

УДК 004.031:539.3:534.1

©2019. В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЧАСТОТ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАКРЕПЛЕННЫХ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Представлена разработка теоретической численно-аналитической методики получения двух видов нечетко-множественных оценок для значений основной циклической частоты собственных поперечных колебаний прямоугольной жестко закрепленной в четырех угловых точках ортотропной композитной пластины со свободными краями при учете неопределенности в задании исходных физико-механических и геометрических параметров расчетной модели конструкции, обусловленной разбросами в экспериментальных данных и технологическими факторами изготовления. Методика базируется на переходе к нечетко-множественным аргументам с использованием модифицированной формы эвристического принципа расширения в расчетных соотношениях детерминистической версии рассматриваемой модели. Представлены этапы реализации алгоритма применения описываемой методики и примеры расчетов для случаев нечетко-интервального описания неопределенных экзогенных параметров и случая задания их нечеткими множествами с функциями принадлежности, имеющими форму функций плотности нормальных статистических распределений.

Ключевые слова: прямоугольные ортотропные пластины; поперечные колебания; закрепление в угловых точках; основная собственная частота; нечеткие оценки; разброс исходных параметров; нечетко-множественное описание; распространение детерминистической модели; эвристический принцип обобщения.

Введение. Исследование характеристик поперечных упругих колебаний тонких композитных пластин прямоугольной формы относится к задачам с широким спектром практической востребованности ввиду распространенного применения несущих элементов данного типа в современных конструкциях машин, приборов и сооружений [1, 2]. Применительно к пластинам такого вида рассматриваются различные варианты их фиксации в конструкциях и при этом доминируют исследования, в которых по всей длине прямолинейных участков границ на краях пластин формулируются условия жесткого закрепления, шарнирного опирания либо отсутствия напряжений. Вместе с тем, к весьма распространенным видам фиксации пластин рассматриваемого типа, в частности, при моделировании печатных плат электронных устройств, несущих панелей энергетических устройств и аппаратов относятся разнообразные варианты их точечного закрепления, в том числе жесткой фиксации в угловых точках. Актуальные численно-аналитические исследования моделей колебаний пластин данного типа, ориентированные на прикладные инженерные применения, рассматриваются в достаточно ограниченном числе работ [1–4].

Важную роль в обеспечении корректности результатов предпроектного математического моделирования упругих колебаний анизотропных композит-

ных пластин для использования в перечисленных научно-технических областях играют также оценки влияния разбросов в исходных данных физико-механических и геометрических параметров этих конструктивных элементов на амплитудно-частотные характеристики колебаний. Получение подобных оценок на основе методов вероятностного стохастического анализа [5, 6] применительно к рассматриваемым задачам зачастую затрудняется несоответствием требований этих методов к характеру входной неопределенной информации и реальной природы исходных инженерных данных, доступных при анализе моделей.

Цель настоящего исследования заключается в разработке алгоритма теоретического анализа актуальной научно-технической задачи получения оценок для неопределенной характеристики основной частоты резонансных колебаний тонкой жестко закрепленной во всех четырех угловых точках прямолинейно-ортотропной композитной пластины прямоугольного очертания со свободными граничными поверхностями, основывающегося на применении методов теории нечетких множеств [7–11].

1. Соотношения прикладной модели расчета основной резонансной частоты. Основой разрабатываемого алгоритма является полученное в работе [4] расчетное соотношение для значения основной резонансной частоты в детерминистической модели изгибных колебаний тонкой жестко закрепленной в угловых точках прямолинейно-ортотропной пластины прямоугольного очертания со свободными граничными поверхностями. Для пластины толщины $2h$ со срединной плоскостью, занимающей в координатной системе $Ox_1x_2x_3$ область $S = \{x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$, в случае задания в качестве физико-механических характеристик ортотропного композиционного материала модулей Юнга E_1, E_2 , коэффициентов Пуассона ν_{12}, ν_{21} , модуля сдвига G_{12} и параметра плотности ρ , полученное с применением вариационной методики значение низшей частоты собственных поперечных колебаний ω определяется из соотношения

$$\omega = \Phi(l_1, l_2, h, \rho, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}) = (l_1 l_2)^{-1} (\eta B_\rho^{-1})^{1/2} (D_{11} D_{22})^{1/4}, \quad (1)$$

в котором $D_{ij} = (2h^3/3)b_{ij}$ – параметры изгибных жесткостей, а величины b_{ij} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{22} a_{66} \Delta^{-1}, & b_{12} &= -a_{12} a_{66} \Delta^{-1}, \\ b_{22} &= a_{11} a_{66} \Delta^{-1}, & b_{66} &= (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \Delta^{-1}, \\ \Delta &= (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66}, & a_{11} &= E_1^{-1}, \\ a_{22} &= E_2^{-1}, & a_{12} &= a_{21} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\ a_{66} &= (2G_{12})^{-1}, & B_\rho &= 2\rho h. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметр η в представлении (1) является наименьшим собственным числом обобщенной спектральной задачи вида

$$HX - \eta GX = 0 \quad (3)$$

с собственным вектором X и симметричными матрицами

$$\begin{aligned}
 H &= \|\gamma_{ij}\|, \quad G = \|\delta_{ij}\| \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\
 \gamma_{11} &= 2\alpha\pi^4, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 16\beta\pi^2, \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = 4(\alpha + \beta)\pi^3, \\
 \gamma_{22} &= 2\alpha^{-1}\pi^4, \quad \gamma_{23} = \gamma_{32} = 4(\alpha^{-1} + \beta)\pi^3, \quad \gamma_{33} = (\alpha^{-1} + \alpha + 2\beta + 4\lambda)\pi^4; \\
 \delta_{11} &= \delta_{22} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 16\pi^{-2}, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 4\pi^{-1}, \\
 \delta_{23} &= \delta_{32} = 4\pi^{-1}, \quad \delta_{33} = 1; \\
 \alpha &= l_2^2 l_1^{-2} (D_{11}/D_{12})^{1/2} = l_2^2 l_1^{-2} (b_{11}/b_{12})^{1/2}, \\
 \beta &= D_{12} (D_{11} D_{22})^{-1/2} = b_{12} (b_{11} b_{22})^{-1/2}, \\
 \lambda &= D_{66} (D_{11} D_{22})^{-1/2} = b_{66} (b_{11} b_{22})^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом (2)–(4) представление (1) преобразуется к виду

$$\omega = \Phi(l_1, l_2, h, \rho, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}) = h(l_1 l_2)^{-1} (\eta/(3\rho))^{1/2} (b_{11} b_{22})^{1/4}. \tag{5}$$

Соотношения (2)–(5) включаются в алгоритм прикладной модели расчета основной резонансной частоты изгибных колебаний тонкой жестко закрепленной в угловых точках прямолинейно-ортотропной пластины прямоугольного очертания со свободными граничными поверхностями и используются для последующего перехода к модели нечеткого оценивания эндогенного параметра основной собственной частоты ω .

2. Методика нечеткого оценивания параметра основной частоты собственных колебаний. Алгоритм получения нечетких оценок $\tilde{\omega}$ для значений ω при наличии разбросов в значениях исходных параметров $l_1, l_2, h, \rho, E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$, обусловленных технологическим факторами, основывается на гипотезе о нечетко-множественном описании неопределенных экзогенных параметров и на последующем применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения [9–11] к четко-му аналитическому функциональному соотношению (1) в процессе распространения области определения (1) на аргументы нечетко-множественного типа. При этом рассматриваются два варианта применения такой методики, отличающиеся гипотезами о характере представления неопределенной исходной информации.

В первом случае неконтрастные величины экзогенных параметров описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{h}, \tilde{\rho}, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\nu}_{12}, \tilde{\nu}_{21}, \tilde{G}_{12}$ с кортежами реперных точек [12, 13]

$$\begin{aligned}
 \tilde{l}_1 &= (l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}), \quad \tilde{l}_2 = (l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}), \\
 \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \\
 \tilde{E}_1 &= (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}), \quad \tilde{E}_2 = (E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24}), \\
 \tilde{\nu}_{12} &= (\nu_{121}, \nu_{122}, \nu_{123}, \nu_{124}), \quad \tilde{\nu}_{21} = (\nu_{211}, \nu_{212}, \nu_{213}, \nu_{214}), \\
 \tilde{G}_{12} &= (G_{121}, G_{122}, G_{123}, G_{124}),
 \end{aligned} \tag{6}$$

и с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{l}_1}(l_1)$, $\mu_{\tilde{l}_2}(l_2)$, $\mu_{\tilde{h}}(h)$, $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho)$, $\mu_{\tilde{E}_1}(E_1)$, $\mu_{\tilde{E}_2}(E_2)$, $\mu_{\tilde{\nu}_{12}}(\nu_{12})$, $\mu_{\tilde{\nu}_{21}}(\nu_{21})$, $\mu_{\tilde{G}_{12}}(G_{12})$. Введенные нечеткие интервалы представляются разложениями по множествам α -срезов в форме

$$\begin{aligned}
 \tilde{l}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [l_{1\alpha}, \bar{l}_{1\alpha}], & \tilde{l}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [l_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}], \\
 l_{1\alpha} &= (1 - \alpha)l_{11} + \alpha l_{12}, & \bar{l}_{1\alpha} &= \alpha l_{13} + (1 - \alpha)l_{14}; \\
 l_{2\alpha} &= (1 - \alpha)l_{21} + \alpha l_{22}, & \bar{l}_{2\alpha} &= \alpha l_{23} + (1 - \alpha)l_{24}; \\
 \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], & \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \\
 \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \bar{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\
 \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha \rho_2, & \bar{\rho}_\alpha &= \alpha \rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4; \\
 \tilde{E}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{1\alpha}, \bar{E}_{1\alpha}], & \tilde{E}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{2\alpha}, \bar{E}_{2\alpha}], \\
 \underline{E}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)E_{11} + \alpha E_{12}, & \bar{E}_{1\alpha} &= \alpha E_{13} + (1 - \alpha)E_{14}; \\
 \underline{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{21} + \alpha E_{22}, & \bar{E}_{2\alpha} &= \alpha E_{23} + (1 - \alpha)E_{24}; \\
 \tilde{\nu}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{12\alpha}, \bar{\nu}_{12\alpha}], & \tilde{\nu}_{21} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{21\alpha}, \bar{\nu}_{21\alpha}], \\
 \underline{\nu}_{12\alpha} &= (1 - \alpha)\nu_{121} + \alpha \nu_{122}, & \bar{\nu}_{12\alpha} &= \alpha E_{123} + (1 - \alpha)E_{124}; \\
 \underline{\nu}_{21\alpha} &= (1 - \alpha)\nu_{211} + \alpha \nu_{212}, & \bar{\nu}_{21\alpha} &= \alpha E_{213} + (1 - \alpha)E_{214}; \\
 \tilde{G}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{12\alpha}, \bar{G}_{12\alpha}], \\
 \underline{G}_{12\alpha} &= (1 - \alpha)G_{121} + \alpha G_{122}, & \bar{G}_{12\alpha} &= \alpha G_{123} + (1 - \alpha)G_{124}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Во втором из рассматриваемых вариантов алгоритма получения нечетких оценок $\tilde{\omega}$ полагается, что функции принадлежности $\mu_{\tilde{l}_1}(l_1)$, $\mu_{\tilde{l}_2}(l_2)$, $\mu_{\tilde{h}}(h)$, $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho)$, $\mu_{\tilde{E}_1}(E_1)$, $\mu_{\tilde{E}_2}(E_2)$, $\mu_{\tilde{\nu}_{12}}(\nu_{12})$, $\mu_{\tilde{\nu}_{21}}(\nu_{21})$, $\mu_{\tilde{G}_{12}}(G_{12})$ для нечетко-множественных неопределенных экзогенных параметров имеют представления, соответствующие по форме функциям плотности для нормальных статистических распределений [14]:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\tilde{l}_1}(l_1) &= \exp(-(l_1 - m_{*l_1})^2 / (2\sigma_{*l_1}^2)), \\
 \mu_{\tilde{l}_2}(l_2) &= \exp(-(l_2 - m_{*l_2})^2 / (2\sigma_{*l_2}^2)), \\
 \mu_{\tilde{h}}(h) &= \exp(-(h - m_{*h})^2 / (2\sigma_{*h}^2)), \\
 \mu_{\tilde{\rho}}(\rho) &= \exp(-(\rho - m_{*\rho})^2 / (2\sigma_{*\rho}^2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{\tilde{E}_1}(E_1) &= \exp(-(E_1 - m_{*E_1})^2 / (2\sigma_{*E_1}^2)), \\
 \mu_{\tilde{E}_2}(E_2) &= \exp(-(E_2 - m_{*E_2})^2 / (2\sigma_{*E_2}^2)), \\
 \mu_{\tilde{\nu}_{12}}(\nu_{12}) &= \exp(-(\nu_{12} - m_{*\nu_{12}})^2 / (2\sigma_{*\nu_{12}}^2)), \\
 \mu_{\tilde{\nu}_{21}}(\nu_{21}) &= \exp(-(\nu_{21} - m_{*\nu_{21}})^2 / (2\sigma_{*\nu_{21}}^2)), \\
 \mu_{\tilde{G}_{12}}(G_{12}) &= \exp(-(G_{12} - m_{*G_{12}})^2 / (2\sigma_{*G_{12}}^2)),
 \end{aligned} \tag{8}$$

с параметрами средних значений m_{*l_1} , m_{*l_2} , m_{*h} , $m_{*\rho}$, m_{*E_1} , m_{*E_2} , $m_{*\nu_{12}}$, $m_{*\nu_{21}}$, $m_{*G_{12}}$ и среднеквадратических отклонений σ_{*l_1} , σ_{*l_2} , σ_{*h} , $\sigma_{*\rho}$, σ_{*E_1} , σ_{*E_2} , $\sigma_{*\nu_{12}}$, $\sigma_{*\nu_{21}}$, $\sigma_{*G_{12}}$. В этом случае

$$\begin{aligned}
 l_{1\alpha} &= m_{*l_1} - \sigma_{*l_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{l}_{1\alpha} &= m_{*l_1} + \sigma_{*l_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 l_{2\alpha} &= m_{*l_2} - \sigma_{*l_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{l}_{2\alpha} &= m_{*l_2} + \sigma_{*l_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{h}_\alpha &= m_{*h} - \sigma_{*h}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{h}_\alpha &= m_{*h} + \sigma_{*h}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{\rho}_\alpha &= m_{*\rho} - \sigma_{*\rho}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\rho}_\alpha &= m_{*\rho} + \sigma_{*\rho}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{E}_{1\alpha} &= m_{*E_1} - \sigma_{*E_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{E}_{1\alpha} &= m_{*E_1} + \sigma_{*E_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{E}_{2\alpha} &= m_{*E_2} - \sigma_{*E_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{E}_{2\alpha} &= m_{*E_2} + \sigma_{*E_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{\nu}_{12\alpha} &= m_{*\nu_{12}} - \sigma_{*\nu_{12}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\nu}_{12\alpha} &= m_{*\nu_{12}} + \sigma_{*\nu_{12}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{\nu}_{21\alpha} &= m_{*\nu_{21}} - \sigma_{*\nu_{21}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\nu}_{21\alpha} &= m_{*\nu_{21}} + \sigma_{*\nu_{21}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{G}_{12\alpha} &= m_{*G_{12}} - \sigma_{*G_{12}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{G}_{12\alpha} &= m_{*G_{12}} + \sigma_{*G_{12}}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

На основе представлений (7), (9), согласно модифицированному α -уровневому варианту эвристического принципа расширения и с учетом свойств

$$\partial\Phi/\partial h > 0, \quad \partial\Phi/\partial\rho < 0,$$

справедливых во всей области определения функции $\Phi(l_1, l_2, h, \rho, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12})$, для нечеткой характеристики $\tilde{\omega}$ может быть записано выражение

$$\tilde{\omega} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha], \tag{10}$$

$$\underline{\omega}_\alpha = \inf_{\substack{l_j \in [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ E_j \in [\underline{E}_{j\alpha}, \bar{E}_{j\alpha}] \\ \nu_{12} \in [\underline{\nu}_{12\alpha}, \bar{\nu}_{12\alpha}] \\ G_{12} \in [\underline{G}_{12\alpha}, \bar{G}_{12\alpha}]} \Phi(l_1, l_2, \underline{h}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}),$$

$$\bar{\omega}_\alpha = \sup_{\substack{l_j \in [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ E_j \in [\underline{E}_{j\alpha}, \bar{E}_{j\alpha}] \\ \nu_{12} \in [\underline{\nu}_{12\alpha}, \bar{\nu}_{12\alpha}] \\ G_{12} \in [\underline{G}_{12\alpha}, \bar{G}_{12\alpha}]} \Phi(l_1, l_2, \bar{h}_\alpha, \underline{\rho}_\alpha, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}).$$

Представление (10) определяет подлежащий численной реализации алгоритм формирования нечетких оценок $\tilde{\omega}$ при учете разбросов в значениях экзогенных параметров $l_1, l_2, h, \rho, E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$.

3. Результаты вычислительных экспериментов. Применение описанной методики получения нечетких оценок для основной циклической частоты собственных поперечных колебаний прямоугольных ортотропных композитных пластин с указанным типом закрепления рассматривается для двух случаев задания их неопределенных физико-механических и геометрических характеристик.

При нечетко-интервальном описании разбросов в величинах экзогенных параметров расчетной модели применительно к пластине из углепластика [15] данные параметры задавались следующими кортежами реперных значений с размерностями в системе СИ:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= (0.078, 0.08, 0.081, 0.082) \text{ [м]}, \\ \tilde{l}_2 &= (0.047, 0.049, 0.051, 0.052) \text{ [м]}, \\ \tilde{h} &= (0.9, 0.98, 1.01, 1.03) [10^{-3}\text{м}], \\ \tilde{\rho} &= (1.45, 1.65, 1.75, 2.0) [10^3\text{кг/м}^3], \\ \tilde{E}_1 &= (8.2, 8.4, 8.45, 8.65) [10^{10}\text{Па}], \\ \tilde{E}_2 &= (4.1, 4.4, 4.25, 4.4) [10^{10}\text{Па}], \\ \tilde{\nu}_{12} &= (0.205, 0.21, 0.213, 0.23), \\ \tilde{G}_{12} &= (1.2, 1.24, 1.26, 1.32) [10^{10}\text{Па}]. \end{aligned}$$

Распределения функций принадлежности для описанных нечетко-интервальных аргументов и для получаемой в рамках разработанной методики на основании соотношения (10) функции принадлежности эндогенного нечетко-множественного параметра $\tilde{\omega}$ представлены на рис. 1–9. В расчетах при разбиении на α -срезы осуществлялось варьирование параметра α с равномерным шагом $\Delta\alpha = 0.01$.

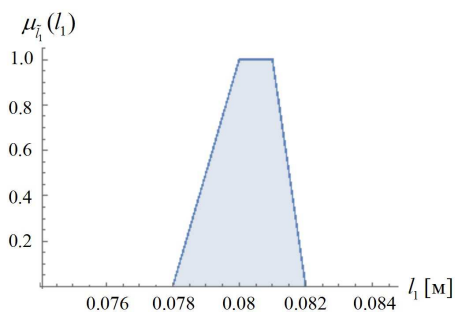


Рис. 1.

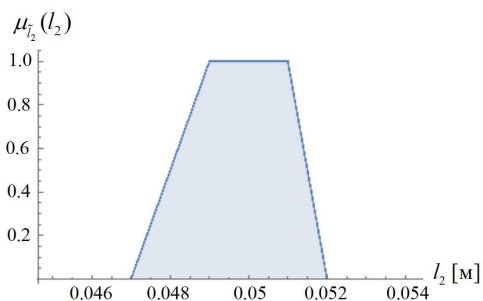


Рис. 2.

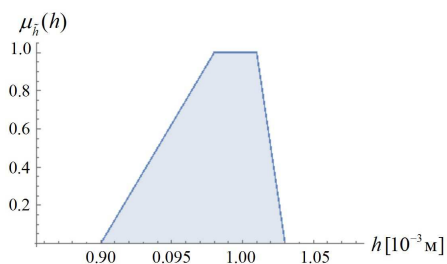


Рис. 3.

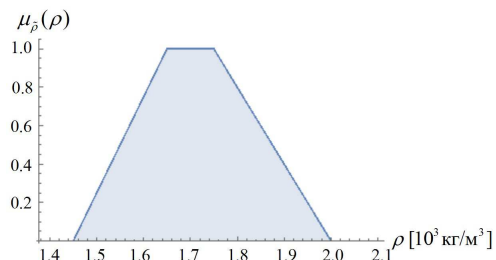


Рис. 4.

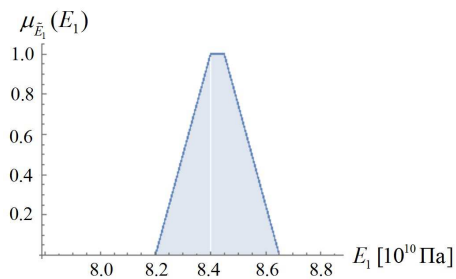


Рис. 5.

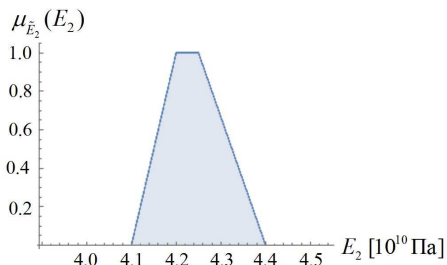


Рис. 6.

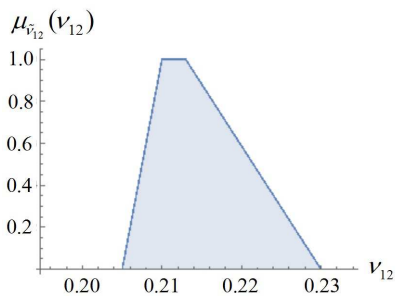


Рис. 7.

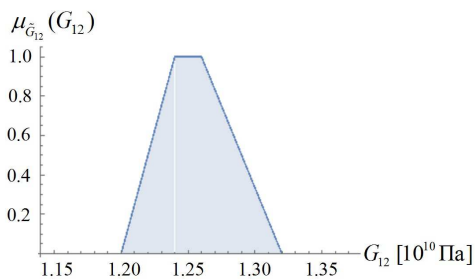


Рис. 8.

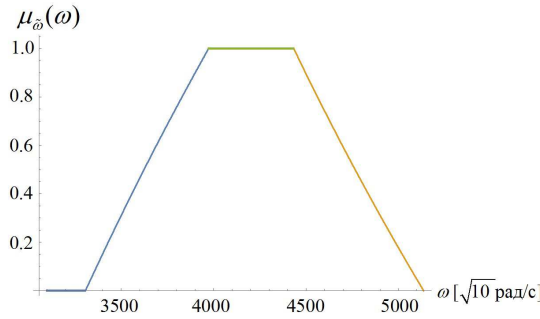


Рис. 9.

В случае задания функций принадлежности для нечетко-множественных неопределенных экзогенных характеристик представлениями (8), соответствующими по форме нормальным статистическим распределениям [15], полагалось, что параметры средних значений и среднеквадратических отклонений имеют величины:

$$\begin{aligned}
 m_{*l_1} &= 0.08 \text{ [М]}, & m_{*l_2} &= 0.05 \text{ [М]}, \\
 m_{*h} &= 0.001 \text{ [М]}, & m_{*\rho} &= 1.725 \text{ [} 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{]}, \\
 m_{*E_1} &= 8.4457 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}, & m_{*E_2} &= 4.2026 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}, \\
 m_{*\nu_{12}} &= 0.21, & m_{*G_{12}} &= 1.2410 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}, \\
 \sigma_{*l_1} &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ [М]}, & \sigma_{*l_2} &= 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ [М]}, \\
 \sigma_{*h} &= 5 \cdot 10^{-5} \text{ [М]}, & \sigma_{*\rho} &= 8.625 \text{ [} 10^{-2} \text{ кг/м}^3 \text{]}, \\
 \sigma_{*E_1} &= 0.422285 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}, & \sigma_{*E_2} &= 0.21013 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}, \\
 \sigma_{*\nu_{12}} &= 0.0105, & \sigma_{*G_{12}} &= 0.06205 \text{ [} 10^{10} \text{ Па]}.
 \end{aligned}$$

Получаемые при таком варианте описания нечетко-множественных экзогенных параметров расчетной модели распределения соответствующих функций принадлежности и функции принадлежности для эндогенного нечетко-множественного параметра $\tilde{\omega}$ представлены на рис. 10–18.

Полученные оценки характеризуют относительные уровни степени уверенности в том, что основная циклическая частота собственных поперечных колебаний прямоугольной жестко закрепленной в четырех угловых точках ортотропной композитной пластины со свободными краями будет принимать соответствующие расчетные значения при учете в модели исследования задаваемых ошибок рассеяния для экзогенных параметров. На основе анализа результатов расчетов могут быть сделаны выводы о диапазонах наиболее достоверных значений определяемой собственной частоты и о границах предельно возможных разбросов в прогнозируемых значениях, что необходимо

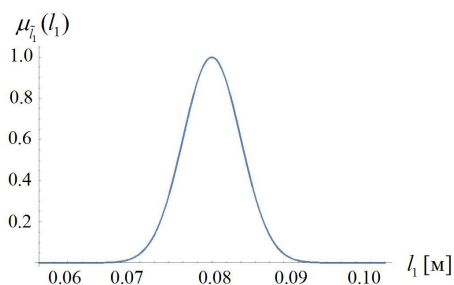


Рис. 10.

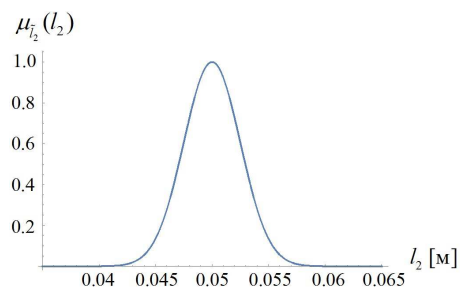


Рис. 11.

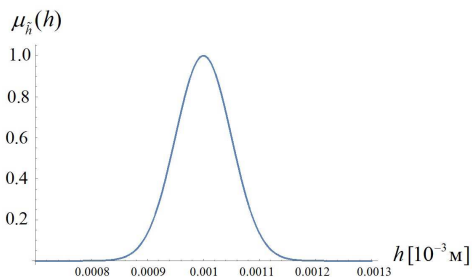


Рис. 12.

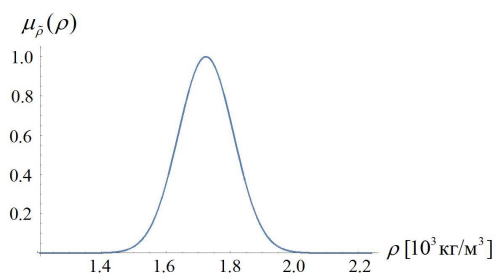


Рис. 13.

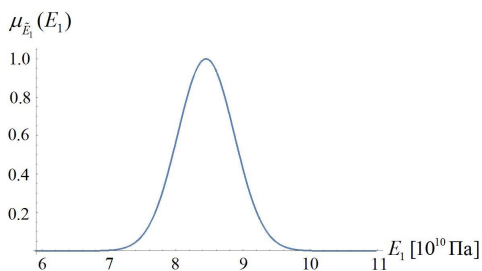


Рис. 14.

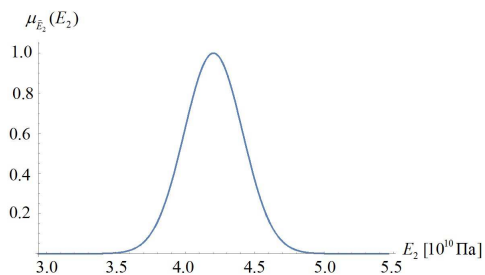


Рис. 15.

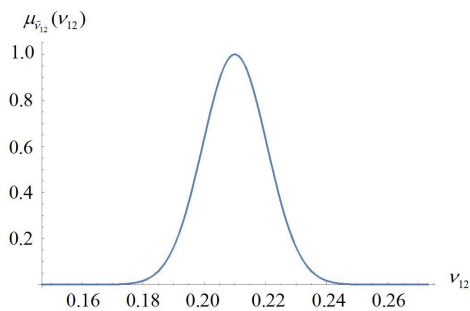


Рис. 16.

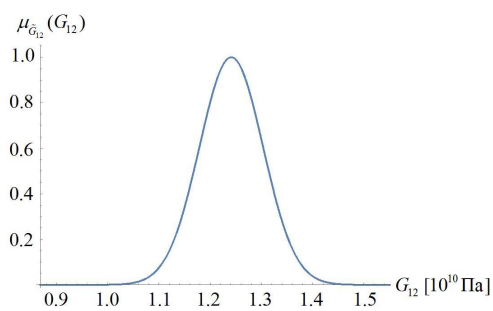


Рис. 17.

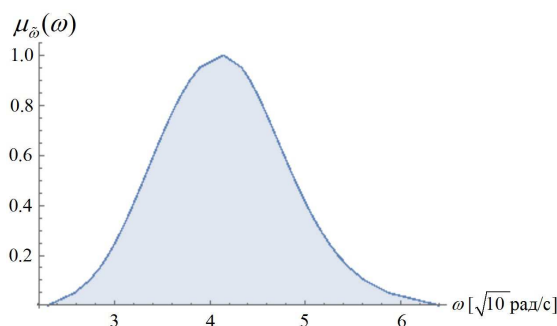


Рис. 18.

для повышения показателей эксплуатационной надежности функционирования проектируемых несущих конструкций пластинчатого типа, в частности, печатных плат радиоэлектронных устройств, приборных панелей аппаратов, подверженных высокочастотным вибрационным воздействиям.

Заключение. Результатом представленных исследований является разработка теоретической численно-аналитической методики получения двух видов нечетко-множественных оценок для значений основной циклической частоты собственных поперечных колебаний прямоугольной жестко закрепленной в четырех угловых точках ортотропной композитной пластины со свободными краями при учете неопределенности в задании исходных физико-механических и геометрических параметров расчетной модели конструкции, обусловленной разбросами в экспериментальных данных и технологическими факторами изготовления. Методика базируется на переходе к нечетко-множественным аргументам с использованием модифицированной формы эвристического принципа расширения в расчетных соотношениях детерминистической версии рассматриваемой модели. Представлены этапы реализации алгоритма применения описываемой методики и примеры расчетов для случаев нечетко-интервального описания неопределенных экзогенных параметров и случая задания их нечеткими множествами с функциями принадлежности, имеющими форму функций плотности нормальных статистических распределений.

1. *Liessa A.W.* Vibrations of plates. – CityWashington State D.C.: Acoustical Society of placecountry-region America, 1993. – 354 p.
2. *Vasiliev V.V.* Mechanics of composite Structures. – Place CityWashington State D.C.: Tailor & Francis, 2017. – 511 p.
3. *Blevins D.R.* Formulas for natural frequency and mode shape. – Malibar: Krieger Pub Co, 2001. – 506 p.
4. *Лопатин И.А.* Определение основной частоты колебаний ортотропной пластины, закрепленной в углах // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмического ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева. – 2012. – Вып. 5(45). – С. 80–84.
5. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.

6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.
7. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
8. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
9. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Изд-во Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
10. Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
11. Сторожев В.И., Сторожев С.В. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
12. Grzegorzewski P., Mrłowska E. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – **153**. – P. 115–135.
13. Ban A.I., Coroianu L.C., Grzegorzewski P. Trapezoidal approximation and Aggregation // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – **177**. – P. 45–59.
14. Сторожев С.В. Алгоритм двухпараметрической аппроксимации нормального частотного распределения нечетким интервалом // Вестн. Донецкого национального ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2014. – № 2. – С. 78–80.
15. Верещака С.М. Упругие постоянные и обобщенные характеристики жесткости материала слоистой структуры // Вестн. НТУ «ХПИ». Сб. науч. тр. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – № 36. – С. 29–40.

V.E. Bolnokin, V.I. Storozhev, Nguyen Kuok Shi, Tran Ba Le Hoang

Fuzzy evaluations in research of resonance frequencies of bending vibrations clamped in angular points rectangular composite plates

The developing of a theoretical numerical-analytical technique for obtaining of two types of fuzzy-sets estimates for the values of the first cyclic frequency of the resonance bending vibrations for a rectangular orthotropic composite plates rigidly fixed at four corner points and having free edges are presented. In methodic is realized of the accounting the uncertainty in setting the initial physical-mechanical and geometric parameters of the design model due to variations in experimental data and manufacturing technological factors. The technique is based on the transition to fuzzy-set arguments in the calculated ratios of the deterministic version of the model using a modified form of the heuristic principle of expansion under consideration. The stages of implementing the algorithm for applying the described method and examples of calculations for cases of a fuzzy-interval description of uncertain exogenous parameters and the case of defining them by fuzzy sets with membership functions in the form of density functions of normal statistical distributions are presented.

Keywords: rectangular orthotropic plates, bending vibrations, clamped fixing at corner points, first resonance frequency, fuzzy estimates, scatter errors of initial parameters, fuzzy-sets description, expansion of the deterministic model, heuristic generalization principle.

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк;
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский ун-т «МЭИ»
МОН РФ, Москва
stvistvi@mail.ru

Получено 02.09.19