{\nu_jV}\left(f,x\right)\right|^p\to 0\quad \textit{при}\quad n\to\infty. \tag{2.6}$$

Более того, справедливо следующее неравенство, позволяющее оценивать скорость стремления к нулю величины (2.6).

Теорема 2.2. *В условиях теоремы 2.1 для любой $f\in C\left(T^m\right)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|f\left(x\right)-S_{\nu_jV}\left(f,x\right)\right|^p\leq c\sum_{j=1}^{n}E^p_{\nu_jV}\left(f\right),$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\quad c=c\left(p,\ m,\ V\right)>0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3.

§ 3. Неравенства типа Сидона. Двойственность

В однократном случае ($m=1$, V — отрезок [-1,1]) Сидон [24] доказал следующее неравенство:

$$\frac{1}{n+1}\int_T\left|\sum_{j=0}^{n}a_jD_j\left(x\right)\right|dx\leq c\max_{0\leq j\leq n}\left|a_j\right|,$$

где a_j — любая последовательность действительных чисел, $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ — ядро Дирихле порядка n, $c > 0$ — абсолютная константа.

В работе Фридли и Шиппа [25] установлена двойственность между сильными средними однократных рядов Фурье и неравенствами типа неравенства Сидона для одномерных ядер Дирихле. Приведем многомерный вариант теоремы Фридли и Шиппа ([25, теорема 1]) о двойственности, охватывающий сильные средние с пропусками.

Пусть $\mathcal{L}_n$ $(n \in N)$ — множество диадических функций, т.е. функций, заданных на отрезке [0,1] и принимающих постоянное значение на интервалах $[(l-1)\,2^{-n}, l2^{-n})$, $1 \le l \le 2^n$, $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$.

Банахово пространство X функций, определенных на отрезке [0,1], называется диадически однородным, если:

а) $X \subset L_1$, $\|f\|_{L_1} \le \|f\|_X$ для $f \in X$;

б) множество $\mathcal{L}$ плотно в X;

в) норма в X инвариантна относительно диадического сдвига.

Заметим, что L_p, $1 \le p \le \infty$, а также более общие пространства Орлича являются диадически однородными банаховыми пространствами (см. также [26]).

Пусть ν_j — возрастающая последовательность натуральных чисел. Следуя [25], полагаем

$$\mathcal{I}_{2^n} f\,(x) = \sum_{j=1}^{2^n} S_{\nu_j V} f\,(x)\,\chi_{[(l-1)2^{-n},\, l2^{-n})}, \quad x \in T^m, \quad n \in N,$$

где χ_B — характеристическая функция множества $B \subset R$. $\mathcal{I}_n f\,(x)$ — последовательность диадических функций, зависящих от параметра x.

Для набора $a_1, \ldots, a_{2^n}$ действительных чисел полагаем

$$\Gamma\,(a_1, \ldots, a_{2^n}) = \sum_{l=1}^{2^n} a_l \chi_{[(l-1)2^{-n},\, l2^{-n})}.$$

Норму $\mathcal{I}_n f\,(x)$ в пространстве X обозначим через $\mathcal{I}_n^X f\,(x)$. Например, если $X = L_p$, $1 \le p < \infty$, то

$$\mathcal{I}_{2^n}^X f\,(x) = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left|S_{\nu_j} v f\,(x)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть X — диадически однородное банахово пространство, Y — пространство, двойственное X. Тогда для любой функции $f \in L_\infty(T^m)$*

$$\left\|\mathcal{I}_{2^n}^Y f\right\|_\infty \le c\,\|f\|_\infty$$

тогда и только тогда, когда для любого набора $(a_1,\ \dots,\ a_{2^n})$ действительных чисел

$$\frac{1}{2^n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{2^n} a_j D_{v_j V}(x)\right| dx \le c\,\|\Gamma(a_1,\ \dots,\ a_{2^n})\|_X .$$

Доказательство теоремы 3.1 полностью аналогично доказательству теоремы 1 из [25].

Приведем неулучшаемое (в шкале пространств Орлича) неравенство типа неравенства Сидона для ядер Дирихле D_{nV}, порожденных полиэдрами класса W_b.

Используем введенные ступенчатые функции (см. (1.13)):

$$I_n f(x) = \sum_{j=1}^{n} S_{jV} f(x)\,\chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}$$

и

$$\Gamma_n = \Gamma(a_1,\ \dots,\ a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}.$$

Теорема 3.2. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, a_n — последовательность действительных чисел, а $\mathcal{N}$-функция Ψ удовлетворяет условию*

$$\Psi(u) \ge cu\ln^m u \quad \text{при некотором} \quad c > 0 \quad \text{и} \quad u \ge u_0 > 0. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right| dx \le c_1\,\|\Gamma(a_1,\ \dots,\ a_n)\|_\Psi \quad (n = 1,\ 2,\ \dots), \tag{3.2}$$

где постоянная $c_1 > 0$ зависит лишь от V и Ψ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L_Φ — пространство Орлича функций, заданных на отрезке $[0,\ 1]$, определенное $\mathcal{N}$-функцией

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha e}{m-1}\right)^{m-1} \frac{t}{t_m} & \text{при} \quad 0 \le t \le t_m, \\ \mathrm{e}^{\alpha t^{\frac{1}{m}}} t^{\frac{1-m}{m}} & \text{при} \quad t > t_m, \end{cases}$$

$\alpha > 0$, $m \ge 2$, $t_m = \left(\frac{m-1}{\alpha}\right)^m$.
При $m = 1$

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\alpha} t & \text{при} \quad 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{e}^{\alpha t} & \text{при} \quad t > 1, \end{cases}$$

φ — строго возрастающая функция, $\varphi(0) = 0$. Пусть ψ — функция, обратная к φ. Тогда

$$\Psi(u) = \int_0^{|u|} \psi(t)\,dt \tag{3.3}$$

— $\mathcal{N}$-функция, дополнительная к Φ. Поскольку $\psi(t) \asymp \ln^m t$ при достаточно больших t, а при t, близких к нулю, $\psi(t) = ct$, то

$$\Psi(u) \le c\,|u| \left[1 + \left(\ln^+ |u|\right)^m\right], \tag{3.4}$$

где

$$\ln^+ t = \begin{cases} \ln t & \text{при} \quad t > 1, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le \mathrm{t} \le 1, \end{cases}$$

и

$$\Psi(u) \ge c_1 |u| \left(\ln^+ |u|\right)^m$$

при u достаточно большом. Так как

$$\frac{1}{(2\pi)^m n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{jV}(x) \right| dx = \sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n a_j S_{jV}(f, 0) \right| =$$
$$= \sup_{|f| \le 1} \left| \int_0^1 \Gamma(a_1, \ldots, a_n)\, I_n f(0)\, dt \right|,$$

применяя к последнему интегралу неравенство Гельдера ([15, с. 91]), получаем, что

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}\left(x\right)\right| dx << \left\|\Gamma\left(a_1,\ \ldots,\ a_n\right)\right\|_{\Psi} \sup_{|f|\leq 1} \left\|I_n\left(f,0\right)\right\|_{\Phi}.$$

Поскольку $\Phi\left(u\right)=O\left(e^{\alpha|u|^{\frac{1}{m}}}\right)$, из теоремы 1.4 следует, что

$$\sup_{|f|\leq 1}\left\|I_n\left(f,0\right)\right\|_{\Phi}\leq c$$

при некотором $c>0$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.1. Теорема 3.2 окончательна в следующем смысле. Неравенство (3.2) перестает быть верным для любого набора $\{a_n\}$, если вместо Ψ, удовлетворяющей условию (3.1), взять $\mathcal{N}$-функцию Ψ_1, такую, что

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Psi_1\left(u\right)}{u\ln^m u}=0.$$

Этот факт следует из двойственности между нормами сильных средних ряда Фурье и неравенствами типа неравенства Сидона и точности теоремы 1.2, поскольку ([15, с. 90]) $\int_0^1\Phi\left(u\right)dt\leq\|u\|_{\Phi}$ для любой функции u, удовлетворяющей условию $\|u\|_{\Phi}\leq 1$.

Следствие 3.1. *Пусть полиэдр* $V\in W_b$. *Если* $\mathcal{N}$*-функция* Ψ *удовлетворяет условию* (3.1), *то*

$$\frac{1}{2^l}\int_{T^m}\left|\sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} a_j D_{jV}\left(x\right)\right| dx \leq C\left\|\Gamma\left(a_{2^l+1},\ \ldots,\ a_{2^{l+1}}\right)\right\|_{\Psi}. \qquad (3.5)$$

Для доказательства этого неравенства полагаем в (3.2) $n=2^{l+1}$, $a_j=0$ при $1\leq j\leq 2^l$ и заметим, что

$$\left\|\Gamma\left(0,\ \ldots,\ 0,\ a_{2^l+1},\ \ldots,\ a_{2^{l+1}}\right)\right\|_{\Psi}\leq C\left\|\Gamma\left(a_{2^l+1},\ \ldots,\ a_{2^{l+1}}\right)\right\|_{\Psi}.$$

Следствие 3.2. *Пусть полиэдр* $V\in W_b$, $\{a_j\}$ *— последовательность действительных чисел. Тогда*

$$\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}\left(x\right)\right| dx \leq c\sum_{j=1}^{n}|a_j|\left[1+\left(\log^{+}\frac{|a_j|}{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}|a_j|}\right)^{m}\right]. \qquad (3.6)$$

Данное неравенство при $m = 1$, $V = [-1,\ 1]$ доказано другим методом Фридли [27].

Доказательство следствия 3.2. Поскольку $\|\Gamma\|_\Psi \leq \int_0^1 \Psi(\Gamma)\, dt + 1$ и для функции Ψ, определенной (3.3), имеет место оценка (3.4), из (3.2) следует, что

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right| dx << \|\Gamma(a_1,\ \ldots,\ a_n)\|_\Psi << \sum_{j=1}^{n} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ |a_j|\right)^m\right].$$

Заменяя a_j на $a_j / \left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} |a_j|\right)$, получаем (3.6).

Полагая в (3.6) $n = 2^{l+1}$ и $a_j = 0 \quad \left(j = 1,\ \ldots,\ 2^l\right)$, получаем неравенство

$$\int_{T^m}\left|\sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} a_j D_{jV}(x)\right| dx \leq c_1 \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{2^{-l}\sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |a_j|}\right)^m\right]. \tag{3.7}$$

Выбирая в (3.2) функцию $\Psi(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $p > 1$, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $p > 1$. Для любого набора $\{a_n\}$ действительных чисел имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right| dx \leq c\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p}. \tag{3.8}$$

При $m = 1$ это неравенство, по существу содержащееся в работе Г.А. Фомина [22], доказано также Бояничем и Станоевичем [28].

В предельном случае ($p = \infty$) имеем аналог неравенства Сидона:

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right| dx \leq c \max_{1\leq j\leq n} |a_j|. \tag{3.9}$$

Следствие 3.4. *Пусть $1 < p \leq 2$, ν_n — возрастающая последовательность действительных чисел. Для того чтобы для любого набора $\{a_n\}$ действительных чисел имело место неравенство*

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_jD_{\nu_jV}\left(x\right)\right|dx\le c\,\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^p\right)^{1/p}, \tag{3.10}$$

необходимо, а если ν_n *выпукла, то и достаточно, чтобы*

$$\ln\nu_n\le c_1n^{\frac{p-1}{pm}}.$$

При $m=1$ и $V=[-1,\,1]$ неравенство (3.10) приведено в [16].

Для доказательства следствия 3.4 нужно к правой части неравенства

$$\frac{1}{n}\int_{T^m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_jD_{\nu_jV}\left(x\right)\right|dx=\frac{(2\pi)^m}{n}\sup_{|f|\le1}\left|\sum_{j=1}^{n}a_jS_{\nu_jV}\left(f,0\right)\right|$$

применить неравенство Гельдера и воспользоваться теоремой 2.1.

§ 4. Интегрируемость и сходимость в среднем кратных тригонометрических рядов

Пусть полиэдр $V\in W_b$, λ_n — последовательность действительных чисел, $\lambda_n\to0$ при $n\to\infty$. На m-мерном торе T^m рассмотрим тригонометрический ряд

$$\lambda_0+\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_l\sum_{k\in lV\setminus(l-1)V}e^{ikx}. \tag{4.1}$$

Коэффициенты данного ряда постоянны на множествах $lV\setminus(l-1)\,V$ $(l=1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть

$$S_{nV}\left(x\right)=\lambda_0+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\sum_{k\,\in\,lV\setminus(l-1)V}e^{ikx}$$

— частичная сумма ряда (4.1). Ряд (4.1) сходится в пространстве $L\left(T^m\right)$ (в метрике L), если существует функция $f\in L\left(T^m\right)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T^m}\left|S_{nV}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|dx=0. \tag{4.2}$$

Приведем некоторые известные результаты об интегрируемости и сходимости однократных тригонометрических рядов ($m=1, V=[-1,\ 1]$). В этом случае ряд (4.1) есть косинус-ряд

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \cos lx. \tag{4.3}$$

Полагаем в дальнейшем $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

Теорема Фомина. [22] *Если существует действительное число $p > 1$ такое, что коэффициенты ряда* (4.3) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{4.4}$$

то ряд (4.3) *сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(T)$, есть ее ряд Фурье, причем соотношение* (4.2) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \ln n = 0.$$

Предельным случаем ($p = \infty$) теоремы Фомина есть теорема Сидона–Теляковского, доказанная ранее в [29]. Условие (4.4) в ней заменено более жестким условием:

существуют такие числа A_k, что

$$A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \quad |\Delta\lambda_k| \le A_k \quad \text{для всех} \quad k. \tag{4.5}$$

Фридли [27] обобщил теорему Фомина, заменив условие (4.4) более слабым, но менее «прозрачным» условием:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\ln^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right) \right] < \infty.$$

Следующая теорема о сходимости в метрике L ряда (4.1) по полиэдрам $V \in W_b$ в частном случае отрезка [-1, 1] содержит все приведенные выше результаты.

Теорема 4.1. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, а $\mathcal{N}$-функция Φ такова, что при некоторых $c, u_0 > 0$*

$$\Phi(u) \ge cu \ln^m u \quad \text{при} \quad u \ge u_0. \tag{4.6}$$

Если коэффициенты ряда (4.1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \left\| \Gamma \left(\Delta\lambda_{2^l+1}, \ \ldots, \ \Delta\lambda_{2^{l+1}} \right) \right\|_{\Phi} < \infty, \tag{4.7}$$

то ряд (4.1) *есть ряд Фурье некоторой функции* $f \in L(T^m)$, *а равенство* (4.2) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \log^m n = 0. \tag{4.8}$$

Следствие 4.1. [35] *Пусть полиэдр* $V \in W_b$. *Если коэффициенты ряда* (4.1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right)^m \right] < \infty,$$

то справедливы утверждения теоремы 4.1.

Следствие 4.1 есть m-кратный аналог теоремы Фридли [27], который следует из теоремы 4.1, если в качестве $\mathcal{N}$-функции Φ взять предельно возможную, эквивалентную $u \ln^m u$ при достаточно больших u и воспользоваться неравенством (3.7) при $a_j = \Delta\lambda_j$.

Выбирая в теореме 4.1 $\mathcal{N}$-функцию $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $p > 1$, получим аналог теоремы Фомина.

Следствие 4.2. *Если при некотором* $p > 1$ *коэффициенты ряда* (4.1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{4.9}$$

то имеют место утверждения теоремы 4.1.

В [22] показано, что условия (4.4) и (4.9) при $p > 1$ эквивалентны. В предельном случае $p = \infty$ получаем m-кратный аналог теоремы Сидона–Теляковского.

Следствие 4.3. *Если коэффициенты ряда* (4.1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^l \max_{2^l+1 \le j \le 2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| < \infty, \tag{4.10}$$

то имеют место утверждения теоремы 4.1.

Покажем, что условие (4.10) эквивалентно условию (4.5), приведенному в теореме Сидона–Теляковского.

Действительно, при каждом $n > 1$ имеем

$$\sum_{l=1}^{n} 2^l \max_{2^l+1 \le j \le 2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| = \sum_{l=1}^{n} 2^l \left(\max_{j \ge 2^l+1} |\Delta\lambda_j| - \max_{j \ge 2^{l+1}+1} |\Delta\lambda_j| \right) =$$

$$= 2 \max_{j \ge 3} |\Delta\lambda_j| + \sum_{l=1}^{n-1} 2^{l-1} \max_{j \ge 2^l+1} |\Delta\lambda_j| + o\,(1)\,.$$

Положим $A_k = \max\limits_{j \ge k} |\Delta\lambda_j|$ и применим теорему Коши, которая утверждает, что если $A_l \downarrow 0$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\sum_{l=1}^{\infty} 2^l A_l$ сходятся и расходятся одновременно.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.1. Докажем сначала сходимость в $L\,(T^m)$ ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x)\,. \tag{4.11}$$

Из неравенства (3.5) при $a_j = \Delta\lambda_j$ $(j = 2^l+1,\ \ldots,\ 2^{l+1})$ и условий (4.6) и (4.7) следует сходимость ряда из норм

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x) \right| dx < \infty,$$

следовательно, в силу полноты пространства, сходимость в $L\,(T^m)$ ряда

$$\Delta\lambda_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x)\,.$$

Обозначим его сумму через f. Пусть n — произвольно, выберем l_0 из условия $2^{l_0} \le n+1 < 2^{l_0+1}$. Так как

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x) - f\,(x) \right| dx \le$$

$$\le \int_{T^m} \left| \sum_{j=n+1}^{2^{l_0+1}-1} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x) \right| dx + \sum_{l=l_0+1}^{\infty} \int_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_{jV}\,(x) \right| dx$$

и поскольку для первого слагаемого также выполнена оценка (3.5) (нужно в (3.5) положить $a_j = 0$ при $2^{l_0} \le j \le n$ и $a_j = \Delta\lambda_j$ при $n+1 \le j < < 2^{l_0+1}$ и воспользоваться монотонностью нормы), получаем, что вся сумма справа стремится к нулю при n, следовательно, и l_0, стремящемся к ∞. Сходимость ряда (4.11) в метрике L к f доказана.

Покажем, что ряд (4.1) есть ряд Фурье функции f, т.е. что $\hat{f}(0) = \lambda_0$, $\hat{f}(k) = \lambda_l$ при $k \in lV \setminus (l-1)\,V$ $(l = 1,\ 2,\ \ldots)$:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(n)\, e^{-iku} du = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \sum_{j=0}^{s} \Delta\lambda_j D_{jV}(u)\, e^{-iku} du + o\,(1)$$

при $s \to \infty$.

Из ортогональности системы $\left\{e^{ikx}\right\}$ на T^m следует, что

$$\hat{f}(k) = \lambda_l - \lambda_{s+1} + o\,(1) \to \lambda_l \text{ при } s \to \infty.$$

Для завершения доказательства покажем, что для сходимости ряда (4.1) в метрике L к функции f необходимо и достаточно условие (4.8). Это следует из равенства

$$S_{nV}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) + \Delta\lambda_n D_{nV}(x) \tag{4.12}$$

и двусторонней оценки (1.5).

Более слабый вариант теоремы 4.1 для полиэдров класса W_b был опубликован в [30].

Пусть $W_r \subset W_b$ — подмножество полиэдров с вершинами в точках, координаты которых есть рациональные числа. Следующее утверждение для полиэдров $V \in W_r$ доказано в [31].

Теорема 4.2. *Пусть полиэдр $V \in W_r$, а коэффициенты ряда* (4.1) *стремятся к нулю и удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Тогда ряд* (4.1) *сходится почти всюду на T^m к функции $f \in L\,(T^m)$, является ее рядом Фурье, а сходимость в метрике L имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие* (4.8).

Сходимость ряда (4.1) почти всюду к функции f, найденной в теореме 4.1, следует из равенства (4.12) и того факта ([32], лемма 2), что для полиэдра $V \in W_r$ последовательность $D_{nV}(x)$ ограничена почти всюду на T^m.

Пусть ν_n — возрастающая последовательность натуральных чисел,

λ_n — сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел, $V \in$ $\in W_b$. Рассмотрим ряд

$$\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k \in \nu_n V \setminus \nu_{n-1} V} e^{ikx}. \tag{4.13}$$

Если ν_n растет достаточно быстро, ряд (4.13) есть ряд с редко меняющимися коэффициентами. При $m = 1, \quad V = [-1,\ 1]$ условия интегрируемости и сходимости в метрике L ряда

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{\nu_{n-1} \le k \le \nu_n} \cos kx \tag{4.14}$$

изучались в [33, 34] для последовательностей ν_n, лакунарных по Адамару:

$$\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \ge q > 1, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{4.15}$$

В [33] доказано, что ряд (4.14), при выполнении условия (4.15), является рядом Фурье в том и только том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=n}^{\infty} (\Delta \lambda_l)^2 \right\}^{1/2} \log \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} < \infty.$$

Если ряд (4.14) есть ряд Фурье, то [34] для сходимости его в метрике L необходимо и достаточно условие $\lambda_n \log \nu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для некоторого класса последовательностей ν_n, растущих медленнее, при $m = 1,\ 2,\ \ldots$ справедлив следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть $p > 1$, а выпуклая последовательность ν_n $(\nu_{n+1} - \nu_n \uparrow)$ удовлетворяет условию*

$$\log \nu_n \le c n^{\min\left\{\frac{p-1}{pm}, \frac{1}{2m}\right\}}. \tag{4.16}$$

Если полиэдр $V \in W_b$, а коэффициенты ряда (4.13) *стремятся к нулю и удовлетворяют условию* (4.9), *то данный ряд есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L\,(T^m)$, который сходится к ней в метрике L тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\lambda_n \log^m \nu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1. Нужно лишь вместо оценки (3.5) воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{2^l}\int_{T^m}\left|\sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} a_j D_{v_j V}\left(x\right)\right| dx \leq c\left(\frac{1}{2^l}\sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}}|a_j|^p\right)^{1/p},$$

справедливым при выполнении условия (4.16) (см. следствие 3.4, неравенство (3.10) при $n = 2^{l+1}$, $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, 2^l$).

В заключение отметим, что большинство результатов данной главы приведено в [35].

Список литературы

1. *Подкорытов А.Н.* Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1980. – № 1. – С. 51-58.

2. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука. – 1977. – 144 с.

3. *Hardy G.N., Littlewood J.E.* Sur la serie de Fourier d'une function a carré sommable // CR. – 1913. – 156. – P. 1307-1309.

4. *Гоголадзе Л.Д.* О сильных средних типа Марцинкевича // Сообщ. АН ГрузССР. – 1981. – № 102. – С. 293-295.

5. *Гоголадзе Л.Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функ-циях. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси. – 1984. – 256 с.

6. *Кузнецова О.И.* Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенства типа Сидона // Укр. мат. ж. – 1998. – Т. 50, № 12. – С. 1630-1635.

7. *Гоголадзе Л.Д.* О сильной суммируемости почти всюду // Мат. сб. – 1998. – Т. 135, № 2. – С. 158-168.

8. *Carleman T.* A theorem concerning Fourier series / Proc. London Math. Soc. – 1923. – V. 21. – P. 483-492.

9. *Totik V.* On the generalization of Fejer's summation theorem // Series, Functions, Operators, Proceeding of the International Conference in Budapest, 1980. – 1983. – P. 1195-1199.

10. *Кузнецова О.И.* О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. ж. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 275-279.

11. *Подкорытов А.Н.* Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1982. – № 7. – С. 110-111.

12. *Юдин В.А.* Оценка снизу констант Лебега. // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, № 1. – С. 119-122.

13. *Подкорытов А.Н.* О суммировании кратных рядов Фурье. – Л., 1978. – 11 с. – Деп. В ВИНИТИ, № 3066-78.

14. *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation mit starken de la Valle-Poussinschen mitteln // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1965. – V. 16. – P. 43-49.

15. *Красносельский. М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз. – 1958. – 271 с.

16. *Long J.-L.* Sommes partielles de Fourier des fonctions bornées // C.R. Acad. Sc. Paris. – 1979. – V. 288. – P. 1009-1011.

17. *Salem R.* On strong summability of Fourier series // Amer. J. Math. – 1955. – V. 77. – P. 392-402.

18. *Carleson L.* Appendix to the paper of J.-P. Kahane and J. Katznelson // Stud. Math. Mem. Paul Turan. – Budapest. – 1983. – P. 411-413.

19. *Загородний Н.А., Тригуб Р.М.* Об одном вопросе Салема // Теория функций и отображений. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 97-101.

20. *Кузнецова О.И.* О частичных суммах по полиэдрам рядов Фурье ограниченных функций // Anal. math. – 1993. – V. 19. – P. 267-272.

21. *Кузнецова О.И.* Интегрируемость и сильная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Труды МИАН. – 1987. – № 180. – С. 143-144.

22. *Фомин Г.А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23. – С. 213-222.

23. *Белинский Э.С., Тригуб Р.М.* Некоторые числовые неравенства и их применение в теории суммируемости рядов Фурье // Конструктивная теория функций и теория отображений. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 70-81.

24. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen fur den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**, N 2. – P. 158-166.

25. *Fridli S., Schipp F.* Strong summability and Sidon type inequalities // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1995. – V. 60. – P. 277-289.

26. *Schipp F., Wade W.R., Simon P. (with assistance Pal. J.)* Walsh series. – Bristol-New York: Adam Hilder. – 1990. – 560 p.

27. *Fridli S.* An inverse Sidon type inequality // Studia Math. – 1993. – V. 105, N 3. – P. 283-308.

28. *Bojanic R., Stanojevic C.V.* A class of L^1 convergence // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 269. – P. 677-683.

29. *Теляковский С.А.* О достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 317-328.

30. *Кузнецова О.И.* Интегрируемость одного класса N-мерных тригонометрических рядов // Праці ІМ НАНУ. – 2000. – Т. 31. – С. 297-305.

31. *Кузнецова О.И.* Об интегрировании одного класса N-мерных тригонометрических рядов // Укр. мат. ж. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 837-840.

32. *Кузнецова О.И.* Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1998. – Т. 63, № 3. – С. 402-406.

33. *Балашов Л.А., Теляковский С.А.* Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов // Труды МИАН. – 1977. – Т. 143. – С. 32-41.

34. *Теляковский С.А.* О сходимости в метрике L тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами // Труды МИАН. – 1991. – Т. 200. – С. 322-326.

35. *Кузнецова О.И.* Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенства Сидона // Докл. АН СССР. – 1999. – Т. 364, №5. – С. 593-595.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 2. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных и их приложения

Глава 5. Сильные сферические средние и сходимость кратных тригонометрических рядов в пространстве L

Глава 6. Сильные полиэдральные средние, интегрируемость и сходимость кратных тригонометрических рядов

Виталий Павлович Моторный

Доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Украины.

С 1965 г. работает в Днепропетровском государственном университете. С 1974 года и по настоящее время — заведующий кафедры теории функций. По совместительству возглавляет лабораторию оптимизации приближений полиномами и сплайнами при Институте прикладной математики и механики НАН Украины.

Сфера научных интересов — теория квадратурных формул, теория поперечников, асимптотически точные оценки скорости приближения и другие области теории приближений функций. В.П. Моторный решил проблему С.М. Никольского о наилучшей квадратурной формуле на классе периодических функций с ограниченной r-й производной.

Автор более 120 научных работ. Подготовил 12 кандидатов и 2 доктора физико-математических наук.

Заслуженный деятель науки и техники УССР, лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, премии НАН Украины им. М.А. Лаврентьева.

В.П. Моторный представлял украинскую математику на многих конгрессах и конференциях. Возглавляет специализированный совет по защите кандидатских диссертаций при Днепропетровском национальном университете, академик АНВШ.

Владислав Федорович Бабенко

Доктор физико-математических наук, профессор.

С 1975 г. работал ассистентом, старшим преподавателем, доцентом кафедры теории функций Днепропетровского государственного университета. С 1988 по 2010 гг. В.Ф. Бабенко заведовал кафедрой математического анализа. С сентября 2010 г. — профессор кафедры математического анализа и теории функций. В разные годы работал по совместительству ведущим научным сотрудником Института математики НАН Украины и Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Область научных интересов — теория приближений, гармонический анализ, теория оптимальных алгоритмов, экстремальные задачи анализа, геометрическое моделирование.

Автор более 250 научных статей и трех монографий.

В.Ф. Бабенко — лауреат Государственной премии Украины, заслуженный деятель науки и техники Украины. С 2003 г. — заслуженный профессор Днепропетровского национального университета. Награжден Почетной грамотой Кабинета Министров Украины. Подготовил 10 кандидатов и одного доктора наук.

В.Ф. Бабенко — член редколлегий ряда международных и украинских математических журналов, член экспертного совета ВАК.

Алексей Альфредович Довгошей

Кандидат физико-математических наук.

С 1992 г. и по настоящее время работает в отделе теории функций Института прикладной математики и механики НАН Украины, с 1999 г. — старший научный сотрудник. В 1996-2000 гг. исполнял обязанности заведующего кафедры математики и математических методов в экономике Донецкого института экономики и хозяйственного права.

В 2001-2002 гг. — приглашенный профессор Мерсинского университета (Турция). Участвовал в исследовательских проектах по теории функций и теории метрических пространств в университетах Хельсинки, Турку, Джоэнсу (Финляндия).

Область научных интересов: теория метрических пространств, теория сингулярных множеств и функций, теория функций в областях на плоскости, теория графов.

Автор более 90 научных работ.

С 2002 г. — ученый секретарь специализированного ученого совета ИПММ НАН Украины по защите кандидатских диссертаций по специальностям "математический анализ" и "теория вероятности и математическая статистика". Подготовил одного кандидата наук.

Ольга Ивановна Кузнецова

Кандидат физико-математических наук.

С 1976 г. работает в отделе теории функций Института прикладной математики и механики НАН Украины, старший научный сотрудник. В разные годы работала по совместительству в Донецком национальном университете. В математических кругах известна как специалист по гармоническому анализу и теории приближений.

Автор более 60 научных работ по классическому анализу Фурье, теории мультипликаторов, кратным тригонометрическим рядам.

Наукове видання
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Серія
«Задачі і методи:
математика, механіка, кібернетика»

Том 4

Моторний Віталій Павлович
Бабенко Владислав Федорович
Довгоший Олексій Альфредович
Кузнецова Ольга Іванівна

ТЕОРІЯ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ГАРМОНІЙНИЙ АНАЛІЗ
(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2012

Комп'ютерна верстка *О.П. Ткаченко*

Підп. до друку .2011. Формат 70 × 100/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Фіз. друк. арк. 25,5
Ум. друк. арк. 33,53. Ум. фарбо-відб. 33,53. Обл.-вид. арк. 22,54.
Тираж 300 прим.
Зам. № 8—568

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення субєкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 2440 від 15.03.2006
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ фірма «Віпол»
03151 Київ 151, вул. Волинська, 60