УДК 517.95

И. И. Данилюк

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1. Постановка задачи. При изучении квазистационарной задачи Стефана, описывающей установившийся режим процесса кристаллизации, возникает следующая постановка. Пусть G_γ — полубесконечная вниз область, ограниченная с боков полупрямыми $\{x = \pm 1,\ y < 0\}$, а сверху достаточно гладкой кривой γ, симметричной относительно оси $x = 0$, проходящей через точки $(\pm 1, 0)$ и расположенной в полуполосе $\{-1 \leqslant x \leqslant 1, y \leqslant 0\}$. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = F(x, y), \quad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

где F — заданная вещественная функция; ω — числовой параметр. Это уравнение получается из обычного уравнения теплопроводности, если предположить, что теплофизическое состояние не зависит от времени в некоторой подвижной относительно теплоносящей среды системе координат, движущейся снизу вверх с постоянной скоростью $v > 0$, а затем перейти к безразмерным координатам x, y и безразмерной температуре $u(x, y)$.

Вещественное решение $u(x, y)$ уравнения (1) должно на γ удовлетворять условию Дирихле

$$u(x, y) = f(s), \quad (x, y) \in \gamma, \tag{2}$$

где f — заданная достаточно гладкая функция. В простейшем случае, когда кривая γ изотермична, правая часть в (2) сводится к тождественной постоянной. На вертикальной части $\Gamma = \partial G_\gamma \setminus \gamma$ границы должно удовлетворяться условие третьего рода

$$u_x \pm \omega_0 u = \pm g, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

правая часть которого считается заданной, $\omega_0 = \text{const} > 0$.

«Нерегулярность» задачи (1)—(3) определяется тремя обстоятельствами: а) неограниченностью области G_γ, вследствие чего коэффициент $\omega \neq 0$ не принадлежит никакому пространству $L_p(G_\gamma)$, как это требуется в ныне существующих теориях краевых эллиптических задач; б) негладкостью границы ∂G_γ, касательная к которой претерпевает в точках $(\pm 1, 0)$ разрыв первого рода; в) на разных частях границы $\partial G_\gamma = \Gamma + \bar{\gamma}$ рассматриваемая задача имеет различные краевые условия.

Будем считать, что длина дуги s на γ возрастает при обходе γ в отрицательном относительно G_γ направлении и имеет значение нуль в точке $(-1, 0)$. Дифференцируя (2) по s, заменим это условие двумя другими:

$$u_x \cos(s, x) + u_y \cos(s, y) = f'(s) \text{ на } \gamma,$$

$$u(-1, 0) = f(0), \tag{4}$$

эквивалентными (2) при гладких правых частях. Условия (1), (3) и (4) определяют нерегулярную задачу с наклонной производной, которую мы и будем рассматривать. В конце работы кратко остановимся на некоторых ближайших обобщениях.

2. Комплексная запись задачи и ее канонический вид. Уравнение (1) в терминах операторов по переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ можно записать в виде

$$u_{z\bar{z}} + \frac{\omega i}{4} u_z - \frac{\omega i}{4} u_{\bar{z}} = \frac{1}{4} F(x, y), \ (x, y) \in G_\gamma. \tag{5}$$

Введем также обозначения

$$\lambda(z) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma, \\ e^{-i(s,x)} & \text{на } \gamma; \end{cases} \qquad \delta(z) = \begin{cases} \pm \frac{\omega_0}{2} & \text{на } \Gamma, \ x = \pm 1; \\ 0 & \text{на } \gamma; \end{cases}$$

$$h(z) = \begin{cases} \pm \frac{g}{2} & \text{на } \Gamma, \ x = \pm 1, \\ \frac{1}{2} f' & \text{на } \gamma, \end{cases} \tag{6}$$

в силу которых условие (3) и первое равенство (4) могут быть записаны в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(z)}\, u_z\} + \delta(z)\, u = h(z), \quad z \in \partial G_\gamma. \tag{7}$$

Пусть $z = z(\zeta)$ — конформное и однолистное отображения единичного круга $G_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $\zeta = \xi + i\eta$, на G_γ, а $\zeta = \zeta(z)$ — обратная функция. Будем считать, что точки $(\pm 1, 0)$ остаются неподвижными, а бесконечно удаленная точка замыкания $G_\gamma + \partial G_\gamma$ отвечает $\zeta = -i$. Считая для простоты, что $u(\zeta) = u(z)$ при $z = z(\zeta)$, вместо (5) получаем

$$u_{\zeta\bar{\zeta}} + \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)}\, u_\zeta - \frac{i\omega}{4} z'(\zeta)\, u_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{4} |z'(\zeta)|^2 F(\zeta), \quad \zeta \in G_\zeta, \tag{8}$$

где $F(\zeta) = F[z(\zeta)]$, а $z'(\zeta)$ — производная. Условие (7) принимает вид

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(\zeta)\, z'^{-1}(\zeta)}\, u_\zeta\} + \delta(\zeta)\, u = h(\zeta), \quad |\zeta| = 1, \tag{9}$$

где $\lambda(\zeta) = \lambda[z(\zeta)]$, и аналогично для δ и h. Наша задача свелась к отысканию вещественной функции, удовлетворяющей равенствам (8), (9) и второму условию (4).

Предполагая $\bar{\gamma}$ гладкой, обозначим через φ угол наклона касательной к γ в точке $(1, 0)$ и определим ветвь $q(z) = \arg \lambda(z)$ на ∂G_γ соотношениями

$$g(z) = (s, x)(z) \text{ на } \gamma, \quad (s, x)(z) \in (-\varphi, \varphi); \ q(z) = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{10}$$

причем угол (s, x) равен φ в точке $(1, 0)$ и непрерывен на $\bar{\gamma}$. Соответственно этому полагаем $q(\sigma) = q[z(e^{i\sigma})]$. В точках $\zeta = \pm 1$ эта функция имеет скачки величины φ.

Построим голоморфную функцию

$$\chi(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}\, d\sigma, \quad |\zeta| < 1. \tag{11}$$

Легко показать, что $\chi(e^{i\sigma}) = p(\sigma) + iq(\sigma)$ при $\sigma \neq 0, \pi$, где $p(\sigma)$ — вещественная функция с конечными значениями при $\sigma \neq 0, \pi$. Кроме того, $p(\sigma)$ является 2π-периодической, $p(\sigma) = -\frac{\varphi}{\pi} \ln \sin \frac{|\sigma|}{2} + \mathcal{O}(1)$, $\pm\sigma \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\exp\{p(\sigma)\} = |\sigma|^{-\frac{\varphi}{\pi}}$ вблизи точки $\sigma = 0 \pmod{2\pi}$ и аналогично вблизи $\sigma = \pi$. Из сказанного следует, что $\lambda(\sigma) \equiv \lambda[z(e^{i\pi})] = e^{\chi(e^{i\sigma})} e^{-p(\sigma)}$, поэтому условие (9) эквивалентно следующему:

$$\operatorname{Re}\{e^{\chi(\zeta)} z'^{-1}(\zeta) u_\zeta\} + e^{p(\sigma)} \delta(\zeta) u = e^{p(\sigma)} h(\zeta), \quad \zeta = e^{i\sigma}. \tag{12}$$

Запись (8), (12) будем называть каноническим видом исходной задачи; канонический вид краевого условия с произвольным индексом см. [1, с. 230 и далее]. Если $\bar{\gamma}$ удовлетворяет условию Ляпунова, то, как нетрудно показать,

$$e^{\chi(\zeta)} = (\zeta \pm 1)^{-\frac{\varphi}{\pi}} \overset{(\pm)}{\chi_0}(\zeta), \quad e^{p(\sigma)} = |e^{i\sigma} \pm 1|^{-\frac{\varphi}{\pi}} |\overset{(\pm)}{\chi_0}(\zeta)| \quad \text{вблизи} \quad \zeta = \pm 1, \tag{13}$$

где $\overset{(\pm)}{\chi_0}(\zeta)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера на замыкании некоторых окрестностей точек $\zeta = \pm 1$, причем $\overset{(\pm)}{\chi_0}(\pm 1) \neq 0$. Примем также во внимание, что в тех же окрестностях $z'(\zeta) = (\zeta \mp 1)^{-\frac{\varphi}{\pi} - \frac{1}{2}} \overset{(\pm)}{z_0}(\zeta)$, $\overset{(\pm)}{z_0}(\pm 1) \neq 0$, причем $\overset{(\pm)}{z_0}(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера. Кроме того, вблизи $\zeta = -i$ имеем $z(\zeta) = \frac{2i}{\pi} \ln(\zeta + i) + \ldots$, $z'(\zeta) = \frac{2i}{\pi} (\zeta + i)^{-1} + \ldots$, где многоточия заменяют ограниченные функции. Из сказанного вытекают соотношения

$$z'^{-1}(\zeta) e^{\chi(\zeta)} = \begin{cases} (\zeta \mp 1)^{\frac{1}{2}} \overset{(\pm)}{\psi}(\zeta), & \overset{(\pm)}{\psi}(\mp 1) \neq 0, \text{ вблизи } \zeta = \pm 1, \\ (\zeta + i)\psi_0(\zeta), & \psi_0(-i) \neq 0, \text{ вблизи } \zeta = -i. \end{cases} \tag{14}$$

где $\overset{(\pm)}{\psi}(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — непрерывны по Гельдеру.

Введем теперь обозначения

$$w(\zeta) = z'^{-1}(\zeta) e^{\chi(\zeta)} u_\zeta, \quad l = e^p (h - \delta u), \tag{15}$$

в силу которых условие (12) принимает вид

$$\operatorname{Re} w(\zeta) = l(\sigma), \quad \zeta = e^{i\sigma}. \tag{16}$$

Учитывая также, что $\chi(\zeta)$ и $z'(\zeta)$ голоморфны, а u — функция вещественная, из (8) получаем

$$w_{\bar{\zeta}} + \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)} w - \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)} e^{\chi(\zeta) - \overline{\chi(\zeta)}} \bar{w} = \frac{1}{4} \overline{z'(\zeta)} e^{\chi(\zeta)} F(\zeta), \quad \zeta \in G_\zeta. \tag{17}$$

Последние два равенства определяют самостоятельную задачу с неизвестной функцией w.

3. **Изучение задачи (17), (16).** Будем искать $w(\zeta)$ в виде

$$w(\zeta) = -\frac{(\zeta + i)}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \left\{ \frac{\rho(t)}{(t - \zeta)(t + i)} + \frac{\overline{\rho(t)}}{(1 - \bar{t}\zeta)(1 + i\bar{t})} \right\} d\sigma_t + \Phi(\zeta) \equiv T_\rho + \Phi,$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\zeta + i}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{l(\sigma)}{e^{i\sigma} + i} \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - \zeta}, \quad |\zeta| < 1. \tag{18}$$

Чтобы интеграл, определяющий $\Phi(\zeta)$, имел смысл, предположим, что

$$e^{-p(\sigma)} l(\sigma) \in \mathrm{Lip}_\alpha [0, 2\pi], \quad l(0) = l(2\pi), \quad l\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0. \tag{19}$$

Тогда в некоторой замкнутой окрестности точки $\zeta = -i$ функция $\Phi(\zeta)$ принадлежит пространству Lip_α и равна нулю при $\zeta = -i$. В окрестностях точек $\zeta = \pm 1$ эта функция имеет вид $(\zeta \mp 1)^{-\frac{\varphi}{\pi}(\pm)} \overset{(\pm)}{\Phi}_0(\zeta)$, $\overset{(\pm)}{\Phi}(\pm 1) \neq 0$, причем $\overset{(\pm)}{\Phi}_0(\zeta)$ непрерывна по Гельдеру [2, § 22]. Если к тому же $\rho \in L_p(G_\zeta)$, $p > 2$, то функция $T\rho(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\overline{G}_\zeta$ с показателем $(p-2)/p$ [1, с. 54]. Так как $w_{\bar{\zeta}} = \rho$ [1, с. 50], то из (17) получаем для неизвестной ρ уравнение

$$\rho(\zeta) + \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)}\, T\rho(\zeta) - \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)}\, e^{\chi(\zeta) - \overline{\chi(\zeta)}}\, \overline{T\rho(\zeta)} =$$

$$= \frac{1}{4} \overline{z'(\zeta)}\, e^{\chi(\zeta)} F(\zeta) - \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)}\, \Phi(\zeta) + \frac{i\omega}{4} \overline{z'(\zeta)}\, e^{\chi(\zeta) - \overline{\chi(\zeta)}}\, \overline{\Phi(\zeta)}. \tag{20}$$

Предположим также, что

$$\overline{z'(\zeta)}\, e^{\chi(\zeta)} F(\zeta) \in L_p(G\zeta), \quad p > 2. \tag{21}$$

Тогда из сказанного выше вытекает, что и вся правая часть уравнения (20) принадлежит $L_p(G_\zeta)$, если $p > 2$, и достаточно близко к двум.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{P} f(\zeta) = -\frac{\overline{z'(\zeta)}\,(\zeta + i)}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \frac{f(t)}{t+i} \frac{d\sigma_t}{t - \zeta}, \quad f \in L_p, \quad p > 2. \tag{22}$$

Пользуясь неравенством Гельдера и оценкой Адамара для интеграла от произведения двух функций со слабыми полярными особенностями, последовательно получаем

$$|\mathcal{P} f(\zeta)| \leqslant \frac{|\overline{z'(\zeta)}\,(\zeta+i)|}{\pi} \left(\iint\limits_{|t|<1} |f(t)|^p d\sigma_t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint\limits_{|t|<1} \frac{d\sigma_t}{|t+i|^q\, |t-\zeta|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant M_p \|f\|_{L_p} |\overline{z'(\zeta)}\,(\zeta+i)|\, \|\zeta + i\|^{-\frac{2}{p}}, \quad p > 2, \quad q = p/(p-1), \tag{23}$$

где M_p — не зависящая от f постоянная. Правая часть здесь имеет полюс порядка $2/p$ в точке $\zeta = -i$ и полюса порядка $(\varphi/\pi + 1/2)$ в точках $\zeta = \pm 1$. Поэтому для $p > 2$ и достаточно близких к двум и $2 < p' < p$ последовательно получаем

$$\|\mathcal{P} f\|_{L_{p'}} \leqslant M_p \|f\|_{L_p} \left(\iint\limits_{|t|<1} |\overline{z'(t)}\,(t+i)|\, |t+i|^{\frac{-2p'}{p}} d\sigma_t \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_{p,p'}}{(p-p')^{\frac{1}{p'}}} \|f\|_{L_p}, \quad 2 < p' < p, \tag{24}$$

где постоянная $M_{p,p'}$ не зависит от f.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{P}^2 f(\zeta) = \frac{\overline{z'(\zeta)}\,(\zeta+i)}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \frac{d\sigma}{(t+i)(t-\zeta)} \frac{\overline{z'(t)}\,(t+i)}{\pi} \iint\limits_{|\tau|<1} \frac{f(\tau)}{\tau+i} \frac{d\sigma_\tau}{\tau - t}. \tag{25}$$

Если ввести обозначение

$$g(t) = \iint\limits_{|\tau|<1} \frac{f(\tau)}{\tau + i} \frac{d\sigma_\tau}{\tau - t},$$

то в силу оценки (23) получим

$$|g(t)| \leqslant M_p \|f\|_{L_p} |t+i|^{-\frac{2}{p}}.$$

Снова пользуясь оценкой Адамара, получаем

$$|\mathcal{P}^2 f(\zeta)| \leqslant M_p'^2 \|f\|_{L_p} |\overline{z'(\zeta)}(\zeta+i)| \, |\zeta+i|^{-\frac{2}{p}}, \tag{26}$$

так что функция (25) допускает оценку вида (23) с новой постоянной $M_p'^2$, не зависящей от f. Как функция (24) следовала из (23), так из (26) вытекает оценка

$$\|\mathcal{P}^2 f\|_{L_{p'}} \leqslant \frac{M_{p,p'}'^2}{(p-p')^{\frac{1}{p'}}} \|f\|_{L_p}, \quad 2 < p' < p, \tag{27}$$

в которой $M_{p,p'}'$ — постоянная, независящая от f. По индукции можно показать, что вообще

$$\|\mathcal{P}^k f\|_{L_{p'}} \leqslant \frac{M_{p,p'}'^k}{(p-p')^{\frac{1}{p'}}} \|f\|_{L_p}, \quad 2 < p' < p, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Нетрудно показать, что аналогичная оценка имеет место для оператора $z'(\zeta)\, T\rho(\zeta)$, где $T\rho$ определен первой строкой в (18), а следовательно, и для оператора $z'(\zeta)\, T\rho(\zeta) - \overline{z'(\zeta)}\, e^{\chi(\zeta)-\overline{\chi(\zeta)}}\, \overline{T\rho}(\zeta)$, стоящего в левой части уравнения (20).

Теорема 1. Предположим, что:

1) замыкание $\overline{\gamma}$ кривой γ удовлетворяет условию Ляпунова, а внутренний относительно G_γ угол в точках $z = \pm 1$ положителен;

2) правая часть условия (16) удовлетворяет соотношениям (19);

3) правая часть уравнения (17) обладает свойством (21). Тогда для достаточно малых значений $\omega > 0$ задача (17), (16) имеет единственное решение $w(\zeta)$ в классе функций из $W_p^1(G_\zeta)$, $p > 2$ и достаточно близкое к двум, обращающихся в нуль в точке $\zeta = -i$. Это решение может быть построено по формулам (18), причем плотность ρ принадлежит $L_p(G_\zeta)$, удовлетворяет уравнению (20) и может быть получено методом последовательных приближений.

Отметим, что при $\omega \neq 0$ коэффициенты в левой части уравнения (17) не принадлежат $L_p(G_\zeta)$, $p > 2$, поэтому результаты из [1] неприменимы к задаче (17), (16).

4. **Изучение однородной задачи** (1), (3), (4). Рассмотрим частный случай задачи (1)—(3), когда $F \equiv 0$, $f \equiv 1$, $g \equiv 0$:

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = 0, \quad (x, y) \in G_\gamma;$$

$$u = 1 \text{ на } \gamma, \; u_x \pm \omega_0 u = 0 \text{ на } \Gamma = \{x = \pm 1, \; y < 0\}, \tag{29}$$

каждое решение которой удовлетворяет однородным условиям (1), (3), (4), а ядро этой задачи получается из решений задачи (29) умножением на вещественную постоянную. Сопоставим задаче (29) квадратичную форму

$$a_{\omega,\omega_0}^{(\gamma)}(u, v) = \iint\limits_{G_\gamma} e^{\omega y} [u_x v_x + u_y v_y]\, dxdy + \omega_0 \int\limits_\Gamma e^{\omega y} uv dy \tag{30}$$

и обозначим через $H_{\omega,\omega_0}^1(G_\gamma)$ соответствующее гильбертово пространство. При $\omega_0 > 0$ это пространство полно. Как известно (см., напр., [3, с. 140]), каждая функция $u(x, y)$ из $H_{\omega,\omega_0}^1(G_\gamma)$ имеет на гладком куске $\gamma \subset \partial G_\gamma$ след из $L_2(\gamma)$, причем

$$\|u\|_{L_2(\gamma)} \leqslant c \|u\|_{H_{\omega,\omega_0}^1(G_\gamma)}, \quad 0 < c = \text{const} < +\infty, \tag{31}$$

где c не зависит от u. Рассмотрим множество функций

$$N=\{u;u=1 \text{ на } \gamma,\ u\in H^1_{\omega,\omega_0}(G)\}. \tag{32}$$

Поскольку оператор $H^1_{\omega,\omega_0}(G_\gamma)\to L_2(\gamma)$ вполне непрерывен (там же, с. 146), то множество (32) слабо компактно. Рассмотрим число

$$d=\inf_N a^{(\gamma)}_{\omega,\omega_0}(u,u)<+\infty. \tag{33}$$

Наряду с (32) рассмотрим также слабо компактное множество

$$N_0=\{h:h=0 \text{ на } \gamma,\ h\in H^1_{\omega,\omega_0}(G_\gamma)\}. \tag{34}$$

Легко показать, что существует элемент $u_0\in N$, на котором реализуется равенство (33), причем

$$a^{(\gamma)}_{\omega,\omega_0}(u_0,h)=0,\quad \forall h\in N_0. \tag{35}$$

Если воспользоваться известными приемами из области прямых методов математической физики (см., напр., [4, гл. 1]), то из (35) нетрудно вывести, что $u_0(x,y)$ внутри G_γ удовлетворяет уравнению (29) (там же, § 6, п. 2). Поскольку минимизирующую последовательность, порождающую u_0, можно взять из класса непрерывных на $G_\gamma+\gamma$ функций, то u_0 также принадлежит этому классу (там же, п. 2.3). Условие на Γ из (29) является «естественным» для вариационной задачи (33) (там же, § 4, п. 4). Особое рассмотрение показывает, что первые производные u_{0x}, u_{0y} ограничены на G_γ, следовательно, u_0 непрерывна и в точках $(\pm1, 0)$. Мы построили, таким образом, классическое решение задачи (29), причем нетрудно установить, что это решение единственно, положительно в G_γ, принимает значение единица на γ и стремятся к нулю при $y\to-\infty$. Методом разделения переменных нетрудно построить мажоранту для $u_0(x,y)$:

$$\hat{u}_0(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{\mu_k y}\cos\lambda_k x,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\quad y\leqslant -y_0, \tag{36}$$

$$\lambda_k \operatorname{tg}\lambda_k=\omega_0,\quad \mu_k=\frac{-\omega}{2}+\sqrt{\frac{\omega^2}{4}+\lambda_k^2},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где $a_k e^{\mu_k y_0}$ — коэффициенты Фурье четной функции $u_0(x_0,y_0)$. Отсюда следует, что

$$u_0(x,y)=\mathcal{O}(e^{\mu_0 y}) \text{ вблизи } y=-\infty \tag{37}$$

и аналогичное асимптотическое поведение имеют первые производные.

Лемма. Предположим, что γ удовлетворяет условию Ляпунова и внутренний относительно G_γ угол в точках $(\pm1, 0)$ не равен нулю. Тогда задача (29) имеет, и притом единственное, решение $u_0(x,y)$, обладающее свойствами: 1) оно непрерывно на замыкании $\bar{G}_\gamma$, гладкое на $\bar{G}_\gamma\setminus\{(\pm1, 0)\}$, бесконечно дифференцируемое (и даже аналитическое) на $G_\gamma\setminus\gamma$; 2) градиент (u_{0x}, u_{0y}) ограничен на G_γ; 3) само решение и его производные первого порядка имеют асимптотическое поведение (37).

5. **Анализ задачи** (8), (9). Введем обозначение $\tilde{w}(\zeta)=2z'(\zeta)e^{-\chi(\zeta)}w(\zeta)$, где $w(\zeta)$ — решение задачи (17), (16). В силу вещественности функции F имеет место тождество $\tilde{w}_{\bar\zeta}(\zeta)=\overline{\tilde{w}_{\zeta}(\zeta)}$, а из (14) и теоремы 1 вытекает, что $\tilde{w}(\zeta)\in L_p(G_\zeta)$, $p>2$. Рассмотрим теперь вещественную функцию

$$u(\zeta)=c_0+\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\left[\frac{\overline{\tilde{w}(t)}}{t-\zeta}-\frac{\zeta\tilde{w}(t)}{1-\bar{t}\zeta}\right]d\sigma_t\right\},\quad |\zeta|<1,\quad c_0=\text{const}. \tag{38}$$

И хотя $\tilde{w}(\zeta)$, вообще говоря, не непрерывна в точке $\zeta = -i$, к ней можно применить преобразования из [1, с. 321] вследствие отмеченного тождества, поэтому $\tilde{w}(\zeta) = 2u_\gamma(\zeta)$. Таким образом, функция (38) удовлетворяет первому тождеству (15), поэтому в силу тождества (17) она представляет решение уравнения (8). Требуя дополнительно, чтобы это решение исчезало в точке $\zeta = -i$, получаем

$$u(\zeta) = T_0 w(\zeta) \overset{\text{def}}{\equiv}$$

$$\overset{\text{def}}{\equiv} \operatorname{Re}\left\{-\frac{2(\zeta+i)}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\left[\frac{\overline{z'(t)\, e^{\overline{\chi}(t)}\, w(t)}}{(t+i)(t-\zeta)} - \frac{\zeta z'(t)\, e^{-\chi(t)} w(t)}{(t+it)(1-\bar{t}\zeta)}\right] d\sigma_t\right\}. \quad (39)$$

Мы воспользовались при этом непрерывностью функции (38) в замкнутом единичном круге. Если $\omega_0 = 0$ ($\delta(z) \equiv 0$), то формула (39) представляет решение задачи (5), (7).

В общем случае $\omega_0 > 0$ заметим, что, согласно (15), имеем $l = l_0 + l_1$, $l_0 = e^p h$, $l_1 = -\delta e^p u$, соответственно чему

$$\Phi = \frac{\zeta+i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^p h}{e^{i\sigma}+i}\frac{e^{i\sigma}d\sigma}{e^{i\sigma}-\zeta} - \frac{\zeta+i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta e^p u}{e^{i\sigma}+i}\frac{e^{i\sigma}d\sigma}{e^{i\sigma}-\zeta} \equiv \Phi_0 + \Phi_1(\zeta). \quad (40)$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\overline{z'(\zeta)}\,\Phi_1(\zeta) = -\frac{\overline{z'(\zeta)}\,(\zeta+i)}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta e^p u}{e^{i\sigma}+i}\frac{e^{i\sigma}d\sigma}{e^{i\sigma}-\zeta} \overset{\text{def}}{\equiv} Lu(\zeta). \quad (41)$$

Умножим затем уравнение (18) на $\overline{z'(\zeta)}$, введем обозначение $w_0(\zeta) = \overline{z'(\zeta)}\, w(\zeta)$ и учтем, что $\rho = w_{\bar{\zeta}}$, а w удовлетворяет уравнению (17). Полагая еще $Rf \equiv -\overline{z'(\zeta)}\, Tf(\zeta)$, $Sw_0 \equiv R\left(\frac{i\omega}{4}w_0 - \frac{i\omega}{4}\overline{z}' e^{\chi-\overline{\chi}}\overline{w}_0(z')\right)$, $\tilde{T}w_0 = T_0(w_0/\bar{z}')$. После простых преобразований получаем уравнение

$$\begin{gathered} w_0(\zeta) = Sw_0(\zeta) + L\tilde{T}w_0(\zeta) + \psi_0(\zeta), \\ \psi_0(\zeta) = \overline{z'(\zeta)}\,\Phi_0(\zeta) - R\left(\frac{1}{4}\bar{z}' e^{\chi} F\right)(\zeta). \end{gathered} \quad (42)$$

Из отмеченных выше свойств оператора (39) вытекает, что уравнение (42) эквивалентно следующему:

$$u = \mathcal{K}u + v, \quad \mathcal{K} = \tilde{T}(J-S)^{-1}L, \quad v = \tilde{T}(J-S)^{-1}\psi_0, \quad (43)$$

в предположении, что $(J - S)^{-1}$ существует. Из сказанного выше нетрудно вывести, что оператор R обладает свойством (28), поэтому оператор $(J - S)^{-1}$ существует по крайней мере для малых $\omega > 0$. Покажем, что оператор LT из второго слагаемого справа в (42) обладает теми же свойствами.

Из второй формулы (6) вытекает, что интеграл в (41) распространяется только по множеству $(\pi, 2\pi)$, причем часть, которая соответствует сегменту $(\pi, 3\pi/2)$, имеет те же свойства, что и часть, соответствующая $(3\pi/2, 2\pi)$. Последнюю представим в виде суммы слагаемых, отвечающих множествам $(3\pi/2, \sigma_0)$, $(\sigma_0, 2\pi)$, где $\sigma_0 \in (3\pi/2, 2\pi)$ зафиксировано. Интеграл типа Коши по разомкнутой дуге, как известно (см., напр., [2, гл. 1, § 22]), имеет вблизи $\zeta = 1$ главную часть вида $(\zeta-1)^{-\frac{\varphi}{\pi}}$ и логарифмическую особенность в точке $e^{i\sigma_0}$. Учитывая еще указанное выше поведение $z'(\zeta)$ вблизи $\zeta = 1$, приходим к заключению: если

$$0<\varphi<\frac{\pi}{4},\ 2<p<p_{\max}=\min\left(3,2/\left(\frac{2\varphi}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right), \tag{44}$$

то часть оператора $L\widetilde{T}$, отвечающая множеству $(\sigma_0,\ 2\pi)$, непрерывно действует в $L_p(G_\zeta)$, а отвечающая множеству $(3\pi/2,\ \sigma_0)$, допускает представление

$$\frac{\omega_0}{2\pi i}\overline{z'(\zeta)}(\zeta+i)\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\sigma_0}\frac{de^{i\sigma}}{(e^{i\sigma}+i)(e^{i\sigma}-\zeta)}\frac{e^{i\sigma}+i}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\overline{z'}(t)\,e^{-\overline{\chi}(t)}\overline{w_0(t)}}{z'(t)(t+i)(t-e^{i\sigma}}+\ldots=$$

$$=-\frac{\omega_0}{2\pi^2 i}\overline{z'(\zeta)}(\zeta+i)\iint\limits_{|t|<1}\frac{\overline{z'(t)}\,e^{-\overline{\chi}(t)}\overline{w}_0(t)}{z'(t)(t+i)(t-e^{i\sigma})}\ln\frac{(\zeta+i)(e^{i\sigma_0}-t)}{(t+i)(e^{i\sigma_0}-\zeta)}\,d\sigma_t+\ldots, \tag{45}$$

где многоточие заменяет члены, обладающие теми же свойствами, что и выписанный. Часть последнего интеграла в (45), которая отвечает $\ln\left[(e^{i\sigma_0}-t)/(e^{i\sigma}-\zeta)\right]$, обладает требуемым свойством, поскольку ядро всего интеграла по переменной ζ суммируемо по G_ζ в любой степени $q>2$, как в этом нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. Нам остается, таким образом, изучить оператор

$$\hat{\mathcal{P}}f(\zeta)=-\frac{\overline{z'}(\zeta)(\zeta+i)}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\ln\dfrac{t+i}{\zeta+i}}{t+i}\frac{f(t)}{t-\zeta}\,d\sigma_t\quad|\zeta|<1. \tag{46}$$

Он отличается от (22) наличием множителя $\ln\dfrac{t+i}{\gamma+i}$ под знаком интеграла, однако свойства $\hat{\mathcal{P}}$ вполне аналогичны свойствам оператора (22). Прежде всего, имеет место соотношение типа первого неравенства в (23), причем требуется оценить интеграл

$$\left(\iint\limits_{|t|<1}\frac{\left|\ln\dfrac{t+i}{\zeta+i}\right|^q}{|t+i|^q\,|t-\zeta|^q}\,d\sigma_t\right)^{\frac{1}{q}},\quad q=\frac{p}{p-1}<2,\quad p>2. \tag{47}$$

Поскольку $\ln\dfrac{t+i}{\zeta+i}=\ln\left|\dfrac{t+i}{\zeta+i}\right|+i\arg\dfrac{t+i}{\zeta+i}$ и второе слагаемое ограничено, то соответствующая часть интеграла (47) оценивается с помощью неравенства Адамара, как и раньше. В оставшейся части рассмотрим слагаемое, соответствующее множеству $G_1=\{|t+i|\leqslant 1\}\cap G_t$. Если при этом $|\zeta+i|\geqslant 1$, то рассматриваемая часть равномерно (по ζ) ограничена. Если $|\zeta+i|=3d<1$, то с помощью полярной системы координат получаем

$$\left(\iint\limits_{G_1\cap\{|t+i|\leqslant d\}}\frac{\left|\ln\dfrac{|t+i|}{|\zeta+i|}\right|^q}{|t+i|^q\,|t-\zeta|^q}\,d\sigma_t\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{d}\left(\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^d\frac{\left|\ln\dfrac{\rho}{3d}\right|^q}{\rho^q}\rho\,d\rho\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^{\frac{1}{q}}3^{\frac{2}{q}-1}}{d^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)}}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\left|\frac{\ln r}{r^{q-1}}\right|^q dr\right)^{\frac{1}{q}},$$

что совпадает с соответствующим множителем в (23). Оценка по множеству $G_1\cap\{|t+i|>d\}$, а также по дополнению $G\diagdown G_1$ проводится вполне аналогично и дает в итоге неравенство вида (23) для оператора (46). Затем получаем аналог оценок (24), (26) и (27), так что окончательно приходим к соотношениям (28) для оператора $L\tilde{T}$. Иными словами,

$$\| (S + L\tilde{T})^k w_0 \|_{L_p} \leqslant (|\omega|^k + |\omega_0|^k)\, \mathcal{K}^k_{p,p'} \| w_0 \|_{L_p}, \quad 2 < p' < p < p_{\max}, \tag{48}$$

где $p_{\max}$ определено в (44), а постоянная $\mathcal{K}_{p,p'}$ не зависит от w_0. Из всего сказанного вытекает

Теорема 2. Предположим, что: 1) замыкание $\bar{\gamma}$ удовлетворяет условию Ляпунова, а угол φ наклона касательной к $\bar{\gamma}$ в точке (1, 0) — условию (44); 2) функция $\psi_0(\zeta)$, построенная по второй формуле (42), удовлетворяет условию

$$\psi_0(\zeta) \in L_p(G_\zeta), \quad 2 < p < p_{\max}; \tag{49}$$

3) число $q = |\omega| + |\omega_0|$ достаточно мало. Тогда имеют место утверждения: α) уравнение (42) имеет, и притом единственное, решение $w_0(\zeta)$ из $L_{p'}(G_\zeta)$, $2 < p' < p < p_{\max}$, которое может быть получено методом последовательных приближений, сходящихся к w_0 по норме в $L_{p'}(G_\zeta)$; β) функция $u(\zeta)$, построенная по формуле (39) при $w(\zeta) = w_0(\zeta)/z'(\zeta)$, представляет решение задачи (8), (9) из класса функций $\overset{(0)}{W}{}^1_{p'}(G_\zeta)$, обращающихся в нуль при $\zeta = -i$ и принадлежащих одновременно пространству $W^2_r(G_\zeta)$, $r = (2-\varepsilon)p'/(p'+2-\varepsilon) > 1$, $\varepsilon > 0$.

В заключение отметим, что выбор числа q зависит от p и p', а само решение задачи (8), (9) удовлетворяет на замыкании $\bar{G}_\zeta$ условию Гельдера с показателем $(p'-2)/p'$.

6. Анализ исходной задачи (1) — (3). Введем в рассмотрение весовую функцию $\rho_{p,\varphi}(x, y)$, обладающую асимптотикой

$$\rho_{p,\varphi}(x, y) \approx \begin{cases} |z \mp 1|^{-\frac{\pi(p-2)+2\varphi(p-1)}{\pi-2\varphi}} & \text{вблизи } z = \pm 1, \\ e^{-\frac{\pi}{2}(p-2)y} & \text{вблизи } y = -\infty. \end{cases} \tag{50}$$

Нетрудно убедиться, что условие (21) эквивалентно следующему:

$$\| F \|_{L_p}(\rho_{p,\varphi}, G_\gamma) = \left\{ \iint\limits_{G_\gamma} \rho_{p,\varphi}(x, y)\, |F(x, y)|^p\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{51}$$

причем поведение (50) определяется геометрией области G_γ через посредство функции $z'(\zeta)$ и разрывным характером краевых условий (2), (3). Далее, поскольку для $\rho \in L_p(G_\zeta)$, $p > 2$, функция $T\rho(\zeta)$ из (18) принадлежит $\mathrm{Lip}_{\frac{p-2}{2}}(\bar{G}_\zeta)$ и равна нулю при $\zeta = -i$, то второе слагаемое во второй формуле (42) в силу (21) удовлетворяет включению (49) для всех $p = p''$, $2 < p'' < p < p_{\max}$. Наконец, предположим, что функция h с третьей формулы (6) обладает свойством

$$e^{-\frac{\pi}{2}y} h \in \mathrm{Lip}_\alpha(\partial G_\gamma), \quad \alpha \in (0, 1). \tag{52}$$

Тогда из свойств первого интеграла (40) вытекает, что в условиях (44) и первое слагаемое во второй формуле (42) удовлетворяет включению (49) с некоторым $p = p'' > 2$. Иными словами, два условия (51), (52) обеспечивают включение вида (49), а значит, разрешимость уравнения из (42) и существование функции $u_1(\zeta) = T_0(w_0/\bar{z}) \equiv N(g, f'; F; \omega, \omega_0)(\zeta)$. Как следует из сказанного ранее, эта функция согласно тождеству $u_1(z) \equiv u_1(\zeta)$ в силу $z = z(\zeta)$ порождает решение задачи (5), (7).

чаем аналог оценок (24), (26) и (27), так что окончательно приходим к соотношениям (28) для оператора $L\tilde{T}$. Иными словами,

$$\| (S+L\tilde{T})^k w_0 \|_{L_p} \leqslant (|\omega|^k + |\omega_0|^k)\, \mathcal{K}^k_{p,p'} \| w_0 \|_{L_p}, \quad 2 < p' < p < p_{\max}, \quad (48)$$

где $p_{\max}$ определено в (44), а постоянная $\mathcal{K}_{p,p'}$ не зависит от w_0. Из всего сказанного вытекает

Теорема 2. Предположим, что: 1) замыкание $\bar{\gamma}$ удовлетворяет условию Ляпунова, а угол φ наклона касательной к $\bar{\gamma}$ в точке (1, 0) — условию (44); 2) функция $\psi_0(\zeta)$, построенная по второй формуле (42), удовлетворяет условию

$$\psi_0(\zeta) \in L_p(G_\zeta), \quad 2 < p < p_{\max}; \quad (49)$$

3) число $q = |\omega| + |\omega_0|$ достаточно мало. Тогда имеют место утверждения: α) уравнение (42) имеет, и притом единственное, решение $w_0(\zeta)$ из $L_{p'}(G_\zeta)$, $2 < p' < p < p_{\max}$, которое может быть получено методом последовательных приближений, сходящихся к w_0 по норме в $L_{p'}(G_\zeta)$; β) функция $u(\zeta)$, построенная по формуле (39) при $w(\zeta) = w_0(\zeta)/\overline{z'(\zeta)}$, представляет решение задачи (8), (9) из класса функций $\overset{(0)}{W}{}^1_{p'}(G_\zeta)$, обращающихся в нуль при $\zeta = -i$ и принадлежащих одновременно пространству $W^2_r(G_\zeta)$, $r = (2-\varepsilon)p'/(p'+2-\varepsilon) > 1$, $\varepsilon > 0$.

В заключение отметим, что выбор числа q зависит от p и p', а само решение задачи (8), (9) удовлетворяет на замыкании G_ζ условию Гельдера с показателем $(p'-2)/p'$.

6. Анализ исходной задачи (1) — (3). Введем в рассмотрение весовую функцию $\rho_{p,\varphi}(x, y)$, обладающую асимптотикой

$$\rho_{p,\varphi}(x, y) \approx \begin{cases} |z \mp 1|^{\frac{\pi(p-2)+2\varphi(p-1)}{\pi-2\varphi}} & \text{вблизи } z = \pm 1, \\ e^{-\frac{\pi}{2}(p-2)y} & \text{вблизи } y = -\infty. \end{cases} \quad (50)$$

Нетрудно убедиться, что условие (21) эквивалентно следующему:

$$\| F \|_{L_p}(\rho_{p,\varphi}, G_\gamma) = \left\{ \iint\limits_{G_\gamma} \rho_{p,\varphi}(x, y) \, | F(x, y) |^p dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (51)$$

причем поведение (50) определяется геометрией области G_γ через посредство функции $z'(\zeta)$ и разрывным характером краевых условий (2), (3). Далее, поскольку для $\rho \in L_p(G_\zeta)$, $p > 2$, функция $T\rho(\zeta)$ из (18) принадлежит $\mathrm{Lip}_{\frac{p-2}{2}}(\bar{G}_\zeta)$ и равна нулю при $\zeta = -i$, то второе слагаемое во второй формуле (42) в силу (21) удовлетворяет включению (49) для всех $p = p''$, $2 < p'' < p < p_{\max}$. Наконец, предположим, что функция h с третьей формулы (6) обладает свойством

$$e^{-\frac{\pi}{2}y} h \in \mathrm{Lip}_\alpha(\partial G_\gamma), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (52)$$

Тогда из свойств первого интеграла (40) вытекает, что в условиях (44) и первое слагаемое во второй формуле (42) удовлетворяет включению (49) с некоторым $p = p'' > 2$. Иными словами, два условия (51), (52) обеспечивают включение вида (49), а значит, разрешимость уравнения из (42) и существование функции $u_1(\zeta) = T_0(w_0/\bar{z}) \equiv N(g, f';\ F;\ \omega,\ \omega_0)(\zeta)$. Как следует из сказанного ранее, эта функция согласно тождеству $u_1(z) \equiv u_1(\zeta)$ в силу $z = z(\zeta)$ порождает решение задачи (5), (7).

Рассмотрим теперь функцию

$$u(x, y) = u_1(x, y) + cu_0(x, y) = N(g, f', F; \omega, \omega_0)(x, y) + cu_0(x, y), \quad (53)$$
$$c = f(-1, 0) - N(g, f', F; \omega, \omega_0)(-1, 0),$$

где $u_0(x, y)$ — решение задачи (29); $f(x, y)$ — функция из условия (2). Функция (53) удовлетворяет обоим соотношениям (4) и, следовательно, представляет решение исходной задачи (1) — (3). Поскольку $u_1(\zeta) \sim \sim (\zeta + i)^{\frac{p''-2}{p''}}$ вблизи $\zeta = -i$, то $u_1(z) \sim \exp\left\{\frac{\pi(p''-2)}{2p''} y\right\}$ вблизи $y = = -\infty$. Это значит, что функция (53) при фиксированном $p'' > 2$ и достаточно малых ω, ω_0 имеет поведение (37), равно как и первые ее производные u_x, u_y. Кроме того, $u_{1z} = e^{-\chi} \overline{w_0} / \overline{z'}$ и $(w_0(\overline{z'})_{\overline{\zeta}} \in L_{p''}(G_\zeta)$, $p'' > 2$, в силу уравнения (42). Отсюда и из первого соотношения (13) следует затем, что $u_{1z}(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\overline{G}_\gamma$ и обращается в нуль при $z = = (\pm 1, 0)$.

Сформулируем теперь главное утверждение.

Теорема 3. Предположим, что замыкание $\overline{\gamma}$ удовлетворяет условию Ляпунова и имеют место соотношения (44), (51) и (52). Если число $q = |\omega| + + |\omega_0|$ достаточно мало, то задача (1)—(3) имеет, и притом единственное, решение $u(x, y)$, обладающее свойствами: 1) оно принадлежит пространству $W^2_{p''}(G_\gamma)$, $2 < p'' < p < p_{\max}$, и, следовательно, непрерывно на $\overline{G}_\gamma$; 2) оно обладает ограниченными первыми производными, непрерывными в смысле Гельдера на $\overline{G}_\gamma \setminus \{(\pm 1, 0)\}$; 3) само решение и его первые производные обладает свойством (37); 4) если $F(x, y) \in \mathrm{Lip}_\alpha(G_\gamma)$, $\alpha > 0$, то решение является классическим (принадлежит $C^{2+\eta}(G_\gamma)$, $\eta > 0$); 5) классическое решение единственно для любых $\omega \geqslant 0$, $\omega_0 \geqslant 0$.

7. Выводы. Изложенный подход и результаты обобщаются в нескольких направлениях. Можно рассмотреть области, уходящие на бесконечность в виде конечного числа криволинейных полос конечной положительной ширины: в этом случае функция $z(\zeta)$ будет иметь конечное число полюсов первого порядка на $|\zeta| = 1$. Граница области может также иметь конечное число точек, где встречаются дуги Ляпунова под любыми углами: это прибавит функции $z(\zeta)$ еще одно конечное множество особых точек. Вместо же (3) можно рассмотреть общее линейное условие с наклонной производной с кусочно-разрывными коэффициентами, сопрягающееся на остальной части границы с краевым условием первого рода (2). Кроме того, вместо (1) можно рассмотреть общее эллиптическое уравнение с измеримыми ограниченными коэффициентами. Наконец, аналогичным методом изучаются также нелинейные задачи [5].

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1959.— 628 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Физматгиз, 1962.— 509 с.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М. : Наука, 1976.— 391 с.
4. *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности.— М. : Изд-во иностр. лит. 1953.— 310 с.
5. *Данилюк И. И.* Задача Дирихле для двумерного квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа // Докл. АН УССР. Сер. А.—1987.—№ 2.— С. 112—115.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 05.10.87