

УДК 62-50, 517.91

©2018. В.Н. Неспирный

ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ СИСТЕМ ЛОРЕНЦА В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Исследована задача синхронизации по выходу двух динамических систем одинаковой структуры. Предложен метод взаимной синхронизации двух связанных систем с хаотическими траекториями, использующий в качестве управляющих воздействий импульсные управления, и получены достаточные условия, при которых данный подход обеспечивает асимптотическое сближение траекторий системы. В качестве примера рассмотрены две системы Лоренца и построено импульсное управление, синхронизирующее их траектории.

Ключевые слова: задача синхронизации, импульсное управление, система Лоренца.

Введение. Разработка методов анализа управляемости и синхронизации хаотических систем является важным направлением исследований в современной теории управления, поскольку такие системы имеют широкое применение в различных областях, в частности, в процессах обработки информации, телекоммуникационных технологиях, медицине, биологии, инженерии. Особое внимание к задаче синхронизации систем с хаотическими траекториями связано с тем, что они обладают большой чувствительностью к возмущениям. Даже незначительное отклонение или погрешность в начальных условиях может привести к существенным изменениям траектории. Наиболее ранние работы в этом направлении были связаны с синхронизацией через механизмы обратной связи [1], а также с помощью связывания двух систем посредством общего сигнала [2]. Использование импульсных управлений для синхронизации хаотических систем было предложено в работах [3, 4]. При этом размерность вектора управлений была взята совпадающей с размерностью фазового пространства и все переменные основной системы предполагались доступными для измерения. Такая высокая степень свободы позволила получить синхронизирующее управление с достаточно низким временем установления (settling time) и высокой робастностью. Однако, как правило, в системах безопасной передачи информации на принимающее устройство по каналу связи передается лишь часть переменных передающей системы и сигнал сообщения, который кодируется (маскируется и/или модулируется) с помощью функции от всех переменных, в том числе и тех, которые недоступны непосредственно на принимающей стороне [5, 6]. Постановка задачи импульсной синхронизации по выходу была дана в [7]. Там же была также рассмотрена и решена задача синхронизации двух систем Чуа по одной наблюдаемой переменной. В настоящей статье примененный подход для решения обобщается на класс систем, правые части которых зависят нелинейно от одной из фазовых переменных. Этот класс включает в себя большинство известных хаотических систем, в том числе системы Лоренца и Ресслера.

1. Постановка задачи. В общем случае для защиты информации в телекоммуникационных технологиях при генерировании сигнала, модулирующего или маскирующего передаваемое сообщение, на передающем устройстве используется система, динамика которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y = h(x), \quad (2)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор передающей системы, $y \in R^m$ – выход системы, $x_0 \in D$ – начальные условия, D – некоторая область, из которой могут выбираться начальные значения.

На принимающее устройство через канал связи поступает вектор y , где используется система вида

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}, y, u), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{x} \in R^n$ – фазовый вектор принимающей системы, \tilde{x}_0 – начальные условия, которые могут быть выбраны произвольным образом. Управление $u = u(\tilde{x}, y)$ зависит от полного фазового вектора принимающей системы и доступной части переменных фазового вектора передающей системы (ее выхода).

Задача синхронизации систем (1) и (3) по выходу (2) заключается в следующем: найти такое управление $u(\tilde{x}, y)$ и начальное условие \tilde{x}_0 , чтобы решение $\tilde{x}(t, \tilde{x}_0)$ системы (3) асимптотически стремилось к решению $x(t, x_0)$ системы (1). То есть $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{x}(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)\| = 0$ равномерно по всем значениям $x_0 \in D$.

Предполагается, что система (3) имеет схожую с системой (1) структуру и при попадании на траекторию системы (1) в дальнейшем двигается вдоль нее, то есть

$$F(x, h(x), u(x, h(x))) \equiv f(x). \quad (4)$$

Без ограничения общности можно также считать, что этот режим достигается без использования управляющих воздействий, то есть

$$u(x, h(x)) \equiv 0, \quad F(x, h(x), 0) \equiv f(x). \quad (5)$$

При решении задачи синхронизации полезным бывает рассмотрение системы для вектора ошибок $e = z - x$:

$$\dot{e} = \tilde{F}(e, \tilde{x}, u) = \tilde{F}(\tilde{x}, h(\tilde{x} - e), u) - f(\tilde{x} - e). \quad (6)$$

Здесь управление u может зависеть лишь от переменных \tilde{x} и $y = h(\tilde{x} - e)$.

Пара систем (3), (6) образует замкнутую систему, эквивалентную исходной совокупности (1)–(3). Благодаря условиям (5), для системы (6) при нулевом управлении $u \equiv 0$ существует инвариантное множество $e = 0$. При

этом задача синхронизации систем (1) и (3) сводится к задаче стабилизации инвариантного множества $e = 0$ системы (3), (6) управлением с обратной связью по выходу (\tilde{x}, y) .

Так же, как и для других задач теории управления, качественные свойства системы (3) существенно зависят от класса допустимых управлений. Более того, при использовании определенных типов управлений может претерпевать изменения даже структура системы. Так, если допускаются в качестве управлений импульсные воздействия, система (3) преобразуется к виду, принятому в современной теории импульсных систем [8, 9]:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= F(\tilde{x}, y, u) & \text{при } (\tilde{x}, y, t) \notin S, \\ \Delta\tilde{x} &= G(\tilde{x}, y, \Delta U) & \text{при } (\tilde{x}, y, t) \in S, \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0, \end{cases} \quad (7)$$

где S – множество в фазовом пространстве системы (3), расширенном временной осью и пространством выходов системы (1). Функция скачков G здесь вычисляется по функции F как предел реакции системы (3) на последовательность измеримых управлений, аппроксимирующих импульсное воздействие в определенный момент времени [10].

Для обеспечения асимптотической сходимости траекторий системы (7) к решению системы (1) могут использоваться обычное управление u , обобщенное управление ΔU , а также множество S в расширенном пространстве наблюдаемых переменных.

Это, с одной стороны, существенно увеличивает потенциальные возможности для реализации необходимого воздействия на систему и обогащает класс траекторий принимающей системы, с другой же стороны требует рассмотрения и определения нескольких принципиально различных объектов, относящихся к управлению. В связи с этим во многих исследованиях один или несколько объектов выбираются некоторым стандартным образом, и рассматривают как частный случай возможность решения задачи синхронизации за счет остальных объектов. Наиболее важные частные случаи были выделены и описаны в [7].

2. Системы с нелинейностью по одной переменной. Рассмотрим класс систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + x_1 Bx, \quad y = x_1, \quad (8)$$

где x_1 – первая компонента фазового вектора $x \in R^n$, матрицы A, B – постоянные и имеют размерность $n \times n$. Доступной для измерения является лишь переменная x_1 . Кроме того, будем предполагать, что множество D выбирается таким образом, чтобы все траектории с начальными условиями из этого множества могли быть равномерно ограничены некоторой константой M , по крайней мере по первой координате.

Большинство классических примеров хаотических систем (включая системы Лоренца и Ресслера) могут быть представлены в такой форме.

На принимающем устройстве используем такую же систему, но с управлениями, входящими в уравнения системы аддитивно:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{x}_1 B\tilde{x} + u. \quad (9)$$

Вектор управлений u имеет ту же размерность n , что и фазовое пространство системы (9), но зависеть может лишь от переменных x_1 и \tilde{x} .

Вычисляя реакцию системы на импульсные воздействия, получим

$$\Delta\tilde{x} = \Delta U(x_1, \tilde{x}). \quad (10)$$

В качестве множества S выберем совокупность гиперплоскостей в расширенном пространстве наблюдаемых переменных $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{t = t_i\}$, где $\{t_i\}$ – неограниченно возрастающая последовательность моментов времени, в которые будет действовать импульсное управление ΔU . Эту последовательность можно выбирать произвольным образом, поэтому она также представляет собой одну из возможностей по управлению системой (9).

Будем искать синхронизирующее управление в классе чисто импульсных, т. е. величину обычного управления u примем равной нулю всюду, кроме моментов времени t_i , в которые u будет неопределенной.

Вычитая (8) из уравнений (9), получим систему для вектора ошибок:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \tilde{x}_1 Be + e_1 Bx = Ae + x_1 Be + e_1 B\tilde{x} & \text{при } t \neq t_i, \\ \Delta e = \Delta U(e_1, \tilde{x}) & \text{при } t = t_i. \end{cases} \quad (11)$$

Так как в каждый момент времени известна лишь одна координата x_1 фазового вектора системы (8), наиболее естественным будет в принимающей системе использовать управление

$$\Delta U_1 = -e_1, \quad \Delta U_i = 0 \quad \forall i = \overline{2, n}. \quad (12)$$

3. Основной результат. Сформулируем достаточные условия, при которых чисто импульсное управление (12) будет синхронизирующим для пары систем (8) и (9) – (10).

Теорема 1. Пусть задана система (8) и система с импульсным управлением (9) – (10). Если существует M такое, что $|x(t, x_0)| \leq M$ при всех $t \geq 0$ и $x_0 \in D$, а матрица $C(\xi)$, получающаяся из матрицы $A + A^T + \xi(B + B^T)$ вычеркиванием первой строки и первого столбца, является отрицательно определенной для любых $\xi \in [-M; M]$, то существует $h^* > 0$ такое, что для любого $h \in (0, h^*)$ чисто импульсное управление (12), заданное в моменты времени $t_i = ih$, обеспечивает синхронизацию траекторий систем (8) и (9) – (10) при любом выборе $x_0 \in D$ и $\tilde{x}_0 \in D$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V(e, \tilde{x}) = e^T e.$$

Она является положительно определенной по переменным e и может принимать нулевые значения лишь на инвариантном многообразии $e = 0$.

В моменты времени $t = t_i$ система (11) при заданном управлении (12) совершает скачок из точки (e_1, e_2, e_3) в точку $(0, e_2, e_3)$, в которой значение функции V гарантированно не превышает значения в исходной точке.

Для анализа поведения на промежутках (t_i, t_{i+1}) , где траектории заданных систем непрерывны, вычислим производную \dot{V} функции Ляпунова в силу системы (11):

$$\dot{V} = e^T [A + A^T + x_1(B + B^T)]e + e_1 [e^T B \tilde{x} + \tilde{x}^T B^T e].$$

В начальный момент $t_i + 0$ значение e_1 равно нулю, поэтому второе слагаемое в выражении для \dot{V} обнуляется, а элементы первой строки и первого столбца матрицы $A + A^T + x_1(B + B^T)$ никак не влияют на величину первого слагаемого. Благодаря отрицательной определенности оставшейся части этой матрицы, величина первого слагаемого при $e \neq 0$ будет отрицательной при $t = t_i + 0$, а значит, отрицательным будет и полное выражение \dot{V} .

В силу непрерывности траекторий систем (8) и (9) найдется такое значение h , что на промежутке $(t_i, t_i + h_i]$ значение \dot{V} является отрицательным. Так как переменные $x_1(t)$ и $\tilde{x}_1(t)$ ограничены, то правые части систем (8) и (9) можно оценить линейными от фазовых переменных функциями. Это значит, что норме векторов x и \tilde{x} можно дать оценку вида $\|x(t_i)\| \exp(\lambda_{min} t) \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_i)\| \exp(\lambda_{max} t)$. То же касается и значения нормы вектора $e = x - \tilde{x}$. Так как выражение для \dot{V} однородно по переменным e , x и \tilde{x} , можно получить для h_i равномерную по всему фазовому пространству оценку снизу, которую и можно взять в качестве значения h^* .

Итак, установлено, что в любой точке траектории системы (11) величина \dot{V} является отрицательной, а в точках разрыва траекторий функция V имеет скачок, но не увеличивает своего значения. Следовательно, значение функции V убывает вдоль траекторий. Остается заметить, что можно немного уточнить оценку h^* так, чтобы выполнялось неравенство $|\dot{V}(t_i + h^*)| \geq q |\dot{V}(t_i)|$, где q – константа из промежутка $(0, 1)$. Это гарантирует, что значение функции V , а значит, и $\|e\|$ будет асимптотически стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. \square

Замечание 1. Вообще говоря, если определить S как множество, на котором выполнено условие $\dot{V} = 0$, можно было бы добиться того же результата – управление (12) на таком множестве также гарантирует асимптотическое сближение траекторий систем (8) и (9). Однако множество $\dot{V} = 0$ определяется в объединенном фазовом пространстве обеих систем и не может быть вложено в пространство наблюдаемых переменных, следовательно, реализация такого управления на принимающем устройстве была бы принципиально невозможной.

Замечание 2. За счет выбора подходящего значения параметра q можно регулировать скорость сближения траекторий. При больших значениях q время установления уменьшается, а значит, улучшается скорость сходимости.

С другой стороны, при этом уменьшается значение h^* , что приводит к более частому применению импульсных воздействий.

4. Синхронизация двух систем Лоренца. В качестве примера рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2, \end{cases} \quad (13)$$

где σ, ρ, β – положительные числовые параметры. Сам Лоренц рассматривал эту систему при значениях $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = -8/3$.

Система (13) является частным случаем системы (8) при

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На принимающей стороне используем такую же систему, но дополненную управлениями u :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\sigma \tilde{x}_1 + \sigma \tilde{x}_2 + u_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \rho \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + u_2, \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\beta \tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + u_3. \end{cases} \quad (14)$$

Реакция этой системы на импульсное воздействие величины ΔU описывается уравнениями (10).

В данном случае имеет место $B = -B^T$ и поэтому матрица $A + A^T + \xi(B + B^T)$ не зависит от параметра ξ . После исключения первой строки и первого столбца получаем матрицу $C(\xi) \equiv \text{diag}(-2, -2\beta)$, которая, очевидно, является отрицательно определенной. Ограниченность траекторий следует из того, что дивергенция фазового потока системы (13) отрицательна в каждой точке фазового пространства.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, и, следовательно, существует такой временной шаг h^* , что использование чисто импульсного управления (12) в принимающей системе (14), (10) в моменты времени, отстоящие друг от друга не более, чем на h^* , обеспечивает асимптотическое сближение траекторий передающей и принимающей системы вида (13) при любых начальных условиях.

Выберем начальные условия $x_0 = (1, 1, 1)$ для системы (13) и $\tilde{x}_0 = (2, -2, -1)$ для системы (14). Без использования управлений поведение траекторий этих систем показано на рис. 1–3. Если взять $h = 0.1$ и определить управление (12) в моменты времени $t_i = 0.1i$ при $i = 0, 1, 2, \dots$, траектории при тех же начальных условиях будут асимптотически приближаться друг к другу (рис. 4–6). При $t \geq 4$ норма расстояния между траекториями не будет превышать 0.1, при $t \geq 5.8$ – это расстояние можно оценить уже величиной 0.01, а при $t \geq 7.6$ – величиной 10^{-3} . Уменьшение же интервала времени h между последовательными импульсными воздействиями позволит увеличить скорость сходимости.

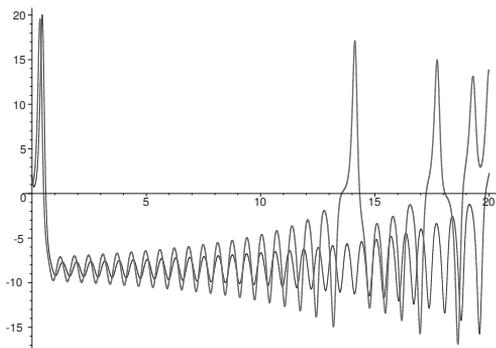


Рис. 1. Графики $x_1(t)$ и $\tilde{x}_1(t)$ без управления.

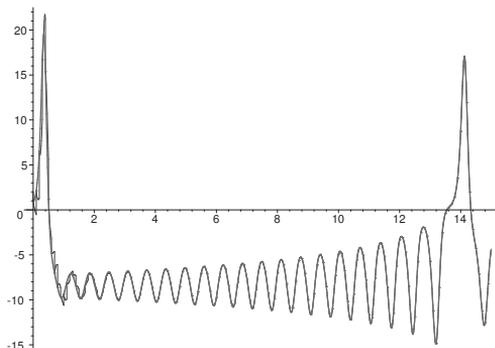


Рис. 4. График $x_1(t)$ и $\tilde{x}_1(t)$ с управлением (12).

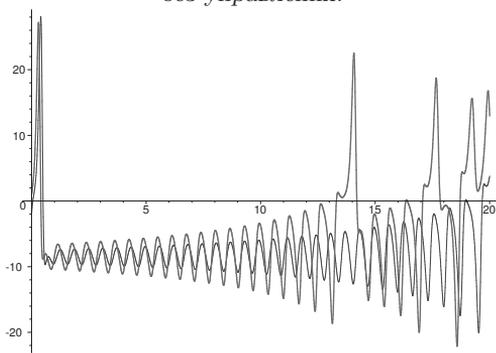


Рис. 2. Графики $x_2(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ без управления.

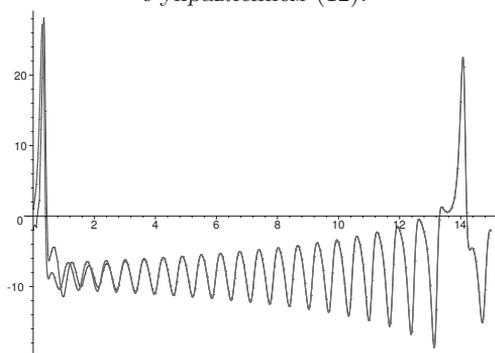


Рис. 5. График $x_2(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ с управлением (12).

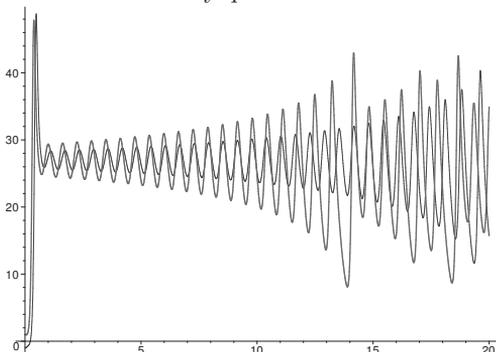


Рис. 3. Графики $x_3(t)$ и $\tilde{x}_3(t)$ без управления.

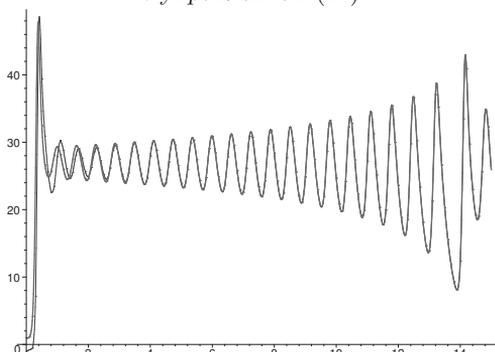


Рис. 6. График $x_3(t)$ и $\tilde{x}_3(t)$ с управлением (12).

Заключение. В статье рассмотрена задача синхронизации автономных систем дифференциальных уравнений с хаотическими траекториями. Для класса систем, нелинейно зависящих от наблюдаемой фазовой переменной, предложено чисто импульсное управление, которое гарантирует синхронизацию двух систем одинаковой структуры для траекторий, ограниченных по наблюдаемой переменной. В качестве примера изучена задача стабилизации

двух систем Лоренца и построено неавтономное импульсное управление, которое обеспечивает асимптотическое сближение траекторий.

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator system. // *Prog. Theor. Phys.* – 1983. – **69**. – P. 32–47.
2. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems. // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – **64** (8). – P. 821–824.
3. *Yang T., Chua L.O.* Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication // *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.* – 1997. – **44**. – P. 976–988.
4. *Yang T.* A survey of chaotic secure communication systems // *Int. J. of Comp. Cognition.* – 2002. – **1**. – № 1. – P. 1–41.
5. *Stoan K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications // *IEEE Trans. on Circ.Sys.* – 1993. – **40**. – P. 626–633.
6. *Dedieu H., Kennedy M.P., Hasler M.* Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits // *IEEE Trans. on Circ. Sys. II.* – 1993. – **40**. – P. 634–642.
7. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Синхронизация динамических систем в классе импульсных управлений // *Механика твердого тела.* – 2016. – Вып. 46. – С. 64–71.
8. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
9. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 275 p.
10. *Ковалев А.М., Кравченко Н.В., Неспирный В.Н.* Задачи управления и стабилизации динамических систем с импульсным управлением и неавтономные механические системы // *Автоматика и телемеханика.* – 2007. – № 8. – С. 163–179.

V.N. Nesporny

Mutual synchronization of two Lorenz systems in the class of impulsive controls

The output synchronization problem for two dynamical systems of the same structure is investigated. The method of mutual synchronization for two linked systems with chaotic trajectories via impulsive control is proposed. Sufficient conditions are obtained, under which this approach ensures an asymptotic convergence of the trajectories of the system. As an example, two Lorenz systems are considered, and impulsive control, which synchronizes trajectories of these systems, is constructed.

Keywords: *synchronization problem, impulsive control, Lorenz system.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк

vetal_n@mail.ru

Получено 10.09.18