УДК 531.38

©2016. **Г.В. Горр, Ю.В. Кошель**

ОДИН КЛАСС ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

Рассматривается задача о движении гиростата, несущего два ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил. Получена специальная форма дифференциальных уравнений движения гиростата, предназначенная для исследования его прецессионно-изоконических движений относительно вертикали. Указано новое решение этих уравнений для случая, когда на гиростат действует сила тяжести.

Ключевые слова: *гиростат, прецессионные и изоконические движения.*

Введение. Моделирование движения системы связанных твердых тел класса гиростат проводилось в аналитической механике с помощью различных подходов. Н.Е. Жуковский [1] получил уравнения движения гиростата, имеющего полости, заполненные жидкостью, и указал новый случай интегрируемости данных уравнений. В.В. Румянцев [2] изучал задачи управления и ориентации при движении спутника. П.В. Харламов [3], рассматривая движение системы связанных твердых тел, вывел наиболее общие уравнения движения гиростата под действием заданного класса сил и моментов. Определение гиростата он получил в наиболее общем случае по сравнению с ранее указанными в литературе определениями. В монографии [4] приведены результаты исследования движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в случае постоянного гиростатического момента. В динамике твердого тела и гиростата большое значение имеет классификация движений этих объектов. При анализе движений гиростата выделены многие классы движений [4, 5]: равномерные вращения, маятниковые движения, прецессионные и прецессионно-изоконические движения, асимптотически-периодические движения. В последние годы интенсивно изучается задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Так, например, в [6, 7] рассмотрены прецессионные и прецессионно-изоконические движения в случае, когда гиростатический момент направлен по некоторой оси, неизменно связанной с телом-носителем. Более общая задача – задача о движении гиростата, несущего два вращающихся ротора, рассмотрена в [5].

Актуальность изучения условий существования прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два вращающихся ротора, обусловлена тем, что при условии постоянства гиростатического момента получены многочисленные классы таких движений [4]. Однако они существуют при некоторых условиях на параметры распределения масс и параметры, характеризующие правые части дифференциальных уравнений движения гиростата. Показано, что учет переменности гиростатического момента позволяет получить условия существования рассматриваемых движений с меньшим числом ограничений на параметры движения по сравнению со случаем постоянного гиростатического момента.

В настоящей статье изучается задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. На основании этих уравнений выполнено моделирование прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два ротора. Получены три дифференциальных уравнения на компоненты гиростатического момента и угол собственного вращения гиростата. Найдены новые решения редуцированных уравнений для случая, когда на гиростат действует только сила тяжести.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предполагая, что гиростат несет два вращающихся ротора, уравнения движения запишем в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}=(A\boldsymbol{\omega}+\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+\mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \qquad (2)$$

В (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda_i(t)$ $(i=1,2)$ – значения гиростатических моментов, имеющих единичные векторы $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ $(|\boldsymbol{\alpha}|=1, |\boldsymbol{\beta}|=1,\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0)$; $A=(A_{ij})$ – тензор инерции; $B=(B_{ij})$ и $C=(C_{ij})$ $(i,j=\overline{1,3})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t. Уравнения (1), (2) имеют два интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1, \qquad (A\boldsymbol{\omega}+\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k, \qquad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Система (1), (2) не замкнута, если функции $\lambda_i(t)$ не предполагаются известными. В силу этого исследование движение гиростата проводится при различных условиях на характер движения тела-носителя. Наиболее значительные результаты получены в изучении прецессионных, прецессионно-изоконических движений, равномерных вращений, маятниковых и других движений гиростата [9–12].

Исходя из уравнений (1), (2), будем искать условия существования прецессионно-изоконических движений гиростата.

Пусть $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем (всегда можно принять $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$). Движение гиростата называется прецессией относительно вертикали, если выполняются инвариантные соотношения [5]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0, \qquad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \qquad (4)$$

где $a_0=\cos\theta_0$, $\theta_0=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\nu})$ – постоянный угол. Рассмотрим случай, когда, кроме свойства прецессионности, выполняется свойство изоконичности (подвижный аксоид вектора угловой скорости симметричен неподвижному аксоиду относительно касательной к ним плоскости). Как показано в [5], в качестве условия изоконичности может быть принято равенство $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$. Тогда из второго соотношения (4) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nu}). \tag{5}$$

При выполнении равенств (4) уравнение Пуассона (2) интегрируется:

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0. \tag{6}$$

Здесь $a_0' = \sin\theta_0$. В скалярном виде из (5) в силу (6) получим

$$\omega_1 = a_0'\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0'\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot{\varphi}(a_0 + 1). \tag{7}$$

Внесем выражение (5) в уравнение (1):

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = -\ddot{\varphi}A(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}^2\big[-\operatorname{Sp}(A)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}) + 2(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}) + \\
&+(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) + (A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu})\big] + \dot{\varphi}[(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\nu}\times B\boldsymbol{\nu})] + \\
&+\lambda_1(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu}) + \lambda_2(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Умножим скалярно обе части (8) на векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)\dot{\varphi}\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3\big) - p_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \\
&+\dot{\varphi}^2 A_2^{(1)}(\varphi) + \dot{\varphi}B_2^{(1)}(\varphi) + C_2^{(1)}(\varphi),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t)\dot{\varphi}\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3\big) - q_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \\
&+\dot{\varphi}^2 A_2^{(2)}(\varphi) + \dot{\varphi}B_2^{(2)}(\varphi) + C_2^{(2)}(\varphi),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}\Big\{\lambda_1(t)\big[a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + (a_0+1)\beta_3\big] - \\
&-\lambda_2(t)\big[a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + (a_0+1)\alpha_3\big]\Big\} - \\
&-r_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 A_2^{(3)}(\varphi) + \dot{\varphi}B_2^{(3)}(\varphi) + C_2^{(3)}(\varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

В уравнениях (9)–(11) введены обозначения

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \qquad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \qquad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
p_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(1)}\cos\varphi + \varepsilon_2^{(1)}\sin\varphi + \varepsilon_0^{(1)}, \; q_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(2)}\cos\varphi + \varepsilon_2^{(2)}\sin\varphi + \varepsilon_0^{(2)}, \\
r_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(3)}\cos\varphi + \varepsilon_2^{(3)}\sin\varphi + \varepsilon_0^{(3)},
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1^{(1)} = a_0'(\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{23}), \;\; \varepsilon_1^{(2)} = a_0'(\beta_1 A_{12} + \beta_2 A_{22} + \beta_3 A_{23}), \\
\varepsilon_1^{(3)} = a_0'(\gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} + \gamma_3 A_{23}),
\end{gathered} \tag{14}$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = a_0'(\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}), \quad \varepsilon_2^{(2)} = a_0'(\beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}),$$
$$\varepsilon_2^{(3)} = a_0'(\gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(1)} &= (1 + a_0)(\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}), \\ \varepsilon_0^{(2)} &= (1 + a_0)(\beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}), \\ \varepsilon_0^{(3)} &= (1 + a_0)(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}). \end{aligned} \tag{16}$$

$$A_2^{(1)}(\varphi) = b_2 \cos 2\varphi + b_2' \sin 2\varphi + b_1 \cos\varphi + b_1' \sin\varphi + b_0, \tag{17}$$

$$A_2^{(2)}(\varphi) = c_2 \cos 2\varphi + c_2' \sin 2\varphi + c_1 \cos\varphi + c_1' \sin\varphi + c_0, \tag{18}$$

$$A_2^{(3)}(\varphi) = d_2 \cos 2\varphi + d_2' \sin 2\varphi + d_1 \cos\varphi + d_1' \sin\varphi + d_0, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} b_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(2\alpha_3 A_{12} - \alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}), \\ b_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\alpha_3(A_{11} - A_{22}) + \alpha_2 A_{23} - \alpha_1 A_{13}], \\ b_1 = a_0'\{\alpha_1[(a_0+1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \alpha_2(a_0+2)A_{12} + \alpha_3 a_0 A_{13}\}, \\ b_1' = a_0'\{\alpha_1(a_0+2)A_{12} + \alpha_2[(a_0+1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \alpha_3 a_0 A_{23}\}, \\ b_0 = \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0+1)(\alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(2\beta_3 A_{12} - \beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}), \\ c_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\beta_3(A_{11} - A_{22}) + \beta_2 A_{23} - \beta_1 A_{13}], \\ c_1 = a_0'\{\beta_1[(a_0+1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \beta_2(a_0+2)A_{12} + \beta_3 a_0 A_{13}\}, \\ c_1' = a_0'\{\beta_1(a_0+2)A_{12} + \beta_2[(a_0+1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \beta_3 a_0 A_{23}\}, \\ c_0 = \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0+1)(\beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}), \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} d_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(2\gamma_3 A_{12} - \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}), \\ d_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\gamma_3(A_{11} - A_{22}) + \gamma_2 A_{23} - \gamma_1 A_{13}], \\ d_1 = a_0'\{\gamma_1[(a_0+1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \gamma_2(a_0+2)A_{12} + \gamma_3 a_0 A_{13}\}, \\ d_1' = a_0'\{\gamma_1(a_0+2)A_{12} + \gamma_2[(a_0+1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \gamma_3 a_0 A_{23}\}, \\ d_0 = \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0+1)(\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}), \end{gathered} \tag{22}$$

$$B_2^{(1)}(\varphi) = g_2 \cos 2\varphi + g_2' \sin 2\varphi + g_1 \cos\varphi + g_1' \sin\varphi + g_0, \tag{23}$$

$$B_2^{(2)}(\varphi) = f_2 \cos 2\varphi + f_2' \sin 2\varphi + f_1 \cos\varphi + f_1' \sin\varphi + f_0, \tag{24}$$

$$B_2^{(3)}(\varphi) = h_2\cos 2\varphi + h_2'\sin 2\varphi + h_1\cos\varphi + h_1'\sin\varphi + h_0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\big(\alpha_1 B_{23} + \alpha_2 B_{13} - 2\alpha_3 B_{12}\big),\\
g_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\big[\alpha_3(B_{33} - B_{11}) - \alpha_2 B_{23} + \alpha_1 B_{13}\big],\\
g_1 &= a_0'\Big\{\alpha_1[a_0 B_{33} - (1+a_0)B_{22}] + \alpha_2(1+a_0)B_{12} - a_0\alpha_3 B_{13}\Big\},\\
g_1' &= a_0'\Big\{-(1+a_0)\alpha_1 B_{12} + \alpha_2[(a_0+1)B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0\alpha_3 B_{23}\Big\},\\
g_0 &= \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0-1)(\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{23}),
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{1}{2}{a_0'}^2(\beta_1 B_{23} + \beta_2 B_{13} - 2\beta_3 B_{12}),\\
f_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2[\beta_3(B_{33} - B_{11}) - \beta_2 B_{23} + \beta_1 B_{13}],\\
f_1 &= a_0'\big\{\beta_1[a_0 B_{33} - (1+a_0)B_{22}] + \beta_2(1+a_0)B_{12} - a_0\beta_3 B_{13}\big\},\\
f_1' &= a_0'\big\{-(1+a_0)\beta_1 B_{12} + \beta_2[(a_0+1)B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0\beta_3 B_{23}\big\},\\
f_0 &= \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0-1)(\beta_2 B_{13} - \beta_1 B_{23}),
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{1}{2}{a_0'}^2(\gamma_1 B_{23} + \gamma_2 B_{13} - 2\gamma_3 B_{12}),\\
h_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2[\gamma_3(B_{33} - B_{11}) - \gamma_2 B_{23} + \gamma_1 B_{13}],\\
h_1 &= a_0'\big\{\gamma_1[a_0 B_{33} - (1+a_0)B_{22}] + \gamma_2(1+a_0)B_{12} - a_0\gamma_3 B_{13}\big\},\\
h_1' &= a_0'\big\{-(1+a_0)\gamma_1 B_{12} + \gamma_2[(a_0+1)B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0\gamma_3 B_{23}\big\},\\
h_0 &= \frac{1}{2}(a_0+1)(3a_0-1)(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23}),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$C_2^{(1)}(\varphi) = u_2\cos 2\varphi + u_2'\sin 2\varphi + u_1\cos\varphi + u_1'\sin\varphi + u_0, \tag{29}$$

$$C_2^{(2)}(\varphi) = v_2\cos 2\varphi + v_2'\sin 2\varphi + v_1\cos\varphi + v_1'\sin\varphi + v_0, \tag{30}$$

$$C_2^{(3)}(\varphi) = w_2\cos 2\varphi + w_2'\sin 2\varphi + w_1\cos\varphi + w_1'\sin\varphi + w_0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1}{2}{a_0'}^2(\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}),\\
u_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3(C_{22} - C_{11})],\\
u_1 &= a_0'\big[-\alpha_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \alpha_2 a_0 C_{12} + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13})\big],\\
u_1' &= a_0'\big[-\alpha_1 a_0 C_{12} + \alpha_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23})\big],\\
u_0 &= \frac{1}{2}\alpha_1\big[2a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{23}\big] - \frac{1}{2}\alpha_2[2a_0 s_1 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{13}],
\end{aligned} \tag{32}$$

$$
\begin{aligned}
&v_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}),\\
&v_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3(C_{22} - C_{11})],\\
&v_1 = a_0'\big[-\beta_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \beta_2 a_0 C_{12} + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13})\big],\\
&v_1' = a_0'\big[-\beta_1 a_0 C_{12} + \beta_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23})\big],\\
&v_0 = \frac{1}{2}\beta_1\big[2a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{23}\big] - \frac{1}{2}\beta_2[2a_0 s_1 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{13}],
\end{aligned} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}),\\
&w_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})],\\
&w_1 = a_0'\big[-\gamma_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13})\big],\\
&w_1' = a_0'\big[-\gamma_1 a_0 C_{12} + \gamma_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23})\big],\\
&w_0 = \frac{1}{2}\gamma_1\big[2a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{23}\big] - \frac{1}{2}\gamma_2[2a_0 s_1 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{13}].
\end{aligned} \tag{34}
$$

Таким образом, исследование прецессионно-изоконических движений гиростата сводится к изучению решения уравнений (9)–(11). Уравнения (9), (10) представляют систему линейных дифференциальных уравнений на функции $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$, если функция $\varphi(t)$ задана. Уравнение (11) является соотношением на функции $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$, которые удовлетворяют уравнениям (9), (10). Поэтому это соотношение должно быть инвариантным по отношению к системе (9), (10). В силу метода инвариантных соотношений необходимо вычислить производную от (11) в силу (9), (10). Однако такой путь приводит к весьма громоздким вычислениям.

В данной статье изучение прецессионно-изоконических движений гиростата будем проводить с помощью интеграла моментов из (3).

2. Первый случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Рассмотрим уравнения (9)–(11) с обозначениями (12)–(34) при условии $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1, 3})$, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$, $A_{ij} = 0$ $(i \neq j)$:

$$
\dot\lambda_1(t) = (a_0 + 1)\dot\varphi\lambda_2(t) - \ddot\varphi\, a_0' A_{11}\sin\varphi + \dot\varphi^2 b_1\cos\varphi + a_0 s_2 - a_0' s_3\cos\varphi, \tag{35}
$$

$$
\dot\lambda_2(t) = -(a_0 + 1)\dot\varphi\lambda_1(t) - \ddot\varphi\, a_0' A_{22}\cos\varphi + \dot\varphi^2 c_1'\sin\varphi + a_0' s_3\sin\varphi - a_0 s_1, \tag{36}
$$

$$
\dot\varphi a_0'(\lambda_1(t)\cos\varphi - \lambda_2(t)\sin\varphi) - \ddot\varphi(1 + a_0)A_{33} + \dot\varphi^2 d_2'\sin 2\varphi + a_0'(s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi) = 0, \tag{37}
$$

где

$$
b_1 = a_0'[(a_0 + 1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}], \quad c_1' = a_0'[(a_0 + 1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}],
$$

$$
d_2' = \frac{1}{2}{a_0'}^2(A_{11} - A_{22}).
$$

Важность данного случая состоит в том, что здесь пока не конкретизирована функция $\varphi(t)$.

Преобразуем интеграл моментов из (3) на основании принятых условий с учетом (6), (7):

$$a_0'(\lambda_1(t)\sin\varphi + \lambda_2(t)\cos\varphi) = k - \dot{\varphi}(\varkappa_0 - d_2'\cos 2\varphi). \qquad (38)$$

Из соотношений (37), (38) определим $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = \frac{1}{a_0'\dot{\varphi}}\big[(1+a_0)A_{33}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \sigma_0\dot{\varphi}^2\sin\varphi + k\dot{\varphi}\sin\varphi + \\
&+a_0'(s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi)\cos\varphi\big],\\
&\lambda_2(t) = \frac{1}{a_0'\dot{\varphi}}\big[-(1+a_0)A_{33}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \sigma_0'\dot{\varphi}^2\cos\varphi + k\dot{\varphi}\cos\varphi - \\
&-a_0'(s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi)\sin\varphi\big].
\end{aligned} \qquad (39)$$

Здесь обозначено

$$\sigma_0 = a_0(1+a_0)A_{33} + {a_0'}^2A_{11}, \qquad \sigma_0' = a_0(1+a_0)A_{33} + {a_0'}^2A_{22}.$$

Подставим (39) в уравнение (35):

$$\begin{aligned}
&(1+a_0)A_{33}\dot{\varphi}\,\dddot{\varphi} + a_0'\dot{\varphi}^2\big[(1-a_0)(s_1\sin\varphi - s_2\cos\varphi) + a_0's_3\big] - \\
&-ka_0\dot{\varphi}^3 + (1+a_0)A_{33}\dot{\varphi}^4 - a_0'\ddot{\varphi}(s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi) - (1+a_0)A_{33}\ddot{\varphi}^2 = 0.
\end{aligned} \qquad (40)$$

Полагая $\dot{\varphi} = u(\varphi)$ и обозначая дифференцирование по φ штрихом, из (40) имеем

$$\begin{aligned}
&(1+a_0)A_{33}u^2(\varphi)u''(\varphi) - a_0'u'(\varphi)(s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi) + (1+a_0)A_{33}u^3(\varphi) - \\
&-ka_0u^2(\varphi) + a_0'u(\varphi)[(1-a_0)(s_1\sin\varphi + s_2\cos\varphi) + a_0's_3] = 0.
\end{aligned} \qquad (41)$$

Рассмотрим условия существования решения уравнения (41) в классе тригонометрических функций

$$u(\varphi) = l_0 + l_1\cos\varphi + l_1'\sin\varphi. \qquad (42)$$

Подставим (42) в уравнение (41) и потребуем, чтобы полученное соотношение было тождеством по φ:

$$2l_0l_1'[l_0(1+a_0)A_{33} - ka_0] + a_0'l_0(1-a_0)s_1 + {a_0'}^2s_3l_1' = 0, \qquad (43)$$

$$2l_0l_1[l_0(1+a_0)A_{33} - ka_0] + a_0'l_0(1-a_0)s_2 + {a_0'}^2s_3l_1 = 0, \qquad (44)$$

$$l_1l_1'[l_0(1+a_0)A_{33} - ka_0] - \frac{1}{2}a_0'a_0(s_1l_1 + s_2l_1') = 0, \qquad (45)$$

$$[l_0(1+a_0)A_{33}-ka_0](l_1^2-{l_1'}^2)+a_0a_0'(l_1's_1-l_1s_2)=0, \tag{46}$$

$$2(l_0^2+\frac{1}{2}(l_1^2+{l_1'}^2))[l_0(1+a_0)A_{33}-ka_0]+(2-a_0)a_0'(l_1s_2+l_1's_1)+2{a_0'}^2s_3l_0=0. \tag{47}$$

Примером разрешимости уравнений (43)–(47) может служить следующий вариант

$$s_1=s_3=0, \qquad a_0=0, \qquad l_0=l_1=0. \tag{48}$$

В (48) приведены условия существования решения $\dot\varphi = l_1'\sin\varphi$ уравнения (40). Учтем в формулах (39) соотношения (48):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{l_1'}\big(A_{33}{l_1'}^2\cos^2\varphi-\sigma_0{l_1'}^2\sin^2\varphi+kl_1'\sin\varphi+s_2\cos\varphi\big),\\ \lambda_2 &= \frac{1}{l_1'}\big[-{l_1'}^2(A_{22}+A_{33})\sin\varphi\cos\varphi+kl_1'\cos\varphi-s_2\sin\varphi\big].\end{aligned} \tag{49}$$

Из (6), (7) имеем

$$\begin{gathered}\nu_1=\sin\varphi(t), \quad \nu_2=\cos\varphi(t), \quad \nu_3=0,\\ \omega_1=l_1'\sin^2\varphi(t), \quad \omega_2=l_1'\sin\varphi(t)\cos\varphi(t), \quad \omega_3=l_1'\sin\varphi(t),\end{gathered} \tag{50}$$

где в силу (48)

$$\varphi(t)=\arccos\frac{c_0e^u-1}{c_0e^u+1}, \tag{51}$$

а $u=-2\,l_1'(t-t_0)$, c_0 – постоянная интегрирования.

Таким образом, при выполнении условий $s_1=s_3=0$, $a_0=0$, $l_0=l_1=0$ уравнения (35), (36) допускают решение (49)–(51). Из условия $a_0=0$ следует, что ось собственного вращения гиростата ортогональна вектору $\boldsymbol{\nu}$. При выполнении равенств $s_1=0$, $s_3=0$ центр тяжести гиростата лежит в главной плоскости эллипсоида инерции, которая ортогональна оси собственного вращения.

3. Второй случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Положим в уравнении (41) $s_i=0$ $(i=\overline{1,3})$. Тогда

$$(1+a_0)A_{33}(u''(\varphi)+u(\varphi))-ka_0=0. \tag{52}$$

Общее решение уравнения (52) таково:

$$\dot\varphi=u(\varphi)=C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi+\frac{ka_0}{(1+a_0)A_{33}}, \tag{53}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Из (53) следует, что $\varphi(t)$ – элементарная функция времени.

В рассматриваемом случае из (1) получим

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}. \tag{54}$$

На основе (54) можно сделать вывод, что вектор момента количества движения гиростата постоянен:

$$A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}. \tag{55}$$

В силу (55) в качестве вектора $\boldsymbol{\nu}$ может быть взят вектор $\dfrac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$. Основным свойством решения (53) является условие $a_0 \neq 0$. Компоненты гиростатического момента определим из (39)

$$\begin{gathered}\lambda_1(t) = \frac{1}{a_0'}\big[(1+a_0)A_{33}(C_2\cos\varphi(t) - C_1\sin\varphi(t)) - \\ -\sigma_0 u(\varphi(t))\sin\varphi(t) + k\sin\varphi(t)\big], \\ \lambda_2(t) = \frac{1}{a_0'}\big[-(1+a_0)A_{33}(C_2\cos\varphi(t) - C_1\sin\varphi(t)) - \\ -\sigma_0' u(\varphi(t))\cos\varphi(t) + k\cos\varphi(t)\big],\end{gathered} \tag{56}$$

а вектора $\boldsymbol{\nu}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (6), (7):

$$\begin{gathered}\nu_1 = a_0'\sin\varphi(t), \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi(t), \quad \nu_3 = a_0, \\ \omega_1 = a_0' u(\varphi(t))\sin\varphi(t), \quad \omega_2 = a_0' u(\varphi(t))\cos\varphi(t), \quad \omega_3 = (a_0+1)u(\varphi(t)).\end{gathered} \tag{57}$$

В равенствах (56), (57) функция $\varphi(t)$ находится в результате интегрирования уравнения (53). Из приведенных выше формул следует, что в решении (56), (57) уравнений (35), (36) отсутствуют ограничения на моменты инерции и параметр a_0.

4. Третий случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Пусть в уравнении (41) выполняются условия

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = 0. \tag{58}$$

Преобразуем (41) к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{c_0 - (1+a_0)A_{33}u^2 + 2ka_0u - 2{a_0'}^2 s_3 ln|u|}} = \frac{1}{\sqrt{A_{33}(1+a_0)}}(\varphi - \varphi_0). \tag{59}$$

Обозначим левую часть (59) через $F(u)$, тогда $u(\varphi)$ можно получить путем обращения интеграла из (59):

$$u(\varphi) = F^{-1}\Big(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{A_{33}(1+a_0)}}\Big). \tag{60}$$

Учитывая равенство $\dot{\varphi} = u(\varphi)$, из (60) найдем $\varphi(t)$. Подставляя эту функцию в формулы (6), (7), (39), получим решение, которое описывает прецессионно-изоконическое движение гиростата.

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – **17**, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113.
2. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
6. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
8. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 79–83.
9. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 16–26.
10. *Котов Г.А.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59–66.
11. *Мазнев А.В., Белоконь Т.В.* Один случай трех инвариантных соотношений в задаче о движении симметричного гиростата // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 27–33.
12. *Горр Г.В., Котов Г.А.* О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40–50.

G.V. Gorr, Yu.V. Koshel

One class of precessionally isoconical motions of a gyrostat carrying two rotors

In the article, the subject of consideration is the problem on motion of a gyrostat carrying two rotors under the action of potential and gyroscopic forces. A special form of differential equations of motion of the gyrostat is obtained, it is meant for investigation of precessionally isoconical motions. A new solution of these equations is found in the case when the gyrostat is under the action of the force of gravity.

Keywords: *gyrostat, precessional and isoconical motions.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
gvgorr@gmail.com

Получено 05.04.16