УДК 517.9

Е. М. Ландис

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ШАРАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x, u, Du) \tag{1}$$

в области $G \subset R^n$, где

$$L = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \tag{2}$$

$$a_{ik}=a_{ki}\in C^2(G),\quad \lambda^{-1}|\xi|^2\leqslant\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\leqslant\lambda|\xi|^2,\quad \lambda>0, \tag{3}$$

коэффициенты $b_i(x)$ и $c(x)$ измеримы и ограничены:

$$|b_i(x)|<M,\quad i=1,\dots,n,\quad |c(x)|<M. \tag{4}$$

Предположим, что в рассматриваемой области G решение $u(x)$ уравнения (1) существует и дважды непрерывно дифференцируемо. Через $B(r, x)$ в дальнейшем обозначим открытый шар в R^n радиуса r с центром в точке x.

Пусть $B(r,x_0)\subset G$ и $M_{x_0}(r)=\sup\limits_{|x-x_0|<r}|u(x)|$. Мы скажем, что для уравнения (1) в $B(R,x_0)$, $0<R<1$, выполнена слабая теорема о трех шарах, если существуют константы $\sigma>0$, $\varepsilon_0>0$ такие, что из того, что $u(x)$ — решение в $B(r,x_0)$, $M_{x_0}(R)<1$, $0<r<R/2$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $M_{x_0}(r)<$ $<\varepsilon$ следует

$$M_{x_0}(2r)<\varepsilon^{\sigma}. \tag{5}$$

Мы скажем, что для уравнения (1) в $B(1, x_0)$ выполнена сильная теорема о трех шарах, если существуют константы $k_0>0$, $C>0$ и $\alpha_0>1$ такие, что если для решения $u(x)$ уравнения (1) в шаре $B(1, x_0)$ выполнено $|u(x)|<1$ и для чисел r_1, r и α таких, что $\alpha<\alpha_0$, $0<r_1<r<1$ из

$$M_{x_0}(r_1)<r_1^{\alpha}$$

следует

$$M_{x_0}(r)<(Cr)^{\alpha-k_0}.$$

Эти теоремы являются обобщением теоремы Адамара о трех кругах для аналитических функций комплексного переменного [1]. В случае, если $f\equiv 0$, сильная теорема о трех шарах доказана в [2]. Константа k_0 при этом может быть положена равной единице, однако для тех следствий, которые будут извлекаться из этой теоремы, величина k_0 несущественна. Слабая теорема является очевидным следствием сильной.

Если предположить, что функция $f(x, u, p)$ непрерывна по совокупности переменных при $x\in B(1, x_0)$, $u\in R^1$, $p\in R^n$ и непрерывно дифференцируема по u и p, а также, что $f(x, 0, 0)=0$, то решение $u(x)$ удовлетворяет линейному уравнению, а потому в этом случае выполнена сильная теорема о трех шарах.

В дальнейшем будем рассматривать функции, не зависящие от p. Из сказанного следует, что интерес представляют функции f, негладкие в окрестности $u=0$.

Рассмотрим функции f следующего специального вида:

$$f=u\varphi(|u|). \tag{6}$$

Если $\varphi(t)$ — ограниченная функция, то $u(x)$ снова удовлетворяет некоторому линейному уравнению, так что интересен случай, когда $\varphi(t)$ неограниченно растет при $t\to+0$. Такие уравнения мы и будем в дальнейшем рассматривать.

1°. Первое следствие из слабой теоремы о трех шарах и один пример.

Теорема 1. *Пусть* G — полуцилиндр:

$$G=\{x\in R^n\,|\,0<x_n<\infty,\ |x'|<1\}, \tag{7}$$

где $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, и в G определено решение уравнения (1), для которого выполнена слабая теорема о трех шарах во всяком шаре $Q(1, x_0)\subset G$ с одними и теми же константами σ и ε_0. Положим $M(t)=$ $=\sup\limits_{B(1/4,(t,0))}|u(x)|$. Тогда существует $A>0$, зависящее от σ такое, что

$$M(t)=O(e^{-e^{At}}) \tag{8}$$

в G при $t\to\infty$.

Действительно, применяя к шару $B\left(\frac{1}{4}, (x_n, 0)\right)$ слабую теорему о трех шарах, получаем $M\left(x_n - \frac{1}{4}\right) < (M(x_n))^{\sigma}$, откуда $M(1) > e^{-e^{At}}$ при больших t и некотором $A > 0$, зависящем от σ. Из (8) вытекает $M(1) \equiv 0$. А тогда по той же слабой теореме о трех шарах $u \equiv 0$ в G.

Пример. Рассмотрим в полуцилиндре G, задаваемом (7), функцию $u(x) = e^{-e^{e^{x_n}}}$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = u \ln\frac{1}{u}\left(\ln\frac{1}{u}\left(\ln\ln\frac{1}{u}\right)^2 + \ln\frac{1}{u}\ln\ln\frac{1}{u} + \ln\ln\frac{1}{u}\right).$$

Этот пример показывает, что при росте $\varphi(t)$ чуть более быстром, чем $\left(\ln\frac{1}{t}\right)^2$, например при $\varphi(t) = 2\left(\ln\frac{1}{t}\right)^2\left(\ln\ln\frac{1}{t}\right)^2$, слабая теорема о трех шарах, вообще говоря, неверна. Но оказывается, что она справедлива при немного более медленном росте функции $\varphi(t)$. При этом следует наложить условия на производную функции $\varphi(t)$. Именно, если $\varphi(t) = \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{2-2\varepsilon}$, то $\varphi(t) > 0$, $\varphi'(t) < 0$ при $0 < t < 1$ и $|\varphi'(t)| < \frac{1}{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1-\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ и достаточно малых t. Это и будет нашим условием.

2°. **Теорема 2** (слабая теорема о трех шарах). Пусть в шаре $B(1, x_0)$ определено решение уравнения (1) с функцией φ вида (6). Пусть

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) < 0 \text{ и } |\varphi'(t)| < \frac{\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1-\varepsilon}}{t} \text{ при } 0 < t < 1. \tag{9}$$

Тогда для него справедлива слабая теорема о трех шарах.

Для сильной теоремы о трех шарах мы наложим условие того же вида, но более сильное.

Теорема 3. Пусть в шаре $B(1, x_0)$ определено решение уравнения (1) с функцией φ вида (6). Пусть

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) < 0 \text{ и } |\varphi'(t)| < \frac{1}{t} \text{ при } 0 < t < 1. \tag{10}$$

Тогда для него справедлива сильная теорема о трех шарах.

Доказательство этих теорем довольно сложно, но мы здесь приведем один пункт доказательства теоремы 3 для простейшего случая $\Delta u = u\varphi(|u|)$, проясняющий роль условия (10).

Итак, пусть $|u(x)| < 1$ в $B(1, 0)$ и $|u(x)| < r_1^{\alpha}$, $0 < r_1 < \frac{1}{2}$. Вводя подрезающую функцию $\theta(r) \in C^2([0, 1])$, $0 \leqslant \theta(r) \leqslant 1$, $\theta(r) \equiv 1$ при $r_1 < r < \frac{1}{2}$, $\theta \equiv 0$ при $0 < r < \frac{r_1}{2}$ и $\frac{3}{4} < r < 1$ и полагая $z = \theta r$, получаем

$$\Delta z = z\varphi(|z|) + g(x), \quad |g(x)| < (Cr)^{\alpha - 2}.$$

Положим $z = vr^{\alpha}$. После несложных преобразований находим, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\alpha + n}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \alpha^2 v + \frac{1}{r^2}M_{\omega}v = r^2 v\varphi(|v|r^{\alpha}) + g_1(x)$$

(M_{ω} — оператор Лапласа — Бельтрами), $|g_1(x)| \leqslant (Cr)^{-k_1}$.

Умножая на $\frac{\partial v}{\partial r}$ и интегрируя, получаем

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha + n}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dr d\omega = \int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 r^2 v\frac{\partial v}{\partial r}\,\varphi(|v|r^{\alpha})\,dr d\omega + \int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial r}\,g_1 dr d\omega,$$

где ω_n — единичная сфера. Производя в первом интеграле в правой части интегрирование по частям, находим

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha+n}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 dr d\omega = -\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 rv^2\varphi(|v|r^\alpha)\,dr d\omega -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 rv^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi(|v|r^\alpha)\,dr d\omega + \int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial r}g_1 dr d\omega.$$

Отсюда, используя неравенство $2\frac{\partial v}{\partial r}g_1 \leqslant \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + g_1^2$, получаем

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha+n-1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dr d\omega \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 r^2v^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi(|v|r^\alpha)\,dr d\omega + (Cr)^{-2k_1}.$$

Используем теперь (10):

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha+n-1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dr d\omega \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 r^2v^2\frac{1}{vr^\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial v}{\partial r}r^\alpha + \alpha v r^{\alpha-1}\right)dr d\omega + (Cr)^{-2k_1}$$

или

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha+n-1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dr d\omega \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial r} + \alpha r v^2\right)dr d\omega + (Cr)^{-2k_1}$$

или (снова производя в первом интеграле справа интегрирование по частям)

$$\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1 \frac{\alpha+n-1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dr d\omega \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_n}\int\limits_0^1(\alpha-1)\,rv^2 dr d\omega + (Cr)^{-2k_2}.$$

Отсюда уже стандартным способом (см. [2]) получаем

$$\int\limits_{Q_r} u^2 dx \leqslant (C_1 r)^{-k_0}$$

и, наконец,

$$|u(x)| \leqslant (C_1 r)^{-k_0}.$$

Заметим, что из сделанного нами априорного допущения $u \in C^2$ вытекает, что правая часть уравнения $\Delta u = u\varphi(|u|)$ удовлетворяет условию Гельдера, а потому можно пользоваться шаудеровской оценкой.

Принципиальная часть доказательства слабой теоремы о трех шарах (при условии (9)) сходна с приведенным выше рассуждением, только вместо весовой функции r^α надо взять функцию $e^{-1/rA}$.

Замечание. В сильной теореме о трех шарах, разумеется, вместо шара $B(1, x_0)$ можно брать шар $B(R, x_0)$ любого фиксированного радиуса R. Это отразится только на константах α_0, ε_0 и C.

3°. Дальнейшие следствия из теорем о трех шарах. Из теорем о трех шарах вытекают следующие теоремы о сильных нулях.

Теорема 4. Пусть в $G \subset R^n$ определено уравнение (1), для которого выполнена сильная теорема о трех шарах, $u(x)$ — его решение в G, $x_0 \in G$ и для любого натурального числа k найдется константа $r_k > 0$ такая, что $|u(x)| < |x|^k$ при $|x| < r_k$. Тогда $u \equiv 0$ в G.

Теорема 5. Пусть в $G \subset R^n$ определено уравнение (1), для которого выполнена слабая теорема о трех шарах. Пусть $x_0 \in \partial G$ и точки x_0 можно изнутри области коснуться вершиной конуса. Обозначим этот конус через K. Существует константа $A > 0$, зависящая от σ и раствора конуса, такая, что если $|u(x)| < e^{-\frac{1}{|x-x_0|^A}}$ в K при x достаточно близких к x_0, то $u \equiv 0$ в G.

4°. Еще один вариант теоремы о трех шарах. В сильной теореме о трех шарах содержательная оценка получена при условии, что $r < 1/C$. При тех же условиях (6) и (10) имеет место следующая теорема, дающая оценку при r, близких к единице.

Теорема 6. Пусть в шаре $B(1, x_0)$ определено уравнение (1) и функция f имеет вид (6) и удовлетворяются условия (10). Существуют константы $\alpha_0 > 0$ и $M > 0$ такие, что если $u(x)$ — решение уравнения (1) в $B(1, x_0)$, $|u(x)| < 1$ в $B(1, x_0)$, $|u(x)|\,|_{|x-x_0|<r} < r^\alpha$ при некотором $\alpha > \alpha_0$, то для любого η, $0 < \eta < 1$, имеет место неравенство

$$|u(x)|\,|_{|x-x_0|<1-\eta} < (1-\eta)^{\alpha/M}.$$

Из этой теоремы вытекает

Теорема 7. Пусть $K > 0$ — произвольное число и

$$C(K) = \{x \in R^n \mid |x'| < K |x_n|\}.$$

Пусть в $C(K)$ определено уравнение (1) с функцией f вида (6) с условием (10) и коэффициенты оператора L удовлетворяют дополнительным условиям

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_t} a_{ij}(x)\right| = \mathcal{O}(|x|^{-2}), \quad i, j, s, t = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} a_{ij}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}), \quad i, j, l = 1, \ldots, n;$$

$$b_i(x) = o(|x^{-1}|), \quad i = 1, \ldots, n, \quad c(x) = o(|x|^{-2}).$$

Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1) в $C(K)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $K > 0$ такое, что из того, что $u(x) = \mathcal{O}(e^{-|x|^{1+\varepsilon}})$ при $x \to \infty$, $x \in C(K)$, следует, что $u \equiv 0$.

Для случая $f \equiv 0$ теоремы, аналогичные теоремам 6 и 7, доказаны в [3].

5°. Случай растущих решений. В этом пункте будем рассматривать уравнение

$$Lu = u\varphi(|u|), \tag{11}$$

где при t, бóльших некоторого $t_0 > 1$,

$$\varphi(t) > 0, \quad 0 < \varphi'(t) < (\ln t)^{2-\varepsilon}. \tag{12}$$

Имеет место следующая теорема, аналогичная слабой теореме о трех шарах.

Теорема 8. Пусть в шаре $B(1, x_0)$ определено решение уравнения (11) с условиями (12). Пусть, как и раньше, $M_{x_0}(r) = \sup\limits_{x-x_0|<r} |u(x)|$. Существуют числа $K_0 > 1$ и $\tau > 1$ такие, что из того, что $r < \frac{1}{2}$, $M_{x_0}(r) < 1$, $M_{x_0}(2r) > K$, где $K > K_0$, следует, что

$$M_{x_0}(1) > K^\tau. \tag{13}$$

Из этой теоремы вытекает такая теорема типа Фрагмена — Линделефа.

Теорема 9. Пусть G_1 — цилиндр $G_1 = \{x \in R^n \mid |x'| < 1\}$. Пусть в G_1 определено решение уравнения (11) с условием (12) и $u(x)$ ограничено в слое

$$S=\{x\in G_1 \mid 1/2<x'<1\}. \tag{14}$$

Тогда либо $u(x)$ ограничено в G_1, либо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(\ln\ln M(t)/t)>0, \tag{15}$$

где

$$M(t)=\sup_{\substack{|x|=t\\ x\in G_1}}|u(x)|.$$

Для доказательства этой теоремы заметим, что с помощью диффеоморфизма шары $B(1, x_0)$, $B(r, x_0)$ и $B(2r, x_0)$ при каком-либо фиксированном r можно заменить на три шара, вложенные друг в друга произвольным фиксированным образом. При этом, естественно, изменятся константы K_0 и τ. Выберем эти шары следующим образом: внешний шар — $B^1_{x_n}=B(1,(0, x_n))$, промежуточный шар — $B^2_{x_n}=B\left(\frac{7}{8},(0,x_n)\right)$ и внутренний шар—$B^3_{x_n}=$ $=B\left(\frac{1}{16},\left(\frac{1}{4},0,\ldots,0,x_n\right)\right)$. Далее, можно считать, что во внутреннем шаре $u(x)$ ограничено не единицей, а какой-то фиксированной константой. Пусть эта константа есть $\sup\limits_S|u(x)|$. Соответственно, быть может, увеличится K_0.

Пусть в точке $x^1=(x'_1, x^1_n)$ выполнено $u(x^1)=K_1>K_0$. Построим для этого x^1_n наши три шара. Тогда, поскольку внутренний шар лежит в $G\diagdown\overline{S}$, имеем

$$\sup_{B^1_{x^1_n}}|u(x)|>K_1^{\tau}.$$

Следовательно, имеется точка x^2 такая, что $|u(x^2)|=K_2>K_1^{\tau}$, и она лежит внутри шара $B^2_{x^2_n}$, а потому можно продолжить процесс.

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.— М. : Наука, 1968.— Т. 2.— 569 с.
2. *Ландис Е. М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений // Успехи мат. наук.— 1963.— 18, № 1, С. 3—62.
3. *Ландис Е. М., Гусаров А. Л.* Об одном варианте теоремы о трех шарах для решения эллиптического уравнения и о связанной с ним теореме типа Фрагмена — Линделефа // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1982.— Вып. 8.— С. 169—186.

Моск. гос. ун-т Получено 05.10.87