

УДК 531.38

©2009. Г.М. Панахов, Г.М. Аббасов, А.Н. Омрани

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ АДСОРБЦИИ

В работе рассматривается модель нагнетания в пласт нефтяных месторождений смеси воды с композицией химических реагентов, меняющих гидродинамические характеристики пластовых флюидов. Полученная модель сводится к уравнениям одномерной фильтрации с учетом уравнения адсорбции и конвективной диффузии. На основе метода прогонки предложены конечно-разностные алгоритмы моделирования в сеточной области исследуемого процесса. Приведены оценки погрешности аппроксимации и установлена точность аппроксимации по времени и состоянию системы.

Закачка в пласт химических реагентов растворов полимера, содержащих растворенные и взвешенные вещества, сопровождается их диффузией с пластовым флюидом и массообменом с твердой фазой скелета горной породы. При этом основными видами массообмена являются процессы сорбции и десорбции, при которых макромолекулы распределяются определенным образом между твердой фазой и раствором.

Адсорбция растворов полимеров на поверхности твердого тела определяет особенности структуры граничного слоя, характер упаковки макромолекул, а, следовательно, подвижность цепей, их релаксационные и другие свойства. Процессы адсорбции играют существенную роль при формировании закупоривающих свойств высоко проницаемых пор пласта нефтяных месторождений [2–3].

В работе представлены результаты численного моделирования процесса заводнения нефтеносного пласта, проводимого с применением композиции химических реагентов, добавляемых к воде, нагнетаемой в пласт, что способно существенно менять гидродинамические характеристики пластовых флюидов. За основу математической модели принимается уравнение одномерной фильтрации с учетом конвективной диффузии, а также уравнения сохранения полимерного вещества с учетом кинетики сорбционного процесса. Процесс адсорбции предполагается равновесным. Связь адсорбции с концентрацией задается изотермой Генри. С учетом явлений адсорбции и конвективной диффузии уравнение при $\vartheta = \vartheta_0 - const$ имеет вид [2–5].

$$\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial(mU)}{\partial t} + \frac{\partial a_s}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $m = m(x, t)$ – пористость среды, $U = U(x, t)$ – показатель концентрации адсорбента в сечении пористой трубки, отстоящей от начала слоя на расстоянии x , D – коэффициент диффузии. Между пористостью $m(x, t)$ и адсорбцией имеется следующая связь:

$$m(x, t) = m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta} U(x, t). \quad (2)$$

Здесь Γ – коэффициент Генри, δ – плотность сорбирующего вещества в твердой фазе (начальная пористость, в частности, для раствора ПАА $\delta = 1,1$ г/м³).

При линейной изотерме

$$a_s(x, t) = \Gamma C_*(x, t). \quad (3)$$

Предположим, что выполнено условие

$$C_*(x, t) = \frac{U(x, t)}{2}. \quad (4)$$

Тогда из (1)–(4) имеем:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \pm \frac{\Gamma}{2\delta} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial(mU)}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} U + m \frac{\partial U}{\partial t} = [m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U + 1)] \frac{\partial U}{\partial t}.$$

В результате уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} + [m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U + 1)] \frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) является уравнением параболического типа и может быть исследовано численными методами. Дополним уравнение (5) следующими начальными и граничными условиями:

$$U(x, t)|_{x=0} = U(0, t) = U_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$U(x, t)|_{t=0} = U(x, 0) = U_1(x), \quad x \in (0, 1], \quad (7)$$

$$a(x, t)|_{t=0} = a(x, 0) = a_0(x), \quad x \in (0, 1], \quad (8)$$

$$m(x, t)|_{t=0} = m(x, 0) = m_0(x), \quad x \in (0, 1], \quad (9)$$

Решение задач (5)–(9) будем искать с помощью методов приближенных вычислений, а именно методом конечных разностей [6, 7]. Введем прямоугольную сеточную область $W_h^\tau = D_h \times D_\tau$, где

$$D_h = \{x_k = kh, k = 0, 1, \dots, K, x_K = 1\}, \quad (10)$$

$$D_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, t_N = T\}. \quad (11)$$

В узловых точках $(x, t) \equiv (x_k, t_n) \in W_h^\tau$ уравнение (5) заменим дискретным соотношением

$$\begin{aligned} & \vartheta \frac{U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}[U(x, t) + 1]\} \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} = \\ & = D \frac{U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (12) представлено в виде явной разностной схемы, которая условно устойчива. Приведем его к каноническому виду, разрешая относительно $U_k^n(x, t + \Delta t)$ на $n + 1$ -ом временном слое. Получаем

$$U_k^n(x, t + \Delta t) = (A + B)U(x - \Delta x, t) + (1 - 2B)U(x, t) + (B - A)U(x + \Delta x, t), \quad (13)$$

где

$$A = \frac{\vartheta \Delta t}{2\Delta x \{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U + 1)\}}, \quad B = \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2 \{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U + 1)\}},$$

$\Delta x, \Delta t$ – шаги дискретизации сетки W_h^τ по переменным x и t соответственно.

Достаточным условием положительности коэффициентов уравнения (13) является

$$A \leq B \leq 0,5 \quad (14)$$

Неравенство (14) равносильно условию

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2 \min(B; 0,5). \quad (15)$$

Полагая $x = x_k, t = t_n, k = 0, 1, \dots, K, n = 0, 1, \dots, N$, с помощью выражения (13) вычисляем последовательно значения $U(x, t)$ во всех точках сеточной области $W_h^\tau : U_0^0, U_1^0, \dots, U_K^0, U_0^1, U_1^1, \dots, U_K^1, \dots, U_0^N, U_1^N, \dots, U_K^N$.

Для определения устойчивости разностной схемы (13) введем сеточную норму

$$\max_k |U(x_k, t_n)| = \max_k |U_k^n| = \|\bar{U}^n\|. \quad (16)$$

Из условий (15) и положительности коэффициентов уравнения (13) следует, что

$$\|U(x_k, t_{n+1})\| \leq \|\bar{U}(x_k, t_n)\|. \quad (17)$$

Поэтому экстремальное значение решения конечно-разностной схемы (13) достигается либо на границах области ($k = 0, k = K$), либо на начальном слое ($n = 0$).

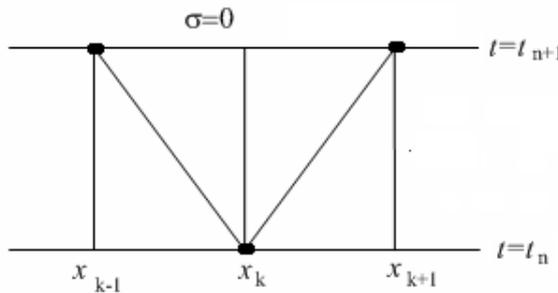


Рис. 1. Шаблон дискретизации для явной разностной схемы, $\sigma = 0$

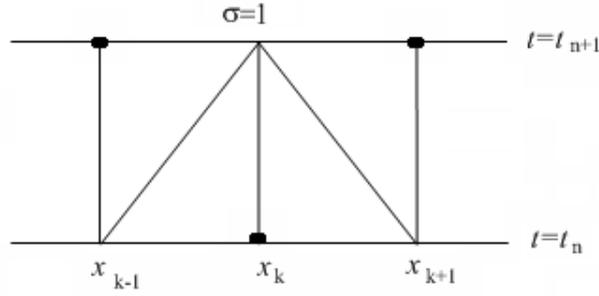


Рис. 2. Шаблон дискретизации для неявной разностной схемы, $\sigma = 1$

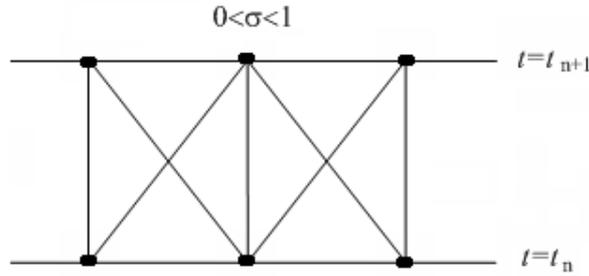


Рис. 3. Шаблон дискретизации для явной и неявной разностных схем, $0 < \sigma < 1$

Аппроксимируем уравнение (5) с помощью неявной разностной схемы (рис.2)

$$\vartheta \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \left\{ m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta} [U(x, t) + 1] \right\} \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} = D \frac{U(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2U(x, t + \Delta t) + U(x - \Delta x, t + \Delta t)}{(\Delta x)^2}. \quad (18)$$

Умножая обе части уравнения (18) на множитель

$$\frac{\Delta t}{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta} [U(x, t) + 1]},$$

приводим его к каноническому виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta \Delta t}{2\Delta x [m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta} [U(x, t) + 1]]} [U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)] + U(x, t + \Delta t) - U(x, t) = \\ & = \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2 [m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta} [U(x, t) + 1]]} [U(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2U(x, t + \Delta t) + U(x - \Delta x, t + \Delta t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая $U(x, t) = U(x_k, t_n) = U_k^n$, уравнение (19) можно переписать в виде

$$(B_k^n + A_k^n)U_{k-1}^{n+1} + (1 - 2B_k^n)U_k^{n+1} + (B_k^n - A_k^n)U_{k+1}^{n+1} = U_k^n \quad (20)$$

или

$$a_k^n U_{k-1}^{n+1} + b_k^n U_k^{n+1} + c_k^n U_{k+1}^{n+1} = U_k^n, \quad (21)$$

где

$$A_k^n = \frac{\vartheta \Delta t}{2\Delta x \{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U_k^n + 1)\}}, \quad B_k^n = \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2 \{m_0 \pm \frac{\Gamma}{2\delta}(U_k^n + 1)\}},$$

$$a_k^n = B_k^n + A_k^n, \quad b_k^n = 1 - 2B_k^n, \quad c_k^n = B_k^n - A_k^n.$$

Уравнение (21) может также быть записано в матричном виде:

$$A_{u,k}^{n+1} U^{n+1} = B_{u,k}. \quad (22)$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений для определения значений функции U_k^{n+1} , $k = \overline{0, K}$, $n = \overline{0, N}$ в узлах сеточной области W_h^τ временного слоя $n + 1$.

Рассмотрим теперь комбинацию явной и неявной разностных схем. С этой целью перепишем уравнения (12) и (13) в операторном виде

$$\vartheta \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} = D \frac{U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} -$$

$$- \vartheta \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \equiv L_1 U_k^n, \quad (23)$$

$$\vartheta \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} = D \frac{U(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2U(x, t + \Delta t) + U(x - \Delta x, t - \Delta t)}{(\Delta x)^2} -$$

$$- \vartheta \frac{U(x + \Delta x, t + \Delta t) - U(x - \Delta x, t + \Delta t)}{2\Delta x} \equiv L_2 U_k^{n+1}. \quad (24)$$

Умножая равенства (23) и (24) на числовые параметры σ и $1 - \sigma$, соответственно, и складывая полученные выражения, получаем однопараметрическое семейство комбинаций явных и неявных схем:

$$\vartheta \frac{U_k^{n-1} - U_k^n}{\Delta t} = \sigma L_1 U_k^n + (1 - \sigma) L_2 U_k^{n+1}, \quad (25)$$

где $0 \leq \sigma \leq 1$. В частности, при $\sigma = 0$ получаем неявную разностную схему, а при $\sigma = 1$ явную схему численного интегрирования уравнения (5). Отметим также, что метод шеститочечной симметричной схемы Крапка-Никольсона получается из (25) при $\sigma = 0,5$.

В формулах (24) и (25) L_1, L_2 являются линейными разностными операторами. Целесообразность их использования в виде смешанной разностной схемы объясняется следующими причинами.

В явной разностной схеме при переходе от n -го временного слоя на слой $n + 1$ число арифметических операций минимально и пропорционально K – числу разбиений области $D_h = \{x_k = kh, k = 0, 1, \dots, K\}$. Однако, получаемое при этом решение

является условно устойчивым, т.е. устойчивым при малом времени t . Преимущество неявной разностной схемы заключается в том, что решение задачи абсолютно устойчиво, но число арифметических действий пропорционально M^3 .

Исследуем погрешность предложенной аппроксимации решения уравнения (5). Для этого положим

$$P_k^n = U(x_k, t_n) + \delta U_k^n, \quad (26)$$

где $U(x_k, t_n)$ точное решение уравнения (5), P_k^n – приближенное решение конечно-разностного аналога уравнения (5) в сеточной области W_h^τ , δU_k^n – погрешность. Подставляя (26) в (5) и считая $U(x, t)$ гладкой функцией, при малых $\Delta x, \Delta t$ можем записать

$$\vartheta \frac{\delta U_k^{n+1} - \delta U_k^n}{\Delta t} = \sigma \delta P_k^{n+1} + (1 - \sigma) L_2 \delta P_k^n + \left[\vartheta \frac{\partial U}{\partial t} - L_1 U \right]_k^n + O(\Delta t, \Delta x^2). \quad (27)$$

Так как $U(x_k, t_n)$ точное решение в сеточной области W_h^τ , то

$$\left[\vartheta \frac{\partial U}{\partial t} - L_1 U \right]_k^n = 0. \quad (28)$$

Сравнивая (26) с (25) заключаем, что решение исходной задачи удовлетворяет (5) с точностью до погрешности аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x^2)$, т.е. сеточное уравнение аппроксимирует исходную задачу (5) первым порядком точности по времени t и вторым порядком точности по Δx .

Уравнение (25) можно записать в виде (22):

$$A_{u,k}^{n+1} U^{n+1} = B_{u,k}^n. \quad (29)$$

Матрица $A_{u,k} = \left\{ a_{u,i}^j \right\}_{j=1, \overline{N}}^{i=1, \overline{M}}$ является матрицей трехдиагонального типа, которая образована с помощью компонент трех векторов

$$\begin{cases} a_u = (a_{u,1}, a_{u,1}, \dots, a_{u,K}), \\ b_u = (b_{u,1}, b_{u,1}, \dots, b_{u,K}), \\ c_u = (c_{u,1}, c_{u,1}, \dots, c_{u,K}). \end{cases} \quad (30)$$

Уравнение (29) запишем в компактном виде, удобном для программирования, определяя координаты этих векторов по следующим алгоритмам:

$$\begin{cases} a_{u,1}^n = 0; a_{u,k} = a_{u,k}^n; k = \overline{1, K}, \\ c_{u,K} = 0; c_{u,k} = c_{u,k}^n; k = n - 1, n = \overline{1, K - 1}, \\ b_{u,k} = a_{u,k,k}, k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (31)$$

Таким образом, трёхдиагональная матрица $A_{u,k}^n$ и вектор правой части с размерностью K $B_{u,k}^n$ заданы в n -ом временном слое. Решение ищется в $n + 1$ -ом временном

слое. Из полученных оценок следует сходимость сеточного решения к точному решению исходного уравнения (5). Система алгебраических уравнений (29) решается с помощью метода прогонки. Необходимое условие его устойчивости имеет вид:

$$|b_{u,k}^n| \geq |a_{u,k}^n| + |c_{u,k}^n|, \quad k = \overline{1, K}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (32)$$

Отметим, что преимущество метода прогонки, используемого в работе, заключается в его высокой экономичности. Требуемое количество арифметических операций имеет порядок $K \sim \frac{1}{h}$, т.е. минимально.

Таким образом, в работе были получены эффективные алгоритмы решения задачи одномерной фильтрации жидкости с учетом уравнения адсорбции и конвективной диффузии. Уравнение, описывающее исследуемый процесс, дискретизируется в сеточной области и полученные соотношения решаются методом прогонки. Приведены оценки погрешности аппроксимации и показано, что точность аппроксимации имеет первый порядок по временному шагу разбиения Δt и второй порядок по пространственному шагу Δx .

1. *Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н.* Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи. Нелинейность, неравновесность, неоднородность. – Уфа: Гилем, 1999, 464с.
2. *Халимов Э.М., Сатаров М.М., Зайнетдинов Ю.З., Галлямов М.Н.* Повышение эффективности разработки нефтяных месторождений Башкирии. – Уфа. Башкнигоиздат, 1972, 190с.
3. *Швецов И.А., Маньшин В.Н.* Физико-химические методы увеличения нефтеотдачи пластов. – Самара, 2000, 336с.
4. *Рабинович Н.Р.* Инженерные задачи механики сплошной среды в бурении. – М: Недра, 1987, 270с.
5. *Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Басниев К.С. и др.* Технология добычи природных газов, 1987, 414с.
6. *Енттов В.М., Мусин Р.М.* Микромеханика нелинейных двухфазных течений в пористых средах. Сеточное моделирование и перколяционный анализ // Изв. РАН, МЖГ, 1997, №2.
7. *Аббасов Г.М.* Численное исследование процесса вытеснения жидкости в двухфазном нефтеносном пласте // Труды ИПММ НАН Украины. – Т.14. – 2007. – С.3-7.