

**Том 29**  
**Донецк, 2015**

*Основан в 1997г.*

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ**

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

<i>Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко</i> Колебание непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с покрытыми диафрагмой торцами .....	3
<i>А.И. Андрюхин, С.Н. Судаков</i> Динамика жидкого эллипсоида с массово-геометрическими параметрами планеты Юпитер .....	10
<i>Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев</i> Исследование влияния длины разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в изотропной пластине на базе обобщённой теории .....	20
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков</i> Гомеоморфизмы с трансмутационным свойством относительно взвешенной свертки .....	29
<i>И.А. Глухов, В.И. Сторожев</i> Дисперсионные свойства локализованных упругих волн во вмещенном между ортотропными полупространствами ортотропном слое .....	41
<i>А.В. Зыза</i> Новые решения уравнений движения гиростата в магнитном поле .....	51
<i>Н.С. Иванисенко</i> Аналог формулы Стокса в четырехмерном пространстве .....	60
<i>Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц</i> Новое асимптотическое представление угловых колебаний оси симметрии снаряда .....	70
<i>Г.А. Котов</i> Регулярная прецессия гиростата, несущего два ротора .....	86

<i>O.I. Kuznetsova</i> On the norms of the means of spherical Fourier sums .....	95
<i>И.А. Моисеенко</i> Спектры нормальных упругих волн в трансверсально изотропных волноводах секторного сечения с функционально-градиентной радиальной неоднородностью .....	100
<i>Р.Н. Нескородев</i> Метод переменных коэффициентов упругости решения задач вязкоупругости .....	114
<i>А.А. Симогин</i> Стоимость двухцветного опциона в диффузионной модели со скачками .....	127

УДК 539.3:534.1

©2015. Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко

## КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ ТОРЦАМИ

Рассмотрена трехмерная задача об установившихся колебаниях непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины, плоские грани которой покрыты диафрагмой. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний. Выполнены численные исследования дисперсионного уравнения, описывающего частотный спектр P-SV волн. Исследовано влияние показателя неоднородности материала на изменение собственных значений. Представлены диаграммы спектральных кривых.

**Ключевые слова:** поперечно-неоднородная изотропная пластина, диафрагма, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, частоты загибания.

**1. Введение.** Непрерывное изменение упругих свойств материала по одной из координат характерно для многих тел. Поперечно-неоднородные пластины широко применяются в качестве составных элементов многих современных конструкций. Проблемы проектирования, моделирования и исследования в области функционально-градиентных материалов отражены, например, в работах [1, 2]. Решение конкретных краевых задач теории упругости для функционально-градиентных сред сопряжено с необходимостью учета неоднородности материала. Анализ математических теорий поперечно-неоднородных упругих плит отражен в монографии [3], где отмечается, что актуальным является развитие аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в поперечно-неоднородных плитах на основе уравнений пространственной теории упругости. Одним из эффективных точных аналитических методов решения трехмерных краевых задач о колебаниях неоднородных, в частности, слоистых пластин является метод однородных решений [3–7], который был впервые предложен в работе [8]. В монографии [7] на основе однородных решений изложены аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач трехмерной теории упругости о равновесии и гармонических колебаниях однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин. Для поперечно-неоднородных пластин вихревое и потенциальное решения описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Однородные решения краевых задач об упругом равновесии и колебаниях трехслойных пластин с неоднородными слоями описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в работе [6].

Целью данной работы является получение однородных решений уравнений упругих гармонических колебаний непрерывно-неоднородной по толщине изотропной пластины с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в случае покрытых диафрагмой плоских граней.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим пластину постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к размерным прямоугольным декартовым координатам  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ . Координатную плоскость  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $\tilde{x}_3$  направим перпендикулярно торцам пластины. Лицевые грани пластины ( $\tilde{x}_3 = \pm h$ ) покрыты диафрагмой, а на ее боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени с круговой частотой  $\omega$  усилия. Предполагается, что модуль сдвига  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{x}_3)$  и плотность  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)$  материала пластины являются функциями поперечной координаты и изменяются по экспоненциальному закону

$$\tilde{G}(\tilde{x}_3) = \tilde{G}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{x}_3) = \tilde{\rho}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \nu, \tilde{G}_0, \tilde{\rho}_0, \alpha = \text{const}.$$

Введем безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/(\lambda R), \quad \lambda = h/R, \\ u_i(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/(2\tilde{G}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$(i, j = \overline{1, 3}),$$

$$G(x_3) = \tilde{G}(\tilde{x}_3)/\tilde{G}_0, \quad \rho(x_3) = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)/\tilde{\rho}_0, \quad \Omega = h\omega/c_S,$$

где  $R$  – характерный линейный размер пластины в плане,  $\Omega$  – приведенная частота упругих колебаний,  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  – скорость сдвиговой объемной волны в материале однородной пластины.

На основании введенных обозначений (1) задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения (равновесия при  $\Omega = 0$ ) в перемещениях

$$\begin{aligned} \lambda^2 \nu_0 \partial_1 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_1 + \alpha (\lambda \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \Omega^2 u_1 &= 0, \\ \lambda^2 \nu_0 \partial_2 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_2 + \alpha (\lambda \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \Omega^2 u_2 &= 0, \\ \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + 2\alpha (\partial_3 u_3 + \lambda \nu_0 \theta) + \Omega^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с учетом граничных условий на торцах пластины ( $x_3 = \pm 1$ )

$$u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_3, \quad \nu_0 = \frac{1}{1 - 2\nu}.$$

Компонента тензора напряжений  $\sigma_{33}$  в выражении (3) связана с перемещениями соотношением

$$\sigma_{33} = G(\nu \nu_0 \theta + \lambda^{-1} \partial_3 u_3).$$

Следует отметить, что исходную задачу из-за несимметричного по толщине строения пластины невозможно разделить на симметричную и кососимметричную подзадачи, как в случае однородной пластины [9]. Приведение трехмерной краевой задачи (2), (3) к двумерной осуществим методом однородных решений.

**3. Построение однородных решений задач.** Решение краевой задачи (2), (3) представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) \\ -p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2) \\ n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2) \\ q_p(x_3) C_p(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

На основании результатов работы [7] для поперечно-неоднородных пластин неизвестные функции  $p_k(x_3)$ ,  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  в выражениях (4) находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} (Gp')' + (\delta^2 G + \rho \Omega^2) p &= 0; \\ (Gn')' + (\rho \Omega^2 + (1 + \nu_0) \gamma^2 G) n + \lambda (G'q + G\nu_0 q') &= 0, \\ ((1 + \nu_0)Gq')' + (\rho \Omega^2 + \gamma^2 G) q + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_0 G)'n + G\nu_0 n') &= 0, \end{aligned}$$

а функции  $B_k(x_1, x_2)$  и  $C_p(x_1, x_2)$  являются метагармоническими

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p/\lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0.$$

В случае изменения величин  $G(x_3)$  и  $\rho(x_3)$  по экспоненциальному закону собственные функции  $p_k(x_3)$  и собственные значения  $\delta_k$  вихревого состояния находятся из спектральной задачи

$$p''(x_3) + \alpha p'(x_3) + (\Omega^2 + \delta^2) p(x_3) = 0, \quad p(\pm 1) = 0$$

и получаются такими

$$\begin{aligned} p_k(x_3) &= e^{-\alpha x_3/2} \sin \frac{\pi k}{2} (1 - x_3), \\ \delta_k &= \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \Omega^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично собственные функции  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  потенциального состояния определяются из решения задачи

$$\begin{aligned} n'' + \alpha n' + ((1 + \nu_0) \gamma^2 + \Omega^2) n + \lambda \nu_0 q' + \alpha \lambda q &= 0, \\ q'' + \alpha q' + \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{1 + \nu_0} q + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n' + \frac{\alpha (\nu_0 - 1) \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – параметр разделения переменных.

Уравнения (6) для рассматриваемого случая неоднородности материала пластины являются системой обыкновенных линейных однородных дифференциальных

уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \quad (8)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_0 &= 2(1 - \nu), & a_1 &= 4\alpha(1 - \nu), \\ a_2 &= 2(1 - \nu)(\alpha^2 + 2\gamma^2) + (3 - 4\nu)\Omega^2, \\ a_3 &= 4\alpha(1 - \nu)\gamma^2 + \alpha(3 - 4\nu)\Omega^2, \\ a_4 &= (\gamma^2 + \Omega^2) (2(1 - \nu)\gamma^2 + (1 - 2\nu)\Omega^2) - 2\alpha^2\nu\gamma^2. \end{aligned}$$

Корни данного уравнения получаются такими:

$$s_1 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_1, \quad s_2 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_1, \quad s_3 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_2, \quad s_4 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_2,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \gamma^2 + \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}\Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} + d_1, & \gamma_2^2 &= \gamma^2 + \Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} - d_1, \\ d_1 &= \frac{\Omega^2 - d}{4(1 - \nu)}, & d &= \sqrt{\Omega^4 + 16\alpha^2\gamma^2\nu(1 - \nu)}, \quad i^2 = -1. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, решением краевой задачи (6), (7) являются функции

$$\begin{aligned} n_p(x_3) &= H_{1p}e^{s_{1p}x_3} + H_{2p}e^{s_{2p}x_3} + H_{3p}e^{s_{3p}x_3} + H_{4p}e^{s_{4p}x_3}, \\ q_p(x_3) &= Q_{1p}e^{s_{1p}x_3} + Q_{2p}e^{s_{2p}x_3} + Q_{3p}e^{s_{3p}x_3} + Q_{4p}e^{s_{4p}x_3}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1 &= ((a_3s_3 + a_4s_4 - 2a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (a_3s_3 - a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2, \\ H_2 &= -((a_3s_3 + a_4s_4 - 2a_1s_1) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + (a_3s_3 - a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2, \\ H_3 &= -((a_1s_1 - a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (a_1s_1 + a_2s_2 - 2a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_1, \\ H_4 &= -((a_1s_1 - a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + (a_1s_1 + a_2s_2 - 2a_3s_3) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_1; \\ a_1 &= (\alpha_1 + 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), & a_2 &= (\alpha_1 - 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), \\ a_3 &= (\alpha_1 + 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), & a_4 &= (\alpha_1 - 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), \\ \alpha_1 &= -\alpha(1 - 4\nu), & \kappa^2 &= 2\gamma^2 + \Omega^2; \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q_j = \frac{a_j H_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, 4}), \quad \Delta = 4\lambda(\Omega^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2\nu(1 - \nu)).$$

Собственные значения  $\gamma_p$  находятся из дисперсионного уравнения

$$\begin{aligned} P(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) &= d^2 \left( \alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{1 - \nu} \right)^2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \\ &+ \alpha^2 ((\kappa^2 - d)\gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (\kappa^2 + d)\gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \times \\ &\times ((\kappa^2 - d)\gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - (\kappa^2 + d)\gamma_1 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Частотное уравнение (11), связывающее собственное значение  $\gamma$  и частоту  $\Omega$  при заданных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра неоднородности  $\alpha$ , описывает частотный спектр P-SV волн. Корни  $\gamma_p$  этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Действительные и комплексные корни  $\gamma$  отвечают краевым стоячим (нераспространяющимся) волнам. Мнимые корни  $\gamma$  соответствуют распространяющимся (бегущим) волнам, которые имеют важное значение для исследования процесса переноса энергии.

Описываемый уравнением (11) частотный спектр содержит, в частности, две специфические моды, которые задаются соотношениями  $\gamma_1 = 0$  или  $\gamma_2 = 0$ . Корни характеристического уравнения (8) для этих решений являются кратными. Поэтому им соответствует иная структура собственных функций  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  и эти случаи требуют дополнительных исследований. В отличие от однородной пластины ( $\alpha = 0$ ), каждая такой моды состоит из действительной, начинающейся при нулевой частоте  $\Omega$ , и мнимой ветвей.

Полагая в выражениях (5)–(11) частоту  $\Omega = 0$  получаем решение соответствующей задачи о равновесии неоднородной пластины.

Анализ распространения волн в пластине предполагает получение соответствующих асимптотических выражений для уравнения (11) при больших и малых значениях величин  $\gamma$ ,  $\Omega$ .

Для мнимых мод при малых значениях  $\gamma$  имеем длинноволновый диапазон. В этом случае для всех мнимых участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запираания распространяющихся волн [10]. Для их определения полагаем в соотношении (11)  $\gamma = 0$  и получаем две независимые серии частот запираания

$$\Omega_{k1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu} ((\pi k)^2 + \alpha^2)}, \quad \Omega_{k2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi k)^2 + \alpha^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Соотношения (12) совпадают с аналогичными для случая жестко заземленных торцов [11]. Как видно, частоты запираания второй серии не зависят от значений коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Оценим предельные значения фазовых скоростей  $v_p = \Omega/y$  ( $y = \text{Im}\gamma$ ) распространяющихся мод в высокочастотной области коротковолнового диапазона (большие значения  $\gamma$ ). При  $y \rightarrow \infty$  из дисперсионного соотношения (11) для всех распространяющихся мод получаем выражение

$$v_p = 1.$$

Таким образом, фазовая скорость  $c_p$  получается такой же, как и скорость сдвиговых объемных волн  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  в материале однородной пластины с физико-механическими характеристиками  $\nu$ ,  $\tilde{G}_0$ ,  $\tilde{\rho}_0$ .

Для малых значений частоты  $\Omega$  и параметра неоднородности  $\alpha$  с помощью асимптотического анализа получаем соответствующее предельное выражение для уравнения (11), а именно, при  $\Omega, \alpha \rightarrow 0$  имеем [12]

$$\cos^2 \gamma \sin^2 \gamma = 0.$$

**4. Результаты численных исследований.** Результаты численного решения дисперсионного уравнения (11) представлены на рис. 1 и рис. 2 в виде спектральных кривых – зависимостей собственных значений  $\gamma$  от частоты  $\Omega$  при  $\nu = 0,3$  и  $\alpha = 0,1$  (рис. 1);  $\nu = 0,3$  и  $\alpha = 1$  (рис. 2). На диаграмме дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ( $\text{Re}\gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im}\gamma, \Omega$ ) плоскости. Видно, что дисперсионные спектры подобны аналогичному для однородной пластины [9], однако имеются количественные и некоторые качественные отличия в поведении мод. Так, в области низких частот  $\Omega \ll 1$  данные уравнения имеют комплексные корни  $\gamma$  (в случае однородной пластины – только действительные ветви).

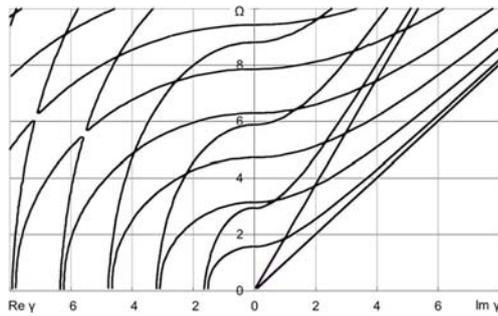


Рис. 1

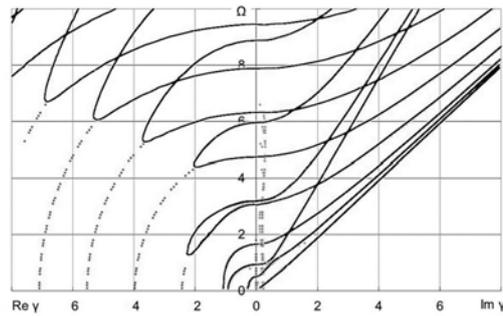


Рис. 2

**5. Выводы.** В данной работе получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях для неоднородной по толщине упругой пластины с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в случае покрытых диафрагмой торцов. Как и в случае однородной пластины, однородные решения состоят из вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между частотой колебаний и собственными значениями при заданных параметрах. Проведены численные исследования дисперсионного соотношения.

В явном виде получены частоты запирания, множество которых состоит из двух серий. На основе численных исследований изучена зависимость собственных значений от изменения показателя неоднородности материала пластины.

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60, № 5. – P. 195–216.
2. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
3. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.

4. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Упругие колебания трехслойных пластин с покрытыми диафрагмой торцами // Прикладная механика. – 2014. – 50, № 2. – С. 84–93.
5. Космодамианский А.С., Алтухов Е.В. Трехмерные задачи о вынужденных колебаниях трансверсальных неоднородных многосвязных плит // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 11. – С. 49–52.
6. Алтухов Е.В. Однородные решения задач о равновесии и колебаниях изотропных слоисто-неоднородных упругих пластин // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 1. – С. 18–22.
7. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
8. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – 6, № 2–3. – С. 151–168.
9. Алтухов Е.В., Панченко Ю.В., Богатчук А.Ю. Колебания изотропных пластин с учетом крайних условий типа плоского торца или диафрагмы // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.
10. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
11. Фоменко М.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с жесткими торцами // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 71–77.
12. Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теоретическая и прикладная механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7.

**E. V. Altukhov, M. V. Fomenko**

**Vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate with faces covered by a diaphragm.**

The three-dimensional problem of steady-state vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate is considered. The flat faces of plate are covered by a diaphragm. The homogeneous solutions of the system of motion equations in displacements are received as the sum of the vortex and potential states. The computational investigations of the dispersive equation describing frequency spectrum of P-SV waves are carried out. Influence of the inhomogeneity parameter of a material on change of eigenvalues is researched. Diagrams of spectral curves are represented.

**Keywords:** *transverse-inhomogeneous isotropic plate, diaphragm, steady-state vibration, homogeneous solutions method, dispersion spectra, cut-off frequencies.*

Донецкий национальный ун-т  
ealtukhov@ukr.net  
maxim\_fom@mail.ru

Получено 21.09.15

УДК 531.38

©2015. А. И. Андрюхин, С. Н. Судаков

## ДИНАМИКА ЖИДКОГО ЭЛЛИпсоИДА С МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПЛАНЕТЫ ЮПИТЕР

Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – твердый однородный шар. Для решения уравнений использован численный метод Рунге–Кутты. В качестве примера приведен расчет движения системы с массово-геометрическими параметрами системы Юпитер–Солнце.

*Ключевые слова:* задача двух тел, жидкий эллипсоид, однородное вихревое движение.

Начиная с Ньютона, задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов привлекала внимание многих ученых и была подробно исследована [1, 2, 5, 6, 8, 9]. Гораздо менее изучены важные для астрономии задачи о движении нескольких взаимогравитирующих жидких и твердых тел. Здесь широко известна проблема Роша об определении формы Луны [6]. Е.В. Петкевичем [3–4] получены уравнения движения для задачи двух жидких тел. Поскольку эти проблемы имеют фундаментальное значение для теории вращающихся звезд и жидких планет, представляется важным продолжить эти исследования.

Ниже рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – твердый однородный шар. Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к шару по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [7]. Составлены уравнения движения, которые решались численным методом Рунге–Кутты. В качестве примера рассмотрен случай движения с массово-геометрическими параметрами системы Юпитер–Солнце.

**1. Системы координат.** Обозначим через  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  обозначим подвижную прямоугольную систему координат, начало которой  $O_1$  совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Через  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида.

**2. Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости.** Положение точки  $O_1$  определим сферическими координатами  $r_1, \varphi_1, \theta_1$ , где  $\theta_1$  – угол между плоскостью  $O\xi_1\xi_2$  и радиусом-вектором  $OO_1$ ;  $\varphi_1$  – угол между полуосью  $O\xi_1$  и проекцией вектора  $OO_1$  на плоскость  $O\xi_1\xi_2$ . Тогда координаты точки  $O_1$  в осях  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выразятся формулами

$$\xi_1 = r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_2 = r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_3 = r_1 \sin \theta_1. \quad (1)$$

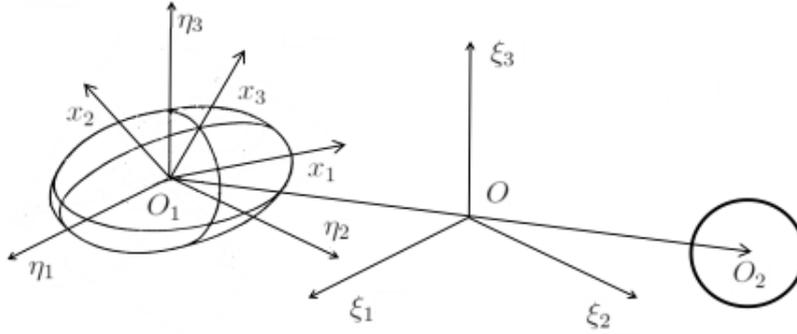


Рис. 1. Используемые системы координат

Дифференцируя формулы (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки  $O_1$ ) на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по  $t$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + \\ &\quad + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_3 &= \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Положение осей  $O_1x_1x_2x_3$  относительно  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  определим углами Кардана  $\alpha, \beta, \varphi$ . Матрица перехода  $A = (a_{ij})$  от осей  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  к  $O_1x_1x_2x_3$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \varphi & \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi & \sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi \\ -\cos \beta \sin \varphi & \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi & \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода  $A$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O_1x_1x_2x_3$

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

**3. Координаты центра масс шара.** Центр масс шара обозначим через  $O_2$ . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение

$$m_1r_1 = m_2r_2, \quad (5)$$

где  $m_1$  – масса жидкого эллипсоида,  $m_2$  – масса шара,  $r_i = |\overline{OO_i}|$ ,  $i = 1, 2$ . Точки  $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  при движении лежат на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки  $O_2$  в осях  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ :

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1}r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1}r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1}r_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $m = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ . Тогда в осях  $O_1x_1x_2x_3$  точка  $O_2$  будет иметь координаты

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

#### 4. Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны шара.

Проекции на оси  $O_1x_1x_2x_3$  силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны шара, определяются формулами

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2[(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho$  – плотность жидкости,  $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$ ,  $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$ ,  $\tilde{x}_i = x_i/r$ ,  $x_1, x_2, x_3$  – координаты рассматриваемой частицы жидкости в осях  $Ox_1x_2x_3$ .

**5. Линеаризация.** В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние  $r$  между точками  $O_1$  и  $O_2$  настолько велико, что можно провести линеаризацию величин  $f_i$  по  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь

$$f_1 = G\rho m_2 \frac{x_{21}}{r^3} + \frac{G\rho m_2}{r^5}(3x_{21}^2 + r^2)x_1 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5}x_2 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5}x_3 \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине  $m_2$  и к первому индексу величин  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ .

**6. Уравнения гидродинамики.** Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu - \\ - \mathbf{w} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, & \quad (8) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – скорость движения жидкости относительно осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – координатный вектор,  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  – полудлины главных осей жидкого эллипсоида,  $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$  – абсолютное ускорение точки  $O_1$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ .

Кинематическую вязкость  $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  определяем выражением

$$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где  $\nu_0 = \text{const}$ . Границу жидкости в осях  $O_1x_1x_2x_3$  задаем уравнением

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости  $\nu = 0$ .

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости  $\sigma$  имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал  $\Phi$  гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i &= c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \\ D &= [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}. \end{aligned}$$

**Замечание.** Задание кинематической вязкости как функции координат, на первый взгляд, может показаться неестественным. Однако в дальнейшем будут рассматриваться только однородные вихревые движения эллипсоидальной массы жидкости, при которых вязкость имеет одно и то же значение на каждом эллипсоиде из семейства соосных концентрических эллипсоидов, подобных границе жидкости.

Частицы жидкости, лежащие в какой-то момент времени на одном из таких эллипсоидов, никогда не сходят с него. То есть вязкость каждой частицы жидкости остается постоянной.

**6. Уравнения движения.** В случае однородного вихревого движения компоненты скорости  $v_1, v_2, v_3$  частицы жидкости с координатами  $x_1, x_2, x_3$  и давление  $p$  ищем в виде

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1}x_1 - \frac{c_1}{c_2}\omega_3^*x_2 + \frac{c_1}{c_3}\omega_2^*x_3 \quad (123), \quad p = -p_0(t)\left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1\right), \quad (9)$$

где  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  и  $p_0(t)$  – неизвестные функции времени  $t$ . Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\frac{c_3}{c_1}\omega_2^*\omega_2 - 2\frac{c_2}{c_1}\omega_3^*\omega_3 +$$

$$+ 2\pi\rho G\alpha_1 - \frac{Gm_2}{r^5}(3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{\dot{c}_1}{c_2}\omega_3^* - \frac{c_1}{c_2}\dot{\omega}_3^* - \frac{\dot{c}_1}{c_2}\omega_3^* + \frac{c_1}{c_2}\omega_1^*\omega_2^* +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2 + 2\frac{c_3}{c_2}\omega_1^*\omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2}\omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{13} = \frac{\dot{c}_1}{c_3}\omega_2^* + \frac{c_1}{c_3}\dot{\omega}_2^* + \frac{\dot{c}_1}{c_3}\omega_2^* + \frac{c_1}{c_3}\omega_1^*\omega_3^* +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3}\omega_2 + \frac{2c_2}{c_3}\omega_1^*\omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не распространяется на  $m_2$  и первые индексы символов  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ .

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях  $x_1, x_2, x_3$  из области занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $k_{ij}$  определены выражениями (11). Из условия несжимаемости следует

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = \text{const}. \quad (13)$$

Движение осей  $O_1x_1x_2x_3$  относительно  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  определяются кинематическими уравнениями, которые запишем в виде

$$\dot{\alpha} = (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) / \cos \beta,$$

$$\dot{\beta} = \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – проекции угловой скорости осей  $O_1x_1x_2x_3$  на эти оси.

Соотношения (12)–(14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных  $\omega_i^*$ ,  $\omega_i$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, p_0, \alpha, \beta, \varphi, r_1, \varphi_1, \theta_1$ , и после задания начальных условий, они полностью описывают движение системы.

**7. Уравнения движения в нормальной форме.** Уравнения  $k_{23} = 0, k_{32} = 0$  (123) представим в виде

$$\frac{c_2}{c_3} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{23}, \quad \frac{c_3}{c_2} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{32} \quad (123), \quad (15)$$

где

$$f_{23} = -\frac{2\dot{c}_2}{c_3} \omega_1^* + \frac{c_2}{c_3} \omega_2^* \omega_3^* + \omega_2 \omega_3 + 2\frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_3 - 2\frac{\dot{c}_3}{c_3} \omega_1 + \\ + \frac{2\nu_0}{c_3^2} \left( \frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* - 3Gm_2 \frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

$$f_{32} = -\frac{2\dot{c}_3}{c_2} \omega_1^* - \frac{c_3}{c_2} \omega_2^* \omega_3^* - \omega_2 \omega_3 - 2\frac{c_1}{c_2} \omega_3^* \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_1 - \\ - \frac{2\nu_0}{c_2^2} \left( \frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* + 3Gm_2 \frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123). \quad (16)$$

Разрешая систему (15) относительно  $\omega_1^*$ ,  $\omega_1$ , получаем

$$\dot{\omega}_1^* = \frac{c_2 c_3}{c_2^2 - c_3^2} (f_{23} - f_{32}), \quad \dot{\omega}_1 = \frac{c_2^2 f_{32} - c_3^2 f_{23}}{c_2^2 - c_3^2} \quad (123). \quad (17)$$

Теперь исключим переменные  $p_0$  и  $\dot{c}_3$  из уравнений  $k_{ii} = 0, i = 1, 2$ . Из уравнения  $k_{33} = 0$  находим

$$\frac{2p_0}{\rho} = \ddot{c}_3 c_3 + c_3^2 f_{33}, \quad (18)$$

где

$$f_{33} = -\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2} - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\frac{c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_1 - 2\frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_2 + \\ + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_3}{c_3^2} + 2\pi\rho G\alpha_3 - \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{23}^2 - r^2) \quad (123).$$

Из условия (13) следуют равенства

$$c_3 = R^3 c_1^{-1} c_2^{-1}, \quad \dot{c}_3 = -R^3 (c_1^{-2} c_2^{-1} \dot{c}_1 + c_1^{-1} c_2^{-2} \dot{c}_2), \quad (19)$$

$$\ddot{c}_3 = \frac{R^3}{c_1 c_2} \left( -\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right). \quad (20)$$

Используя (20), запишем выражение (18) в виде

$$\frac{2p_0}{\rho} = \frac{R^6}{c_1^2 c_2^2} \left( -\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + c_3^2 f_{33}. \quad (21)$$

При помощи (21), представим уравнения  $k_{11} = 0$  и  $k_{22} = 0$  в виде

$$\left( 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \right) \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_1, \quad \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_2, \quad (22)$$

где

$$F_1 = \frac{2R^6}{c_1^4 c_2^2} \left( \frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_1^2} f_{33} - f_{11}, \quad (23)$$

$$F_2 = \frac{2R^6}{c_1^2 c_2^4} \left( \frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_2^2} f_{33} - f_{22}.$$

Разрешая систему (22) относительно  $\ddot{c}_1/c_1$  и  $\ddot{c}_2/c_2$ , получаем

$$\frac{\ddot{c}_1}{c_1} = \left[ \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) F_1 - \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} F_2 \right] \Delta^{-1}, \quad \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = \left[ \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \right) F_2 - \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} F_1 \right] \Delta^{-1}, \quad (24)$$

$$\Delta = 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4}.$$

Уравнения  $k_{0i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  записываем в виде

$$w_{x_i} = Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где  $w_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекции абсолютного ускорения точки  $O_1$  на оси  $O_1 x_1 x_2 x_3$ , которые определяются формулами (3), (4). Величины  $x_{2i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определены формулами (7). Умножая уравнения (25) слева на матрицу  $A^T$ , обратную матрице  $A$ , приводим их к виду

$$w_i = \frac{Gm_2}{r^3} \sum_{j=1}^3 a_{ji} x_{2j} \quad i = 1, 2, 3.$$

Учитывая (7), перепишем эти уравнения так

$$w_j = \frac{Gm_2}{r^3} \eta_{2j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $\eta_{2j}$  определены формулами (6). Используя (3) и (6), запишем последние уравнения в виде

$$\begin{aligned} & \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ & - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\
 -r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
 -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 r_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \sin \theta_1.
 \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно  $\ddot{r}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\theta}_1$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_1 &= r_1(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2) - \frac{Gm_2}{mr^3}r_1, \\
 \ddot{\varphi}_1 r_1 \cos \theta_1 &= 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{\theta}_1 r_1 &= -r_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Уравнения (26) представляют собой уравнения движения в задаче двух тел. Второе из этих уравнений может быть проинтегрировано и представлено в виде

$$\dot{\varphi}_1 r_1^2 \cos^2 \theta_1 = \text{const.}$$

Уравнения (14), (17), (24), (26) разрешены относительно старших производных и представляют собой систему четырнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырнадцати неизвестных  $\alpha, \beta, \varphi, \omega_i^*, \omega_i, i = 1, 2, 3, c_1, c_2, r_1, \varphi_1, \theta_1$ , которая после задания начальных условий, полностью описывает движение рассматриваемой механической системы.

При численном интегрировании уравнений (14), (17), (24), (26) вводим безразмерные переменные  $\tau = t/T, \zeta_i = c_i/R, u_i = d\zeta_i/d\tau, \tilde{\omega}_i^* = T\omega_i^*, \tilde{\omega}_i = T\omega_i, i = 1, 2, 3, \tilde{r}_1 = r_1/R$ , где  $T$  – размерность времени,  $R = \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}$ . Для решения уравнений воспользуемся численным методом Рунге–Кутты 4–5. На рис. 2 приведены графики решения  $\zeta_1(\tau), \zeta_2(\tau)$  для системы с массово-геометрическими параметрами

$$\begin{aligned}
 T &= 24 \cdot 60^2 \text{ с}, \quad m_1 = 1.899414000 \cdot 10^{27} \text{ кг}, \quad m_2 = 1.988686458 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \\
 R &= 6.371000685 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad \rho = 1327.708338 \text{ кг/м}^3, \quad G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \\
 \nu_0 &= 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^2/\text{с}
 \end{aligned}$$

и следующими начальными данными при  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= 1.0384178705, \quad \zeta_2 = 1.038417869425, \quad \frac{d\zeta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = 0, \\
 \Omega_1 &= -0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 15.18589420, \\
 \omega_1 &= 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.00004832107001,
 \end{aligned}$$

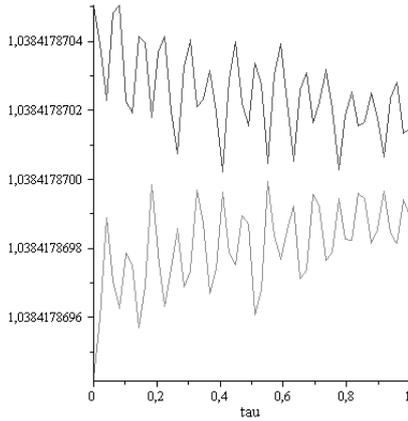


Рис. 2. Графики  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\zeta_1(\tau)$  – верхний график,  $\zeta_2(\tau)$  – нижний график

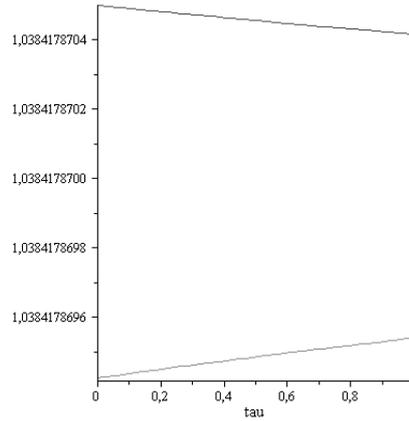


Рис. 3. Графики  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при  $\nu_0 = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\zeta_1(\tau)$  – верхний график,  $\zeta_2(\tau)$  – нижний график

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \varphi = 0,$$

$$r_1 = 4670670.751, \quad \varphi_1 = 0, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = 0.00004832107001, \quad \frac{d\theta_1}{d\tau} = 0.$$

На рис. 3 показаны графики переменных  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при тех же значениях параметров и тех же начальных условиях, но при значительно более высоком значении кинематической вязкости  $\nu_0 = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}$ .

**Выводы.** Составлены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид, а другое – твердый однородный шар. Составлена компьютерная программа для решения уравнений движения. Сделаны пробные расчеты плоского движения при массово-геометрических параметрах системы Юпитер Солнце. Пробные расчеты показали, что полученные уравнения движения достаточно хорошо решаются численным методом Рунге–Кутты. Однако расчеты требуют значительных затрат машинного времени, что связано с наличием особенности в уравнениях (17) при  $c_1 = c_2$ . Представляет интерес провести более детальных расчеты на больших временных интервалах, а также исследовать численно общий случай движения.

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.) Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрон. журн. – **3**, № 9. – 1977. – С. 424–428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух жидких тел // Письма в Астрон. журн. – **3**, № 11. – 1977. – С. 522–525.

5. *Стеклов В.А.* Работы по механике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 492 с.
6. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. – М.: Гостехиздат, 1949. – **3**. – 289 с.
7. *Судаков С.Н.* О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217–226.
8. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.
9. *Ядрицкий В.С.* Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 298 с.

**A. I. Andrukhin, S. N. Sudakov**

**The dynamics of liquid ellipsoid with the mass-geometrical parameters of the planet Jupiter.**

The problem of two bodies, one of which is the liquid ellipsoid and other is the homogeneous rigid ball, is investigating in this paper. The motion of liquid ellipsoid assumes to be uniform rotational flow, and the liquid has the stratified viscosity that makes possible such motion. The equations of motions are obtained and solved by Runge–Kutta method for mass-geometric parameters of Jupiter-Sun system.

**Keywords:** *the problem of two bodies, ellipsoidal mass of liquid, uniform rotational flow.*

Ин-т прикл. математики и механики, Донецк  
sudakov@iamm.su

Получено 19.12.14

УДК 539.3

©2015. Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ РАЗРЕЗА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ

На базе обобщённой теории решена задача термоупругости для изотропной пластины, содержащей теплоизолированный разрез. Рассмотрен случай произвольного теплообмена с внешней средой. С использованием двумерного интегрального преобразования Фурье и теории обобщённых функций получены интегральные представления внутренних силовых факторов и разрешающие системы сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние длины разреза на максимальные значения коэффициентов интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига.

*Ключевые слова:*  $\{1,0\}$ -аппроксимация, полиномы Лежандра, теплоизолированный разрез, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности напряжений.

**1. Введение.** Элементы конструкций и инженерных сооружений часто подвергаются действию не только механических, но и тепловых воздействий. Концентраторы напряжений (например, дефекты типа трещин), имеющиеся в пластинчатом элементе, существенно влияют на его напряжённо-деформированное состояние, а, следовательно, и на срок «жизни». Для решения задачи о прочности элемента конструкции, ослабленного дефектами, необходимо определять коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). На КИН могут оказывать существенное влияние характер и интенсивность теплообмена с внешней средой, а также размеры концентратора напряжений.

Поэтому актуальной задачей является построение расчётных моделей и методов расчёта, которые позволяют учитывать влияние указанных факторов. Об актуальности задач термомеханики разрушения свидетельствуют работы, опубликованные в последние годы: монография [1], статьи [2–5].

В данной статье определение КИН для поперечного и продольного сдвига, обусловленных наличием возмущённого температурного поля, осуществляется на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации (обобщённой теории С.П. Тимошенко). При этом искомые функции задачи термоупругости раскладываются в ряды Фурье по полиномам Лежандра  $P_k$  от толщины координаты [6, 7]. Такой подход позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Пластина содержит теплоизолированный разрез  $L$ . Предполагаем, что длина разреза значительно меньше линейных параметров пластины, а сам разрез достаточно удалён от её краёв. На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

В рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место такие представления [6, 7]:

- температура

$$T = T_0 P_0 + T_1 P_1;$$

- компоненты вектора перемещений

$$u_x = u P_0 + \gamma_x h P_1; \quad u_y = v P_0 + \gamma_y h P_1; \quad u_z = w_0 P_0;$$

- компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y); & \tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1; \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y); & \sigma_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $T_0$  – средняя температура;  $T_1$  – температурный момент;  $u, v, w_0, \gamma_x, \gamma_y$  – обобщённые перемещения;  $N_x, N_y, S$  – обобщённые мембранные усилия;  $M_x, M_y, H$  – обобщённые моменты;  $Q_{x0}, Q_{y0}$  – обобщённые перерезывающие силы.

Система уравнений термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации для изотропных пластин, записанная в безразмерной системе координат  $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$ , включает в себя [6, 7]

- первое приближение трёхмерного уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0} T_0 + A_{k1} T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad (2)$$

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \{ \partial_1 u + \nu \partial_2 v - \alpha(1 + \nu) T_0 \}; & N_2 &= B_0 \{ \partial_2 v + \nu \partial_1 u - \alpha(1 + \nu) T_0 \}; \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 (\partial_2 u + \partial_1 v); & H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2); \\ M_1 &= D_0 \{ \partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}; & M_2 &= D_0 \{ \partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}; \\ Q_{j0} &= \Lambda_0 (\gamma_j + \partial_j w_0) \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (3)$$

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 N_1 + \partial_2 S &= 0; & \partial_1 S + \partial_2 N_2 &= 0; \\ \partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} &= 0; & \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} &= 0; & \partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $A_{kj}$  ( $k, j = 0, 1$ ) – известные коэффициенты [8], зависящие от параметров теплообмена  $Bi^\pm$  на лицевых поверхностях пластины ( $x_3 = \pm 1$ );  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}; \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2); \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1 + \nu)}.$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в (3) определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Юнга), а моменты – с точностью до  $Eh^2$ .

Первые три уравнения Дюамеля–Неймана (3) и первые два уравнения равновесия (4) описывают безмоментное термоупругое состояние. Остальные уравнения (3), (4) описывают состояние термоупругого изгиба.

Заметим, что в случае симметричного теплообмена, когда параметры теплообмена на лицевых поверхностях пластины равны ( $Bi^+ = Bi^-$ ) система уравнений термоупругости (2)–(4) распадается на две независимых системы, первая из которых описывает безмоментное термоупругое состояние, а вторая – состояние термоупругого изгиба. В случае произвольного теплообмена с внешней средой эти системы не являются независимыми.

Граничные условия на линии теплоизолированного разреза  $L$  в предположении свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними имеют вид [9]

- для задачи теплопроводности (2):

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} = 0 \quad (k = 0, 1). \quad (5)$$

- для задачи термоупругости (3), (4):

$$N_n|_L = 0; \quad S_{nt}|_L = 0; \quad M_n|_L = 0; \quad H_{nt}|_L = 0; \quad Q_n|_L = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  – нормаль к линии разреза  $L$ ;

$$\begin{aligned} N_n &= n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2; & S_{nt} &= n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S; \\ M_n &= n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2; & H_{nt} &= n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H; \\ Q_n &= n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}. \end{aligned}$$

Компоненты термоупругого состояния пластины с разрезом  $G^*$  представляются в виде суммы [10]:

$$G^* = G^{\text{осн}} + G, \quad (7)$$

где  $G^{\text{осн}}$  – компоненты основного термоупругого состояния, т.е. термоупругого состояния в сплошной пластине, которое предполагается известным;  $G$  – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Ввиду принятых предположений о размере и положении разреза возмущённое термоупругое состояние пластины локализовано в непосредственной окрестности рассматриваемого разреза.

Компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  определяются из системы дифференциальных уравнений (2)–(4). Граничные условия для компонент  $G$  следуют из условий (5), (6) и представлений (7) и имеют вид

- для задачи теплопроводности (2):

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} \Big|_L = - \frac{\partial T_k^{\text{осн}}}{\partial n} \Big|_L \quad (k = 0, 1); \quad (8)$$

- для задачи термоупругости (3), (4):

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^{\text{очн}}|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^{\text{очн}}|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^{\text{очн}}|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^{\text{очн}}|_L; & Q_n|_L &= -Q_n^{\text{очн}}|_L. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку разрез  $L$  предполагается малым и расположенным на значительном удалении от краёв пластины, то компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  не распространяются до линии внешней границы и определяются лишь условиями, заданными на линии разреза.

**3. Методика решения задачи.** К системе уравнений термоупругости (2)–(4) применим двумерное интегральное преобразование Фурье с учётом разрывного характера искомых функций на линии разреза  $L$  [10]:

$$F(\partial_j G) = (-i\xi_j)\tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j [G] \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL \quad (j = 1, 2). \quad (10)$$

Здесь  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $[G] = G^+ - G^-$  – скачок функции  $G$  при переходе через линию  $L$  ( $G^\pm$  – граничные значения функции  $G$  в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ );  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью  $\vec{n}$  при вращении против часовой стрелки.

Решение задачи теплопроводности (2) с граничными условиями (8) построено в статье [11]. Здесь дадим решение задачи термоупругости (3), (4), (9).

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье (10) к системе (3), (4), запишем трансформанты внутренних силовых факторов

$$\tilde{P}_j^q = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{k=1}^{\kappa_{q,j}} \tilde{K}_{jk}^q \psi_k^q \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 2q+3}). \quad (11)$$

Здесь  $\kappa_{q,j} = 3q + 4$  при  $q = 0, 1, j = \overline{1, 3}$ ;  $\kappa_{q,j} = 5$  при  $q = 1, j = 4, 5$ ; верхними индексами  $q = 0$  и  $q = 1$  обозначены компоненты безмоментного термоупругого состояния и состояния термоупругого изгиба соответственно;

$$P_j^0 = N_j; \quad P_j^1 = M_j; \quad P_{j+3}^1 = Q_{j0} \quad (j = 1, 2); \quad P_3^0 = S; \quad P_3^1 = H;$$

$\tilde{K}_{jk}^q$  – трансформанты ядер интегральных представлений, например,

$$\tilde{K}_{11}^1 = -\frac{2}{3} \left\{ \frac{i\xi_2^3}{p^4} + 3\Lambda_0 \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4(p^2 + 2,5)} \right\}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2; \quad (12)$$

$\psi_j^q = \psi_j^q(s)$  – неизвестные функции ( $s$  – длина дуги кривой  $L$ ):

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad \psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]; \quad \psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1];$$

$$\psi_j^1 = \frac{d[\gamma_j]}{ds}; \quad \psi_{j+3}^1 = [\gamma_j] \quad (j = 1, 2); \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}.$$

Методика обращения трансформант ядер интегральных представлений (11) подробно описана в статьях [12, 13]. Она основана на формуле обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (10) и интегральном представлении специальной  $G$ -функции [14]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;

$$r > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 1,5.$$

Например, ядро (12) в пространстве оригиналов имеет вид:

$$K_{11}^1 = -\frac{\sin \varphi}{3r} (3 - 2 \sin^2 \varphi) + \frac{\Lambda_0 r}{4} \left\{ \sin \varphi G_{1,0}(\sqrt{2,5}r) + \sin 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2,5}r) \right\},$$

где

$$r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{x}_1}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{\bar{x}_2}{r}; \quad \bar{x}_1 = x_1 - x'_1; \quad \bar{x}_2 = x_2 - x'_2.$$

Рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длины  $2l$ , расположенный вдоль оси  $Ox_1$  симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (13)$$

Для разреза (13) оригиналы искомых функций (11) примут вид ( $x'_1 = ls$ ):

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\kappa_{q,j}} K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q ds \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 2q+3}). \quad (14)$$

Подставляя интегральные представления компонент термоупругого состояния (14) в граничные условия (9), получим системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающие

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1); \quad (15)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_j^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1), \quad (16)$$

где  $E_{jk}^1$  – ядра интегральных уравнений.

Правые части систем СИУ (15), (16) имеют вид:

$$F_1^q(\zeta) = -(q+2)(P_3^q)^{\text{очн}}|_{x_2=0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^1 \int_{-1}^1 D_m^q(\zeta-s)[T_m]ds \quad (q=0,1);$$

$$F_2^q(\zeta) = -(q+2)(P_2^q)^{\text{очн}}|_{x_2=0} \quad (q=0,1); \quad F_3^1(\zeta) = -\frac{1}{\Lambda_0}(P_5^1)^{\text{очн}}|_{x_2=0}.$$

Здесь разностные ядра  $D_m^q(\zeta-s)$  ( $m, q=0,1$ ) представляют собой линейные комбинации специальной  $G$ -функции, зависящие от параметров теплообмена  $B_i^\pm$ .

В системе (16) ненулевые разностные ядра  $E_{jk}^q(\zeta-s)$  представляют собой линейные комбинации специальной  $G$ -функции и её первообразной  $IG_{n,\nu}(z)$ , причём лишь одно ядро имеет логарифмическую особенность:

$$E_{31}^1(\zeta-s) = -\frac{l+1}{2}G_{0,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta-s|) - \frac{1}{2}G_{1,1}(\sqrt{2,5}l|\zeta-s|) + 0,5 \ln \frac{\gamma\sqrt{2,5}l}{2} - 0,25,$$

что обусловлено асимптотическими свойствами специальной  $G$ -функции [14]

$$G_{0,0}(z) \approx -\ln \frac{\gamma z}{2}, \quad G_{1,1}(z) \approx -0,5 \quad (|z| \ll 1); \quad \ln \gamma = C = 0,5772\dots$$

Из непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза следуют дополнительные ограничения на искомые функции:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s)ds = 0 \quad (q=0,1; j=\overline{1, q+2}). \quad (17)$$

Решение системы СИУ (15) при ограничениях (17) в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка  $[-1, 1]$  имеет вид [15]:

$$\psi_j^0(\zeta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-\zeta} F_j^0(s)ds \quad (j=1,2). \quad (18)$$

Система (16) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которая при ограничениях (17) может быть решена методом механических квадратур [15]. Для вычисления интегралов с логарифмической особенностью используются известные квадратурные формулы [16].

Термоупругое состояние вблизи концов разреза вследствие наличия ядер Коши в интегральных представлениях (14) имеет сингулярный характер с особенностью вида  $r^{-1/2}$  [15].

Пусть на линии разреза (13) основное термоупругое состояние таково, что

$$N_y^{\text{очн}}|_{y=0} = S^{\text{очн}}|_{y=0} = M_y^{\text{очн}}|_{y=0} = H^{\text{очн}}|_{y=0} = Q_{y0}^{\text{очн}}|_{y=0} = 0 \quad (|x| \leq lh). \quad (19)$$

Тогда на основании представления интегралов типа Коши в окрестностях концов линии интегрирования [17] получим следующие выражения для напряжений вблизи концов разреза:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{\pm} &= \mp \frac{E}{4\sqrt{2hlr}} \left\{ P_0 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_1^0(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] + P_1 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_1^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] \right\}; \\ \tau_{yz}^{\pm} &= \mp \frac{E\Lambda_0}{4\sqrt{2hlr}} (P_0 - P_2) \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_3^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right].\end{aligned}\quad (20)$$

Исходя из определения КИН [18] получим выражения КИН для поперечного ( $K_{II}$ ) и продольного сдвига ( $K_{III}$ ):

$$\begin{aligned}K_{II}^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{\pi hl} E}{4} \left\{ P_0 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^0(s) \sqrt{1 - s^2} \right] + P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right] \right\}; \\ K_{III}^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{\pi hl} E \Lambda_0}{4} (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_3^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right].\end{aligned}$$

Модуль  $K_{II}^{\pm}$  принимает максимальное значение на одной из лицевых поверхностей пластины  $z = h$  или  $z = -h$ , а модуль  $K_{III}^{\pm}$  достигает максимального значения в срединной плоскости пластины  $z = 0$ , причём

$$\begin{aligned}K_{II}^{\max} &= \frac{\sqrt{\pi hl} E}{4} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ (|\psi_1^0(s)| + |\psi_1^1(s)|) \sqrt{1 - s^2} \right\}; \\ K_{III}^{\max} &= \frac{3\sqrt{\pi hl} E \Lambda_0}{8} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\}.\end{aligned}\quad (21)$$

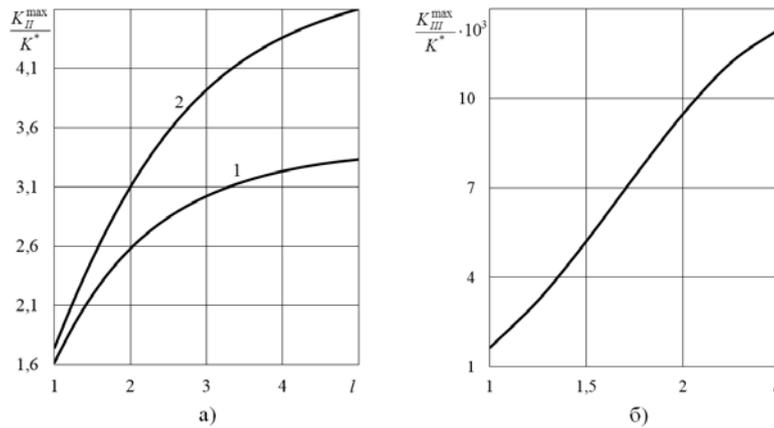
**4. Анализ результатов численных исследований.** Проведены численные исследования влияния половины длины  $l$  прямолинейного разреза (13) на максимальные значения КИН для поперечного и продольного сдвига (21). Коэффициент Пуассона принимался равным  $\nu = 0,3$ . Для анализа поведения КИН, обусловленных наличием возмущённого температурного поля, предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния, т. е. выполнение условий (19).

Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза действует лишь однородный тепловой поток:

$$\partial_2 T_0^{\text{очн}}|_{x_2=0} = q_0 = \text{const} \neq 0, \quad \partial_2 T_1^{\text{очн}}|_{x_2=0} = 0 \quad (|x_1| \leq l).$$

Результаты расчётов для максимальных по модулю значений КИН представлены на рис. 1а, б. При этом рис. 1а соответствует КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$ , а рис. 1б – КИН для продольного сдвига  $K_{III}^{\max}$ . Значения КИН даны с точностью до величины  $K^* = 0,25\alpha q_0 l E \sqrt{lh}$ .

Рассматривались два вида теплообмена с внешней средой на лицевых поверхностях пластины:

Рис. 1. Влияние половины длины разреза  $l$  на максимальные значения КИИ

- симметричный ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ) – кривая 1 на рис. 1а;
- верхний односторонний ( $Bi^+ = Bi$ ;  $Bi^- = 0$ ) – кривая 2 на рис. 1а и кривая на рис. 1б.

При этом параметр теплообмена  $Bi$  брался равным 0,1. Значения  $K_{III}$  равны нулю в случае симметричного теплообмена с внешней средой.

**5. Выводы.** Анализ результатов, представленных на рис. 1, показывает, что зависимость коэффициентов интенсивности для поперечного и продольного сдвига от длины разреза соответствует общим закономерностям механики разрушения: с увеличением длины разреза КИИ увеличиваются. Причём на характер этих зависимостей существенно влияют параметры, определяющие условия температурного нагружения. Так, максимальные значения КИИ для поперечного сдвига  $K_{II}$  при одностороннем теплообмене с внешней средой существенно больше, чем в условиях симметричного теплообмена.

Коэффициент интенсивности для продольного сдвига  $K_{III}$  при симметричном теплообмене отсутствует, а его абсолютные значения на три порядка меньше, чем значения  $K_{II}$ . Поэтому при оценке несущей способности тонкостенных элементов конструкций при наличии постоянных по толщине тепловых потоков коэффициент интенсивности для продольного сдвига можно не учитывать.

1. Саврук М.П. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами / М. П. Саврук, В. М. Зеленька. – Львів: Растр-7, 2009. – 211 с.
2. Зеленька В.М. Дослідження термопружного стану двовимірних композитних тіл з тріщинами / В.М. Зеленька // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2014. – **50**, № 1. – С. 18–24.
3. Кіт Г.С. Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та тріщинами (плоска деформація) / Г.С. Кіт, М.С. Черняк // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 30–37.
4. Кіт Г.С. Осесиметричні задачі теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) / Г.С. Кіт, О.П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.

5. *Zelenyak V.M.* Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate / V.M. Zelenyak // *Materials Science*. – 48, № 3, November 2012. – P. 301–307.
6. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. *Пелех Б.Л.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л.Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
8. *Bondarenko N.S.* Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2011. – 174, № 3. – P. 400–414.
9. *Кит Г.С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.
10. *Шевченко В.П.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
11. *Бондаренко Н.С.* Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А*. – 2012. – Вип. 1. – С. 26–32.
12. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А*. – 2013. – Вип. 1. – С. 20–26.
13. *Бондаренко Н.С.* Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2014. – № 9 (55). – С. 42–52.
14. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
15. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
16. *Панасюк В.В.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
17. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
18. *Партон В.З.* Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 504 с.

N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev

**Investigation of the influence of cut length on the stress intensity factors in an isotropic plate on the basis of generalized theory.**

The thermoelastic problem for an isotropic plate with heat-insulated cut is solved on the basis of the generalized theory. The case of arbitrary heat exchange with the environment is considered. The integral representations of internal power factors and systems of singular integral equations leading to decision are obtained by using two-dimensional Fourier transform and the theory of generalized functions. The influence of cut length on the maximum values of stress intensity factors for the transverse and longitudinal shear is investigated.

**Keywords:**  $\{1,0\}$ -approximation, Legendre polynomials, heat-insulated cut, singular integral equations, stress intensity factors.

Донецкий национальный ун-т  
Ин-т прикл. математики и механики, Донецк  
bondarenko\_n\_s@mail.ru  
a.s.goltsev@gmail.com

Получено 03.10.15

УДК 517.444

©2015. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

## ГОМЕОМОРФИЗМЫ С ТРАНСМУТАЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЗВЕШЕННОЙ СВЕРТКИ

Изучается обобщенный лапласиан  $\mathfrak{L}$  на гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$ , инвариантный относительно взвешенных сдвигов. Получены аналоги формулы обращения и теоремы Винера–Пэли для интегрального преобразования, порожденного радиальными собственными функциями оператора  $\mathfrak{L}$ . Построены трансмутационные отображения для взвешенной свертки на  $\mathbb{H}^2$ , индуцируемой указанными сдвигами.

**1. Введение.** Отображения со свойством трансмутации играют важную роль в теории уравнений свертки на симметрических пространствах и их многочисленных приложениях (см. [1–5] и библиографию к этим работам). Это объясняется тем, что трансмутационное свойство позволяет произвести редукцию многих задач, связанных со сверткой, к соответствующим проблемам теории одномерных уравнений свертки (см. [1–5]). Далее такие задачи допускают полное решение с использованием результатов о свойствах пространства решений одномерных уравнений свертки, полученных в [6] (см. также [4]). Реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и сферических преобразований на симметрических пространствах (см. [7]).

Доказательства основных результатов из цитированных выше работ основаны на методах гармонического анализа и существенно используют инвариантность рассматриваемых задач относительно соответствующей группы преобразований. В ряде случаев, когда такая инвариантность нарушается, подобные методы становятся либо неприменимыми, либо недостаточно тонкими. Это относится, в частности, к ситуации, когда рассматриваются интегральные преобразования с весом, часто возникающие в приложениях.

В данной работе развивается техника трансмутационных отображений относительно свертки с весом на гиперболической плоскости. Отметим, что помимо значительного самостоятельного интереса, такая свертка возникает в проблемах геометрического описания класса голоморфных функций (см. [6, часть 5, гл. 4], [8], [9]). Полученные результаты позволяют, в частности, получить для указанной свертки аналоги результатов из [6, часть 5, гл. 4], известных ранее для инвариантного случая.

**2. Формулировка основного результата.** Всюду в дальнейшем,  $G$  – группа конформных автоморфизмов единичного круга  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Для любых  $g \in G$ ,  $z \in \mathbb{D}$  через  $gz$  будем обозначать образ точки  $z$  при отображении  $g$ . Введем взвешенный сдвиг функции  $f \in C(\mathbb{D})$  по правилу

$$f_g(z) = f(g^{-1}z) (1 - g_0 \cdot \bar{z})^{-2}, \quad z \in \mathbb{D}, g \in G. \quad (1)$$

Рассмотрим дифференциальный оператор  $\mathfrak{L}$ , действующий на пространстве  $C^2(\mathbb{D})$  следующим образом

$$\mathfrak{L} = 4(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - 8(1 - |z|^2) z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Прямой подсчет показывает, что оператор  $\mathfrak{L}$  инвариантен относительно взвешенных сдвигов (1). Пусть

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{\frac{1-i\lambda}{2}} F\left(\frac{5-i\lambda}{2}, \frac{1-i\lambda}{2}; 1; |z|^2\right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3)$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $F$  – гипергеометрическая функция Гаусса. Используя формулы дифференцирования для гипергеометрической функции (см. [10, формулы 2.8(25), 2.8(26)]), из (2) и (3) получаем

$$(\mathfrak{L}\mathcal{H}_\lambda)(z) = -(\lambda^2 + 1)\mathcal{H}_\lambda(z). \quad (4)$$

Как известно, для любого  $g \in G$  существуют и определяются однозначно числа  $\tau, z \in \mathbb{C}$ , такие, что  $|\tau| = 1$ ,  $|z| < 1$  и

$$gw = \tau \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \quad (5)$$

при всех  $w \in \mathbb{D}$ . Отображения (5) являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$ , реализованной в виде круга  $\mathbb{D}$  (см., например, [7, введение, § 4]). Гиперболическое расстояние  $d$  между точками  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$  в этой модели определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

В частности,

$$d(z, 0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = \operatorname{arth} |z| \quad \text{и} \quad |z| = \operatorname{th} d(z, 0), \quad z \in \mathbb{H}^2.$$

Расстояние  $d$  и гиперболическая мера  $d\mu$  на  $\mathbb{H}^2$ , определенная равенством

$$d\mu(z) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge \bar{d}z}{(1 - |z|^2)^2},$$

инвариантны относительно группы  $G$ .

Для  $r > 0$  символом  $B_r$  будем обозначать открытый гиперболический круг радиуса  $r$  с центром в нуле, т.е.

$$B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) < r\}.$$

Для  $r \geq 0$  обозначим  $\bar{B}_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) \leq r\}$ .

Пусть  $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$  (соответственно  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ) – множество всех функций с компактными носителями из  $C^\infty(\mathbb{H}^2)$  (соответственно  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ) со стандартной топологией (см., например, [7, гл. 2, § 2, п. 2]). Для функции  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$  положим

$$r(f) = \min \{r > 0 : \text{supp } f \subset \overline{B}_r\},$$

где  $\text{supp } f$  – носитель  $f$ . Для  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  определим величину  $r(f)$  равенством

$$r(f) = \min \{r > 0 : \text{supp } f \subset [-r, r]\}.$$

Символами  $C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ ,  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$  и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  будем обозначать соответственно пространства радиальных функций из  $C(\mathbb{H}^2)$ ,  $C^\infty(\mathbb{H}^2)$  и  $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$  с индуцированной топологией. Аналогично, символы  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$  обозначают пространства четных функций из  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$  и  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  соответственно. Для  $f \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  определим функцию  $f_0$  на  $[0, +\infty)$  посредством равенства

$$f_0(|z|) = f(z), \quad z \in \mathbb{H}^2. \quad (6)$$

Как обычно, символом  $\widehat{h}$  будем обозначать преобразование Фурье функции  $h \in L^1(\mathbb{R}^1)$ , то есть

$$\widehat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Если  $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$ , то определена свертка  $h_1 * h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$  и при этом

$$\widehat{h_1 * h_2} = \widehat{h_1} \widehat{h_2}. \quad (7)$$

Предположим, что  $f_1, f_2 \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  и что хотя бы одна из функций  $f_1, f_2$  имеет компактный носитель. Введем взвешенную свёртку  $f_1 \times f_2$  следующим образом:

$$(f_1 \times f_2)(g0) = \int_{\mathbb{H}^2} f_1(z) f_2(g^{-1}z) \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 - z \cdot g0)^2} d\mu(z), \quad z \in \mathbb{H}^2. \quad (8)$$

Из (8) и инвариантности меры  $d\mu$  следует, что  $f_1 \times f_2 \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  и

$$f_1 \times f_2 = f_2 \times f_1.$$

Далее, если  $f_i \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и хотя бы две из функций  $f_i$  имеют компактные носители, то из (8) имеем

$$(f_1 \times f_2) \times f_3 = f_1 \times (f_2 \times f_3).$$

Далее, пусть функция  $f \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  имеет компактный носитель. Введем интегральное преобразование

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^2} f(z) \mathcal{H}_\lambda(z) d\mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Положим

$$c(\lambda) = \frac{2^{3-i\lambda} \Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i\lambda+3}{2}\right)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где  $\Gamma$  – гамма-функция.

Основным результатом данной работы является

**Теорема 1.** *Существует гомеоморфизм  $\mathfrak{A} : C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2) \rightarrow C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ , удовлетворяющий следующим условиям.*

(i) *Для  $f \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$*

$$\mathfrak{A}(f)(t) = \frac{16}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} \cos(\lambda t) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(i) \cos(it). \quad (10)$$

(ii) *Пусть  $f \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ ,  $r \in (0, +\infty)$ . Тогда  $f = 0$  в  $B_r$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{A}(f) = 0$  на  $(-r, r)$ .*

(iii) *Если  $f_1 \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ ,  $f_2 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ , то имеет место трансмутационное соотношение*

$$\mathfrak{A}(f_1 \times f_2) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{A}(f_1) * \widehat{\mathcal{F}(f_2)}.$$

(iv) *Если  $\lambda \in \mathbb{C}$ , то*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t) = \cos \lambda t.$$

**3. Вспомогательные утверждения.** В этом разделе мы докажем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся взвешенной сверки и интегрального преобразования  $\mathcal{F}$ .

**Лемма 1.** *Пусть  $f_1, f_2 \in C_{\mathfrak{h}} \cap C^2(\mathbb{H}^2)$  и хотя бы одна из функций  $f_1, f_2$  имеет компактный носитель. Тогда*

$$\mathfrak{L}(f_1 \times f_2) = f_1 \times \mathfrak{L}f_2 = (\mathfrak{L}f_1) \times f_2. \quad (11)$$

*Доказательство.* Соотношение (8) может быть переписано в виде

$$(f_1 \times f_2)(z) = \int_G f_1(g0) f_2(g^{-1}z) \frac{(1 - |g0|^2)^2}{(1 - \bar{\zeta} \cdot g0)^2} dg, \quad (12)$$

где  $dg$  – мера Хаара на  $G$ , нормированная условием

$$\int_G f(g0) dg = \int_{\mathbb{D}} f(z) d\mu(z), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$$

(см. [7, введение, § 4, п. 3]). Тогда первое равенство в (11) проверяется непосредственным вычислением с использованием (12) и (2). Второе равенство в (11) следует из первого в силу коммутативности взвешенной свертки.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть функции  $f_1$  и  $f_2$  класса  $C_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$  имеют компактные носители. Тогда

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2) = \mathcal{F}(f_1) \mathcal{F}(f_2). \quad (13)$$

*Доказательство.* Из равенства (9) и ассоциативности взвешенной свертки находим

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^2} (f_1 \times f_2)(z) \mathcal{H}_\lambda(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{H}^2} f_1(z) F(z) d\mu(z), \quad (14)$$

где

$$F(z) = \mathcal{H}_\lambda \times f_2. \quad (15)$$

Используя лемму 1 и (4), получаем

$$\mathfrak{L}F = (\mathfrak{L}\mathcal{H}_\lambda) \times f_2 = -(\lambda^2 + 1)F. \quad (16)$$

Равенство (15) показывает, что функция  $F$  является непрерывной в нуле. Сопоставляя этот факт с соотношением (16), заключаем, что

$$F(z) = F(0) \mathcal{H}_\lambda(z) = \mathcal{F}(f_2) \mathcal{H}_\lambda(z) \quad (17)$$

(см. [7, введение, доказательство леммы 3.7]). Тогда из (14) имеем

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \mathcal{F}(f_2) \int_{\mathbb{H}^2} f_1(z) \mathcal{H}_\lambda(z) d\mu(z) = \mathcal{F}(f_1) \mathcal{F}(f_2),$$

что и требовалось.  $\square$

Получим теперь формулу обращения для преобразования  $\mathcal{F}$ .

**Предложение 1.** Пусть  $f \in C_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$  и

$$\int_0^\infty \lambda |\mathcal{F}(f)(\lambda)| d\lambda < +\infty. \quad (18)$$

Тогда

$$f(z) = \frac{16}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda) \mathcal{H}_\lambda(z) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(i) \mathcal{H}_i(z), \quad (19)$$

при этом интеграл в (19) сходится абсолютно и локально равномерно по  $z$ .

*Доказательство.* При  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $t = \operatorname{arth} |z|$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  имеем

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^t \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\xi}} F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \xi}{2 \operatorname{ch} t}\right) \cos \lambda \xi d\xi \quad (20)$$

(см. [4, предложение 7.3]). Положим  $h(t, \xi) = \operatorname{ch} 2t - \operatorname{cht}$  при  $0 < \xi < t/2$  и  $h(t, \xi) = 2(t - \xi) \operatorname{sh} t$  при  $t/2 \leq \xi < t$ . Применяя теорему Лагранжа о среднем, получаем оценку

$$h(t, \xi) \leq \operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\xi.$$

Тогда при  $z \in \overline{B}_r$  из (20) и разложения функции  $F$  в гипергеометрический ряд вытекает, что

$$|\mathcal{H}_\lambda(z)| \leq c_1 e^{r|\operatorname{Im} \lambda|} \int_0^t \operatorname{ch}^2 t (h(t, \xi))^{-1/2} d\xi \leq c_2 e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (21)$$

где  $c_1, c_2 > 0$  зависят только от  $r$ . Далее, применение формулы Стирлинга [10, п. 1.18(2)] показывает, что при  $\lambda \geq 0$

$$|c(\lambda)|^{-1} \leq \gamma(1 + \lambda)^{1/2}, \quad (22)$$

где  $\gamma > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Из оценок (21), (22) и условия (18) следует, что интеграл в (19) сходится абсолютно и локально равномерно по  $z$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $f \in \mathcal{D}_i(\mathbb{H}^2)$ . Функция  $(c(-\lambda))^{-1}$  является мероморфной в  $\mathbb{C}$ , при этом единственной особой точкой этой функции в полуплоскости  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > 0\}$  является  $\lambda = i$ . В этой точке функция  $(c(-\lambda))^{-1}$  имеет простой полюс и

$$\operatorname{res}_{\lambda=i} (c(\lambda) c(-\lambda))^{-1} = \frac{i}{64}. \quad (23)$$

Далее, пусть

$$\varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\operatorname{sh}^2 t\right),$$

$$\Delta_{\alpha, \beta}(t) = (2 \operatorname{sh} t)^{2\alpha+1} (2 \operatorname{ch} t)^{2\beta+1}.$$

Тогда из определения  $\mathcal{F}$  имеем

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_0^\infty \Phi(t) \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t) \Delta_{\alpha, \beta}(t) dt,$$

где  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , и

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{2^{2(\alpha+\beta)+1}} \frac{f_0(\operatorname{th} t)}{(\operatorname{th} t)^\alpha (\operatorname{ch} t)^{\alpha+\beta+2}}.$$

Отсюда, используя [11, теорема 2.3] и (23), получаем соотношение (19) для  $f \in \mathcal{D}_i(\mathbb{H}^2)$ .

Рассмотрим теперь общий случай. Обозначим через  $F(z)$  правую часть в равенстве (19). Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ . Тогда

$$(F \times \varphi)(z) = \frac{16}{\pi^2} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(f)(\lambda) \mathcal{F}(\varphi)(\lambda) \mathcal{H}_{\lambda}(z) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(i) \mathcal{F}(\varphi)(i) \mathcal{H}_i(z) \quad (24)$$

(см. (17)). С другой стороны, для  $f \in C_{\natural}(\mathbb{H}^2)$  имеем  $f \times \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$  и по уже доказанному равенство (19) имеет место для функции  $f \times \varphi$  вместо  $f$ . Сопоставляя этот факт с равенством (24) и учитывая (13), заключаем, что  $F \times \varphi = f \times \varphi$ . В силу произвольности  $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$  отсюда следует, что  $F = f$  и тем самым утверждение доказано в общем случае.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $f \in C_{\natural}(\mathbb{H}^2)$  и имеет компактный носитель. Тогда, если  $\mathcal{F}(f)(\lambda) = 0$  при всех  $\lambda > 0$ , то  $f = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ . Используя лемму 2, имеем

$$\mathcal{F}(f \times \varphi)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) \mathcal{F}(\varphi)(\lambda) = 0$$

при всех  $\lambda > 0$ . В силу аналитичности функции  $\mathcal{F}(f \times \varphi)$  по  $\lambda$  последнее равенство выполнено при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Поскольку  $f \times \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ , из предложения 1 следует, что  $f \times \varphi = 0$  в  $\mathbb{H}^2$ . Отсюда и из произвольности  $\varphi$  заключаем, что  $f = 0$ .  $\square$

Получим теперь аналог теоремы Пэли–Винера для преобразования  $\mathcal{F}$ .

**Предложение 2.** Для того чтобы четная целая функция  $w$  являлась преобразованием  $\mathcal{F}$  от функции из  $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2)$  с носителем в  $\overline{B}_r$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $N \in \mathbb{Z}_+$  существовала константа  $c_N > 0$  такая, что

$$|w(\lambda)| \leq c_N \frac{e^{r|\operatorname{Im}\lambda|}}{(1 + |\lambda|)^N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

*Доказательство.* (i) *Необходимость.* Пусть  $w = \mathcal{F}(f)$ , где  $f \in C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2)$  и  $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_r$ . Полагая

$$D = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho (1 - \rho^2)^2 \frac{d}{d\rho} \right),$$

из определения оператора  $\mathfrak{L}$  имеем

$$(Df_0)(\rho) = (\mathfrak{L}f)_0(\rho). \quad (26)$$

Соотношение (9) можно переписать в виде

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = 2\pi \int_0^1 \rho f_0(\rho) H_{\lambda}(\rho) d\rho, \quad (27)$$

где

$$H_\lambda(|z|) = \mathcal{H}_\lambda(z) \quad \text{при } z \in \mathbb{D}. \quad (28)$$

Интегрируя в (27) по частям с использованием соотношений

$$(1 - \rho^2) \frac{d}{d\rho} H_\lambda(\rho) = 2(\nu + 1) \nu \rho (1 - \rho^2)^\nu F(\nu + 2, \nu + 1; 2; \rho^2),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( (1 - \rho^2)^{\nu+1} \rho^2 F(\nu + 2, \nu + 1; 2; \rho^2) \right) = 2H_\lambda(\rho)$$

(см. (3), (28) и [10, формулы 2.8(25), 2.8(26)]), находим

$$w(\lambda) = 2\pi (4\nu(\nu + 1))^{-m} \int_0^1 \rho (D^m f_0)(\rho) H_\lambda(\rho) d\rho, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда с учетом (26) получаем

$$w(\lambda) = (4\nu(\nu + 1))^{-m} \mathcal{F}(\mathfrak{L}^m f)(\lambda), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (29)$$

В силу произвольности  $m \in \mathbb{Z}_+$  отсюда, из определения  $\mathcal{F}$  и из (21) получаем оценку (25).

*Достаточность.* Пусть  $w$  – четная целая функция, удовлетворяющая условию (25). По теореме Винера-Пэли для косинус-преобразования Фурье (см. [12, теорема 1.7.7]) существует четная функция  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  такая, что  $\text{supp } \varphi \subset [-r, r]$  и

$$w(\lambda) = \int_0^r \varphi(t) \cos(\lambda t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Положим

$$u(t) = F(2, -2; 1/2; t), \quad |t| < 1.$$

Согласно [13, гл. 3, § 4, теорема 4.6] существует функция  $\Phi \in C[1, +\infty)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\int_y^\infty \frac{\Phi(x)}{\sqrt{x-y}} u\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y}{1+x}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\text{arch} \sqrt{\frac{1+y}{2}}\right), \quad y \geq 1. \quad (30)$$

Полагая  $y = \text{ch } 2\xi$  и производя в интеграле (30) замену переменной  $x = \text{ch } 2t$ , имеем

$$2^{3/2} \int_\xi^\infty \frac{f_0(\text{th } t) \text{th } t}{\sqrt{\text{ch } 2t - \text{ch } 2\xi}} u\left(\frac{\text{ch } t - \text{ch } \xi}{2 \text{ch } t}\right) dt = \varphi(\xi), \quad \xi \geq 0,$$

где

$$f_0(\operatorname{th} t) = \frac{\Phi(\operatorname{ch} 2t)}{1 - \operatorname{th}^2 t}.$$

Отсюда и из (20) следует, что носитель функции  $f(z) = f_0(|z|)$  содержится в  $\overline{B}_r$  и  $\mathcal{F}(f) = w$ . Кроме того, из (25) и предложения 1 заключаем, что  $f$  удовлетворяет (19). Интегрируя по частям в (20) и повторяя рассуждения из доказательства предложения 1, имеем оценку

$$\max_{z \in \overline{B}_r} \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} (\mathcal{H}_\lambda(z)) \right| \leq c(1 + |\lambda|)^{\alpha+\beta} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|},$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Отсюда, из (25) и (19) следует, что  $f \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$  и утверждение доказано.  $\square$

**Следствие 2.** *Существует и единственная биекция  $\Lambda: \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R})$ , удовлетворяющая условиям*

$$\widehat{\Lambda(T)} = \mathcal{F}(T) \quad \text{и} \quad r(\Lambda(T)) = r(T) \quad (31)$$

для любой функции  $T \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ .

*Доказательство.* Утверждение следует из предложения 2 и теоремы Винера-Пэли для косинус-преобразования Фурье.  $\square$

**4. Доказательство основного результата.** Перейдем к доказательству теоремы 1. Для  $f \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$  определим  $\mathfrak{A}(f)(t)$  равенством (10). Из предложения 1 и (22) следует, что  $\mathfrak{A}(f) \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ . Продолжим отображение  $\mathfrak{A}: \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2) \rightarrow C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  на пространство  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ .

**Лемма 3.** *Пусть  $f \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ ,  $r \in (0, +\infty)$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (i)  $f = 0$  в  $B_r$ ;
- (ii)  $\mathfrak{A}(f) = 0$  на  $(-r; r)$ .

*Доказательство.* Из предложения 1, (6) и (20) имеем

$$f_0(\operatorname{th} \rho) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^\rho \mathfrak{A}(f)(t) \frac{\operatorname{ch}^2 \rho}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2t}} F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{ch} \rho}\right) dt \quad (32)$$

для любого  $\rho > 0$ . Если  $f = 0$  в  $B_r$ , отсюда получаем

$$\int_0^\rho \mathfrak{A}(f)(t) K(\rho, t) (\rho - t)^{-\frac{1}{2}} dt = 0, \quad \rho \in (0, r),$$

для некоторой функции  $K \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Из данного интегрального уравнения следует (см. [13, гл. 3, § 4, теорема 4.6]), что  $\mathfrak{A}(f)(t) = 0$  на  $(0, r)$ . Тем самым, в силу четности функции  $\mathfrak{A}(f)$ , убеждаемся в справедливости импликации (i)  $\Rightarrow$  (ii). Обратная импликация очевидна ввиду равенства (32).  $\square$

Утверждение леммы 3 позволяет продолжить оператор  $\mathfrak{A}$  на пространство  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$  по формуле

$$\mathfrak{A}(f)(t) = \mathfrak{A}(f\eta)(t), \quad f \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (33)$$

где  $\eta$  – произвольная функция класса  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ , равная единице в  $B_{|t|+\varepsilon}$  при некотором  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\mathfrak{A}(f) \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  и

$$\mathfrak{A}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}(f)|_{(-r,r)} \quad \text{для любого } r > 0.$$

Определение оператора  $\mathfrak{A}$  на пространстве  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$  показывает (см. (33)), что утверждение (iii) достаточно установить для  $f_1 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ . В этом случае из (10), леммы 2 и (31) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(f_1 \times f_2)(t) &= \frac{16}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(f_1)(\lambda) \widehat{\Lambda}(f_2)(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} \cos(\lambda t) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f_1)(i) \widehat{\Lambda}(f_2)(i) \cos(it), \quad t \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (34)$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{A}(f_1) * \Lambda(f_2)(t) = \int_{-\infty}^\infty \mathfrak{A}(f_1)(\xi) \Lambda(f_2)(t - \xi) d\xi. \quad (35)$$

Подставляя соотношение (10) в правую часть равенства (35), с учетом (7) и четности функции  $\Lambda(f_2)$  заключаем, что левые части равенств (34) и (35) совпадают. Отсюда следует утверждение (iii) в теореме 1.

Далее, из (33) вытекает, что равенство (32) выполнено для любой функции  $f \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ . Из (32) и интегрального представления (20) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\rho (\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t) - \cos(\lambda t)) (\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2t)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{ch} \rho}\right) dt = 0 \end{aligned}$$

для любого  $\rho > 0$ . Как и в доказательстве леммы 3, отсюда следует (iv).

Для доказательства утверждений (i) и (ii) остается проверить, что преобразование  $\mathfrak{A}$  осуществляет гомеоморфизм между  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$  и  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ .

Для  $F \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$  положим

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{F}(\lambda) \mathcal{H}_\lambda(z) d\lambda, \quad z \in \mathbb{H}^2. \quad (36)$$

Пусть  $f_1 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ ,  $f_2 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ . Используя соотношения (36), (7) и (17), находим

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}(f_1) \times f_2)(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}_1(\lambda) (\mathcal{H}_\lambda \times f_2)(z) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}_1(\lambda) \mathcal{F}(f_2)(\lambda) \mathcal{H}_\lambda(z) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}_1(\lambda) \widehat{\Lambda(f_2)}(\lambda) \mathcal{H}_\lambda(z) d\lambda = \mathfrak{B}(f_1 * \Lambda(f_2))(z). \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, из (36), (20) и формулы обращения для косинус-преобразования Фурье имеем равенство

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{\operatorname{arth} \rho} F(t) (\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2t)^{-\frac{1}{2}} F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{cht}}{2\operatorname{ch} \rho}\right) dt.$$

Из последнего равенства следует, что если  $F \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$  и  $r > 0$ , то  $F = 0$  на  $(-r, r)$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{B}(F) = 0$  в  $B_r$  (см. доказательство леммы 3. Продолжим оператор  $\mathfrak{B}$  на пространство  $C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  по формуле

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \mathfrak{B}(F\eta)(z), \quad F \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1), \quad z \in \mathbb{H}^2,$$

где  $\eta$  – произвольная функция из  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ , равная единице в некоторой окрестности отрезка  $[-\operatorname{arth} |z|, \operatorname{arth} |z|]$ . Из вышесказанного следует, что такое продолжение не зависит от  $\eta$ . При этом  $\mathfrak{B}(F) \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ ,  $\mathfrak{B}(F)|_{(-r,r)} = \mathfrak{B}(F)|_{B_r}$  для любого  $r > 0$  и равенство (37) выполнено для  $f_1 \in C_{\mathfrak{h}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ ,  $f_2 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{H}^2)$ . Повторяя теперь рассуждения из [4, доказательство теоремы 9.5], получаем, что  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$  и теорема 1 полностью доказана.

1. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Мат. сборник. – 2008. – **199**, № 8. – С. 29–60.
2. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group // J. Analyse Math. – 2008. – **105**. – P. 43–124.
3. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Об одной проблеме Беренштейна-Гэя и ее обобщениях // Известия РАН. Сер. матем. – 2010. – **74**, № 4. – С. 33–62.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.

6. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. +++
7. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.
8. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al). – Dordrecht: Kluwer, 1992. – P. 185–194.
9. *Berenstein C. A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk // Israel J. Math. – 1994. – **86**. – P. 61–106.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296, 296 с.
11. *Koornwinder T. H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications (R. A. Askey et al. (eds.)). – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984. – P. 1–85.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986, 462 с.
13. *Helgason S.* Integral Geometry and Radon Transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.

**V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov**

**Homeomorphisms with the transmutation property with respect to weighted convolution.**

A generalized Laplacian  $\mathcal{L}$  on hyperbolic plane invariant over weighted shifts is studied. For integral transform induced by eigenfunctions of  $\mathbb{H}^2$  we obtain the analogues of the inversion formula and the Paley–Wiener theorem. Transmutation mappings for a weighted convolution on a hyperbolic plane induced by weighted shifts are constructed.

**Keywords:** *hyperbolic plane, transmutation property, generalized convolution.*

Донецкий национальный ун-т

Получено 30.09.15

*valeriyvolchkov@gmail.com*

*volna936@gmail.com*

УДК 539.3: 534.1

©2015. И. А. Глухов, В. И. Сторожев

## ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ УПРУГИХ ВОЛН ВО ВМЕЩЕННОМ МЕЖДУ ОРТОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ

В работе построено численно-аналитическое решение пространственной задачи о распространении трехпарциальных локализованных упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с вмещающими ортотропными полупространствами. Рассмотрен вариант однотипных по физико-механическим свойствам полупространств и отличающегося по свойствам слоя. Для случая симметричных по толщине слоя волновых движений получены и качественно проанализированы основные дисперсионные соотношения. Представлены результаты расчетов фрагментов спектров для волн исследуемого типа применительно к частному варианту рассматриваемой волноводной структуры с компонентами из реальных ортотропных материалов и охарактеризованы изменения в топологии спектров, обусловленные варьированием ориентации направления распространения.

**Ключевые слова:** ортотропный слой между ортотропными полупространствами, идеальный механический контакт, симметричные трехпарциальные локализованные упругие волны, трансцендентное дисперсионное уравнение, асимптотический и численный анализ, волновод из реальных материалов, расчеты ветвей спектров бегущих волн.

**Введение и постановка задачи.** Описание свойств локализованных упругих волн в деформируемом слое, заключенном между деформируемыми полупространствами, по целому ряду аспектов до сегодняшнего дня остается неисследованной проблемой и связано с широким кругом актуальных приложений. В частности, решение ранее не рассматривавшихся ее вариантов является составным элементом совершенствования методологической базы геоакустических технологий, методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [1, 2]. Указанные исследования представляют интерес для механики композиционных материалов и акустоэлектроники [3].

Анализ публикаций по рассматриваемой проблематике позволяет заключить, что ведущие теоретические результаты исследований в данном контексте на сегодняшний день относятся к случаям распространения разделяющихся локализованных SH и P-SV волн с симметричными и антисимметричными толщинными формами колебательных движений в рассматриваемой составной волноводной структуре в случаях, когда вмещающие полупространства являются изотропными [4–6] либо трансверсально-изотропными [7–9] и эквивалентны по физико-механическим характеристикам. Для таких свойств компонентов волноводов рассмотрены случаи идеального либо неидеального контакта слоя с полупространствами. В работе [10] волновод рассматриваемой структуры рассматривается как предельный вариант трехслойной пластины с идеальным контактом составляющих и неограниченно возрастающими толщинами внешних вмещающих слоев. В работе [11] также приведены сугубо аналитические результаты исследований по построению дисперсионного со-

отношения для волновода в виде заключенного между полупространствами и идеально контактирующего с ними слоя в случае, когда материалы всех составляющих принадлежат произвольному классу анизотропии.

В представленном контексте данная работа посвящена решению не рассматривавшейся ранее проблемы построения и исследования дисперсионного соотношения, описывающего спектр трехпарциальных локализованных упругих волн произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с однотипными по свойствам вмещающими ортотропными полупространствами.

Рассматривается занимающий область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V \cup V^{(-)} \quad (1)$$

волновод в виде заключенного между деформируемыми полупространствами упругого слоя, компоненты которого имеют в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = h$  безразмерных прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$  описания

$$\begin{aligned} V^{(+)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h/2\} \\ V^{(-)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h/2\} \\ V &= \{(x_1, x_2) \in R^2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\} \end{aligned} \quad (2)$$

и составлены из прямолинейно-ортотропных материалов с коллинеарными ориентированными вдоль координатных осей одноименными упруго-эквивалентными направлениями. Полагается, что физико-механические свойства вмещающих полупространств  $V^{(+)}$ ,  $V^{(-)}$  идентичны, они отличаются от физико-механических свойств слоя  $V$  и соответственно характеризуются девятью независимыми отнесенными к нормирующему параметру  $c_*$  модулями упругости  $c_{ij}$ ,  $c_{ij}^{(+)} = c_{ij}^{(-)}$  ( $ij = 11, 22, 33, 12, 13, 23, 44, 55, 66$ ), а также плотностями  $\rho$  и  $\rho^{(+)} = \rho^{(-)}$ .

Для волновода с описанной структурой подлежат анализу процессы распространения симметричных по толщине слоя локализованных трехпарциальных гармонических упругих волн с круговой частотой  $\omega$  вдоль произвольно ориентированного направления в первом квадранте координатной плоскости  $Ox_1x_2$ , составляющего угол  $\phi$  с осью  $Ox_1$  ( $n_1 = \cos \phi$ ,  $n_2 = \sin \phi$ ).

**Процедура получения аналитической формы основного дисперсионного соотношения.** Распространение исследуемых локализованных волн описывается спектральной краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода и краевые условия их идеального механического контакта.

На первом этапе реализации рассматриваемого подхода осуществляется аналитическое интегрирование системы дифференциальных уравнений волнового деформирования для ортотропного упругого слоя, записываемой в форме

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_{11}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{55}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{22}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{66}\partial_1^2 + c_{22}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{33}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{12}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 \\
 L_{13}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{31}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{13} + c_{55})\partial_1\partial_3 \\
 L_{23}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{32}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{23} + c_{44})\partial_2\partial_3.
 \end{aligned}$$

При подстановке в данные уравнения исходных представлений для комплексных функций упругих перемещений в исследуемых волнах с волновыми числами  $k$ , имеющих вид

$$\begin{aligned}
 u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= A_j \cos(\lambda x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 2}), \\
 u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= A_3 \sin(\lambda x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 E(\omega, k, n_1, n_2) &= \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2)))
 \end{aligned} \tag{4}$$

соотношения (3) трансформируются в систему линейных алгебраических уравнений

$$G_{ij}(\lambda)A_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{11}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\lambda^2, \\
 G_{22}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\lambda^2, \\
 G_{33}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\lambda^2, \\
 G_{12}(\lambda) &= G_{21}(\lambda) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\
 G_{13}(\lambda) &= G_{31}(\lambda) = ik(c_{13} + c_{55})n_1\lambda, \\
 G_{23}(\lambda) &= G_{32}(\lambda) = ik(c_{23} + c_{44})n_2\lambda.
 \end{aligned} \tag{6}$$

С введением обозначений  $\lambda_p$  ( $\text{Re } \lambda_p > 0$ ,  $p = \overline{1, 3}$ ) для корней бикубического характеристического полинома уравнений (3), соответствующие им нетривиальные решения  $A_j^{(p)}$  системы (5) конструируются в виде представлений со структурой  $A_j^{(p)} = \beta_{jp}D_p$ , содержащих произвольные постоянные коэффициенты  $D_j$

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} &= (G_{12}(\lambda_1)G_{23}(\lambda_1) - G_{22}(\lambda_1)G_{13}(\lambda_1))D_1 = \beta_{11}D_1, \\
 A_2^{(1)} &= (G_{13}(\lambda_1)G_{21}(\lambda_1) - G_{11}(\lambda_1)G_{23}(\lambda_1))D_1 = \beta_{21}D_1, \\
 A_3^{(1)} &= (G_{11}(\lambda_1)G_{22}(\lambda_1) - G_{12}(\lambda_1)G_{21}(\lambda_1))D_1 = \beta_{31}D_1, \\
 A_1^{(2)} &= (G_{12}(\lambda_2)G_{23}(\lambda_2) - G_{22}(\lambda_2)G_{13}(\lambda_2))D_2 = \beta_{12}D_2, \\
 A_2^{(2)} &= (G_{13}(\lambda_2)G_{21}(\lambda_2) - G_{11}(\lambda_2)G_{23}(\lambda_2))D_2 = \beta_{22}D_2,
 \end{aligned}$$

$$A_3^{(2)} = (G_{11}(\lambda_2)G_{22}(\lambda_2) - G_{12}(\lambda_2)G_{21}(\lambda_2))D_2 = \beta_{32}D_2, \quad (7)$$

$$A_1^{(3)} = (n_2(G_{22}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{23}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3)) + n_1(G_{13}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3) - G_{12}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{13}D_3,$$

$$A_2^{(3)} = (n_2(G_{31}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{21}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3)) + n_1(G_{11}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{13}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{23}D_3,$$

$$A_3^{(3)} = (n_2(G_{21}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{22}(\lambda_3)) + n_1(G_{31}(\lambda_3)G_{12}(\lambda_3) - G_{11}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{33}D_3.$$

Введенные представления для коэффициентов  $A_j^{(3)}$  обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} (A_1^{(3)})_{n_1=0} &= (G_{22}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{23}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3))D_3 \neq 0, \\ (A_1^{(3)})_{n_2=0} &= 0; \quad (A_2^{(3)})_{n_1=0} = 0, \\ (A_2^{(3)})_{n_2=0} &= (G_{11}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{13}(\lambda_3))D_3 \neq 0; \\ (A_3^{(3)})_{n_1=0} &= 0, \quad (A_3^{(3)})_{n_2=0} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

устанавливаемыми с учетом соотношений

$$\begin{aligned} (G_{12}(\lambda))_{n_1=0} &= (G_{21}(\lambda))_{n_1=0} = (G_{12}(\lambda))_{n_2=0} = (G_{21}(\lambda))_{n_2=0} = 0, \\ (G_{13}(\lambda))_{n_1=0} &= (G_{31}(\lambda))_{n_1=0} = 0, \\ (G_{23}(\lambda))_{n_2=0} &= (G_{32}(\lambda))_{n_2=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При условии, что величины  $\lambda_3$  принадлежат той ветви корней характеристического уравнения системы (3), которая в предельных случаях  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$  описывает нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления  $Ox_j$  в плоскости слоя, представления вида

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{p=1}^3 D_p \beta_{jp} \cos(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 2}) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{p=1}^3 D_p \beta_{jp} \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \end{aligned} \quad (10)$$

обладают свойством предельного соответствия в описании структуры волновых полей для всего диапазона угловых параметров направлений распространения  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  и могут быть эффективно использованы в дальнейшем теоретическом алгоритме получения верифицируемых дисперсионных соотношения для исследуемых симметричных трехпарциальных локализованных волн при задании соответствующих однотипных контактных краевых условий на противоположных гранях слоя.

По аналогичной схеме формируются представления комплексных функций волновых упругих перемещений в областях, занимаемых вмещающими полупространствами. Так, для полупространства  $V^{(+)}$  в случае задания исходных представлений

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = B_j \exp(-\alpha x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (11)$$

при условии  $\text{Re } \alpha > 0$ , система уравнений движения (3) трансформируется в линейные алгебраические уравнения вида

$$G_{ij}^+(\alpha) B_j = 0 \quad (12)$$

с выражениями  $G_{ij}^+(\alpha)$ , имеющими форму

$$\begin{aligned} G_{11}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\alpha^2, \\ G_{22}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\alpha^2, \\ G_{33}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\alpha^2, \\ G_{12}^+(\alpha) &= G_{21}^+(\alpha) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\ G_{13}^+(\alpha) &= G_{31}^+(\alpha) = -ik(c_{13} + c_{55})n_1\alpha, \\ G_{23}^+(\alpha) &= G_{32}^+(\alpha) = -ik(c_{23} + c_{44})n_2\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

С введением обозначений  $\alpha_p$  ( $\text{Re } \alpha_p > 0$ ,  $p = \overline{1, 3}$ ) для корней соответствующего рассматриваемому случаю варианта бикубического характеристического полинома системы дифференциальных уравнений (3), для соответствующих этим корням нетривиальных решений  $B_j^{(p)}$  системы (12) конструируются представления  $B_j^{(p)} = \eta_{jp} C_p$  с произвольными постоянными коэффициентами  $C_p$

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= (G_{12}^+(\alpha_1)G_{23}^+(\alpha_1) - G_{22}^+(\alpha_1)G_{13}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_2^{(1)} &= (G_{13}^+(\alpha_1)G_{21}^+(\alpha_1) - G_{11}^+(\alpha_1)G_{23}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_3^{(1)} &= (G_{11}^+(\alpha_1)G_{22}^+(\alpha_1) - G_{12}^+(\alpha_1)G_{21}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_1^{(2)} &= (G_{12}^+(\alpha_2)G_{23}^+(\alpha_2) - G_{22}^+(\alpha_2)G_{13}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_2^{(2)} &= (G_{13}^+(\alpha_2)G_{21}^+(\alpha_2) - G_{11}^+(\alpha_2)G_{23}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_3^{(2)} &= (G_{11}^+(\alpha_2)G_{22}^+(\alpha_2) - G_{12}^+(\alpha_2)G_{21}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_1^{(3)} &= (n_2(G_{22}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{23}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3)) + \\ &\quad + n_1(G_{13}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3) - G_{12}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3)))C_3, \\ B_2^{(3)} &= (n_2(G_{31}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{21}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3)) + \\ &\quad + n_1(G_{11}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{31}^+(\alpha_3)G_{13}^+(\alpha_3)))C_3, \end{aligned} \quad (14)$$

$$B_3^{(3)} = (n_2(G_{21}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3) - G_{31}^+(\alpha_3)G_{22}^+(\alpha_3)) + n_1(G_{31}^+(\alpha_3)G_{12}^+(\alpha_3) - G_{11}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3)))C_3$$

и на этой основе записываются выражения вида

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p \eta_{jp} \exp(-\alpha_p x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2)))$$

$$(j = \overline{1, 3}) \quad (15)$$

для компонент вектора волновых перемещений в полупространстве  $V^{(+)}$ , также дополняемые предположением, что величины  $\alpha_3$  принадлежат ветви корней характеристического полинома системы волновых уравнений для материала полупространства, в предельных случаях  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$  описывающей нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления  $Ox_j$  в  $V^{(+)}$ .

Ввиду отражаемой представлением (10) симметрии волнового поля по толщине внутреннего слоя и эквивалентности физико-механических свойств окружающих полупространств, сходная симметрия априори свойственна и волновому полю по всей толщине составного волновода, а контактные краевые условия в рассматриваемой граничной задаче могут быть сформулированы только на одной из поверхностей сопряжения в виде

$$u_j(x_1, x_2, h/2, t) = u_j^{(+)}(x_1, x_2, h/2, t),$$

$$\sigma_{3j}(x_1, x_2, h/2, t) = \sigma_{3j}^{(+)}(x_1, h/2, t) \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (16)$$

Отсюда с учетом (10), (15), а также с учетом представлений для входящих в контактные условия механических напряжений

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \lambda_p c_{33}\beta_{3p}) \cdot \cos(\lambda_p x_3) \times$$

$$\times E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{32}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ikc_{44}(n_2\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{2p})) \cdot \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ikc_{55}(n_1\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{1p})) \cdot \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{33}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p}) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \times$$

$$\times E(\omega, k, n_1, n_2), \quad (17)$$

$$\sigma_{32}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ikc_{44}^{(+)}(n_2\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{2p})) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{31}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ikc_{55}^{(+)}(n_1\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{1p})) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

из (16) следуют соотношения

$$\sum_{p=1}^3 D_p \Delta_{q,p} + \sum_{p=1}^3 C_p \Delta_{q,p+3} = 0 \quad (q = \overline{1, 6}), \quad (18)$$

в которых

$$\begin{aligned} \Delta_{1,p} &= \beta_{1p} \cos(\lambda_p h/2), & \Delta_{1,p+3} &= -\eta_{1p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{2,p} &= \beta_{2p} \cos(\lambda_p h/2), & \Delta_{2,p+3} &= -\eta_{2p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{3,p} &= \beta_{3p} \sin(\lambda_p h/2), & \Delta_{3,p+3} &= -\eta_{3p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{4,p} &= (ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \lambda_p c_{33}\beta_{3p}) \cdot \cos(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{4,p+3} &= -(ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{5,p} &= c_{44}(ikn_2\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{2p}) \cdot \sin(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{5,p+3} &= -c_{44}^{(+)}(ikn_2\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{2p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{6,p} &= c_{55}(ikn_1\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{1p}) \cdot \sin(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{6,p+3} &= -c_{55}^{(+)}(ikn_1\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{1p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2). \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (18) в качестве конечного результата следует дисперсионное уравнение для рассматриваемых локализованных волн, записываемое в форме равенства нулю определителя матрицы системы алгебраических уравнений (18)

$$F(\omega, k) = \det \|\Delta_{qm}\| \quad (q, m = \overline{1, 6}) \quad (20)$$

с элементами  $\Delta_{qm}$ , задаваемыми выражениями (19).

**Качественный и численный анализ дисперсионного соотношения.** Первичный анализ существования бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств базируется на качественном исследовании распределений корней характеристических полиномов систем волновых дифференциальных уравнений для компонентов рассматриваемого волновода.

В области существования локализованных бегущих волн исследуемого типа на множестве  $\{\omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$  значения корней  $\alpha_p$  характеристического полинома для волновых уравнений в материале полупространства должны быть действительными. Соответственно множество изменения  $(\omega, k)$  для каждого из материалов компонентов волновода в общем случае подразделяется на четыре секторных

подобласти, в которых значения  $\lambda_p$ ,  $\alpha_p$  сохраняют определенный постоянный тип. Границами этих подобластей для материала слоя являются оси  $O\Omega$ ,  $Ok$  и прямые

$$\Omega = \vartheta_j(n_1, n_2)k,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,2}(n_1, n_2) &= (1/2)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66}) \pm ((1/4)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66})^2 - \\ &\quad - c_{11}c_{66}n_1^4 - c_{22}c_{66}n_2^4 - (c_{12}^2 + 2c_{12}c_{66} - c_{11}c_{22})n_1^2n_2^2)^{1/2}, \\ \vartheta_3(n_1, n_2) &= (c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2)^{1/2}, \quad \Omega = (\rho\omega^2 R_*^2 / c_*)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $R_*$ ,  $c_*$  – соответственно нормирующие параметры для величин с линейными размерностями расстояний и размерностями механических напряжений. Аналогичные подобласти, описываемые сходными соотношениями, могут быть выделены применительно к материалу полупространств, и, в конечном счете, областью существования исследуемых локализованных волн является пересечение указанных подобластей для обоих материалов компонентов рассматриваемого волновода, в котором все корни обоих характеристических уравнений являются действительными. Численный анализ полученных дисперсионных уравнений реализован применительно к волноводной структуре рассматриваемого типа, в которой материалом слоя является песчаный сланец с отнесенными к нормирующим параметрам  $\rho_* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_* = 10^{10}$  Па физико-механическими постоянными [12]

$$\rho = 2.95, \quad c_{11} = 0.66, \quad c_{22} = 0.66, \quad c_{33} = 1.15, \quad c_{12} = 0.29,$$

$$c_{13} = 0.19, \quad c_{23} = 0.19, \quad c_{44} = 0.12, \quad c_{55} = 0.12, \quad c_{66} = 0.18,$$

а материалом полупространств является минерал галит (хлорид натрия) с физико-механическими постоянными [12]

$$\rho = 2.17, \quad c_{11} = 4.96, \quad c_{22} = 4.96, \quad c_{33} = 4.96, \quad c_{12} = 1.31,$$

$$c_{13} = 1.31, \quad c_{23} = 1.31, \quad c_{44} = 1.28, \quad c_{55} = 1.28, \quad c_{66} = 1.28.$$

На рисунках 1–2 соответственно представлены результаты расчетов фрагментов дисперсионных спектров бегущих локализованных волн для трех направлений распространения с угловыми параметрами  $\phi = 5^\circ$  и  $\phi = 44^\circ$ . Анализ этих распределений указывает на то, что различия в топологических картинах распределения действительных ветвей спектров нарастают с увеличением номера моды, в то время как для нижней моды качественные и количественные отличия характеристик траектории в рассматриваемом случае малы за исключением низкочастотной длинноволновой области. Визуально проявляющиеся эффекты пересечения ветвей дисперсионных спектров в действительности соответствуют предельно тесному сближению без касания и последующему «расталкиванию» соответствующих ветвей, отражающему так называемый механизм «обмены свойствами» для волн из соседних мод. Можно также указать на существование двух асимптотических направлений для множества

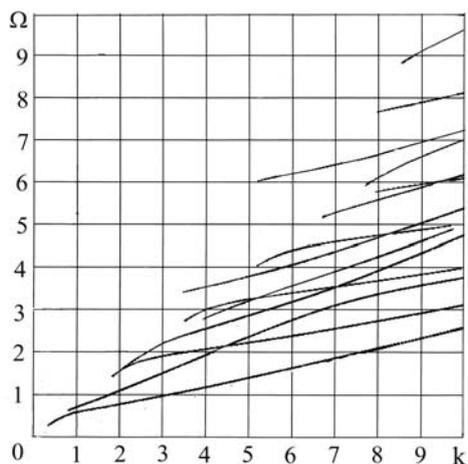


Рис. 1. Ветви спектра исследуемых волн для направления распространения с угловым параметром  $\phi = 5^\circ$

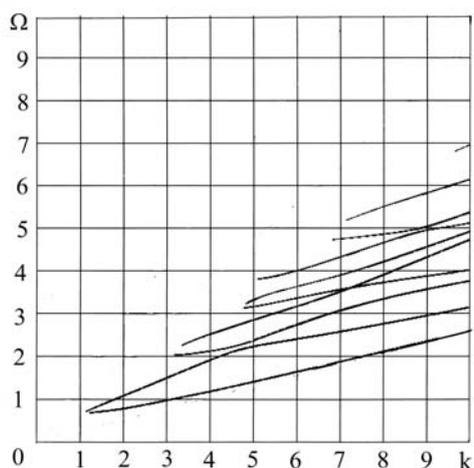


Рис. 2. Ветви спектра исследуемых волн для направления распространения с угловым параметром  $\phi = 44^\circ$

рассматриваемых дисперсионных кривых в высокочастотном коротковолновом диапазоне, определяемых физико-механическими свойствами компонентов волновода.

**Выводы.** В результате проведенных исследований получены аналитические представления для комплексных функций напряженности трехпарциальных симметричных локализованных упругих волн воль произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с однотипными по физико-механическим свойствам вмещающими ортотропными полупространствами, включая упруго-эквивалентные координатные направления. Для волн исследуемого типа получено дисперсионное соотношение в форме равенства нулю функционального определителя шестого порядка. Описана процедура качественного анализа дисперсионного спектра локализованных волн с выделением вмещающей его действительные ветви секторной подобласти. Получен и частично проанализирован ряд результатов расчетов действительных ветвей спектров для двух направлений распространения в волноводе из геоматериалов в виде слоя из песчаного сланца, вмещенного между полупространствами из галита. Области использования результатов представленного исследования являются геоакустика, ультразвуковой диагностики и акустоэлектроника.

1. White J.E. Underground sound. application of seismic waves. – Elsevier Science Publishers B.V., 1983. – 270 p.
2. Hoven J.M. Acoustic waves in finely layered media // Geophysics. – 1995. – **7.60**, № 4. – P. 1217–1221.
3. Rose J.L. Ultrasonic waves in solid media. – Cambridge University Press, 2004. – 454 p.
4. Григорян В.Г., Вендлер Л. Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. – 1991. – **33**, № 7. – С. 2120–2128.
5. Velasco V.R., Djafari-Rouhani B. Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev. – 1982. –

**В 26.** – P. 1929–1941.

6. *Wendler L., Grigoryan V.G.* Acoustic interface waves in sandwich structures // *Surface Science.* – 1988. – **206.** – P. 203–224.
7. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между односторонними трансверсально-изотропными полупространствами // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2014. – № 8 (54). – С. 114–122.
8. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Локализованные P-SV волны в трансверсальном слое между трансверсальными полупространствами при условиях скользящего контакта // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2014. – № 9 (55). – С. 71–81.
9. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Локализованные антисимметричные волны в структуре "трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами" // *Механика твердого тела.* – 2014. – Вып. 44. – С. 122–131.
10. *Datta S.K.* On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2000. – **108.** – P. 2005–2011.
11. *Ting T.C.T.* Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // *Mathematics and mechanics of solids.* – 2009. – **14,** № 1–2. – P. 52–71.
12. *Капитонов А.М., Васильев В.Г.* Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 425 с.

**I. A. Glukhov, V. I. Storozhev**

**The dispersion properties of localized elastic waves in a orthotropic layer between orthotropic half-spaces.**

Are presented the obtaining of the numerical-analytical solution for the three-dimensional problem of the propagation of localized elastic waves along arbitrarily oriented directions in the plane orthotropic deformable layer between two similar orthotropic half-spaces. In the case of waves with symmetrical along layer thickness elastic displacements are obtained and qualitatively analyzed the general dispersion relations. The results of calculations of fragment spectra for waves of the analyzed type for considered waveguide with the components from the real orthotropic materials are obtained. Are characterized the changes in the topology of the spectra caused by varying the orientation of the direction of propagation.

**Keywords:** *orthotropic layer between orthotropic half-spaces, perfect mechanical contact, symmetrical three-dimensional localized elastic waves, the transcendental dispersion equation, asymptotic and numerical analysis, the waveguide of real materials, calculations the branches of the spectrum of traveling waves.*

Донецкий национальный ун-т  
stvi@i.ua

Получено 21.09.15

УДК 531.38

©2015. А. В. Зыза

## НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуются условия существования полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Построены два новых решения данной задачи, которые характеризуются функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

**Ключевые слова:** полиномиальное решение, гириостат, эффект Барнетта–Лондона, эллиптические интегралы Лежандра.

**1. Введение.** Исследование полиномиальных решений в обобщенных задачах динамики (задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1, 2] и задачи о движении гироскопа в магнитном поле [3–5]) основано на результатах, полученных в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой [6, 7]. Для уравнений Эйлера–Пуассона построены несколько классов полиномиальных решений. К первому классу относятся полиномиальные решения, рассмотренные В.А. Стекловым, Н. Ковалевским, Д.Н. Горячевым [6]. Второй класс характеризуется структурой решений, предложенной А.И. Докшевичем [7]. Для обобщенных задач динамики изучены оба класса полиномиальных решений (см., например, [8–12]). В данной работе продолжено изучение полиномиальных решений начатое в статье [12]. Получены два новых решения задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

**2. Постановка задачи. Преобразование дифференциальных уравнений движения.** При исследовании движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле существуют различные подходы его моделирования [2, 3]. Рассматриваемый в статье эффект Барнетта–Лондона состоит в том, что первоначально немагнитные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность характеризуется магнитным моментом  $\mathbf{B} = B\boldsymbol{\omega}$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость,  $B$  – симметричный тензор третьего порядка. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться к направлению вектора напряженности магнитного поля, что приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [3].

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде [2] запишем так

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \quad (2)$$

Изменении полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^\bullet = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

поэтому в общем случае уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

В уравнениях (1)–(3) обозначения таковы:  $A$  – тензор инерции гиростата, построенных в неподвижной точке;  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – угловая скорость гиростата;  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля;  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$  гиростатический момент;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$  – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс;  $B$  и  $C$  – постоянные симметричные матрицы третьего порядка;  $k_0$  – постоянная интеграла площадей; точка над переменными означает относительную производную.

Поскольку для уравнений (1) в общем случае допустимы только два первых интеграла (2), то для этих дифференциальных уравнений недостаточно применение метода Якоби построения дополнительного первого интеграла [6]. Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство  $B = \alpha^* E$  ( $E$  – единичная матрица,  $\alpha^*$  – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) будут относиться к уравнениям класса Кирхгофа [1] и полученные для уравнений (1) результаты необходимо будет сопоставлять с результатами [2].

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ ,  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ :

$$\left. \begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 + B_2\omega_2\nu_3 - B_3\omega_3\nu_2 + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_1\omega_3 + B_3\omega_3\nu_1 - B_1\omega_1\nu_3 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + B_1\omega_1\nu_2 - B_2\omega_2\nu_1 + \\ &+ (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \quad (5)$$

$$(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k_0, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (6)$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (4), (5) решений вида

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^n b_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^m c_j \sigma^j, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^l a_i \sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{n_1} g_j \sigma^j, \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma) \sigma^{-1} \omega_3, \\ &\varkappa(\sigma) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i \sigma^i, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $n, m, l, n_1, m_1$  – натуральные числа;  $b_i, c_j, a_i, g_j, f_i$  – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Указанный класс решений является обобщением класса полиномиальных решений, рассмотренный А.И. Докшевичем [7].

Подставим выражения (7) в уравнения (4), (5) и геометрический интеграл из (6):

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1}(\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})\sqrt{R(\sigma)}; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)) &= \varphi'(\sigma)\sigma P(\sigma), & P(\sigma) &= \sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma), \\ (R(\sigma)(\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})^2)' \sigma P(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2A_1\sigma^2 P(\sigma) &= \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_2Q(\sigma) + s_2\} + \\ &+ \{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2Q'(\sigma)\sigma P(\sigma) &= \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_1\sigma^2 - s_1\} + \\ &+ \{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma); \\ A_3R'(\sigma)P(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_1\sigma^2 + s_1\} + \\ &+ Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_2\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \quad (12)$$

В уравнениях (8)–(11) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной  $\sigma$ . Если функции  $Q(\sigma)$ ,  $R(\sigma)$ ,  $\varphi(\sigma)$ ,  $\psi(\sigma)$ ,  $\varkappa(\sigma)$  определены, то зависимость  $\sigma$  от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

**3. Одно новое частное решение.** Рассмотрим случай когда в (7)  $n = 3$ ,  $m = 6$ ,  $l = 2$ ,  $n_1 = 4$ ,  $m_1 = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2 &= Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 &= R(\sigma) = c_6\sigma^6 + c_5\sigma^5 + c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, & \nu_2 &= \psi(\sigma) = g_4\sigma^4 + g_3\sigma^3 + g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \\ \nu_3 &= \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, & \varkappa(\sigma) &= f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим полиномы  $Q(\sigma)$ ,  $\varphi(\sigma)$ ,  $\psi(\sigma)$ ,  $\varkappa(\sigma)$  из (13) в первое уравнение из (9) и динамическое уравнение (10). Полученные соотношения при  $g_1 \neq 0$ ,  $g_2 \neq 0$ ,  $g_3 \neq 0$  могут быть тождествами по  $\sigma$  только при выполнении уравнений

$$\begin{aligned} C_2 &= C_3, & B_2 &= B_3, & A_2 &= A_3, & f_0 &= 0, & b_0 &= 0, & g_4 - b_3f_2 &= 0, \\ g_3 - b_3f_1 - b_2f_2 &= 0, & g_2 &= b_2f_1 + b_1f_2, & f_1s_2 - B_3g_0 + \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом (14) уравнение (10) упрощается

$$P(\sigma) = \mu(2A_1)^{-1}\psi'(\sigma), \quad \mu = f_2s_2 + B_3(f_1b_1 - g_1). \quad (15)$$

Соотношение (15) позволяет упростить уравнения исследуемой системы (9), (11). Исключая функцию  $P(\sigma)$  из уравнений (9), (11), подставим в полученные уравнения и уравнения (12), (15) выражения компонент векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  из (13). Требования того, чтобы полученные равенства при условиях (14) были тождествами по  $\sigma$  приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения

(13):

$$\begin{aligned}
 & A_1(g_1 - b_1 f_1) - a_2 \mu = 0, \quad 2A_1 g_0 - a_1 \mu = 0, \\
 & 2A_1(f_1 - a_2) - 3g_3 \mu = 0, \quad A_1 f_2 - 2g_4 \mu = 0, \\
 & \quad A_1 a_1 + g_2 \mu = 0, \quad 2A_1 a_0 + g_1 \mu = 0 \\
 & 2c_6 f_2 \mu + A_1 g_4 = 0, \quad \mu(6c_6 f_1 + 7c_5 f_2) + 4A_1(g_3 - b_3 a_2) = 0, \\
 & \quad \mu(5c_5 f_1 + 6c_4 f_2) + 4A_1(g_2 - b_3 a_1 - b_2 a_2) = 0, \\
 & \quad \mu(4c_4 f_1 + 5c_3 f_2) + 4A_1(g_1 - b_3 a_0 - b_2 a_1 - b_1 a_2) = 0, \\
 & \quad \mu(3c_3 f_1 + 4c_2 f_2) + 4A_1(g_0 - b_2 a_0 - b_1 a_1) = 0, \\
 & \mu c_2 f_1 - 2A_1 b_1 a_0 = 0, \quad B_1 - \alpha a_2 = 0, \quad 3\mu A_3 b_3 - 2A_1(\alpha f_2 a_1 - \gamma_0) = 0, \\
 & \quad \beta g_0 + s_2 a_0 = 0, \quad \mu A_3 b_2 - A_1(\beta f_2 + a_1(\alpha f_1 + B_3)) = 0, \\
 & \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \quad a_0^2 + g_0^2 - 1 = 0, \\
 & \quad \mu A_3 b_1 - 2A_1(\beta f_1 + B_3 a_0 - \lambda_1) = 0, \\
 & \quad 3\mu A_3 c_6 + 2A_1(\alpha g_4 a_1 - \gamma_0 b_3) = 0, \\
 & \quad 5\mu A_3 c_5 + 4A_1(\beta g_4 + (\alpha g_3 + B_3 b_3)a_1 - \gamma_0 b_2) = 0, \\
 & \quad \mu A_3 c_4 + A_1(\beta g_3 + (\alpha g_2 + B_3 b_2)a_1 - \gamma_0 b_1 - \eta b_3) = 0, \\
 & 3\mu A_3 c_3 + 4A_1(\beta g_2 + (\alpha g_1 + B_3 b_1)a_1 - \eta b_2 + \lambda_2 + s_2 a_2) = 0, \\
 & \quad \mu A_3 c_2 + 2A_1(\beta g_1 + (\alpha g_0 + s_2)a_1 - \eta b_1) = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha = C_1 - C_3, \quad \beta = \alpha a_0 - s_1, \quad \gamma_0 = A_1 - A_3 - B_3 a_2, \quad \eta = \lambda_1 - B_3 a_0.$$

Система уравнений (14), (16) совместима относительно параметров  $A_1, A_3, B_3$ . Запишем решение этой системы так:

$$\begin{aligned}
 & \alpha = -\frac{\beta_3 A_3 B_3^2}{8\beta_0 \beta_1^2}, \quad B_1 = \frac{\beta_3 B_3}{16\beta_0}, \\
 & s_1 = \frac{\beta_2 \beta_3 \beta_4 \sqrt{\xi_1} B_3^2}{8\beta_0 \beta_1^3 \beta_7 A_3}, \quad s_2 = -\frac{\beta_0 \beta_2 \beta_3^2 \beta_5 B_3^2}{\beta_1^2 \sqrt{\xi_1} \xi_2}, \\
 & \lambda_1 = -\frac{2(8A_1^2 - 7A_1 A_3 + A_3^2) B_3 \sqrt{\xi_1}}{\beta_1^2 \beta_7 A_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_0 \beta_2 \beta_3 \beta_5 B_3}{\sqrt{\xi_1} \xi_2}, \\
 & b_3 = \frac{\sqrt{2\xi_2} \gamma}{4\beta_2 \beta_3 \beta_5 B_3}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{\xi_2}}{2\beta_2 \beta_5}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{2\xi_2} \gamma}{2\beta_1 \beta_5 \sqrt{\xi_1}}, \quad b_0 = 0, \\
 & c_6 = \frac{\beta_1 \sqrt{\xi_1}}{8\beta_2 \beta_5 B_3}, \quad c_5 = \frac{\sqrt{2}\beta_1 \beta_3 \sqrt{\xi_1}}{4\beta_2 \beta_5 \gamma}, \quad c_4 = \frac{\beta_3 \beta_6}{4\beta_2 \beta_5}, \\
 & c_3 = \frac{\sqrt{2}\beta_3 \beta_4 B_3}{\beta_5 \gamma}, \quad c_2 = -\frac{\beta_3 \beta_4 B_3 \sqrt{\xi_1}}{\beta_1^2 \beta_5 \beta_7 A_3}, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \\
 & g_4 = \frac{\beta_1^2 \sqrt{\xi_1} \xi_2}{4\beta_2 \beta_3 \beta_5 A_3 B_3^2}, \quad g_3 = \frac{\sqrt{2}\beta_1^2 \sqrt{\xi_2} \gamma}{2\beta_2 \beta_3 \beta_5 A_3 B_3^2}, \quad g_2 = \frac{2\beta_0 \beta_1 \sqrt{\xi_2}}{\beta_2 \beta_5 A_3 B_3}, \\
 & \quad g_1 = -\frac{\sqrt{2}\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 \beta_4}{\gamma A_3 \sqrt{\xi_2}}, \quad g_0 = -\frac{2\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_5}{A_3 \sqrt{\xi_1} \xi_2}, \\
 & a_2 = -\frac{\beta_1^2}{2A_3 B_3}, \quad a_1 = -\frac{2\sqrt{2}\beta_0 \beta_1 \beta_3}{\gamma A_3}, \quad a_0 = \frac{\beta_4 \sqrt{\xi_1}}{\beta_7 A_3^2}, \\
 & f_2 = \frac{\sqrt{2}\beta_1^2 \gamma}{2\beta_3 A_3 B_3^2}, \quad f_1 = \frac{\beta_1^2}{A_3 B_3}, \quad f_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 2A_1 - A_3, & \beta_1 &= 4A_1 - A_3, & \beta_2 &= 4A_1 - 3A_3, & \beta_3 &= 8A_1 - A_3, \\ \beta_4 &= 8A_1 - 3A_3, & \beta_5 &= 8A_1 - 5A_3, & \beta_6 &= 12A_1 - 7A_3, & \beta_7 &= 16A_1 - 7A_3, \\ \xi_1 &= -\beta_1\beta_2\beta_7A_3, & \xi_2 &= -\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5, \\ \gamma &= \sqrt{\beta_3B_3\sqrt{\xi_1}}.\end{aligned}$$

Решение (13) при условиях (17) будет действительным, если

$$B_3 > 0, \quad A_1 \in \left(\frac{1}{8}A_3; \frac{1}{4}A_3\right). \quad (18)$$

Зависимость вспомогательной переменной от времени получим из дифференциального уравнения (8)

$$\dot{\sigma} = \mu(2A_1)^{-1}\sigma\sqrt{c_6\sigma^4 + c_5\sigma^3 + c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2}. \quad (19)$$

Рассмотрим числовой пример решения (13), (17), (19) уравнений (4), (5) при условиях (18).

Пусть

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{5}{24}A_3, & A_2 &= A_3 = a, & B_1 &= -\frac{B_3}{14}, & B_2 &= B_3 = b, \\ C_2 &= C_3, & \alpha &= \frac{36}{7}\frac{b^2}{a}, & (a > 0, b > 0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{b}{\sqrt{33}}(4\sqrt{13}; 7\sqrt{5}; 0), & \mathbf{s} &= \frac{8\sqrt{33}b^2}{11a} \left(-\frac{13\sqrt{13}}{7}; 7\sqrt{5}; 0\right), \\ \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2 &= Q(\sigma) = \frac{\sigma}{5} \left(\frac{\sqrt{10}}{8} \sqrt[4]{\frac{11}{39}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma^2 + \frac{\sqrt{65}}{26} \sigma + \sqrt{10} \sqrt[4]{\frac{39}{11}} \sqrt{\frac{b}{a}}\right), \\ \omega_3^2 &= \frac{\sigma^2}{5} R^*(\sigma), & R^*(\sigma) &= -\frac{\sqrt{429}a}{1248b} \sigma^4 - \frac{\sqrt{2}}{104} \sqrt[4]{\frac{143}{3}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma^3 - \\ & & & -\frac{27}{52} \sigma^2 + 4\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{3}{143}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sigma + \frac{8\sqrt{429}}{11}, \\ \nu_1 &= -\frac{1}{72} \frac{a}{b} \sigma^2 - \frac{7\sqrt{2}}{18} \sqrt[4]{\frac{3}{143}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma + \frac{2\sqrt{429}}{99}, \\ \nu_2 &= \frac{\sqrt{5}}{9} \left(\frac{\sqrt{33}a^2}{960b^2} \sigma^4 + \frac{\sqrt{2}}{80} \sqrt[4]{\frac{11}{39}} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma^3 + \right. \\ & & & \left. + \frac{7\sqrt{13}a}{260b} \sigma^2 - \frac{\sqrt{2}}{5} \sqrt[4]{\frac{39}{11}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma - \frac{7\sqrt{33}}{11}\right), \\ \nu_3 &= \frac{\sqrt{5}a}{180b} \sigma \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{\frac{143}{3}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sigma + 1\right) \sqrt{R^*(\sigma)};\end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{\sigma} = \alpha_0 \sigma \sqrt{R^*(\sigma)}, \quad \alpha_0 = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{39}{11}} \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (21)$$

Функцию  $\sigma = \sigma(t)$  находим из дифференциального уравнения (21). Действительность решения (20), (21) вытекает из условия, что подкоренная функция  $R^* = R^*(\sigma)$  в точке  $\sigma = 0$  принимает положительное значение. При этом зависимость  $\sigma = \sigma(t)$  выражается функциями времени, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

**4. Второе новое частное решение. Случай**  $n = 2$ ,  $m = 4$ ,  $l = 3$ ,  $n_1 = 2$ ,  $m_1 = 2$ . Пусть теперь полиномы решения (13) имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2 &= Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 &= R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \\ \nu_2 &= \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, & \nu_3 &= \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \\ & & \varkappa(\sigma) &= f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим полиномы  $Q(\sigma)$ ,  $R(\sigma)$ ,  $\varphi(\sigma)$ ,  $\psi(\sigma)$ ,  $\varkappa(\sigma)$  из (22) в уравнения (9)–(12) и потребуем их выполнения при всех  $\sigma$ . Это требование приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и решения (22):

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3, & A_1 &= A_3, & B_1 &= B_3, & \tilde{\alpha}g_2 + B_2b_2 &= 0, \\ f_1(\tilde{\alpha}g_0 + B_2b_0 + s_2) + (A_2 - A_1)b_0 - B_3g_0 + \lambda_2 &= 0, & a_3 &= f_2, & c_4 &= -1, \\ 2A_1(f_1 - a_2) - 2g_2d_1 &= 0, & 2g_2d_0 + g_1d_1 + 2A_1a_1 &= 0, & g_1d_0 + 2A_1a_0 &= 0, \\ 3d_1 + 2A_1b_2 &= 0, & 2A_1(g_2 - b_2f_1 - b_1f_2) - 3f_2d_0 - 2a_2d_1 &= 0, & f_0 &= 0, \\ 2A_1(g_1 - b_1f_1 - b_0f_2) - 2a_2d_0 - a_1d_1 &= 0, & 2A_1(g_0 - b_0f_1) - a_1d_0 &= 0, \\ (5c_3f_2 - 4f_1)d_1 - 6f_2d_0 - 4A_1(b_2a_2 + b_1a_3 - g_2) &= 0, \\ (5c_3f_2 - 4f_1)d_0 + (4c_2f_2 + 3c_3f_1)d_1 - 4A_1(b_2a_1 + b_1a_2 + b_0f_2 - g_1) &= 0, \\ (4c_2f_2 + 3c_3f_1)d_0 + (3c_1f_2 + 2c_2f_1)d_1 - 4A_1(b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2 - g_0) &= 0, \\ (3c_1f_2 + 2c_2f_1)d_0 + (2f_2c_0 + f_1c_1)d_1 - 4A_1(b_1a_0 + b_0a_1) &= 0, \\ (2f_2c_0 + f_1c_1)d_0 - 4A_1b_0a_0 &= 0, & A_2b_2d_1 + A_1B_3(f_1 - a_2) &= 0, \\ A_2(2b_2d_0 + b_1d_1) + 2A_1(f_2s_1 - B_3a_1) &= 0, \\ A_2b_1d_0 + 2A_1(f_1s_1 - B_3a_0 + \lambda_1) &= 0, \\ g_2\tilde{\xi}_0 + b_2\tilde{\xi}_1 - f_2(\tilde{\alpha}g_1 + B_2b_1) - c_4d_1 &= 0, \\ 4\{g_1\tilde{\xi}_0 + b_1\tilde{\xi}_1 - f_2(\tilde{\alpha}g_0 + B_2b_0) - f_2s_2\} - 4c_4d_0 - 3c_3d_1 &= 0, \\ 4\{g_0\tilde{\xi}_0 + b_0\tilde{\xi}_1 - a_1(\tilde{\alpha}g_1 + B_2b_1) - & \\ - a_2s_2 - \lambda_2 + b_2\tilde{\xi}_3\} - 3c_3d_0 - 2c_2d_1 &= 0, \\ 4\{g_1\tilde{\xi}_2 - a_1(\tilde{\alpha}g_0 + B_2b_0) - a_1s_2 + b_1\tilde{\xi}_3\} - 2c_2d_0 - c_1d_1 &= 0, \\ 4\{g_0\tilde{\xi}_2 + b_0\tilde{\xi}_3 - a_0s_2\} - c_1d_0 &= 0, \\ a_0^2 + g_0^2 - 1 + c_0f_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= C_3 - C_2, & d_1 &= f_2(\tilde{\alpha}g_1 + B_2b_1) - B_3g_2 + (A_2 - A_1)b_2, \\ d_0 &= f_2(\tilde{\alpha}g_0 + B_2b_0 + s_2) + f_1(\tilde{\alpha}g_1 + B_2b_1) + (A_2 - A_1)b_1 - B_3g_1, \\ \tilde{\xi}_0 &= B_3 - \tilde{\alpha}a_2, & \tilde{\xi}_1 &= A_1 - A_2 - B_2a_2, & \tilde{\xi}_2 &= s_1 - \tilde{\alpha}a_0, & \tilde{\xi}_3 &= \lambda_1 - B_2a_0. \end{aligned}$$

Считая  $g_1 \neq 0$  и свободными параметрами  $A_3, g_2, B_2, B_3$  запишем решение системы (23)

$$\begin{aligned}
 \frac{B_2}{B_3} &= k, \quad C_1 = C_3, \quad B_1 = B_3, \quad A_1 = A_3, \quad A_2 = \frac{2}{3}A_3, \quad \tilde{\alpha} = 3kB_3^2(2A_3)^{-1}, \\
 g_1 &= g_2(k(k+1)f_2B_3)^{-1}(\tilde{\gamma} - (2k^2 + 4k - 5)A_3), \\
 \tilde{\gamma} &= [2(2(k-1)(2k^2 + 3k - 4)A_3^2 - k(k+1)(2k^2 + 4k - 5)(g_2B_3)^2)]^{1/2}, \\
 g_0 &= \Delta_1 f_2^{-2}, \\
 a_3 &= f_2, \quad a_2 = -(2(2k^2 + 5k - 6)A_3 - 3\tilde{\gamma})(2k(k+1)B_3)^{-1}, \\
 a_1 &= g_2^2(2k(k+1)f_2A_3^2)^{-1}\{-2k(k+1)(g_2B_3)^2 + \\
 &\quad + ((6k^2 + 16k - 17)A_3 - 4\tilde{\gamma})A_3\}, \quad a_0 = \Delta_2 f_2^{-2}, \\
 b_2 &= -3g_2B_3(2A_3)^{-1}, \quad b_1 = 3g_2((2k^2 + 5k - 4)A_3 - \tilde{\gamma})(2k(k+1)f_2A_3)^{-1}, \\
 b_0 &= g_2(4k(k+1)^2 f_2^3 A_3^3 B_3)^{-1}\{(k+1)(2k(k+1)(g_2B_3)^2 + (4\tilde{\gamma} - (10k^2 + \\
 &\quad + 26k - 17)A_3)A_3)(g_2B_3)^2 + (2(4k^2 + 5k - 8)A_3 - (2k + 5)\tilde{\gamma})A_3^3\}, \\
 c_4 &= -1, \quad c_3 = 2g_2^2 B_3 (f_2 A_3)^{-1}, \\
 c_2 &= -g_2^2(k(k+1)(f_2 A_3)^2)^{-1}\{k(k+1)(g_2 B_3)^2 + ((3k^2 + 7k - 5)A_3 - \tilde{\gamma})A_3\}, \\
 c_1 &= -g_2^2(k(k+1)^2 f_2^3 A_3^3 B_3)^{-1}\{(k+1)(\tilde{\gamma} - (4k^2 + 10k - 5)A_3)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + ((4k^2 + 6k - 9)A_3 - (k+3)\tilde{\gamma})A_3^2\}, \quad c_0 = \Delta_3 f_2^{-4}, \\
 f_1 &= -(2k(k+1)A_3 B_3)^{-1}(-2k(k+1)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + (2(2k^2 + 5k - 6)A_3 - 3\tilde{\gamma})A_3), \quad f_0 = 0, \\
 \lambda_1 &= g_2^2 A_3 (2k(k+1)f_2^2)^{-1}, \quad s_1 = -g_2^2 B_3 (2kf_2^2)^{-1}, \\
 \lambda_2 &= -g_2(6k^2(k+1)^3 f_2^2 A_3^2 B_3)^{-1}\{2k(k+1)(k(k+1)(k+4)(g_2 B_3)^2 - \\
 &\quad - ((5k^3 + 39k^2 + 39k - 76)A_3 - 2(k+4)\tilde{\gamma})A_3)(g_2 B_3)^2 + ((2k^3(19k + 81) - \\
 &\quad - (69k^2 + 418k - 288))A_3 - (2k^3 + 34k^2 + 41k - 72)\tilde{\gamma})A_3^3\}. \\
 s_2 &= g_2(4k(k+1)^3 f_2^2 A_3^3)^{-1}\{2k(k+1)(k(k+1)(2k+5)(g_2 B_3)^2 - \\
 &\quad - ((10k^3 + 55k^2 + 35k - 91)A_3 - 2(2k+5)\tilde{\gamma})A_3)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + ((4k^3(13k + 45) - (120k^2 + 437k - 324))A_3 - \\
 &\quad - (4k^3 + 42k^2 + 39k - 80)\tilde{\gamma})A_3^3\},
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь  $f_2$  – действительный корень уравнения

$$\begin{aligned}
 f_2^4 &= \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3 f_1^2, \\
 \Delta_1 &= -g_2(2k^2(k+1)^3(A_3 B_3)^2)^{-1}\{k(k+1)(2k(k+1)(k+2)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + (4(k+2)\tilde{\gamma} - (10k^3 + 48k^2 + 25k - 67)A_3)A_3)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + ((2k^2(10k^2 + 33k - 21) - (151k - 108))A_3 - \\
 &\quad - (2k^3 + 16k^2 + 14k - 27)\tilde{\gamma})A_3^3\}, \\
 \Delta_2 &= -g_2^2((2k^2 + 4k - 5)A_3 - \tilde{\gamma})(4k^2(k+1)^2 A_3^2 B_3)^{-1}(-2k(k+1)(g_2 B_3)^2 + \\
 &\quad + (4(k^2 + 3k - 3)A_3 - 3\tilde{\gamma})A_3), \\
 \Delta_3 &= -g_2^2(4k^2(k+1)^3(A_3 B_3)^2)^{-1}\{(k+1)(2(2k+5)(k(k+1)(g_2 B_3)^2 + \tilde{\gamma})A_3) - \\
 &\quad - (12k^3 + 42k^2 - 2k - 41)A_3^2)(g_2 B_3)^2 + 2(2(k-1)(2k^3 + 14k^2 + 13k - 23)A_3 - \\
 &\quad - (4k^2 + 8k - 11)\tilde{\gamma})A_3^3\}.
 \end{aligned}$$

Решение (22) при условиях (24) действительно, если, например,

$$\Delta_3 > 0, \quad 2(k-1)(2k^2 + 3k - 4)A_3^2 \geq k(k+1)(2k^2 + 4k - 5)(g_2 B_3)^2. \tag{25}$$

Зависимость  $\sigma$  от времени находим из (8)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (d_1\sigma + d_0)(2A_1)^{-1}\sqrt{c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0}, \\ d_1 &= g_2B_3, \quad d_0 = -g_2(2k(k+1)f_2A_3)^{-1}\{-2k(k+1)(g_2B_3)^2 + \\ &\quad + (4(k^2 + 3k - 3)A_3 - 3\tilde{\gamma})A_3\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Приведем численный пример решения (22), (24)–(26) уравнений (4), (5).

Пусть  $a > 0, b > 0$  и

$$A_1 = A_3 = a, \quad A_2 = \frac{2}{3}a, \quad B_1 = B_3 = b, \quad B_2 = -2b, \quad C_1 = C_3, \quad g_2 = \frac{a}{b}, \quad C_3 - C_2 = -\frac{3b^2}{a}.$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \frac{a^3}{b^2 f^2} \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{3}(82 + 25\sqrt{11}); 0 \right), \\ \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \frac{a^2}{b f^2} (1; 101 + 30\sqrt{11}; 0), \\ \omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \frac{1}{2} \left( -3\sigma^2 - \frac{3(3 + \sqrt{11})a}{b f} \sigma + \frac{(37 + 10\sqrt{11})a^2}{4b^2 f^2} \right), \\ \omega_3^2 &= R(\sigma) = -\sigma^4 + 2\frac{a}{b f} \sigma^3 + \frac{(5 + 2\sqrt{11})}{2} \left( \frac{a}{b f} \right)^2 \sigma^2 - \\ &\quad - (7 + 2\sqrt{11}) \left( \frac{a}{b f} \right)^3 \sigma + \frac{139 + 40\sqrt{11}}{16} \left( \frac{a}{b f} \right)^4, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = f\sigma^3 + \\ &\quad + \frac{a}{2b} \left( (8 + 3\sqrt{11})\sigma^2 - \frac{(29 + 8\sqrt{11})a}{2b f} \sigma - \frac{3(42 + 13\sqrt{11})a^2}{4b^2 f^2} \right), \\ \nu_2 &= \psi(\sigma) = \frac{a}{b} \left( \sigma^2 + \frac{(5 + 2\sqrt{11})}{2} \frac{a}{b f} \sigma + \frac{(22 + 7\sqrt{11})}{4} \left( \frac{a}{b f} \right)^2 \right), \\ \nu_3 &= \left( f\sigma + \frac{10 + 3\sqrt{11}}{2} \frac{a}{b} \right) \sqrt{R(\sigma)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$f = \sqrt[4]{\frac{5(2269 + 684\sqrt{11})}{8}} \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Так как зависимость  $\sigma = \sigma(t)$  находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} \left( \sigma + \frac{3(4 + \sqrt{11})}{2} \frac{a}{b f} \right) \sqrt{R(\sigma)}, \quad (28)$$

то действительность решения (27), (28) вытекает из условия, что подкоренная функция  $\omega_3 = \omega_3(\sigma)$  в точке  $\sigma = 0$  принимает положительное значение.

Приведенный пример (27), (28) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами  $a$  и  $b$ . Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой  $\sigma = \sigma(t)$  в равенства (27).

Полученное решение (24), (26) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением

$$\left(\frac{b_1 g_2}{g_1} - b_2\right) \omega_1 + \omega_2 - \frac{b_1}{g_1} \nu_2 + \frac{b_1 g_0}{g_1} - b_0 = 0.$$

Производная в силу уравнений (4), (5) на этом соотношении не обращается тождественно в нуль.

**Заключение.** Найдены два новых частных решения полиномиального вида дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Первое решение зависит от трех независимых параметров  $A_1, A_3, B_3$ , а второе – от четырех независимых параметров  $g_2, A_3, B_2, B_3$ . Данные решения выражаются функциями, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

1. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // *Механика твердого тела*. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
2. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // *Докл. АН СССР*. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.
4. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
5. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
6. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 231 с.
7. Докшевич А.И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // *Механика твердого тела*. – 1970. – Вып. 2. – С.12–15.
8. Горр Г.В., Зыза А.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
9. Зыза А.В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // *Механика твердого тела*. – 2013. – Вып. 43. – С. 29–38.
10. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле // *Механика твердого тела*. – 2003. – Вып. 33. – С. 61–70.
11. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона // *Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки*. – 2010. – № 1. – С. 52–56.
12. Зыза А.В. Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // *Труды ИПММ НАН Украины*. – 2012. – **24**. – С. 116–123.

**A. V. Zyza**

**New solutions to equations of gyrostat movement in a magnetic field.**

New existence conditions of polynomial solutions to differential equations of gyrostat movement in a magnetic field with allowance made for Barnett-London effect are under review. Two new solutions to this problem have been produced which are characterized by the functions obtained by inverting elliptical Legendre integrals of the third type.

**Keywords:** *polynomial solution, gyrostat, Barnett-London effect, elliptical Legendre integrals.*

Донецкий национальный ун-т  
z9125494@mail.ru

Получено 21.10.14

УДК 531.38

©2015. Н. С. Иванисенко

## АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СТОКСА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выведены формулы, аналогичные формуле Стокса, для некоторого симплекса в четырехмерном пространстве.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор, симплекс, локальная проблема Помпейю.

**1. Введение.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное евклидово пространство размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ ,  $\mathbf{M}(n)$  – группа движений  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) : \lambda A \subset B\}$  – часть группы движений, оставляющая  $A$  внутри  $B$ .  $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$  – шар радиуса  $R$ .

Компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется множеством Помпейю в  $\mathbb{R}^n$ , если всякая локально суммируемая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой  $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$  при всех  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ , равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса  $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$  таких множеств  $A$ .

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция  $f$  локально суммируема в шаре  $\mathbb{B}_R$  и равенство  $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$  выполняется при всех  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ . Если из этого условия следует, что  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$  почти всюду, будем говорить, что  $A$  является множеством Помпейю в  $\mathbb{B}_R$  и обозначать  $A \in \text{Comp}(\mathbb{B}_R)$ . Для многих  $A$  это имеет место, если размеры  $\mathbb{B}_R$  достаточно велики по сравнению с  $A$ , см. [1], [2]. В связи с этим в работе [3] поставлена следующая

**ПРОБЛЕМА (4.1.1 из [3], локальный вариант проблемы Помпейю).** Для данного  $A$  найти  $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \text{Comp}(\mathbb{B}_R)\}$ .

Величину  $\mathcal{R}(A)$  естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества  $A$ .

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины  $\mathcal{R}(A)$ , получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем (см. [1], [2]), а также В.В. Волчковым (см. [3], глава 4, § 1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [3–6].

В частности, верхняя оценка  $\mathcal{R}(A)$  была получена для многогранников в  $\mathbb{R}^n$  (см. [3]). Для симплексов в  $\mathbb{R}^4$  она может быть уточнена с помощью, выведенных в работе формул, аналогичных формуле Стокса.

**2. Основные результаты.** В данной работе рассмотрен симплекс  $\mathbf{S}_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1, x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4\}$  с вершинами  $z_0(0, 0, 0, 0)$ ,  $z_1(1, 0, 0, 0)$ ,

---

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

$z_2(0, 1, 0, 0)$ ,  $z_3(0, 0, 1, 0)$ ,  $z_4(0, 0, 0, 1)$ .

Следующие теоремы содержат информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию  $f$ , чтобы интеграл по множеству  $\mathbf{S}_4$  от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции  $f$  в вершинах  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$ , сторонах  $z_0z_1, z_0z_2, z_0z_3, z_0z_4, z_1z_2, z_1z_3, z_1z_4, z_2z_3, z_2z_4, z_3z_4$ , гранях  $z_0z_1z_2, z_0z_1z_3, z_0z_1z_4, z_0z_2z_3, z_0z_2z_4, z_0z_3z_4$ , и объемных телах симплекса  $z_0z_1z_2z_3, z_0z_1z_2z_4, z_0z_2z_3z_4$ .

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы:  $q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$ ;  $q_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}$ ;  $q_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}$ ;  $q_4 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$ ;  $q_5 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$ ;  $q_6 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$ ;  $q_7 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ;  $q_8 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ;  $q_9 = \frac{\partial}{\partial x_3}$ ;  $q_{10} = \frac{\partial}{\partial x_4}$ ;  $D = \prod_{i=0}^{10} q_i$ ;  $D_1 = \prod_{i=2}^{10} q_i$ ;  $p_1 = \prod_{i=2}^6 q_i$ ; при  $i \neq 2$ :  $D_2 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $p_2 = \prod_{i=1}^6 q_i$ ; при  $i \neq 3$ :  $D_3 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $p_3 = \prod_{i=1}^6 q_i$ ; при  $i \neq 4$ :  $D_4 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $p_4 = \prod_{i=1}^6 q_i$ ; при  $i \neq 5$ :  $D_5 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $p_5 = \prod_{i=1}^6 q_i$ ; при  $i \neq 6$ :  $D_6 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $p_6 = \prod_{i=1}^5 q_i$ ; при  $i \neq 7$ :  $D_7 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ; при  $i \neq 8$ :  $D_8 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ; при  $i \neq 9$ :  $D_9 = \prod_{i=1}^{10} q_i$ ;  $D_{10} = \prod_{i=1}^9 q_i$ ;  $q = q_2q_4q_3q_5q_6q_1(q_1 + q_6)$ ;  $q^* = q_6q_1 + q_5q_2$ ;  $q^{**} = q_1 + q_2 + q_3$ .

Основными результатами работы является теоремы, содержащие формулы, аналогичные формуле Стокса, в четырехмерном пространстве.

Перед формулировкой основного результата введем следующие дифференциальные операторы:  $L_1 = -q_2q_4q_5q_1 - q_2q_4q_5q_6 + q_4q_3q_5q_1 + q_4q_3q_5q_6$ ;  $L_2 = q_2q_4q_3q_1 + q_2q_4q_3q_6 - q_2q_3q_5q_1 - q_2q_3q_5q_6$ ;  $L_3 = q_2q_3q_5q_1 + q_2q_3q_5q_6 - q_4q_3q_5q_1 - q_4q_3q_5q_6$ ;  $L_4 = -q_2q_4q_3q_1 - q_2q_4q_3q_6 + q_2q_4q_5q_1 + q_2q_4q_5q_6$ ;  $L_5 = -q_2q_4q_3q_1 + q_2q_3q_5q_1$ ;  $L_6 = q_2q_4q_5q_1 - q_4q_3q_5q_1$ ;  $L_7 = -q_2q_3q_5q_1$ ;  $L_8 = q_2q_4q_5q_6$ ;  $L_9 = q_2q_4q_3q_1$ ;  $L_{10} = -q_4q_3q_5q_6$ ;  $L_{11} = q_4q_3q_5q_1$ ;  $L_{12} = -q_2q_4q_3q_6$ ;  $L_{13} = -q_2q_4q_5q_1$ ;  $L_{14} = q_2q_3q_5q_6$ ;  $L_{15} = q_2q_4q_3q_6 - q_2q_4q_5q_6$ ;  $L_{16} = -q_2q_3q_5q_6 + q_4q_3q_5q_6$ ;  $G_0 = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$ ;  $G_1 = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$ ;  $G_2 = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$ ;  $G_3 = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$ ;  $G_4 = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$ .

**Теорема 1.** Для любой функции  $f \in \mathbb{C}^{17}(\mathbf{S}_4)$  выполняется следующее равенство:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Dqf)(x)dx = \sum_{i=0}^4 (G_i f)(z_i).$$

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы:  $P_{0,2} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$ ;  $P_{1,2} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$ ;  $P_{2,2} = 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$ ;  $P_{3,2} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$ ;  $P_{4,2} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + q_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$ ;  $\sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,2} = \sum_0^4 \frac{P_{i,2}}{q_8}$ ;  $Q_{0,2} = D_8$ ;  $P_{0,3} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$ ;  $P_{1,3} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$ ;  $P_{2,3} = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$ ;  $P_{3,3} = 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_5(L_{13} - L_{14})]$ ;  $P_{4,3} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$ ;  $\sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,3}}{q_9}$ ;  $Q_{0,3} = D_9$ ;  $P_{0,4} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$ ;  $P_{1,4} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$ ;  $P_{2,4} = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$ ;  $P_{3,4} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$ ;  $P_{4,4} =$

$$\begin{aligned}
&= 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,4}}{q_{10}}; \quad Q_{0,4} = D_{10}; \\
P_{0,5} &= -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}; \quad P_{1,5} = D_7 L_1 + 2[D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]; \quad P_{2,5} = \\
&= D_8 L_2 + 2[D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]; \quad P_{3,5} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - \\
&- L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]; \quad P_{4,5} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - \\
&- L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,2} = \sum_0^4 \frac{P_{i,5}}{q_1}; \quad Q_{1,2} = D_1; \quad P_{0,6} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}; \quad P_{1,6} = D_7 L_1 + \\
&+ 2[D_1(L_6 - L_5) + D_3(L_{10} - L_9)]; \quad P_{2,6} = q_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + \\
&+ D_5(L_{14} - L_{13})]; \quad P_{3,6} = D_9 L_3 + 2[D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]; \quad P_{4,6} = D_{10} L_4 + \\
&+ 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,6}}{q_2}; \quad Q_{1,3} = D_2; \\
P_{0,7} &= -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}; \quad P_{1,7} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7)]; \quad P_{2,7} = \\
&= D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]; \quad P_{3,7} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - \\
&- L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]; \quad P_{4,7} = D_{10} L_4 + 2[D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - \\
&- L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,7}}{q_3}; \quad Q_{1,4} = D_3; \quad P_{0,8} = -\sum_{i=7}^{10} q_i L_{i-6}; \quad P_{1,8} = q_7 L_1 + \\
&+ 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]; \quad P_{2,8} = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_5(L_{14} - \\
&- L_{13})]; \quad P_{3,8} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_6(L_{16} - L_{15})]; \quad P_{4,8} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - \\
&- L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,2,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,8}}{q_4}; \quad Q_{2,3} = D_4; \quad P_{0,9} = \\
&= -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}; \quad P_{1,9} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]; \quad P_{2,9} = \\
&= D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11})]; \quad P_{3,9} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - \\
&- L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]; \quad P_{4,9} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_6(L_{15} - L_{16})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,2,4} = \\
&= \sum_0^4 \frac{P_{i,9}}{q_5}; \quad Q_{2,4} = D_5; \quad P_{0,10} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}; \quad P_{1,10} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + \\
&+ D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]; \quad P_{2,10} = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + \\
&+ D_5(L_{14} - L_{13})]; \quad P_{3,10} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12})]; \quad P_{4,10} = D_{10} L_4 + \\
&+ 2[q_3(I_9 - I_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14})]; \quad \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,3,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,10}}{q_6}; \quad Q_{3,4} = D_6.
\end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть  $E := \{(l, k) : l = \overline{0, 3}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad l < k\}$ . Тогда для любой функции  $f \in \mathbb{C}^{16}(\mathbf{S}_4)$  выполняется следующее равенство:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{l,k} q f)(x) dx = H_{l,k} + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,l,k}, \quad l, k \in E.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Введем дифференциальные операторы: } K_1 = -p_1, \quad K_2 = -q_3 q_4 q_5 q_6 + q_2 q_4 q_5 q_6 - \\
&- 2q_2 q_3 q_5 q_6 + q_2 q_3 q_4 q_6, \quad K_3 = q_3 q_4 q_5 q_6 - 2q_2 q_4 q_5 q_6, \quad K_4 = -2q_2 q_3 q_5 q_6 + q_2 q_3 q_4 q_6, \\
&K_5 = -q_3 q_4 q_5 q_6 + 2q_2 q_3 q_5 q_6 + q_2 q_3 q_4 q_5, \quad K_6 = 2q_2 q_4 q_5 q_6 - q_2 q_3 q_4 q_6 - q_2 q_3 q_4 q_5, \quad K_7 = \\
&= q_2 q_4 q_5 q_6 + 2q_2 q_3 q_5 q_6 + q_2 q_3 q_4 q_5, \quad K_8 = q_2 q_3 q_4 q_6 + q_2 q_3 q_4 q_5, \quad K_9 = q_3 q_4 q_5 q_6, \quad K_{10} = \\
&= -q_2 q_4 q_5 q_6, \quad K_{11} = p_2, \quad K_{12} = -q_3 q_4 q_5 q_6 + q_1 q_4 q_5 q_6 + 2q_1 q_3 q_5 q_6 + q_1 q_3 q_4 q_5, \quad K_{13} = \\
&= q_3 q_4 q_5 q_6 - 2q_1 q_4 q_5 q_6, \quad K_{14} = -q_3 q_4 q_5 q_6 - 2q_1 q_3 q_5 q_6 + q_1 q_3 q_4 q_5, \quad K_{15} = 2q_1 q_3 q_5 q_6 + \\
&+ q_1 q_3 q_4 q_5, \quad K_{16} = 2q_1 q_4 q_5 q_6 - q_1 q_3 q_4 q_6 - q_1 q_3 q_4 q_5, \quad K_{17} = q_1 q_4 q_5 q_6, \quad K_{18} = 2q_1 q_3 q_5 q_6 - \\
&- q_1 q_3 q_4 q_6, \quad K_{19} = q_1 q_3 q_4 q_6 + q_1 q_3 q_4 q_5, \quad K_{20} = q_3 q_4 q_5 q_6, \quad K_{21} = -q_1 q_4 q_5 q_6, \\
R_{0,1,3} &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(D_2 p_2 K_{11} f)(x_1, 1-x_1-x_3, x_3, 0) + (D_2 p_2 K_{11} f)(x_1, 0, x_3, 0)] dx_3, \\
R_{1,3} &= \int_0^1 (D_2 K_{12} f)(t, 0, 1-t, 0) dt, \quad \tilde{R}_{0,1,3} = -\sum_{i=7}^{10} \frac{D_2 K_{i+6}}{q_i}, \quad \tilde{R}_{1,1,3} = \frac{D_2 K_{13}}{q_7} + \\
&+ 2\left(\frac{D_2(K_{17}-K_{18})}{q_1} - \frac{D_2 K_{19}}{q_3}\right), \quad \tilde{R}_{2,1,3} = \frac{D_2 K_{14}}{q_8} + 2\left(\frac{D_2(K_{18}-K_{17})}{q_1} + \frac{D_2 K_{20}}{q_4} - \frac{D_2 K_{21}}{q_5}\right), \quad \tilde{R}_{3,1,3} = \\
&= \frac{D_2 K_{15}}{q_9} - 2\left(\frac{D_2 K_{20}}{q_4} + \frac{D_2 K_{21}}{q_6}\right), \quad \tilde{R}_{4,1,3} = \frac{D_2 K_{16}}{q_{10}} + 2\left(\frac{D_2 K_{19}}{q_3} + \frac{D_2 K_{21}}{q_5} + \frac{D_2 K_{21}}{q_6}\right), \quad K_{22} = \\
&= p_3, \quad K_{23} = q_1 q_2 q_4 q_6 + q_1 q_2 q_4 q_5, \quad K_{24} = q_2 q_4 q_5 q_6 + q_1 q_4 q_5 q_6, \quad K_{25} = -q_2 q_4 q_5 q_6 - \\
&- 2q_1 q_2 q_5 q_6 + q_1 q_2 q_4 q_6, \quad K_{26} = -q_1 q_4 q_5 q_6 + 2q_1 q_2 q_5 q_6 + q_1 q_2 q_4 q_5; \quad K_{27} = -q_1 q_2 q_4 q_6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -q_1q_2q_4q_5, \quad K_{28} = -q_1q_4q_5q_6 - 2q_1q_2q_5q_6 + q_1q_2q_4q_6, \quad K_{29} = -q_2q_4q_5q_6 + 2q_1q_2q_5q_6 + \\
& + q_1q_2q_4q_5, \quad K_{30} = q_2q_4q_5q_6 - q_1q_4q_5q_6, \text{ при } i \neq 3: \quad g_3 = \prod_{i=1}^4 q_i, \quad Q = \prod_{i=7}^{10} q_i, \\
& R_{0,1,4} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [(g_3 Q K_{22} f)(x_1, 1-x_1-x_4, 0, x_4) + (g_3 Q K_{22} f)(x_1, 0, 1-x_1-x_4, x_4) - \\
& - 2(g_3 Q K_{22} f)(x_1, 0, 0, x_4)] dx_4, \quad R_{1,4} = \int_0^1 [(g_3 Q K_{23} f)(1-t, 0, 0, t)] dt, \quad \tilde{R}_{0,1,4} = \\
& = -\sum_{i=7}^{10} \frac{g_3 Q K_{i+17}}{q_i}, \quad \tilde{R}_{1,1,4} = \frac{g_3 Q K_{24}}{q_7} + 2\left(\frac{g_3 Q K_{28}}{q_1} + 2\frac{g_3 Q K_{29}}{q_3}\right), \quad \tilde{R}_{2,1,4} = \frac{g_3 Q K_{25}}{q_8} + \\
& + 2\left(-\frac{g_3 Q K_{28}}{q_1} + \frac{g_3 Q K_{30}}{q_4}\right), \quad \tilde{R}_{3,1,4} = \frac{g_3 Q K_{26}}{q_9} - 2\frac{g_3 Q K_{29}}{q_2}, \quad \tilde{R}_{4,1,4} = \frac{g_3 Q K_{27}}{q_{10}} - 2\frac{g_3 Q K_{30}}{q_4}, \\
& K_{31} = 2q_1q_2q_3q_5q_6, \quad K_{32} = q_2q_3q_5q_6 - q_1q_3q_5q_6, \quad K_{33} = q_2q_3q_5q_6 + q_1q_3q_5q_6 - 2q_1q_2q_5q_6 - \\
& K_{34} = -q_2q_3q_5q_6 + q_1q_2q_3q_6, \quad K_{35} = -q_1q_3q_5q_6 + q_1q_2q_3q_5, \quad K_{36} = 2q_1q_2q_5q_6 - q_1q_2q_3q_6 - \\
& q_1q_2q_3q_5, \quad K_{37} = -q_1q_3q_5q_6 + q_1q_2q_5q_6 + q_1q_2q_3q_6, \quad K_{38} = -q_2q_3q_5q_6 + q_1q_2q_5q_6 + \\
& q_1q_2q_3q_5, \quad K_{39} = q_1q_2q_3q_6 + q_1q_2q_3q_5, \quad K_{40} = -q_1q_2q_5q_6, \quad R_{0,2,3} = \\
& = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(D_4 K_{31} f)(1-x_2-x_3, x_2, x_3, 0) - (D_4 K_{31} f)(0, x_2, x_3, 0)] dx_3, \quad R_{2,3} = \\
& = \int_0^1 [(D_4 K_{32} f)(0, t, 1-t, 0)] dt, \quad \tilde{R}_{0,2,3} = -\sum_{i=7}^{10} \frac{D_4 K_{26+i}}{q_i}, \quad \tilde{R}_{1,2,3} = \frac{D_4 K_{33}}{q_7} + 2\left(\frac{D_4 K_{37}}{q_1} + \right. \\
& + \frac{D_4 K_{38}}{q_2} - \frac{D_4 K_{39}}{q_3}\left.\right), \quad \tilde{R}_{2,2,3} = \frac{D_4 K_{34}}{q_8} - 2\left(-\frac{D_4 K_{37}}{q_1} + \frac{D_4 K_{40}}{q_5}\right), \quad \tilde{R}_{3,2,3} = \frac{D_4 K_{35}}{q_9} - 2\left(\frac{D_4 K_{38}}{q_2} + \right. \\
& + \frac{D_4 K_{40}}{q_6}\left.\right), \quad \tilde{R}_{4,2,3} = \frac{D_4 K_{36}}{q_{10}} + 2\left(\frac{D_4 K_{39}}{q_3} + \frac{D_4 K_{40}}{q_5} + \frac{D_4 K_{40}}{q_6}\right); \quad K_{41} = p_5, \quad K_{42} = q_1q_2q_4q_6, \\
& K_{43} = q_2q_3q_4q_6 + q_1q_3q_4q_6 - 2q_1q_2q_4q_6, \quad K_{44} = -q_2q_3q_4q_6 - 2q_1q_2q_3q_6, \quad K_{45} = \\
& = -q_1q_3q_4q_6 + 2q_1q_2q_3q_6 + q_1q_2q_3q_4, \quad K_{46} = 2q_1q_2q_4q_6 - q_1q_2q_3q_4, \quad K_{47} = -q_1q_3q_4q_6 + \\
& + q_1q_2q_4q_6 - 2q_1q_2q_3q_6, \quad K_{48} = -q_2q_3q_4q_6 + q_1q_2q_4q_6 + 2q_1q_2q_3q_6 + q_1q_2q_3q_4, \quad K_{49} = \\
& = q_1q_2q_3q_4, \quad K_{50} = q_2q_3q_4q_6 - q_1q_3q_4q_6, \quad K_{51} = -q_1q_2q_4q_6, \quad R_{0,2,4} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [-(D_5 \\
& K_{41} f)(1-x_2-x_4, x_2, 0, x_4) + (D_5 K_{41} f)(0, x_2, 0, x_4)] dx_4, \quad R_{2,4} = \int_0^1 [(D_5 K_{42} f)(0, t, \\
& 0, 1-t)] dt, \quad \tilde{R}_{0,2,4} = -\sum_{i=7}^{10} \frac{D_5 K_{36+i}}{q_i}, \quad \tilde{R}_{1,2,4} = \frac{D_4 K_{43}}{q_7} + 2\left(\frac{D_5 K_{47}}{q_1} + \frac{D_5 K_{48}}{q_2} - \frac{D_5 K_{49}}{q_3}\right), \\
& \tilde{R}_{2,2,4} = \frac{D_5 K_{44}}{q_8} + 2\left(-\frac{D_5 K_{47}}{q_1} + \frac{D_5 K_{50}}{q_5}\right), \quad \tilde{R}_{3,2,4} = \frac{D_5 K_{45}}{q_9} - 2\left(\frac{D_5 K_{48}}{q_2} + \frac{D_5 K_{50}}{q_4} + \frac{D_5 K_{51}}{q_6}\right), \\
& \tilde{R}_{4,2,4} = \frac{D_5 K_{46}}{q_{10}} + 2\left(\frac{D_5 K_{49}}{q_3} + \frac{D_5 K_{51}}{q_6}\right), \quad K_{52} = p_6, \quad K_{53} = q_1q_2q_4q_5, \quad K_{54} = q_2q_3q_4q_5 + \\
& + q_1q_3q_4q_5 - 2q_1q_2q_4q_5, \quad K_{55} = -q_2q_3q_4q_5 - 2q_1q_2q_3q_5 + q_1q_2q_3q_4, \quad K_{56} = -q_1q_3q_4q_5 + \\
& + 2q_1q_2q_3q_5, \quad K_{57} = 2q_1q_2q_4q_5 - q_1q_2q_3q_4, \quad K_{58} = -q_1q_3q_4q_5 + q_1q_2q_4q_5 - 2q_1q_2q_3q_5 + \\
& + q_1q_2q_3q_4, \quad K_{59} = -q_2q_3q_4q_5 + q_1q_2q_4q_5 + 2q_1q_2q_3q_5, \quad K_{60} = q_1q_2q_3q_4, \quad K_{61} = \\
& = q_2q_3q_4q_5 - q_1q_3q_4q_5, \quad K_{62} = -q_1q_2q_3q_4, \quad R_{0,3,4} = \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [-(D_6 K_{52} f)(1-x_3-x_4, 0, x_3, x_4) + \\
& + (D_6 K_{52} f)(0, 0, x_3, x_4)] dx_4, \quad R_{3,4} = \int_0^1 [(D_6 K_{53} f)(0, 0, t, 1-t)] dt, \quad \tilde{R}_{0,3,4} = -\sum_{i=7}^{10} \frac{D_6 K_{47+i}}{q_i}, \\
& \tilde{R}_{1,3,4} = \frac{D_6 K_{54}}{q_7} + 2\left(\frac{D_6 K_{58}}{q_1} + \frac{D_6 K_{59}}{q_2} - \frac{D_4 K_{60}}{q_3}\right), \quad \tilde{R}_{2,3,4} = \\
& = \frac{D_6 K_{55}}{q_8} + 2\left(-\frac{D_6 K_{58}}{q_1} + \frac{D_6 K_{61}}{q_4} + \frac{D_6 K_{62}}{q_5}\right), \quad \tilde{R}_{3,3,4} = \frac{D_6 K_{56}}{q_9} + 2\left(-\frac{D_6 K_{59}}{q_2} + \frac{D_6 K_{61}}{q_4} + \frac{D_6 K_{62}}{q_5}\right), \\
& \tilde{R}_{4,3,4} = \frac{D_6 K_{57}}{q_{10}} + 2\left(\frac{D_6 K_{60}}{q_3} - \frac{D_6 K_{62}}{q_5}\right).
\end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть  $F := \{(l, k) : l = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{2, 4}, \quad l < k\}$ , произвольная функция  $f \in \mathbb{C}^{30}(\mathbf{S}_4)$ . Тогда следующее равенство верно:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (G_{k,l} f)(x) dx = R_{0,k,l} + R_{k,l} + \sum_{i=0}^4 (P_{i,k,l} f)(z_i), \quad l, k \in F.$$

Введем следующие дифференциальные операторы:  $N_1 = q_{10}q_3q_5q_6q^{**}$ ,  $N_{0,1,2,3} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} [(q_{10}q_3q_5q_6 f)(x_1, x_2, x_3, 1-x_1-x_2-x_3) - (q_{10}q_3q_5q_6 f)(x_1, x_2, x_3, 0)] dx_3$ ,  $N_{0,1,2,(1)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 [-(q_{10}q_3q_6 f)(x_1, x_2, 1-x_1-x_2, 0) + (q_{10}q_3q_6 f)(x_1, x_2, 0, 0)] dx_2$ ,  $N_{0,1,3,(1)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(q_{10}q_3q_5 f)(x_1, 1-x_1-x_3, x_3, 0) + (q_{10}q_3q_5 f)(x_1, 0, x_3, 0)] dx_3$ ,  $N_{0,2,3,(1)} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [3(q_{10}q_3q_5 f)(1-x_2-x_3, x_2, x_3, 0) - 3(q_{10}q_3q_5 f)$

$$\begin{aligned}
& (0, x_2, x_3, 0)]dx_3, \quad N_{0,1,(1)} = \int_0^1 (-q_{10}q_5 - q_{10}q_6)(f)(x_1, 0, 0, 0)dx_1, \quad N_{0,2,(1)} = \int_0^1 (3q_{10} \\
& q_3f)(0, x_2, 0, 0)dx_2, \quad N_{1,2,(1)} = \int_0^1 (q_{10}q_5 + 3q_{10}q_3)(f)(x_1, 1 - x_1, 0, 0)dx_1, \quad N_{1,3,(1)} = \\
& = \int_0^1 [(q_{10}q_6f)(x_1, 0, 1 - x_1, 0)]dx_1, \quad N_{2,4,(1)} = \int_0^1 (q_{10}q_5f)(0, x_2, 0, 1 - x_2)dx_2, \quad N_{3,4,(1)} = \\
& = \int_0^1 (q_{10}q_6f)(0, 0, x_3, 1 - x_3)dx_3, \quad N_{0,(1)} = q_6 + q_5 + 3q_3, \quad N_{1,(1)} = 6q_{10}, \quad N_{4,(1)} = -3q_3 - \\
& q_5 - q_6 - 6q_{10}, \quad N_{0,p,q,(1)} = N_{0,1,2,3,(1)} + N_{0,1,2,(1)} + N_{0,1,3,(1)}, \quad N_{0,k,l,(1)} = N_{0,2,3,(1)} + \\
& N_{0,1,(1)} + N_{0,2,(1)} + N_{1,2,(1)} + N_{1,3,(1)} + N_{2,4,(1)}, \quad N_{m,(1)} = N_{3,4,(1)} + (N_{0,(1)}f)(z_0) + \\
& (N_{1,(1)}f)(z_1) + (N_{4,(1)}f)(z_4), \quad N_2 = q_6q_4q_2(q_1 + q_2 + q_3), \quad N_{0,1,2,4} = \\
& = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_2-x_4} [-(q_6q_4q_2f)(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2 - x_4, x_4) + (q_6q_4q_2f)(x_1, x_2, 0, \\
& x_4)]dx_4, \quad N_{0,1,2,(2)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_2} [-(q_6q_4f)(x_1, x_2, 0, 1 - x_1 - x_2) + (q_6q_4f)(x_1, x_2, 0, 0)]dx_2, \\
& N_{0,1,4,(2)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(q_6q_4f)(x_1, 1 - x_1 - x_4, 0, x_4) + (q_6q_4f)(x_1, 0, 0, x_4)]dx_4, \\
& N_{0,2,4,(2)} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(3q_6q_2f)(1 - x_2 - x_4, x_2, 0, x_4) - (3q_6q_2f)(0, x_2, 0, x_4)]dx_4, \quad N_{0,2,(2)} = \\
& \int_0^1 (-q_6f)(0, x_2, 0, 0)dx_2, \quad N_{0,3,(2)} = \int_0^1 (3q_2 - q_4 + q_6)(f)(0, 0, x_3, 0)dx_3, \quad N_{0,4,(2)} = \\
& \int_0^1 (-3q_2 + q_4)(f)(0, 0, 0, x_4)dx_4, \quad N_{1,3,(2)} = \int_0^1 (3q_2f)(x_1, 0, 1 - x_1, 0)dx_1, \quad N_{1,4,(2)} = \\
& \int_0^1 (-3q_2f)(x_1, 0, 0, 1 - x_1)dx_1, \quad N_{2,3,(2)} = \int_0^1 (-q_4f)(0, x_2, 1 - x_2, 0)dx_2, \quad N_{2,4,(2)} = \\
& \int_0^1 (q_4 + q_2)(f)(0, x_2, 0, 1 - x_2)dx_2, \quad N_{3,(2)} = -2, \quad N_{4,(2)} = 2, \quad N_{0,p,q,r} = \\
& = N_{0,1,2,(2)} + N_{0,1,4,(2)} + N_{0,2,4,(2)}, \quad N_{k,l,(2)} = N_{0,2,(2)} + N_{0,3,(2)} + N_{0,4,(2)} + N_{1,3,(2)} + \\
& + N_{1,4,(2)} + N_{2,3,(2)} + N_{2,4,(2)}, \quad N_{m,(2)} = (N_{3,(2)}f)(z_3) + (N_{4,(2)}f)(z_4), \quad N_{0,2,3,4} = \\
& = 3 \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} [(q_3q_2q_1f)(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) - (q_3q_2q_1f)(0, x_2, \\
& x_3, x_4)]dx_4, \quad N_3 = q_5q_4q_1(q_1 + q_2 + q_3), \quad N_{0,1,3,4} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_3} [-(q_5q_4q_1f) \\
& (x_1, 1 - x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4) + (q_5q_4q_1f)(x_1, 0, x_3, x_4)]dx_4, \quad N_{0,1,3,(3)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(q_5 \\
& q_4f)(x_1, 0, x_3, 1 - x_1 - x_3) + (q_5q_4f)(x_1, 0, x_3, 0)]dx_3, \quad N_{0,1,4,(3)} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(q_5q_4f) \\
& (x_1, 0, 1 - x_1 - x_4, x_4) + (q_5q_4f)(x_1, 0, 0, x_4)]dx_4, \quad N_{0,3,4,(3)} = \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [-(3q_5q_1f) \\
& (1 - x_3 - x_4, 0, x_3, x_4) + (3q_5q_1f)(0, 0, x_3, x_4)]dx_4, \quad N_{0,2,(3)} = \int_0^1 (-3q_1 - q_4 - q_5)(f)(0, \\
& x_2, 0, 0)dx_2, \quad N_{0,3,(3)} = \int_0^1 (q_5f)(0, 0, x_3, 0)]dx_3, \quad N_{0,4,(3)} = \int_0^1 (3q_1 + q_4)(f)(0, 0, 0, x_4)dx_4, \\
& N_{1,2,(3)} = \int_0^1 -(3q_1f)(x_1, 1 - x_1, 0, 0)dx_1, \quad N_{1,4,(3)} = \int_0^1 (3q_1f)(x_1, 0, 0, 1 - x_1)dx_1, \\
& N_{2,3,(3)} = \int_0^1 (q_4f)(0, x_2, 1 - x_2, 0)dx_2, \quad N_{3,4,(3)} = \int_0^1 [(q_4 - q_5)(f)(0, 0, x_3, 1 - x_3)dx_3, \\
& N_{2,(3)} = 2, \quad N_{4,(3)} = -2, \quad N_{0,p,q,(3)} = N_{0,1,3,(3)} + N_{0,1,4,(3)} + N_{0,3,4,(3)}, \quad N_{k,l,(3)} = \\
& = N_{0,2,(3)} + N_{0,3,(3)} + N_{0,4,(3)} + N_{1,2,(3)} + N_{1,4,(3)} + N_{2,3,(3)} + N_{3,4,(3)}, \quad N_{m,(3)} = (N_{2,(3)}f)(z_2) + \\
& + (N_{4,(3)}f)(z_4), \quad N_4 = q_3q_2q_1q^*, \quad N_{0,2,3,(4)} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(q_3q_2f)(0, x_2, x_3, 1 - x_2 - \\
& - x_3) - (q_3q_2f)(0, x_2, x_3, 0)]dx_3, \quad N_{0,2,4,(4)} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(q_3q_2f)(0, x_2, 1 - x_2 - x_4, x_4) - \\
& (q_3q_2f)(0, x_2, 0, x_4)]dx_4, \quad N_{0,3,4,(4)} = \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [(q_3q_1f)(0, 1 - x_3 - x_4, \\
& x_3, x_4) - (q_3q_1f)(0, 0, x_3, x_4)]dx_4, \quad N_{0,1,(4)} = \int_0^1 (q_2 + q_3)(f)(x_1, 0, 0, 0)dx_1, \quad N_{0,3,(4)} = \\
& = \int_0^1 (-q_3f)(0, 0, x_3, 0)dx_3, \quad N_{0,4,(4)} = \int_0^1 (-q_1 - q_2)(f)(0, 0, 0, x_4)dx_4, \quad N_{1,2,(4)} = \\
& = \int_0^1 (-q_1f)(x_1, 1 - x_1, 0, 0)dx_1, \quad N_{1,3,(4)} = \int_0^1 (-q_2f)(x_1, 0, 1 - x_1, 0)dx_1, \quad N_{1,4,(4)} = \\
& = \int_0^1 (q_1f)(x_1, 0, 0, 1 - x_1)dx_1, \quad N_{2,4,(4)} = \int_0^1 (-q_1f)(0, x_2, 0, 1 - x_2)dx_2, \quad N_{3,4,(4)} = \\
& = \int_0^1 (-q_2 + q_3)(f)(0, 0, x_3, 1 - x_3)dx_3, \quad N_{1,(4)} = -2, \quad N_{4,(4)} = 2, \quad N_{0,p,q,(4)} = \\
& = N_{0,2,3,(4)} + N_{0,2,4,(4)} + N_{0,3,4,(4)}, \quad N_{k,l,(4)} = N_{0,1,(4)} + N_{0,3,(4)} + N_{0,4,(4)} + N_{1,2,(4)} + \\
& + N_{1,3,(4)} + N_{1,4,(4)} + N_{2,4,(4)} + N_{3,4,(4)}, \quad N_{m,(4)} = (N_{1,(4)}f)(z_1) + (N_{4,(4)}f)(z_4).
\end{aligned}$$

**Теорема 4.** Пусть  $G = \{(i, j, r) : i = 1, 2, j = 2, 3, j > i, r = 3, 4, r > j\}$ . Тогда для любой функции  $f \in \mathbb{C}^{34}(\mathbf{S}_4)$  следующее равенство верно:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_s f)(x) dx = N_{0,i,j,r,(s)} + N_{0,p,q,(s)} + N_{0,k,l,(s)} + N_{m,(s)}, \quad s \in [1, 4], \quad i, j, r \in G.$$

### 3. Доказательство основного результата.

*Доказательство теоремы 1.* Для произвольной функции переход к повторному интегралу по множеству  $\mathbf{S}_4$  осуществляется исходя из следующих равенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{S}_4} (f)(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 = \\ &= \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 = \\ &= \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_3-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 = \\ &= \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3. \end{aligned}$$

Выбираем тот порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл, получаем  $\int_{\mathbf{S}_4} ((q_1 + q_6)f)(x) dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 - \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_3-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 + \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3 - \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 = \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} [f(1-x_2-x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) - f(0, x_2, x_3, x_4)] dx_2 - \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} [f(x_1, 1-x_1-x_3-x_4, x_3, x_4) - f(x_1, 0, x_3, x_4)] dx_1 + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} [f(x_1, x_2, 1-x_1-x_2-x_4, x_4) - f(x_1, x_2, 0, x_4)] dx_4 - \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} [f(x_1, x_2, x_3, 1-x_1-x_2-x_3) - f(x_1, x_2, x_3, 0)] dx_3.$

Действуя на функции из предыдущего интеграла, дифференциальным оператором  $q_6 q_1$ , имеем  $\int_{\mathbf{S}_4} (q_6 q_1 (q_1 + q_6)f)(x) dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(-q_1 f)(1-x_2-x_4, x_2, 0, x_4) + (q_1 f)(0, x_2, 0, x_4)] dx_4 - \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [(-q_1 f)(1-x_2-x_3, x_2, x_3, 0) + (q_1 f)(0, x_2, x_3, 0)] dx_3 - \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [(-q_1 f)(x_1, 1-x_1-x_4, 0, x_4) + (q_1 f)(x_1, 0, 0, x_4)] dx_4 + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [(-q_1 f)(x_1, 1-x_1-x_3, x_3, 0) + (q_1 f)(x_1, 0, x_3, 0)] dx_3 + \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} [(-q_6 f)(0, x_2, 1-x_2-x_4, x_4) + (q_6 f)(0, x_2, 0, x_4)] dx_2 - \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} [(-q_6 f)(x_1, 0, 1-x_1-x_4, x_4) + (q_6 f)(x_1, 0, 0, x_4)] dx_1 - \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [(-q_6 f)(0, x_2, x_3, 1-x_2-x_3) + (q_6 f)(0, x_2, x_3, 0)] dx_2 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [(-q_6 f)(x_1, 0, x_3, 1-x_1-x_3) + (q_6 f)(x_1, 0, x_3, 0)] dx_1.$

Действуем на полученную функцию оператором  $q_2 q_4 q_3 q_5$ , и приводя подобные слагаемые, получаем:  $\int_{\mathbf{S}_4} (q_2 q_4 q_3 q_5 q_6 q_1 (q_1 + q_6)f)(x) dx = \int_0^1 [(-q_2 q_4 q_5 q_1 f - q_2 q_4 q_5 q_6 f + q_4 q_3 q_5 q_1 f + q_4 q_3 q_5 q_6 f)(x_1, 0, 0, 0)] dx_1 + \int_0^1 [(q_2 q_4 q_3 q_1 f + q_2 q_4 q_3 q_6 f - q_2 q_3 q_5 q_1 f - q_2 q_3 q_5 q_6 f)(0, x_2, 0, 0)] dx_2 + \int_0^1 [(q_2 q_3 q_5 q_1 f + q_2 q_3 q_5 q_6 f - q_4 q_3 q_5 q_1 f - q_4 q_3 q_5 q_6 f)(0, 0, x_3, 0)] dx_3 + \int_0^1 [(-q_2 q_4 q_3 q_1 f - q_2 q_4 q_3 q_6 f + q_2 q_4 q_5 q_1 f + q_2 q_4 q_5 q_6 f)(0, 0, 0, x_4)] dx_4 + \int_0^1 [(-q_2 q_4 q_3 q_1 f + q_2 q_3 q_5 q_1 f)(1-x_2, x_2, 0, 0)] dx_2 + \int_0^1 [(q_2 q_4 q_5 q_1 f - q_4 q_3 q_5 q_1 f)(x_1, 1-x_1, 0, 0)] dx_1 + \int_0^1 [(-q_2 q_3 q_5 q_1 f)(1-x_3, 0, x_3, 0)] dx_3 + \int_0^1 [(q_2 q_4 q_5 q_6 f)(x_1, 0, 1-x_1, 0)] dx_1 + \int_0^1 [(q_2 q_4 q_3 q_1 f)(1-x_4, 0, 0, x_4)] dx_4 + \int_0^1 [(-q_4 q_3 q_5 q_6 f)(x_1, 0, 0, 1-x_1)] dx_1 + \int_0^1 [(q_4 q_3 q_5 q_1 f)(0, 1-x_3, x_3, 0)] dx_3 + \int_0^1 [(-q_2 q_4 q_3 q_6 f)(0, x_2, 1-x_2, 0)] dx_2 + \int_0^1 [(-q_2 q_4 q_5 q_1 f)(0, 1-x_4, 0,$

$$x_4)dx_4 + \int_0^1 [(q_2q_3q_5q_6f)(0, x_2, 0, 1 - x_2)]dx_2 + \int_0^1 [(q_2q_4q_3q_6f - q_2q_4q_5q_6f)(0, 0, 1 - x_4, x_4)]dx_4 + \int_0^1 [(-q_2q_3q_5q_6f + q_4q_3q_5q_6f)(0, 0, x_3, 1 - x_3)]dx_3.$$

Производим следующие замены: в пятом интеграле  $x_1 = 1 - x_2$ , в седьмом:  $x_1 = 1 - x_3$ , в девятом:  $x_1 = 1 - x_4$ , в одиннадцатом:  $x_2 = 1 - x_3$ , в тринадцатом:  $x_2 = 1 - x_4$ , в пятнадцатом  $x_3 = 1 - x_4$ , получаем:  $\int_{\mathbf{S}_4} (qf)(x)dx = \int_0^1 (L_1f)(x_1, 0, 0, 0)dx_1 + \int_0^1 (L_2f)(0, x_2, 0, 0)dx_2 + \int_0^1 (L_3f)(0, 0, x_3, 0)dx_3 + \int_0^1 (L_4f)(0, 0, 0, x_4)dx_4 + \int_0^1 (L_6 - L_5)(f)(x_1, 1 - x_1, 0, 0)dx_1 + \int_0^1 (L_8 - L_7)(f)(x_1, 0, 1 - x_1, 0)dx_1 + \int_0^1 (L_{10} - L_9)(f)(x_1, 0, 0, 1 - x_1)dx_1 + \int_0^1 (L_{12} - L_{11})(f)(0, x_2, 1 - x_2, 0)dx_2 + \int_0^1 (L_{14} - L_{13})(f)(0, x_2, 0, 1 - x_2)dx_2 + \int_0^1 (L_{16} - L_{15}f)(0, 0, x_3, 1 - x_3)dx_3.$

Действуя на полученную функцию  $qf$  дифференциальным оператором  $D$ , имеем:  $\int_{\mathbf{S}_4} (Dqf)(x)dx = (-q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_8q_9q_{10}L_1 - q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_9q_{10}L_2 - q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}L_3 - q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9L_4)(f)(0, 0, 0, 0) + (q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_8q_9q_{10}L_1 + 2q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_6 - L_5) + 2q_1q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_8 - L_7) + 2q_1q_2q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{10} - L_9))(f)(1, 0, 0, 0) + (q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_9q_{10}L_2 + 2q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_5 - L_6) + 2q_1q_2q_3q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{12} - L_{11}) + 2q_1q_2q_3q_4q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{14} - L_{13}))(f)(0, 1, 0, 0) + (q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}L_3 + 2q_1q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_7 - L_8) + 2q_1q_2q_3q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{11} - L_{12}) + 2q_1q_2q_3q_4q_5q_7q_8q_9q_{10}(L_{16} - L_{15}))(f)(0, 0, 1, 0) + (q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9L_4 + 2q_1q_2q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_9 - L_{10}) + 2q_1q_2q_3q_4q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{13} - L_{14}) + 2q_1q_2q_3q_4q_5q_7q_8q_9q_{10}(L_{15} - L_{16}))(f)(0, 0, 0, 1).$

Учитывая обозначения введенные перед теоремами, получаем требуемое утверждение:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Dqf)(x)dx = \sum_{i=0}^4 (G_i f)(z_i),$$

что завершает доказательство теоремы 1.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Для того, чтобы получить интеграл по симплексу, который выражается через значения рассматриваемых дифференциальных операторов от функции  $f$  в стороне  $z_0z_1$ , подействуем на функцию  $qf$ , дифференциальным оператором  $D_7$ , имеем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (D_7qf)(x)dx = \int_0^1 (D_7L_1f)(x_1, 0, 0, 0)dx_1 + \sum_{i=8}^{10} (-D_iL_{i-6}/q_7)(f)(0, 0, 0, 0) + 2[(D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9))/q_7](f)(1, 0, 0, 0) + [(D_8L_2 + 2(D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13}))/q_7](f)(0, 1, 0, 0) + [(D_9L_3 + 2(D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15}))/q_7](f)(0, 0, 1, 0) + [(D_{10} + 2(D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16}))/q_7](f)(0, 0, 0, 1).$$

Заменяя в первом интеграле  $t = x_1$ ,  $\tilde{P}_{0,0,1} = \sum_{i=8}^{10} -D_iL_{i-6}/q_7$ ;  $\tilde{P}_{1,0,1} = 2(D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9))/q_7$ ;  $\tilde{P}_{2,0,1} = (D_8L_2 + 2(D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13}))/q_7$ ;  $\tilde{P}_{3,0,1} = (D_9L_3 + 2(D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15}))/q_7$ ;  $\tilde{P}_{4,0,1} = (D_{10} + 2(D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16}))/q_7$ , получим:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,1}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{0,1}L_1f)(0, 0, 0, t)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,1}(z_i).$$

Отсюда следует, что для того, чтобы получить интеграл, который выражается через дифференциальные операторы в стороне  $z_0z_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , необходимо на функцию

$qf$  подействовать соответственно операторами  $D_{i+6}$ . Учитывая замены: в первом полученном интеграле  $t = x_2$ , во втором  $t = x_3$  и в третьем  $t = x_4$ , имеем:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,2}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{0,2}L_2f)(0, t, 0, 0)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,2}(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,3}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{0,3}L_3f)(0, 0, t, 0)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,3}(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,4}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{0,4}L_4f)(0, 0, 0, t)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,0,4}(z_i).\end{aligned}$$

Таким образом, действуя на функцию  $qf$  операторами  $D_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , получим интегралы, выражающиеся с помощью дифференциальных операторов в сторонах  $z_j z_k$ ,  $j = \overline{1,3}$ ,  $k = \overline{2,4}$ ,  $j < k$ . Делая в полученных интегралах замены: в первом, втором и третьем интеграле  $t = x_1$ , в четвертом и пятом  $t = x_2$  и шестом  $t = x_3$ ; получаем требуемые утверждения:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,2}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{1,2}(L_6 - L_5)f)(t, 1 - t, 0, 0)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,2}(z_i), \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,3}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{1,3}(L_8 - L_7)f)(t, 0, 1 - t, 0)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,3}(z_i), \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,4}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{1,4}(L_{10} - L_9)f)(t, 0, 0, 1 - t)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,1,4}(z_i), \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{2,3}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{2,3}(L_{12} - L_{11})f)(0, t, 1 - t, 0)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,2,3}(z_i), \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{2,4}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{2,4}(L_{14} - L_{13})f)(0, t, 0, 1 - t)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,2,4}(z_i), \\ \int_{\mathbf{S}_4} (Q_{3,4}qf)(x)dx &= \int_0^1 (Q_{3,4}(L_{16} - L_{15})f)(0, 0, t, 1 - t)dt + \sum_{i=0}^4 \tilde{P}_{i,3,4}(z_i),\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2.  $\square$

*Доказательство теоремы 3.* Вычисляя интеграл по симплексу от функции  $q^*f(x)$ , получаем интегралы выражающиеся через значения функций в грани  $z_0 z_1 z_2$  и ребрах  $z_{i,j}$ ,  $i = \overline{0,3}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ,  $i < j$ :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}_4} (q^*f)(x)dx &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-f(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2, 0) + f(x_1, x_2, 0, 0)]dx_2 + \\ &+ \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-f(x_1, 1 - x_1 - x_3, x_3, 0) + f(x_1, 0, x_3, 0)]dx_3 + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [f(x_1, 1 - \\ &- x_1 - x_4, 0, x_4) + f(x_1, 0, 1 - x_1 - x_4, x_4) - 2f(x_1, 0, 0, x_4)]dx_4 + 2 \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [f(1 - x_2 -\end{aligned}$$

$$-x_3, x_2, x_3, 0) - f(0, x_2, x_3, 0)]dx_3 + \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [-f(1-x_2-x_4, x_2, 0, x_4) + f(0, x_2, 0, x_4)]dx_4 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} [-f(1-x_3-x_4, 0, x_3, x_4) + f(0, 0, x_3, x_4)]dx_4.$$

Действуя оператором  $p_1$  на рассматриваемую функцию, и вводя замены во втором интеграле  $t = x_1$ , в третьем интеграле  $t = 1 - x_2$ , получим:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q^* f)(x) dx = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [(K_1 f)(x_1, x_2, 1-x_1-x_2, 0) + (K_1 f)(x_1, x_2, 0, 0)]dx_2 + \int_0^1 [(K_2 f)(t, 1-t, 0, 0)]dt + \int_0^1 [(K_3 f)(x_1, 0, 0, 0)]dx_1 + \int_0^1 [(K_4 f)(0, x_2, 0, 0)]dx_2 + \int_0^1 [(K_5 f)(0, 0, x_3, 0)]dx_3 + \int_0^1 [(K_6 f)(0, 0, 0, x_4)]dx_4 + \int_0^1 [(K_7 f)(x_1, 0, 1-x_1, 0)]dx_1 + \int_0^1 [(K_8 f)(1-x_4, 0, 0, x_4)]dx_4 + \int_0^1 [(K_9 f)(0, 1-x_3, x_3, 0)]dx_3 + \int_0^1 [(K_{10} f)(0, 1-x_4, 0, x_4)]dx_4 + \int_0^1 [(K_{10} f)(0, 0, 1-x_4, x_4)]dx_4.$$

Действуя на полученную функцию оператором  $D_1 p_1$ , получаем требуемое равенство:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (D_1 p_1 q^* f)(x) dx = R_{0,1,2} + R_{1,2} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,1,2})(z_i).$$

Аналогично предыдущему, действуя поочередно на функцию  $q^*$ , дифференциальными операторами  $D_2 p_2$ ,  $g_3 Q p_3$ ,  $D_4 p_4$ ,  $D_5 p_5$ ,  $D_6 q_6$  и производя соответственно замены: в первом интеграле  $t = x_1$ , во втором интеграле  $t = x_4$ , в третьем интеграле  $t = x_2$ , в четвертом интеграле  $t = x_2$ , в пятом интеграле  $t = x_4$ , в шестом интеграле  $t = x_3$ , имеем выражения интегралов, выражающиеся через введенные операторы в интересующих нас гранях  $z_0 z_i z_j$ ,  $i = \overline{2, 3}$ ,  $j = \overline{3, 4}$ ,  $i < j$ , а также ребрах и вершинах симплекса:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{S}_4} (D_2 p_2 q^* f)(x) dx &= R_{0,1,3} + R_{1,3} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,1,3})(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (q_3 Q p_3 q^* f)(x) dx &= R_{0,1,4} + R_{1,4} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,1,4})(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (D_4 p_4 q^* f)(x) dx &= R_{0,2,3} + R_{2,3} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,2,3})(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (D_5 p_5 q^* f)(x) dx &= R_{0,2,4} + R_{2,4} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,2,4})(z_i). \\ \int_{\mathbf{S}_4} (D_6 p_6 q^* f)(x) dx &= R_{0,3,4} + R_{3,4} + \sum_{i=0}^4 (\tilde{R}_{i,3,4})(z_i), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 3.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.* При действии на функцию  $f$  оператором  $q^{**}$ , имеем сумму интегралов, выражающихся, через функции в объемных телах  $z_{0,i,j,k}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{2, 3}$ ,  $k = \overline{3, 4}$ ,  $i < j < k$ :

$$\int_{\mathbf{S}_4} (q^{**} f)(x) dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} [f(x_1, x_2, x_3, 1-x_1-x_2-x_3) - f(x_1, x_2, x_3, 0)]dx_1 + \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_4} [-f(x_1, x_2, 1-x_1-x_2-x_4, x_4) + f(x_1, x_2, 0, x_4)]dx_1 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} [-f(x_1, 1-x_1-x_3-x_4, x_3, x_4) + f(x_1, 0, x_3, x_4)]dx_1 + 3 \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} [f(1-x_2-x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) - f(0, x_2, x_3, x_4)]dx_2.$$

Действуя на функцию  $q^{**}$  дифференциальным оператором  $q_{10}q_3q_5q_6$ , получим сумму конструкций выражающихся в тетраэдре  $z_0z_1z_2z_3$ , в гранях  $z_0z_1z_2$ ,  $z_0z_1z_3$ ,  $z_0z_2z_3$ , в ребрах  $z_0z_1$ ,  $z_0z_2$ ,  $z_1z_2$ ,  $z_1z_3$ ,  $z_2z_4$ ,  $z_3z_4$  и в вершинах симплекса  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_4$  :

$$\int_{\mathbf{S}_4} N_1(f)(x)dx = N_{0,1,2,3,(1)} + N_{0,p,q,(1)} + N_{0,k,l,(1)} + N_{m,(1)}.$$

Для нахождения интегралов по симплексу, от допустимых операторов, выражающихся через функции в каждом тетраэдре  $z_0z_1z_2z_4$ ,  $z_0z_1z_3z_4$ ,  $z_0z_2z_3z_4$  (правая часть равенства, кроме указанных интегралов, может содержать также интегралы, выводящие на грани, ребра и вершины симплекса), действуем соответственно операторами  $q_6q_4q_2$ ,  $q_5q_4q_1$ ,  $q_3q_2q_1$  на функции  $q^{**}$ .

Итак, действуя на функцию  $q^{**}$  дифференциальным оператором  $z_0z_1z_2z_4$  получаем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_2f)(x)dx = N_{0,1,2,4} + N_{0,p,q,(2)} + N_{k,l,(2)} + N_{m,(2)}.$$

Далее, при действии на функцию  $q^{**}$  дифференциальным оператором  $q_5q_4q_1$  имеем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_3f)(x)dx = N_{0,1,3,4} + N_{0,p,q,(3)} + N_{k,l,(3)} + N_{m,(3)}.$$

Для вывода последнего равенства, подействуем на функцию  $q^{**}$  оператором  $q_3q_2q_1$ . Таким образом, получим требуемое тождество:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_4f)(x)dx = N_{0,2,3,4} + N_{0,p,q,(4)} + N_{k,l,(4)} + N_{m,(4)},$$

что завершает доказательство теоремы 4.  $\square$

1. *Berenstein C.A.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – **52**. – P. 133–166.
2. *Berenstein C.A.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – **55**. – P. 267–288.
3. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. – 2003. – 454 p.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer. – 2009. – 671 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhauser. – 2013. – 592 p.
6. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al., – 1992. – P. 185–194.
7. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. – № 278. – P. 69–74.

**N. S. Ivanisenko**

**A version of the Stokes’ formula in four-dimensional space.**

We found a formula similar to the Stokes’ for some simplex in four-dimensional space.

**Keywords:** differential operator, simplex, extremal version of the Pompeiu problem.

Донецкий национальный ун-т  
Ivanisenko.n.s@gmail.com

Получено 02.06.15

УДК 531.35

©2015. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

## НОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСИ СИММЕТРИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

В статье рассмотрен новый тип приближенного ВКБ-решения уравнений углового движения оси симметрии снаряда. Оно является модификацией известного приближенного решения этих уравнений. Из полученных оценок следует, что в случае незатухающих низкочастотных колебаний оси симметрии снаряда оба приближенных решения имеют погрешности одинакового порядка, а при затухающих колебаниях модифицированное решение точнее известного на один порядок по малому параметру.

**Ключевые слова:** артиллерийский снаряд, внешняя баллистика, метод ВКБ.

**Введение.** В теории полета снаряда широко используется асимптотический метод, берущий свое начало в работах Лиувилля и развитый Вентцелем, Крамерсом и Бриллюэном применительно к задачам теоретической физики. В честь последних трех авторов его часто называют методом ВКБ. В классической баллистике с помощью метода ВКБ найдено в явном виде приближенное решение дифференциальных уравнений, описывающих угловое движение оси симметрии снаряда.

Наряду с этим *основным* приближенным решением известно также *модифицированное* приближенное ВКБ-решение уравнений углового движения оси симметрии снаряда. Оценки погрешности обоих этих приближенных решений получены В.С. Пугачевым [1] в виде сложных неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и взятия максимума. Такого рода оценки не позволяют судить о сравнительной точности полученных приближений.

В статье [2] найден порядок погрешности *основного* приближенного решения по отношению к малому параметру, введенному в уравнения движения снаряда. Установлено, что погрешность основного приближенного решения имеет один и тот же порядок в случаях незатухающих и затухающих низкочастотных колебаний оси симметрии снаряда.

В статье [3] определен порядок погрешности *модифицированного* приближенного решения по отношению к малому параметру. Оказалось, что в случае незатухающих низкочастотных колебаний погрешности основного и модифицированного приближенных решений имеют одинаковые порядки, а при затухающих колебаниях модифицированное приближенное решение точнее основного на один порядок по малому параметру.

В процессе исследования этого классического модифицированного приближенного решения возникает новый тип модифицированного приближенного решения уравнений углового движения оси симметрии снаряда. В настоящей работе определена погрешность этого модифицированного решения нового типа и установлено,

что порядки погрешности в случаях незатухающих и затухающих низкочастотных колебаний для него такие же, как и для классического модифицированного приближенного решения. Эти результаты были анонсированы в [4] без доказательства.

**1. Уравнения движения снаряда.** В статье рассматривается движение осесимметричного артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием принятой в баллистике системы аэродинамических сил и моментов. Для описания движения снаряда используются следующие переменные:  $x, y, z$  – координаты центра масс снаряда в стартовой правой системе декартовых координат  $Oxyz$  (ось  $Ox$  направлена горизонтально в сторону стрельбы, а ось  $Oy$  – вертикально вверх);  $v, \theta, \psi$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  скорости центра масс ( $v$  – его модуль,  $\theta$  – угол между осью  $Ox$  и проекцией  $\mathbf{v}$  на вертикальную плоскость  $Oxy$ ,  $\psi$  – угол между вектором  $\mathbf{v}$  и плоскостью  $Oxy$ );  $\alpha$  и  $\beta$  – проекции единичного вектора оси симметрии на вторую и третью оси полускоростной системы координат (ее первая ось направлена вдоль  $\mathbf{v}$ , а вторая ось лежит в плоскости  $Oxy$ );  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости снаряда на оси полусвязанной (невращающейся) системы координат (ее первая ось направлена вдоль оси симметрии). Через  $I_1, I_2, m$  обозначаются осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его масса,  $g$  – ускорение свободного падения.

Исследование динамики полета снаряда проводится при помощи системы дифференциальных уравнений, которая получается из исходной "точной" системы путем линеаризации аэродинамических сил и моментов по углу атаки  $\delta$  (это угол между вектором  $\mathbf{v}$  и осью симметрии снаряда), а также дополнительной линеаризацией по определенному выше углу  $\psi$ . Эта система, называемая в дальнейшем  $l$ -системой, линейна по переменным  $q, r, \alpha, \beta, \psi$ .

Чтобы применить асимптотические методы к исследованию  $l$ -системы, в нее вводится малый параметр  $\varepsilon$ . Для этого используется процедура нормализации, которая описана в [2]. Она основана на том, что в качестве новых масштабов фазовых переменных и зависящих от них функций выбираются верхние характерные числовые значения их модулей, то есть значения, близкие к максимумам по времени для всех траекторий рассматриваемого класса снарядов. В полученных таким образом нормализованных уравнениях движения выделяются безразмерные функции порядка 1, зависящие от фазовых переменных, и масштабные множители при них, которые при определенных предположениях выражаются в виде степеней малого параметра. Малый параметр вводится вместо числа 0,1. Для нормализованных переменных используются те же обозначения, что и для соответствующих ненормализованных переменных.

Изменение порядков безразмерных аэродинамических функций связано, в основном, с изменением нормализованной скорости  $v$ . С учетом этого данные функции представлены в виде произведений множителей вида  $v^n$  на новые функции, причем целые степени  $n$  таких представлений выбраны так, чтобы новые функции принимали значения, численно близкие к 1 на среднем участке траектории, который вносит определяющий вклад в формирование погрешности приближенных решений.

Полученная в результате  $l$ -система с малым параметром состоит из следующей

подсистемы уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \varepsilon^3 v \cos \theta, \quad \dot{y} = \varepsilon^3 v \sin \theta, \quad \dot{z} = \varepsilon^3 v \psi, \\
 \dot{v} &= \varepsilon^3 v^3 K_0(y, v) - \varepsilon^4 g \sin \theta, \\
 \dot{\theta} &= -\varepsilon^4 \frac{g \cos \theta}{v} + \varepsilon^4 v^2 K_1(y, v) \alpha - \varepsilon^4 v^2 K_2(y, v, p) \beta, \\
 \dot{\psi} &= \varepsilon^4 \frac{g}{v} \psi \sin \theta + \varepsilon^2 v^2 K_2(y, v, p) \alpha + \varepsilon^2 v^2 K_1(y, v) \beta, \\
 \dot{p} &= \varepsilon^4 p v K_3(y, v)
 \end{aligned} \tag{1}$$

и следующей подсистемы уравнений углового движения его оси симметрии

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= a(y, v, p, \varepsilon) \Omega + b(y, v, p, \varepsilon) \Delta, \\
 \dot{\Delta} &= -i \Omega - k(y, v, p, \varepsilon) \Delta + l(v, \theta, \psi, \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\Omega = q + ir$ ,  $\Delta = \alpha + i\beta$ , функции  $a, b, k, l$  представляются в виде

$$\begin{aligned}
 a(y, v, p, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v A_1(y, v) + ipI, \\
 b(y, v, p, \varepsilon) &= v^3 [\varepsilon^2 B_1(y, v, p) + iB_2(y, v)], \\
 k(y, v, p, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^2 [K_1(y, v) + iK_2(y, v, p)], \\
 l(v, \theta, \psi, \varepsilon) &= \varepsilon^2 \frac{g}{v} (\cos \theta - i\varepsilon^2 \psi \sin \theta).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть  $\phi = \phi(x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta, t, \varepsilon)$  – действительная или комплексная функция. Равенство  $\phi = O(\varepsilon^n)$  означает, что функция  $\phi$  имеет в рабочей области порядок  $\varepsilon^n$  или более высокий порядок при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а равенство  $\phi = O^*(\varepsilon^n)$  означает, что  $\phi$  имеет порядок, равный  $\varepsilon^n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Запись  $\phi = O_+(\varepsilon^n)$  означает, что  $\phi$  является действительной положительной функцией порядка  $\varepsilon^n$ , а запись  $\phi \leq O_+(\varepsilon^n)$  означает, что  $\phi$  является действительной функцией, которая ограничена сверху положительной функцией порядка  $\varepsilon^n$ .

Функции  $K_0, K_1, K_3, A_1, B_2$  в (1), (3) равны  $O^*(1)$ , когда их аргументы  $y, v, p$  принимают значения в пределах рабочей области, а частные производные этих функций по  $y, v, p$  равны  $O(1)$ . Функции  $K_2$  и  $B_1$ , связанные с силой и моментом Магнуса, предполагаются равными  $O(1)$  вместе с их частными производными.

Обозначая через  $t_0$  и  $t_1$  момент выстрела и момент падения снаряда на землю, имеем  $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ . Для сокращения записи вводим векторные обозначения

$$\begin{aligned}
 \xi &= (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \quad \xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \\
 \xi^{(4)} &= (y, v, \theta, p), \quad \xi^{(3)} = (y, v, p).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В [5] установлены оценки погрешности решения  $l$ -системы по сравнению с решением исходной "точной" системы при тех же начальных условиях в момент выстрела.

**2. Основное ВКБ-представление угловых колебаний оси симметрии снаряда.** Для вывода оценок погрешности различных приближений в теории полета снаряда необходимо располагать априорными оценками всех фазовых переменных системы (1), (2) при  $t \in [t_0, t_1]$ . Выполнение таких оценок

$$x, y, z, v, \theta, \psi, p(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5)$$

для переменных  $x, y, z, v, \theta, \psi, p$  обеспечивается правильным выбором их масштабов при нормализации. Что касается переменных  $q, r, \alpha, \beta$  углового движения, то оценки вида

$$\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

выполняются для них только при дополнительных условиях, называемых условиями правильности полета. Их проще всего получить, анализируя общее приближенное ВКБ-решение уравнений углового движения (2).

Пусть  $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$  – решение  $l$ -системы (1), (2) при начальных условиях в момент выстрела  $t_0$ . Функции фазовых переменных и параметра  $\varepsilon$  на этом решении становятся функциями  $t, \varepsilon$  и отмечаются в дальнейшем индексом  $l$ . Например,  $k_l(t, \varepsilon) = k(\xi_l^{(3)}(t, \varepsilon), \varepsilon)$ . Рассматривая зависимость  $\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon)$  в решении  $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$  как известную, определяем коэффициенты системы линейных уравнений (2) как функции  $t, \varepsilon$  и записываем эту систему в виде

$$\dot{\Omega} = a_l(t, \varepsilon)\Omega + b_l(t, \varepsilon)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k_l(t, \varepsilon)\Delta + l_l(t, \varepsilon). \quad (7)$$

Построим приближенное общее решение системы уравнений (7), основываясь на идеях метода ВКБ.

Чтобы получить приближенные выражения для двух линейно независимых решений соответствующей однородной системы, воспользуемся способом [6], который основан на переходе к уравнению Риккати и построению его приближенных решений с помощью разложений по степеням параметра. Приближенное частное решение неоднородной системы (7) строится в виде суммы убывающих членов:  $\Omega = e_1 + e_2 + e_3 + \dots$ ,  $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ , причем порядки последующих членов определяются в зависимости от выбора предыдущих членов, так что их трудно определить заранее.

Пусть функции  $e_1, d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon)$ , а также  $w, \lambda_j, n_j, \omega_j(\xi^{(4)}, \varepsilon)$  и  $\lambda_{j+}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon)$  ( $j = 1, 2$ ) определены равенствами

$$e_1 = \frac{bl}{ib - ak}, \quad d_1 = -\frac{al}{ib - ak}, \quad w = \frac{(a - k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot{a} + \dot{k}}{2}, \quad (8)$$

$$\lambda_j = n_j + i\omega_j = \frac{a - k}{2} \pm \sqrt{w}, \quad \lambda_{j+} = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \quad (j = 1, 2).$$

Здесь  $\dot{a}, \dot{k}$  – производные функций  $a, k$  по  $t$  в силу уравнений движения,  $\sqrt{w} = i\sqrt{+(-w)}$ , где  $\sqrt{+}$  – главное значение корня [7], верхний и нижний знаки соответствуют  $j = 1$  и  $j = 2$ .

Тогда, учитывая два первых члена разложений для решений однородных уравнений и один член – для решения неоднородных уравнений, получаем для общего решения уравнений (2) приближенные формулы

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon) &= i \sum_{j=1}^2 [\lambda_{jl+}(t, \varepsilon) + k_l(t, \varepsilon)] \tilde{s}_{jl+}^{[0]}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{jl}(t, \varepsilon) + e_{1l}(t, \varepsilon), \\ \tilde{\Delta}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon) &= \sum_{j=1}^2 \tilde{s}_{jl+}^{[0]}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{jl}(t, \varepsilon) + d_{1l}(t, \varepsilon),\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{j+l}^{[0]}(t, \varepsilon) &= C_{jl+}^{[0]} \exp \int_{t_0}^t \left[ n_{jl}(\tau, \varepsilon) - \frac{\dot{w}_l(\tau, \varepsilon)}{4w_l(\tau, \varepsilon)} \right] d\tau = \\ &= C_{jl+}^{[0]} \frac{w_l^{1/4}(t_0, \varepsilon)}{w_l^{1/4}(t, \varepsilon)} \exp \int_{t_0}^t n_{jl}(\tau, \varepsilon) d\tau, \\ \varphi_{jl}(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t \omega_{jl}(\tau, \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2).\end{aligned}\tag{10}$$

"Тильда" – знак приближения, индекс в квадратных скобках – номер приближения. Постоянные  $C_{jl+}$  ( $j = 1, 2$ ) определяются начальными условиями.

В формулу (9) для  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon)$  входят величины  $\lambda_{jl+}(t, \varepsilon)$  ( $j = 1, 2$ ). Определения (8) функций  $\lambda_{j+}$  ( $j = 1, 2$ ) содержат производную функции  $w(y, v, \theta, p)$  по времени в силу уравнений движения снаряда. Так как функция  $w$  зависит от  $\theta$  через  $\dot{a}, \dot{k}$ , то, в соответствии с пятым уравнением (1), ее производная  $\dot{w}$  зависит от неизвестных  $\alpha, \beta$ . Поэтому в приближенном представлении общего решения уравнений (2), заданном формулами (9), (10), функция  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon)$  определена некорректно, в связи с чем такое представление уместно назвать *приближенным квазирешением* этих уравнений. Величины, связанные с квазирешением, отмечаются индексом + (плюс). Взяв в определении  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[0]}$  вместо функций  $\lambda_{jl+}$  ( $j = 1, 2$ ) функции  $\lambda_{jl}$  ( $j = 1, 2$ ), получим *основное приближенное решение* уравнений (2)

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_l^{[0]}(t, \varepsilon) &= i \sum_{j=1}^2 [\lambda_{jl}(t, \varepsilon) + k_l(t, \varepsilon)] \tilde{s}_{jl}^{[0]}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{jl}(t, \varepsilon) + e_{1l}(t, \varepsilon), \\ \tilde{\Delta}_l^{[0]}(t, \varepsilon) &= \sum_{j=1}^2 \tilde{s}_{jl}^{[0]}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{jl}(t, \varepsilon) + d_{1l}(t, \varepsilon),\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{jl}^{[0]}(t, \varepsilon) &= C_{jl} \frac{w_l^{1/4}(t_0, \varepsilon)}{w_l^{1/4}(t, \varepsilon)} \exp \int_{t_0}^t n_{jl}(\tau, \varepsilon) d\tau, \\ \varphi_{jl}(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t \omega_{jl}(\tau, \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2).\end{aligned}\tag{12}$$

Определение функции  $\tilde{\Omega}_l^{[0]}(t, \varepsilon)$  аналогично соответствующему определению в [1].

Изложенная формальная процедура построения приближенного квазирешения (9), (10) и приближенного решения (11), (12) может быть обоснована их малой погрешностью по сравнению с точным решением  $l$ -системы [2]:

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_{l+}^{[0]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1].\tag{13}$$

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_l^{[0]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_l^{[0]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Формулы (11), (12) описывают быстрые двухчастотные колебания величин  $\Omega$ ,  $\Delta$  с частотами  $\omega_{1l}, \omega_{2l}$  и фазами  $\varphi_{1l}, \varphi_{2l}$  около средних значений  $e_{1l}, d_{1l}$ . Параметры этих колебаний  $\omega_{jl}, n_{jl}$  ( $j = 1, 2$ ) и средние значения  $e_{jl}, d_{jl}$  зависят от времени посредством функций  $\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon)$ .

Чтобы сформулировать условия правильности полета снаряда, подставим выражения (3) в определения (8) функций  $e_1, d_1, w$ . Получаем для величин  $e_1, d_1$  представления

$$\begin{aligned}e_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{v} E(\xi^{(3)}, \varepsilon) (\cos \theta - i\varepsilon^2 \psi \sin \theta), \\ d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{v^4} D(\xi^{(3)}, \varepsilon) (\cos \theta - i\varepsilon^2 \psi \sin \theta),\end{aligned}\tag{14}$$

а для функции  $w$  формулу

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = -\frac{p^2 I^2}{4} \left[ 1 - \frac{4v^3 B_2(y, v)}{p^2 I^2} \right] + O(\varepsilon^2).\tag{15}$$

Потребуем, чтобы на всех траекториях полета снаряда выполнялось соотношение  $d_1 = O(1)$ . Отметим, что в соответствии с седьмым уравнением (1) нормализованная продольная угловая скорость  $p$  сохраняет порядок 1 на всем промежутке  $[t_0, t_1]$  длины  $O(\varepsilon^{-3})$ , то есть

$$p = O^*(1).\tag{16}$$

Далее, поскольку  $K_0, K_1, B_2 = O^*(1)$  в (1), (3), имеем  $E, D = O^*(1)$  в (14). А поскольку  $\cos \theta = O^*(1)$ , заключаем, что соотношение  $d_1 = O(1)$  выполняется только в том случае, когда минимальное значение нормализованной скорости  $v$  вблизи вершины траектории имеет порядок  $\varepsilon^{1/2}$  или более низкий. Учитывая также, что  $v$  принимает свое максимальное значение  $O_+^*(1)$  в момент выстрела, устанавливаем, что на любой траектории скорость изменяется в диапазоне

$$O_+^*(\varepsilon^{1/2}) \leq v \leq O_+^*(1).\tag{17}$$

Потребуем также, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (15) было положительным на всех траекториях полета снаряда, и обозначим его через  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2(y, v, p) = 1 - \frac{4v^3 B_2(y, v)}{p^2 I^2} > 0. \quad (18)$$

Неравенство в (18) – это условие Маиевского, записанное с использованием принятых обозначений. Снаряд и орудие конструируются так, что  $0,6 < \sigma(t_0, \varepsilon) < 0,7$ . Таким образом, в момент выстрела условие Маиевского выполняется в усиленной форме  $\sigma^2(t_0, \varepsilon) = O_+^*(1)$ . После выстрела нормализованная скорость  $v$  убывает, оставаясь в диапазоне (17).

Поэтому, с учетом (16), из определения (18) величины  $\sigma^2$  следует, что условие Маиевского выполняется на всей траектории полета снаряда, а коэффициент  $\sigma$  заключен в пределах

$$\sigma(t_0, \varepsilon) \leq \sigma \leq 1 - O_+^*(\varepsilon^{3/2}), \quad \sigma(t_0, \varepsilon) = O_+^*(1). \quad (19)$$

Тогда угловое движение оси симметрии снаряда является колебательным.

Ограниченность амплитуд этих колебаний обеспечивают неравенства

$$n_1, n_2(\xi^{(4)}, \varepsilon) \leq O_+^*(\varepsilon^4). \quad (20)$$

Они гарантируют выполнение оценок

$$\exp \int_{\tau}^t \lambda_j(\tau_1, \varepsilon) d\tau_1 = O(1), \quad j = 1, 2; \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1. \quad (21)$$

В [8] показано, что при условиях (16)–(20) соотношения (6) выполняются на решениях исходной нелинейной системы уравнений движения осесимметричного снаряда. Очевидно, что при этих условиях соотношения (6) справедливы и для решений  $l$ -системы (1), (2).

Для максимальных по модулю значений медленных переменных справедливы оценки (5), а кроме того, формулы (16), (17) определяют порядки минимальных значений переменных  $p, v$ . Следовательно, на всех траекториях полета снаряда рабочую область для переменных, объединенных в вектор  $\xi$ , можно представить в виде параллелепипеда

$$\Xi = \{ \xi : (0, 0, -\varepsilon^2 C_z^*, \sqrt{\varepsilon} C_{v^*}, -C_\theta^*, -\varepsilon^2 C_\psi^*, C_{p^*}) \leq \xi \leq (C_x^*, C_y^*, \varepsilon^2 C_z^*, C_v^*, C_\theta^*, \varepsilon^2 C_\psi^*, C_p^*) \}.$$

Здесь выполнение неравенства  $\leq$  для вектора  $\xi$  означает выполнение такого неравенства для всех компонент этого вектора. Буквой  $C$  с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1.

В уравнениях (1) и далее функции фазовых переменных, времени и параметра  $\varepsilon$ , обозначаемые заглавными латинскими буквами, равны  $O(1)$  при  $\xi \in \Xi$ ,  $q, r, \alpha, \beta = O(1)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Во время полета снаряда скорость  $v$  изменяется в диапазоне (17), и порядки по  $\varepsilon$  функций, входящих в уравнения движения (1), (2), изменяются вместе с  $v$ . Чтобы учесть такие изменения, эти функции были представлены как суммы членов вида  $\varepsilon^m v^n F_{mn}$ , где  $F_{mn} = O(1)$  или  $F_{mn} = O^*(1)$ . Такие представления используются в дальнейшем и для других функций, описывающих динамику полета снаряда. Назовем их  $\varepsilon v$ -представлениями.

**3. Определения модифицированных решений типов 1, 2.** В статье [2] получена квадратичная оценка (13) погрешности основного приближенного решения уравнений (7). Порядок этой оценки равен наименьшему из порядков интегралов  $h_{1j}$ ,  $h_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ), заданных формулами (4.5) этой статьи. Для интегралов  $h_{1j}$ , определяющих погрешность приближенного решения однородной системы уравнений углового движения, в [2] получены кубические по  $\varepsilon$  оценки, а для интегралов  $h_{2j}$ , определяющих погрешность приближенного решения неоднородной системы уравнений углового движения, получены оценки, одна из которых кубическая, а другая квадратичная. Это указывает на то, что существует возможность уточнить основное общее приближенное решение за счет уточнения приближенного частного решения.

Такое частное решение находится в [1, 9] как сумма двух первых членов разложения точного частного решения по обратным степеням большого параметра. Следуя этому правилу, будем искать уточненное приближенное частное решение уравнений углового движения (7) в виде суммы убывающих слагаемых  $\Omega = e_1 + e_2 + e_3 + \dots$ ,  $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ . Для  $e_1, d_1$  уже найдены выражения (8). Для уточняющих поправок  $e_2, d_2$  получаем выражения

$$e_2 = -\frac{\dot{e}_1 k + \dot{d}_1 b}{ib - ak}, \quad d_2 = \frac{i\dot{e}_1 + \dot{d}_1 a}{ib - ak}. \quad (22)$$

Записав уравнения (1) при помощи обозначений (4)

$$\dot{\xi} = f(\xi^{(5)}, \varepsilon) + f_\alpha(\xi^{(3)}, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi^{(3)}, \varepsilon)\beta,$$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(\xi, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \frac{\partial e_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} [f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon)\beta], \\ \dot{d}_1(\xi, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \frac{\partial d_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} [f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon)\beta]. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как функции  $e_1, d_1$  зависят от  $\theta, \psi$  через функцию  $l$ , то в выражения (23) входят величины  $\alpha, \beta$  через правые части пятого и шестого уравнений (1), определяющих  $\theta, \psi$ . Поэтому искомые величины  $\alpha, \beta$  входят в определения (22) поправок  $e_2, d_2$  и, следовательно, эти определения неконструктивны.

Чтобы получить конструктивное определение поправок  $e_2, d_2$ , в формулах (22) вместо производных  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  следует использовать их выражения, которые содержат известные приближения для  $\alpha, \beta$ . Продолжая начатую выше нумерацию вариантов приближенных решений, рассмотрим следующие два варианта выбора приближенных выражений для  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$ .

ВАРИАНТ 1. При вычислении  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  в уравнениях (1), определяющих  $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ , принимается  $\alpha = \beta = 0$ . Таким образом, в формулах (22) вместо производных  $e_1, d_1$  по  $t$  в силу уравнений (1) используются их производные в силу уравнений модели снаряда как материальной точки. Такие приближенные производные равны

$$\tilde{e}_1^{[1]}(\xi, \varepsilon) = \frac{\partial e_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} f(\xi, \varepsilon), \quad \tilde{d}_1^{[1]}(\xi, \varepsilon) = \frac{\partial d_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} f(\xi, \varepsilon). \quad (24)$$

ВАРИАНТ 2. При вычислении  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  в уравнениях (1), определяющих  $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ , вместо  $\alpha, \beta$  берутся их средние значения  $d_{1\alpha} = \operatorname{Re} d_1, d_{1\beta} = \operatorname{Im} d_1$  в основном приближенном решении (11). В таком случае имеем для  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  приближенные выражения

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1^{[2]}(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial e_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} [f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)d_{1\alpha}(\xi, \varepsilon) + f_\beta(\xi, \varepsilon)d_{1\beta}(\xi, \varepsilon)], \\ \tilde{d}_1^{[2]}(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial d_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} [f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)d_{1\alpha}(\xi, \varepsilon) + f_\beta(\xi, \varepsilon)d_{1\beta}(\xi, \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Модифицированное приближенное квазирешение для варианта с номером  $m = 1, 2$  представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{l+}^{[m]}(t, \varepsilon) &= i [\lambda_{1l+}(t, \varepsilon) + k_l(t, \varepsilon)] \tilde{u}_{1l+}^{[m]}(t, \varepsilon) + \\ &\quad + i [\lambda_{2l+}(t, \varepsilon) + k_l(t, \varepsilon)] \tilde{u}_{2l+}^{[m]}(t, \varepsilon) + e_{1l}(t, \varepsilon) + e_{2l}^{[m]}(t, \varepsilon), \\ \tilde{\Delta}_{l+}^{[m]}(t, \varepsilon) &= \tilde{u}_{1l+}^{[m]}(t, \varepsilon) + \tilde{u}_{2l+}^{[m]}(t, \varepsilon) + d_{1l}(t, \varepsilon) + d_{2l}^{[m]}(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь при известной зависимости  $\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon)$  функции  $\tilde{u}_{jl+}^{[m]}(t, \varepsilon)$  равны

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jl+}^{[m]}(t, \varepsilon) &= C_{jl+}^{[m]} \exp \int_{t_0}^t \lambda_{jl+}(\tau, \varepsilon) d\tau = \\ &= C_{jl+}^{[m]} \frac{w_l^{1/4}(t_0, \varepsilon)}{w_l^{1/4}(t, \varepsilon)} \exp \int_{t_0}^t \lambda_{jl}(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (27)$$

а поправки выражаются формулами

$$e_{2l}^{[m]}, d_{2l}^{[m]}(t, \varepsilon) = e_2^{[m]}, d_2^{[m]}(\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} e_2^{[m]} &= e_2^{[m]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = -\frac{\tilde{e}_1^{[m]} k + \tilde{d}_1^{[m]} b}{ib - ak}, \\ d_2^{[m]} &= d_2^{[m]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \frac{i\tilde{e}_1^{[m]} + \tilde{d}_1^{[m]} a}{ib - ak}, \end{aligned} \quad (29)$$

функции  $\tilde{e}_1^{[m]}, \tilde{d}_1^{[m]}$  определены в (24), (25).

Модифицированное приближенное решение  $\tilde{\Omega}_l^{[m]}, \tilde{\Delta}_l^{[m]}$  для варианта с номером  $m = 1, 2$  определено формулами, которые отличаются от формул (26) только тем, что вместо величин  $\lambda_{jl+}$  в них используются величины  $\lambda_{jl}$  ( $j = 1, 2$ ). Комплексные постоянные в этом приближенном решении обозначим через  $C_{jl}^{[m]}$ , комплексные моды – через  $u_{jl}^{[m]}$ , а их приближения вида (27) – через  $\tilde{u}_{jl}^{[m]}$  ( $j = 1, 2$ ).

Приближенное квазирешение и приближенное решение уравнений углового движения (8) удовлетворяют в момент выстрела  $t_0$  тем же начальным условиям, что и точное решение этих уравнений. Это позволяет однозначно определить постоянные  $C_{jl+}^{[m]}, C_{jl}^{[m]}$  ( $j = 1, 2$ ).

Вариант 1 аналогичен рассмотренному в работе [1], он изучен в [3]. Вариант 2 является новым, он рассматривается ниже.

**4. Интегральные уравнения для комплексных мод в модифицированном квазирешении типа 2.** Модифицированное приближенное квазирешение  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[2]}, \tilde{\Delta}_{l+}^{[2]}$  типа 2 определено формулами (26), (27), взятыми при  $m = 2$ . Поправки  $e_{2l}^{[2]}, d_{2l}^{[2]}$  вычисляются по формулам (28), (29), где функции  $\tilde{e}_1^{[2]}, \tilde{d}_1^{[2]}$  определены формулами (25). Модифицированное приближенное решение  $\tilde{\Omega}_l^{[2]}, \tilde{\Delta}_l^{[2]}$  типа 2 определено формулами, которые при  $m = 2$  получаются из формул (26), (27) путем замены в первой из формул (26) величин  $\lambda_{j+}$  на  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Чтобы определить погрешность квазирешения типа 2, введем переменные  $u_{1l+}^{[2]}, u_{2l+}^{[2]}$  (комплексные моды) по формулам

$$\begin{aligned} \Omega &= i \sum_{j=1}^2 [\lambda_{jl+}(t, \varepsilon) + k_l(t, \varepsilon)] u_{jl+}^{[2]} + e_{1l}(t, \varepsilon) + e_{2l}^{[2]}(t, \varepsilon), \\ \Delta &= \sum_{j=1}^2 u_{jl+}^{[2]} + d_{1l}(t, \varepsilon) + d_{2l}^{[2]}(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив выражения (30) в уравнения углового движения (8), получаем для переменных  $u_{1l+}^{[2]}, u_{2l+}^{[2]}$  систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_{jl+}^{[2]} = \lambda_{jl+} u_{jl+}^{[2]} \pm_l \rho (u_{1l+}^{[2]} + u_{2l+}^{[2]}) \pm \frac{1}{2w_l^{1/2}} [i h_{el}^{[2]} + (\lambda_{3-j,l+} + k) h_{dl}^{[2]}], \quad j = 1, 2, \quad (31)$$

где

$$h_e^{[2]} = \dot{e}_1 - \tilde{e}_1^{[2]} + \dot{e}_2^{[2]}, \quad h_d^{[2]} = \dot{d}_1 - \tilde{d}_1^{[2]} + \dot{d}_2^{[2]}, \quad (32)$$

функция  $\rho$  определена формулой

$$\rho = \frac{\ddot{w}}{8w^{3/2}} - \frac{5\dot{w}^2}{32w^{5/2}}, \quad (33)$$

верхний и нижний знаки соответствуют  $j = 1$  и  $j = 2$ .

С учетом начальных условий из уравнений (31) следуют выражения для разностей точных и приближенных комплексных мод

$$u_{jl+}^{[2]}(t, \varepsilon) - \tilde{u}_{jl+}^{[2]}(t, \varepsilon) = h_{1jl}(t, \varepsilon) + h_{2jl}(t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} h_{1jl}(t, \varepsilon) &= \pm \int_{t_0}^t \rho_l(u_{1l+}^{[2]} + u_{2l+}^{[2]}) (\exp \int_{\tau}^t \lambda_{jl+} d\tau_1) d\tau, \\ h_{2jl}(t, \varepsilon) &= \pm \int_{t_0}^t \frac{1}{2w_l^{1/2}} [ih_{el}^{[2]} + (\lambda_{3-j,l+} + k)h_{dl}^{[2]}] (\exp \int_{\tau}^t \lambda_{jl+} d\tau_1) d\tau \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (35)$$

Поэтому для оценки погрешности комплексных мод  $\tilde{u}_{jl+}^{[2]}$  в квазирешении  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[2]}$ ,  $\tilde{\Delta}_{l+}^{[2]}$  достаточно найти порядки интегралов (35) по  $\varepsilon$ .

**5. Вспомогательные результаты.** При выводе таких оценок воспользуемся  $\varepsilon v$ -представлениями (14) функций  $e_1, d_1$ . Продифференцируем выражения (14) по  $t$  в силу уравнений (1). При этом примем во внимание, что входящие в эти выражения функции  $E, D(\xi^{(3)}, \varepsilon)$  равны  $O^*(1)$ , а их частные производные по компонентам вектора  $\xi^{(3)}$  равны  $O(1)$ . Выделив в полученных формулах комплексную переменную  $\Delta = \alpha + i\beta$ , получаем представления

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^5 \dot{E}_{50}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-2} \dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 v \Delta \dot{E}_{E_{q49}}^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v \alpha \psi \dot{E}_{81}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v \beta \psi \dot{E}_{81}^{\beta\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \\ \dot{d}_1(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-3} \dot{D}_{5,-3}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-5} \dot{D}_{6,-5}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 v^{-2} \Delta \dot{D}_{6,-2}^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2} \alpha \psi \dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2} \beta \psi \dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь функции, обозначенные через  $\dot{E}, \dot{D}$  с индексами, равны  $O(1)$ .

Согласно (25), функции  $\tilde{e}_1^{[2]}, \tilde{d}_1^{[2]}$  равны функциям  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  взятым при  $\Delta = d_1 = d_{1\alpha} + id_{1\beta}$ . Поэтому из равенств (36) следуют представления

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1^{[2]} &= \tilde{e}_1^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^5 \dot{E}_{50} + \varepsilon^6 v^{-2} \dot{E}_{6,-2} + \\ &+ \varepsilon^6 v d_1 \dot{E}_{E_{q49}}^{\Delta} + \varepsilon^8 v d_{1\alpha} \psi \dot{E}_{81}^{\alpha\psi} + \varepsilon^8 v d_{1\beta} \psi \dot{E}_{81}^{\beta\psi}, \\ \tilde{d}_1^{[2]} &= \tilde{d}_1^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^5 v^{-3} \dot{D}_{5,-3} + \varepsilon^6 v^{-5} \dot{D}_{6,-5} + \\ &+ \varepsilon^6 v^{-2} d_1 \dot{D}_{6,-2}^{\Delta} + \varepsilon^8 v^{-2} d_{1\alpha} \psi \dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi} + \varepsilon^8 v^{-2} d_{1\beta} \psi \dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}. \end{aligned} \quad (37)$$

Вычитая равенства (37) из (36), приходим к представлениям

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 - \tilde{e}_1^{[2]} &= \dot{e}_1^{\Delta}(\Delta - d_1) + O(\varepsilon^8), \\ \dot{d}_1 - \tilde{d}_1^{[2]} &= \dot{d}_1^{\Delta}(\Delta - d_1) + O(\varepsilon^{13/2}). \end{aligned} \quad (38)$$

Они отличаются от аналогичных представлений [3] при  $m = 1$  тем, что вместо величины  $\Delta$  в них входит разность  $\Delta - d_1$ .

Из (29), (37) для функций  $e_2^{[2]}$ ,  $d_2^{[2]}$  следуют формулы

$$\begin{aligned} e_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-3} F_{5,-3}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-5} F_{6,-5}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \\ d_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-6} G_{5,-6}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-8} G_{6,-8}(\xi^{(5)}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (39)$$

Отсюда для их производных получаем

$$\begin{aligned} \dot{e}_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^8 v^{-2} \dot{F}_{8,-2} + \varepsilon^9 v^{-4} \dot{F}_{9,-4} + \varepsilon^{10} v^{-6} \dot{F}_{10,-6} + \\ &+ \varepsilon^9 v^{-1} (\alpha \dot{F}_{9,-1}^\alpha + \beta \dot{F}_{9,-1}^\beta) + \varepsilon^{10} v^{-3} (\alpha \dot{F}_{10,-3}^\alpha + \beta \dot{F}_{10,-3}^\beta), \\ \dot{d}_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^8 v^{-5} \dot{G}_{8,-5} + \varepsilon^9 v^{-7} \dot{G}_{9,-7} + \varepsilon^{10} v^{-9} \dot{G}_{10,-9} + \\ &+ \varepsilon^9 v^{-4} (\alpha \dot{G}_{9,-4}^\alpha + \beta \dot{G}_{9,-4}^\beta) + \varepsilon^{10} v^{-6} (\alpha \dot{G}_{10,-6}^\alpha + \beta \dot{G}_{10,-6}^\beta). \end{aligned} \quad (40)$$

Поэтому, с учетом (17), справедливы оценки

$$\begin{aligned} e_2^{[2]} &= O(\varepsilon^{7/2}), & d_2^{[2]} &= O(\varepsilon^2), \\ \dot{e}_2^{[2]} &= O(\varepsilon^7), & \dot{d}_2^{[2]} &= O(\varepsilon^{11/2}), \\ h_e^{[2]} &= O(\varepsilon^6), & h_d^{[2]} &= O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (41)$$

**6. Оценка интегралов  $h_{1jl}$  ( $j = 1, 2$ ).** Определим порядки функций  $w, \dot{w}, \ddot{w}, \rho$  по  $\varepsilon$ . Так как  $\sigma^2 = O_+^*(1)$  согласно (19), то из (15) следует, что  $w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = O^*(1)$ . Поскольку частные производные функции  $w$  по компонентам вектора  $\xi^{(4)}$  равны  $O(1)$ , то при дифференцировании этой функции по  $t$  в силу уравнений (1) происходит повышение порядка на 3, то есть  $\dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ . В выражении  $\dot{w}$  ведущие члены порядка  $\varepsilon^3$  зависят от  $\xi^{(4)}$ , а члены, содержащие  $\alpha, \beta$ , имеют порядок  $\varepsilon^9$ . Поэтому при дифференцировании  $\dot{w}$  снова происходит повышение порядка на 3. Таким образом, имеем

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = O^*(1), \quad \dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \ddot{w}(\xi^{(5)}, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^6). \quad (42)$$

Отсюда для функции (33) вытекает оценка

$$\rho(\xi^{(5)}, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^6).$$

Далее, пользуясь второй формулой замены (30), в соответствии с (6), (41) имеем

$$u_{1+}^{[2]} + u_{2+}^{[2]} = \Delta - d_1 - d_2^{[2]} = O(1).$$

Кроме того, в общем случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда, то есть при выполнении неравенств (20), из (21), (42) следуют оценки

$$\exp \int_{\tau}^t \lambda_{j+}(\tau_1, \varepsilon) d\tau_1 = \frac{w^{1/4}(\tau, \varepsilon)}{w^{1/4}(t, \varepsilon)} \exp \int_{\tau}^t n_j(\tau_1, \varepsilon) d\tau_1 = O(1), \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1.$$

Таким образом, подынтегральные функции в формуле (35) для  $h_{1jl}$  равны  $O(\varepsilon^6)$ . Поэтому при  $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$  в случае незатухающих колебаний имеем

$$h_{1jl}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3); \quad j = 1, 2; \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (43)$$

**7. Оценка интегралов  $h_{2jl}$  ( $j = 1, 2$ ).** Интегралы  $h_{2jl}$  ( $j = 1, 2$ ) записываются в виде сумм

$$h_{2jl}(t, \varepsilon) = h_{2jl}^{(1)}(t, \varepsilon) + h_{2jl}^{(2)}(t, \varepsilon) + h_{2jl}^{(3)}(t, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} h_{2jl}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \pm \int_{t_0}^t \frac{1}{2w_l^{1/2}} [i(\dot{e}_{1l} - \tilde{e}_{1l}^{[2]}) + (\lambda_{3-j,l} + k_l)(\dot{d}_{1l} - \tilde{d}_{1l}^{[2]})] (\exp \int_{\tau}^t \lambda_{jl+} d\tau_1) d\tau, \\ h_{2jl}^{(2)}(t, \varepsilon) &= \mp \int_{t_0}^t \frac{\dot{w}_l}{8w_l^{3/2}} h_{dl}^{[2]} (\exp \int_{\tau}^t \lambda_{jl+} d\tau_1) d\tau, \\ h_{2jl}^{(3)}(t, \varepsilon) &= \pm \int_{t_0}^t \frac{1}{2w_l^{1/2}} [i\dot{e}_{2l}^{[2]} + (\lambda_{3-j,l} + k_l)\dot{d}_{2l}^{[2]}] (\exp \int_{\tau}^t \lambda_{jl+} d\tau_1) d\tau, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (45)$$

Рассмотрим интегралы  $h_{2jl}^{(1)}$  ( $j = 1, 2$ ). Преобразуем их, пользуясь представлениями (38) разностей  $\dot{e}_1 - \tilde{e}_1^{[2]}$ ,  $\dot{d}_1 - \tilde{d}_1^{[2]}$  через  $\Delta - d_1$ . После этого, учитывая (13), заменим величину  $\Delta_l$  под знаками интегралов выражением  $\Delta_l = \tilde{\Delta}_{l+}^{[0]} + O(\varepsilon^2)$ , где функция  $\tilde{\Delta}_{l+}^{[0]}$  представлена формулами (9), (10). В результате получим для  $h_{2jl}^{(1)}$  ( $j = 1, 2$ ) выражение

$$h_{2jl}^{(1)}(t, \varepsilon) = \frac{w_l^{1/4}(t_0, \varepsilon)}{2w_l^{1/4}(t, \varepsilon)} [C_{jl+}^{[0]} i_j^{(1)}(t, \varepsilon) + C_{3-j,l+}^{[0]} i_j^{(2)}(t, \varepsilon)] + O(\varepsilon^{7/2}), \quad j = 1, 2,$$

в котором интегралы  $i_j^{(1)}$ ,  $i_j^{(2)}$  определены формулами (47) статьи [3], но отсутствуют имевшиеся в этой статье интегралы  $i_j^{(0)}$ , связанные с величиной  $d_1$ . Оценим интегралы  $i_j^{(1)}$ ,  $i_j^{(2)}$  по методике статьи [3]. Несмотря на то, что в настоящей статье малый параметр введен несколько иначе, чем в [3], получаем для интегралов  $i_j^{(1)}$ ,  $i_j^{(2)}$ , а

вместе с ними и для интегралов  $h_{2jl}^{(1)}$  ( $j = 1, 2$ ), прежние оценки. Таким образом, в общем случае незатухающих колебаний с низшей частотой  $\omega_2$  имеем

$$h_{21l}^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad h_{22l}^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad (46)$$

а при затухающих низкочастотных колебаниях получаем

$$h_{2jl}^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \quad (47)$$

Определение (45) интегралов  $h_{2jl}^{(2)}$  ( $j = 1, 2$ ) при  $m = 2$  отличается от данного в [3] определения таких интегралов при  $m = 1$  тем, что вместо функции  $h_d^{[1]}$  используется функция  $h_d^{[2]}$  того же порядка  $O(\varepsilon^5)$ . Поэтому остается верной оценка (60) статьи [3], выведенная там для общего случая:

$$h_{2jl}^{(2)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad j = 1, 2. \quad (48)$$

Согласно формулам (45), интегралы  $h_{2jl}^{(3)}$  ( $j = 1, 2$ ) при  $m = 2$  отличаются от соответствующих интегралов [3] при  $m = 1$  тем, что в их определения вместо функций  $\dot{e}_2^{[1]}, d_2^{[1]}$  входят функции  $\dot{e}_2^{[2]}, d_2^{[2]}$ . Поскольку те и другие функции имеют одинаковые представления вида (40), то для интегралов  $h_{2jl}^{(3)}$  ( $j = 1, 2$ ) при  $m = 2$  справедливы найденные в [3] оценки (61), которые с учетом нового способа введения малого параметра в общем случае принимают вид:

$$h_{21l}^{(3)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^7), \quad h_{22l}^{(3)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^4). \quad (49)$$

**8. Оценки погрешности модифицированного решения типа 2.** Оценки (43), (46)–(49) совпадают с аналогичными оценками в [3]. Поэтому из формул (34), (44) следует, что квазирешение  $\tilde{\Omega}_{l+}^{[m]}, \tilde{\Delta}_{l+}^{[m]}$  и решение  $\tilde{\Omega}_l^{[m]}, \tilde{\Delta}_l^{[m]}$  имеют в рассматриваемом случае  $m = 2$  погрешности таких же порядков, как и в случае  $m = 1$ , изученном в [3]. Таким образом, для погрешности модифицированного приближенного квазирешения типа 2 в случае незатухающих низкочастотных колебаний оси симметрии снаряда имеем квадратичную оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_{l+}^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_{l+}^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (50)$$

а в случае затухающих низкочастотных колебаний – кубическую оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_{l+}^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_{l+}^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (51)$$

Для погрешности модифицированного приближенного решения типа 2 в случае незатухающих колебаний оси симметрии также имеем квадратичную оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_l^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_l^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (52)$$

Верхние оценки порядков погрешности  
приближенных решений  $\tilde{\Omega}_l^{[m]}, \tilde{\Delta}_l^{[m]}$  ( $m = 0, 1, 2$ )

Вид н/ч колебаний	$\Omega_l - \tilde{\Omega}_l^{[0]}$ $\Delta_l - \tilde{\Delta}_l^{[0]}$	$\Omega_l - \tilde{\Omega}_l^{[1]}$ $\Delta_l - \tilde{\Delta}_l^{[1]}$	$\Omega_l - \tilde{\Omega}_l^{[2]}$ $\Delta_l - \tilde{\Delta}_l^{[2]}$
незатухающие	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$
затухающие	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^3$

а при затухании низкочастотных колебаний – кубическую оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}_l^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}_l^{[2]}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (53)$$

Итак, несмотря на то, что в модифицированном решении типа 2 для аппроксимации производных  $\dot{e}_1, \dot{d}_1$  используются более точные выражения  $\alpha, \beta$ , чем в модифицированном решении типа 1, эти приближенные решения имеют погрешности, одинаковые по порядку.

В таблице приведены найденные в [2, 3] и в данной статье оценки погрешности трех типов приближенных решений уравнений угловых колебаний оси симметрии снаряда.

Эти оценки получены для нормализованных переменных, а именно, переменная  $\Omega = q + ir$  отнесена к  $1 \text{ с}^{-1}$ , а переменная  $\Delta = \alpha + i\beta$  отнесена к  $0,1^2$ . Малый параметр  $\varepsilon$  соответствует числу  $0,1$ . Следовательно, если для нормализованных переменных  $q, r, \alpha, \beta$  для некоторого приближенного решения в таблице дана аналитическая оценка погрешности  $O(\varepsilon^n)$ , то для исходных, ненормализованных переменных  $q, r$  ей соответствует верхняя числовая оценка погрешности порядка  $0,1^n \text{ с}^{-1}$ , а исходным переменным  $\alpha, \beta$  соответствует верхняя числовая оценка погрешности порядка  $0,1^{n+2}$ . Результаты расчетов, проведенных для нескольких типов снарядов, полностью соответствуют этим числовым оценкам.

1. Пугачев В.С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
2. Коносевиц Б.И. Оценка погрешности асимптотического представления угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела // Прикладная механика. – 2014. – 50, № 4. – С. 102–116.
3. Коносевиц Б.И. О модифицированном асимптотическом представлении угловых колебаний оси симметрии снаряда // Механика твердого тела. – Донецк, 2009. – Вып. 39. – С. 121–136.
4. Коносевиц Б.И. Асимптотические представления угловых колебаний оси симметрии снаряда // Доповіді НАН України. – 2010. – № 7. – С. 54–61.
5. Коносевиц Б.И. Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // ПММ. – 2008. – 72, вып. 6. – С. 930–941.
6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 350 с.
7. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1. – М.: Наука, 1967. – 486 с.
8. Коносевиц Б.И. Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.

9. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

**B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich**

**New asymptotic representation of angular oscillations of the symmetry axis of an artillery shell.**

In the paper, a new type of approximate WKB-solution of equations of angular motion of the symmetry axis of an artillery shell is considered. This solution is a modification of the known approximate solution of these equations. It follows from the estimates obtained that both types of approximate solutions have errors of equal orders in the case of undamped low-frequency oscillations of the symmetry axis of the shell, and the modified approximate solution is more precise than the known approximate solution in the case of damped low-frequency oscillations.

**Keywords:** *artillery shell, exterior ballistics, WKB-method.*

*Ин-т прикл. математики и механики, Донецк*  
*konos@iamm.su*

*Получено 25.08.15*

УДК 531.38

©2015. Г. А. Котов

## РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

В статье рассмотрены условия существования регулярных прецессионных движений гиростата в поле силы тяжести. Получены три новых решения уравнений движения.

**Ключевые слова:** гиростат, регулярные прецессии, переменный гиростатический момент.

**1. Введение.** Математическое моделирование регулярных прецессий механических систем связано с тем, что они являются рабочими режимами многих объектов техники. Данный класс движений изучен в задачах о движении гиростата под действием силы тяжести и под действием потенциальных и гироскопических сил (см., например, [2, 3, 7]). К настоящему времени исследованы условия существования регулярных прецессий в трех случаях. В первом случае предполагается, что гиростатический момент постоянен (см. обзор [3]) и для него целесообразно использовать метод инвариантных соотношений для автономных дифференциальных уравнений [11, 12]. Второй случай соответствует движению гиростата с одним ротором [1, 4, 9]. В третьем случае моделирование регулярных прецессий проводится при условии, что гиростат несет два ротора с переменным гиростатическим моментом [6], [8, 10]. Для исследования условий существования регулярных прецессий гиростата с двумя роторами может быть применен либо метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений [5], либо метод, основанный на использовании первых интегралов [8]. В данной статье продолжено изучение регулярных прецессий гиростата под действием силы тяжести. Построены классы движений, которые имеют новые свойства по сравнению с движениями [6, 8].

**2. Постановка задачи.** Уравнения движения гиростата в поле силы тяжести имеют вид [3]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{s}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – угловая скорость тела-носителя;  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  – единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе;  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  – дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ;  $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата;  $A = (A_{ij})$  – тензор инерции гиростата; точка над переменными  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  обозначает дифференцирование по времени  $t$ .

Первые интегралы уравнений (1), (2) таковы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (3)$$

где  $k$  – произвольная постоянная.

Рассмотрим регулярные прецессионные движения гиростата относительно вертикали [3]. Третью ось подвижной системы координат направим по единичному вектору  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ , который образует постоянный угол  $\theta_0$  с вектором  $\boldsymbol{\nu}$ . Регулярные прецессионные движения характеризуются инвариантными соотношениями [3]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos \theta_0, \quad \boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\boldsymbol{\nu}, \quad (4)$$

где  $a'_0 = \sin \theta_0$ .

Внесем  $\boldsymbol{\omega}$  из (4) в уравнения (1), (2). Уравнение (2) обращается в тождество, а уравнение (1) примет вид:

$$\begin{aligned} nm \left[ Sp(A)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \right] - n^2(A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - m^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) - \\ - \lambda_1(t) \left[ n(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}) + m(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}) \right] - \lambda_2(t) \left[ n(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}) + m(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}) \right] + \\ + \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} - \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Sp(A)$  – след матрицы  $A$ .

По аналогии с [6, 8] при анализе уравнения (5) будем использовать ортонормированный базис  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ .

Так как

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad (6)$$

то, умножая левую часть уравнения (5) скалярно соответственно на  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t) \left[ \gamma_3 n + (a'_0 \gamma_1 \sin nt + a'_0 \gamma_2 \cos nt + a_0 \gamma_3) m \right] + F_1(t) = 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t) \left[ \gamma_3 n + (a'_0 \gamma_1 \sin nt + a'_0 \gamma_2 \cos nt + a_0 \gamma_3) m \right] + F_2(t) = 0, \\ \lambda_2(t) \left[ \alpha_3 n + (a'_0 \alpha_1 \sin nt + a'_0 \alpha_2 \cos nt + a_0 \alpha_3) m \right] - \\ - \lambda_1(t) \left[ \beta_3 n + (a'_0 \beta_1 \sin nt + a'_0 \beta_2 \cos nt + a_0 \beta_3) m \right] + F_3(t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_i(t) = A_{0,i} n^2 - \left( A_{2,i} \cos 2nt + A'_{2,i} \sin 2nt + a_0 A_{1,i} \cos nt + a_0 A'_{1,i} \sin nt + \right. \\ \left. + \varkappa_0 A_{0,i} \right) m^2 + nm \left[ (d'_{1,i} - A_{1,i}) \cos nt - (d_{1,i} + A'_{1,i}) \sin nt + 2a_0 A_{0,i} \right] + \\ + \delta_{1,i} \cos nt + \delta'_{1,i} \sin nt + \delta_{0,i}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 i &= 1, 2, 3, \quad \mathbf{e}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}), \quad (\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\gamma}), \\
 d_{0,i} &= e_{1,i}A_{13} + e_{2,i}A_{23} + e_{3,i}A_{33}, \quad d'_{1,i} = a'_0(e_{1,i}A_{11} + e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}), \\
 d_{1,i} &= a'_0(e_{1,i}A_{12} + e_{2,i}A_{22} + e_{3,i}A_{23}), \quad A_{0,i} = e_{2,i}A_{13} - e_{1,i}A_{23}, \\
 A_{1,i} &= a'_0[e_{1,i}(A_{22} - A_{33}) - e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}], \\
 A'_{1,i} &= a'_0[e_{2,i}(A_{33} - A_{11}) + e_{1,i}A_{12} - e_{3,i}A_{23}], \\
 A_{2,i} &= \frac{a_0'^2}{2}(2e_{3,i}A_{12} - e_{1,i}A_{23} - e_{2,i}A_{13}), \\
 A'_{2,i} &= \frac{a_0'^2}{2}[e_{2,i}A_{23} - e_{1,i}A_{13} + e_{3,i}(A_{11} - A_{22})], \\
 \varkappa_0 &= \frac{1}{2}(a_0'^2 - 2a_0^2), \quad \delta'_{1,i} = a'_0(e_{3,i}s_2 - e_{2,i}s_3), \\
 \delta_{1,i} &= a'_0(e_{1,i}s_3 - e_{3,i}s_1), \quad \delta_{0,i} = a_0(e_{2,i}s_1 - e_{1,i}s_2).
 \end{aligned}$$

**3. Об общем методе исследования.** Согласно методу, предложенному в [8], обозначим:

$$\begin{aligned}
 M &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu} = a'_0\alpha_1 \sin nt + a'_0\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3, \\
 N &= \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} = a'_0\beta_1 \sin nt + a'_0\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3, \\
 L &= \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu} = a'_0\gamma_1 \sin nt + a'_0\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3, \\
 F_4(t) &= A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} - k = (A'_1 \sin nt + A_1 \cos nt + a_0A_{33})n + \\
 &+ (A_2 \cos 2nt + A'_2 \sin 2nt + 2a_0A_1 \cos nt + 2a_0A'_1 \sin nt + A_0)m - k,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A'_2 = a_0'^2 A_{12}, \quad A'_1 = a'_0 A_{13}, \quad A_1 = a'_0 A_{23}, \\
 A_0 &= \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} + A_{11}) + a_0^2 A_{33}.
 \end{aligned}$$

Запишем с учетом (9) интеграл моментов из (3):

$$\lambda_1(t)M + \lambda_2(t)N + F_4(t) = 0. \tag{10}$$

Из равенства (10) и третьего соотношения из (7) найдем

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(t) &= \frac{NF_3(t) - F_4(t)(\alpha_3 n + Mm)}{n(\alpha_3 M + \beta_3 N) + m(M^2 + N^2)}, \\
 \lambda_2(t) &= -\frac{MF_3(t) + F_4(t)(\beta_3 n + Nm)}{n(\alpha_3 M + \beta_3 N) + m(M^2 + N^2)}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что в силу (6) для векторов  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  справедливы соотношения

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

После подстановки (11) в первое уравнение из (7) имеем

$$\sum_{k=0}^6 (P_k \cos knt + Q_k \sin knt) = 0. \quad (13)$$

Поскольку равенство (13) должно выполняться для всех  $t$ , то приходим к алгебраической системе из 13 уравнений

$$P_0 = 0, \quad P_k = 0, \quad Q_k = 0, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (14)$$

Пусть угол нутации отличен от  $\frac{\pi}{2}$ , т. е.  $a_0 \neq 0$ . С учетом обозначений (8) и соотношений (12) равенства  $P_6 = 0$ ,  $Q_6 = 0$  из системы (14) обратятся в тождества. Запишем равенства  $P_5 = 0$ ,  $Q_5 = 0$ .

$$\begin{aligned} \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) &= 0, \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

На основании аналогичных преобразований из второго уравнения из (7) найдем

$$\sum_{k=0}^6 (P'_k \cos knt + Q'_k \sin knt) = 0$$

и приходим к системе

$$P'_0 = 0, \quad P'_k = 0, \quad Q'_k = 0, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (16)$$

Равенства  $P'_5 = 0$ ,  $Q'_5 = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) &= 0, \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решая уравнения (15) относительно переменных  $\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2$  и  $\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1$ , запишем главный определитель системы (15)

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) & \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) & -\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) \end{vmatrix} = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^3,$$

который равен нулю только при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Случай  $\gamma = (0, 0, 1)$  рассмотрен в [6], здесь полагаем  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ . Тогда из (15) и (17) следует

$$\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2 = 0, \quad \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1 = 0, \quad \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = 0, \quad \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1 = 0.$$

Отсюда, учитывая (6), получим решение систем уравнений (15) и (17)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, если плоскость, которой принадлежит вектор гиростатического момента, не ортогональна вектору  $\mathbf{a}$ , то в рассматриваемом случае для регулярной прецессии гиростата в поле силы тяжести центр масс принадлежит оси собственного вращения.

Из равенств  $P_4 = 0$ ,  $Q_4 = 0$  определим следующие равенства:

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)A_{12} + \gamma_1\gamma_2(A_{22} - A_{11}) + \gamma_3(\gamma_1A_{23} - \gamma_2A_{13}) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & [\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)](a_0s_3 + mk) = \\ & = m^2[\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\gamma_1A_{11} + \gamma_2A_{12} + \gamma_3A_{13}) + \\ & + \beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\gamma_1A_{12} + \gamma_2A_{22} + \gamma_3A_{23})]. \end{aligned} \quad (20)$$

При  $\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \neq 0$  равенство (20) служит для нахождения параметра  $s_3$ , а соотношение (19) устанавливает зависимость между компонентами тензора инерции и расположением роторов в теле-носителе.

Так как в общем случае нахождение решений системы (14) затруднительно, то дальнейшие исследования проведем при некоторых дополнительных условиях.

#### 4. Примеры разрешимости системы (14).

**Пример 1.** Положим  $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0)$  и проведем построение системы алгебраических уравнений из (13). Из (19) получим равенство  $A_{12} = 0$ , при выполнении которого уравнение (20) становится тождеством. Учитывая (18), система (14) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0, \quad A_{23}(n^2 - m^2)(n + a_0m) = 0, \\ & A_{23}(n + a_0m)[4n(n + a_0m)(m + a_0n) + m((n + a_0m)^2 + 3(m + a_0n)^2)] = 0, \quad (21) \\ & (m^2 + 4n^2 + 6mna_0 + m^2a_0^2)(m^2A_{22} - km - a_0s_3) = 0. \end{aligned}$$

Из системы (21) следует условие  $m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0$ , а двум оставшимся уравнениям можно удовлетворить положив либо  $A_{23} = 0$ , либо  $n + a_0m = 0$ . Запишем при ограничениях

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad m^2A_{22} - km - a_0s_3 = 0$$

выражения для  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  из (11).

Если  $A_{23} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= -a'_0mA_{13} \sin nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0m)A_{33} - a_0m^2A_{22}), \\ \lambda_2(t) &= a'_0m(A_{22} - A_{11}) \sin nt - (n + a_0m)A_{13}. \end{aligned} \quad (22)$$

При условии  $n + a_0m = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= -a'_0m(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0m^2A_{22}), \\ \lambda_2(t) &= a'_0m(A_{22} - A_{11}) \sin nt. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, при  $\alpha = (0, 0, 1)$ ,  $\beta = (1, 0, 0)$ ,  $\gamma = (0, 1, 0)$  координаты центра масс гиростата определяются зависимостями  $s_1 = s_2 = 0$ ,  $m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0$ , компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями времени, линейными по  $\sin nt$  и  $\cos nt$ . В случае  $A_{23} = 0$  вторая ось является главной осью в теле-носителе; в случае  $n + a_0 m = 0$  появляется зависимость между скоростями прецессии и собственного вращения гиростата, а гиростатический момент не зависит от  $A_{33}$ .

Рассмотрим другой пример.

**Пример 2.** Пусть  $\alpha = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ,  $\beta = (\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}})$ ,  $\gamma = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ . Из (19), (20) найдем соответственно:

$$A_{23} = A_{13} - \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad (24)$$

$$s_3 = \frac{m}{a_0}(m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - k). \quad (25)$$

С учетом (18) и (24), (25) система алгебраических уравнений (14) примет вид:

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2)K &= 0, (a_0 n^2 + 3mn + 2a_0 m^2)K = 0, (a_0 n^2 + 2mn + a_0 m^2)K = 0, \\ (12a_0 n m^2 - 15m^3 - mn^2 - 4a_0 n^3 - 3a_0^2 m n^2 + 27a_0^3 m^3)K &= 0, \\ (-84a_0 n m^2 - 51m^3 - 29mn^2 - 20a_0 n^3 - 39a_0^2 m n^2 + 15a_0^3 m^3)K &= 0, \\ (-5a_0 n m^2 - 9a_0 m^3 - a_0^3 m n^2 - 2a_0^2 n^3 + 7a_0^3 m^3 - 6m^2 n)K &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $K = 4a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}) - 4k$ . Из (26) следует равенство  $K = 0$ , которое приводит к условию

$$k = a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + \frac{1}{4}a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}). \quad (27)$$

При выполнении условий (18), (24), (25), (27) зависимости (11) будут иметь вид

$$\lambda_1(t) = \frac{\sum_{j=0}^3 (\mu_j \cos(jnt) + \mu'_j \sin(jnt))}{R_2(t)}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\sum_{j=0}^3 (\sigma_j \cos(jnt) + \sigma'_j \sin(jnt))}{R_2(t)}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} R_2(t) &= -\frac{1}{6} [a_0'^2 m \sin 2nt + 2a_0'(n + 2a_0 m)(\sin nt + \cos nt) - 2a_0(n + a_0 m) - 5a_0'^2 m], \\ \mu_3 &= \frac{m^2 \sqrt{5}}{60} a_0'^3 (2A_{12} - A_{13}), \quad \mu'_3 = \frac{m^2 \sqrt{5}}{120} a_0'^3 [4A_{12} + 5(A_{11} - A_{22}) + 10A_{13}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{m\sqrt{5}}{60}a_0^2(n + 2a_0m)[8(A_{12} + A_{13}) + 5(A_{11} - A_{22})], \\ \mu'_2 &= \frac{m\sqrt{5}}{60}a_0^2(n + 3a_0m)[12A_{13} + 5(A_{11} - A_{22})], \\ \mu_1 &= \frac{a'_0\sqrt{5}}{60}[5(A_{22} - A_{11})(n^2 - a_0^2m^2 + 5m^2 + 5a_0mn) + A_{13}(5a_0^2m^2 - 56a_0mn - \\ &\quad - 49m^2 - 12n^2) + 2A_{12}(7a_0^2m^2 - 4a_0mn - 11m^2)], \\ \mu'_1 &= \frac{a'_0\sqrt{5}}{120}[5(A_{22} - A_{11})(2n^2 - m^2 + 6a_0mn + 5m^2a_0^2) - 2A_{13}(5m^2 + 12n^2 + \\ &\quad + 23a_0^2m^2 + 40a_0mn) + 4A_{12}(11m^2 + 4a_0mn - 7m^2a_0^2)], \\ \mu_0 &= \frac{\sqrt{5}}{120}[2a_0(n + a_0m)^2 + a_0^2m(7n + 9a_0m)][12A_{13} + 5(A_{11} - A_{22})],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0^3(2A_{13} + A_{12}), \quad \sigma'_3 = \frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0^3A_{12}, \\ \sigma_2 &= \frac{m\sqrt{30}}{15}a_0^2(n + 2a_0m)(A_{13} + A_{12}), \quad \sigma'_2 = -\frac{m\sqrt{30}}{30}a_0^2(n + 3a_0m)A_{13}, \\ \sigma_1 &= \frac{a'_0\sqrt{30}}{60}[2A_{13}(5a_0^2m^2 + 6a_0mn - m^2 + 2n^2) + A_{12}(7a_0^2m^2 - 4a_0mn - 11m^2)], \\ \sigma'_1 &= \frac{a'_0\sqrt{30}}{60}[4A_{13}(5m^2 + n^2 - a_0^2m^2 + 5a_0mn) + A_{12}(11m^2 + 4a_0mn - 7m^2a_0^2)], \\ \sigma_0 &= \frac{\sqrt{30}}{30}(3a_0^2mn - 9a_0m^2 - 2a_0n^2 - 7mn + 7a_0^3m^2)A_{13}.\end{aligned}$$

Таким образом, для случая, когда  $\alpha = (0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ,  $\beta = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}})$ ,  $\gamma = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ , компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями вида (28). Зависимость между компонентами тензора инерции выражается формулой (24), а после подстановки (27) в равенство (25) получим выражение

$$s_3 = a_0m^2(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - \frac{m(n + a_0m)}{4}(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}). \quad (29)$$

Отметим, что в силу (18) центр масс находится на оси собственного вращения, но, в отличие от предыдущего примера разрешимости, третья координата центра масс зависит только от компонент тензора инерции тела-носителя и скоростей собственного вращения и прецессии и не содержит постоянных моментов  $k$ , значение которой в данном примере находится из соотношения (27).

**Пример 3.** Пусть  $\alpha = (0, 1, 0)$ ,  $\beta = (0, 0, 1)$ ,  $\gamma = (1, 0, 0)$ . Равенства (15) обраца-

ются в тождества. Система алгебраических уравнений (14) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 a_0 s_1 &= 0, & a_0 s_2 &= 0, & a_0 A_{12} &= 0, & a_0(m + 6a_0 n + a_0^2 m) s_2 &= 0, \\
 a_0(m^2 A_{11} - km - a_0 s_3) &= 0, & a_0 A_{12}(12a_0 mn + 3m^2 + a_0^2 m^2 + 8a_0^2 n^2) &= 0, \\
 a_0[s_1(m + 2a_0 n + a_0^2 m) + (m^2 - n^2)(n + a_0 m)A_{13}] &= 0, \\
 a_0(m^2 + 8n^2 + 3a_0^2 m^2 + 12a_0 mn)(m^2 A_{11} - km - a_0 s_3) &= 0, \\
 a_0[4(n + a_0 m)A_{13}(m^3 + a_0^2 m^3 + 6a_0 nm^2 + 3a_0^2 mn^2 + 3n^2 m + 2a_0 n^3) + \\
 + s_1(3m^2 + 3a_0^4 m^2 + 8a_0^3 nm + 8a_0 nm + 2a_0^2 m^2 + 8a_0^2 n^2)] &= 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Если положить  $a_0 \neq 0$ , то решение системы (30) описывается равенствами

$$\begin{aligned}
 s_1 = s_2 = 0, & \quad A_{12} = 0, & \quad m^2 A_{11} - km - a_0 s_3 &= 0, \\
 A_{13} = 0 & \text{ или } n + a_0 m = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

При  $a_0 = 0$ , уравнения (30) выполняются при произвольных значениях других параметров. Для нахождения решения дифференциальных уравнений (7) необходимо рассмотреть систему (16). Запишем (16), учитывая, что  $a_0 = 0$ ,  $a_0' = 1$ .

$$\begin{aligned}
 s_1 = 0, & \quad s_2 = 0, & \quad A_{12} = 0, & \quad mA_{11} - k = 0, \\
 -5ms_1 + 4n(n^2 - m^2)A_{13} &= 0, & \quad 5ms_1 + 2nA_{13}(5n^2 + 3m^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Решение системы (32) таково

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad k = mA_{11}. \tag{33}$$

Отметим, что в случае  $A_{13} = 0$ , зависимости (33) можно получить из (31) положив  $a_0 = 0$ .

Таким образом, с учетом (11) и (31), запишем решение уравнений (7).

При произвольном значении угла  $\theta_0$  и  $A_{13} = 0$  имеем,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(t) &= a_0' m(A_{22} - A_{11}) \cos nt - (n + a_0 m)A_{23}, \\
 \lambda_2(t) &= -a_0' m A_{23} \cos nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0 m)A_{33} - a_0 m^2 A_{11}).
 \end{aligned}$$

Если  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$  и  $n + a_0 m = 0$ , то компоненты гиросtatического момента таковы

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(t) &= a_0' m(A_{11} - A_{22}) \cos nt, \\
 \lambda_2(t) &= -a_0' m(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0 m^2 A_{11}).
 \end{aligned}$$

В данном примере, при угле нутации равно  $\frac{\pi}{2}$  третья координата центра масс может принимать любые значения.

**5. Выводы.** На основании метода, использующего первые интегралы уравнений движения гиростата, получены три решения уравнений (1) и (2) движения гиростата в поле силы тяжести. Эти решения описывают прецессионные движения. В зависимости от расположения роторов в теле-носителе установлен вид зависимостей  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  от времени.

1. Возняк А.А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С. 45–57.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
3. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2012. – 364 с.
4. Горр Г.В., Мазнев А.В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – 21. – С. 64–75.
5. Горр Г.В., Ковалев А.М., Неспирный В.Н. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 3–18.
6. Горр Г.В., Щетинина Е.К. Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 46–56.
7. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
8. Котов Г.А. Прецессии общего вида гиростата, несущего два маховика // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 79–89.
9. Мазнев А.В. Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 66–72.
10. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
11. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-е НГУ, 1965. – 221 с.
12. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 4. – С. 52–73.

G. A. Kotov

**Regular precession motion of gyrostat carrying two rotors.**

The conditions of existence of gyrostat's regular precession motions under the action of gravity are studied in the article. Three new solutions of motion equations are obtained.

**Keywords:** *gyrostat, regular precession motions, variable gyrostatic moment.*

Донбасская нац. акад. строительства  
и архитектуры, г. Макеевка  
kotov\_ga@rambler.ru

Получено 10.04.15

UDK 531.35

©2015. O. I. Kuznetsova

ON THE NORMS OF THE MEANS OF SPHERICAL FOURIER SUMS<sup>1</sup>

The spherical Fourier sums  $S_R(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}$  of a periodic functions in  $m$  variables, the strong

means  $\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f, x)|^p\right)^{1/p}$  and the strong integral means  $\left(\left(\int_0^R |s_r(f, x)|^p dx\right)/R\right)^{1/p}$  of these sums for  $p \geq 1$  are considered. In contrast to the one-dimensional case treated by Hardy and Littlewood, for  $m \geq 2$  the norms of the corresponding operators in the space  $L_\infty$  are not bounded. The sharp order of growth of these norms is found. The upper and lower bounds differ by a factor depending only on the dimension  $m$ .

A sufficient condition on the function ensuring the uniform strong  $p$ -summability of its Fourier series is given.

**Keywords:** Multiple Fourier series, spherical sums, strong means.

**1. Introduction.** Given a function  $f$  integrable on the cube  $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ , the spherical partial sum  $S_R(f, x)$  of the Fourier series of  $f$ , has the form (hereafter  $k \in \mathbb{Z}^m$ )

$$S_R(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}, \quad \text{where } \widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(u) e^{-ik \cdot u} du.$$

This is the convolution  $f$  with the spherical Dirichlet kernel

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{\|k\| \leq R} e^{-ik \cdot x}.$$

The  $L_1$ -norm

$$\mathcal{L}_R = \int_{\mathbb{T}^m} |D_R(x)| dx = \sup_{|f| \leq 1} |S_R(f, 0)|$$

of this kernel is called the Lebesgue constant. In the multidimensional case ( $m > 1$ ) the two-sided bound  $A_m R^{\frac{m-1}{2}} \leq \mathcal{L}_R \leq B_m R^{\frac{m-1}{2}}$  is valid for  $R \geq 1$  (see [1], [2]).

The strong spherical means of the Fourier series are defined as follows (hereafter  $p \geq 1$  and  $n \in \mathbb{N}$ )

$$H_{n,p}(f, x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f, x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sup_{|\varepsilon|_q \leq 1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j S_j(f, x) \right|.$$

Here, supremum is taken over all collections  $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$  of real numbers satisfying the condition

$$|\varepsilon|_q = (|\varepsilon_0|^q + \dots + |\varepsilon_{n-1}|^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

<sup>1</sup>The present paper is the talk represented in International Conference «Harmonic analysis and approximation, VI», 12–18 September, 2015, Tsaghkadzor, Armenia.

( $q$  is the conjugate exponent:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

Our purpose is to estimate the norms of the corresponding operators, i.e., the quantities

$$H_{n,p} = \sup_{|f| \leq 1} H_{n,p}(f, 0) = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sup_{|\varepsilon|_q \leq 1} \int_{\mathbb{T}^m} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j D_j(x) \right| dx.$$

Note that, by Hölder's inequality, the means  $H_{n,p}(f)$ , and hence the norms  $H_{n,p}$ , increase with  $p$ .

The notion of strong summability of Fourier series was introduced by Hardy and Littlewood [3] in the one-dimensional case more one hundred years ago. They proved that for  $m = 1$  and a fixed  $p$ , the norms  $H_{n,p}$  are bounded.

In the multidimensional case, the situation is different. For  $m \geq 3$  the norms  $H_{n,p}$  not bounded, being of order  $n^{\frac{m-1}{2} - \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\}}$  (cm. [4], [5]). In the two-dimensional case, the results were not complete: this two-sided bound still holds true for any fixed  $p > 2$ , while for  $p \in [1, 2]$  only the upper bound  $H_{n,p} \leq c\sqrt{\ln(n+1)}$  was known [see 6,7].

**2. The main result for  $H_{n,p}$ .** We prove [8] that <sup>2</sup>

$$H_{n,p} \asymp \begin{cases} n^{\frac{m-1}{2} - \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\}} & \text{if } m \geq 3, p \geq 1; \\ n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\} & \text{if } m = 2, p \geq 2; \\ \sqrt{\ln(n+1)} & \text{if } m = 2, p \in [1, 2]. \end{cases}$$

Note that in the two-dimensional case, for "large"  $p$  (with  $p - 2$  greater than a fixed positive number) the factor  $\min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\}$  can be replaced by 1.

**3. The main lemma.**

**Lemma 1.** *Let  $a_1, \dots, a_n$  be nonnegative numbers. Then*

$$\sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \int_0^\pi \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_j \cos \left( jt + \frac{\pi}{4} \right) \right| \frac{dt}{\sqrt{t}} \gg \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \sum_{j=1}^n a_j.$$

With  $a_j = \sqrt{j}$  this immediately implies the desired relation  $H_{n,1} \gg \sqrt{\ln n}$ .

**4. The norms of the integral means of spherical Fourier sums.** In addition to the means  $H_{n,p}(f)$ , it is also natural to consider their integral analogs defined by the equality

$$\mathcal{H}_{R,p}(f, x) = \left( \frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Note that averaging over the radius was used systematically in many papers, for example, in the study of the Riesz sums of multiple Fourier series.

Our goal is to estimate of the norms the corresponding operators, i.s., the quantities

---

<sup>2</sup>The notion  $\alpha_n \asymp \beta_n$  means that  $\alpha_n = O(\beta_n)$  and  $\beta_n = O(\alpha_n)$  simultaneously. Instead of  $\alpha_n = O(\beta_n)$  we also write  $\alpha_n \ll \beta_n$ . Hereafter, the constants in the corresponding inequalities valid for all  $n$  may depend only on the dimension  $m$ .

$$\mathcal{H}_{R,p} = \sup_{|f| \leq 1} \mathcal{H}_{R,p}(f, 0).$$

In view of Hölder's inequality, the means  $\mathcal{H}_{R,p}(f)p$  increase with  $p$  and, therefore, so do the norms  $\mathcal{H}_{R,p}$ . In [7] they were estimated from above. It is easy to see that, to do this, it suffices to consider  $\mathcal{H}_{R,p}$  only for integer values  $R$ .

We prove [9] that the norms  $\mathcal{H}_{n,p}$  и  $H_{n,p}$  have the same order. More precisely,

$$\mathcal{H}_{n,p} \asymp H_{n,p} \asymp \begin{cases} n^{\frac{m-1}{2} - \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\}} & \text{if } m \geq 3, p \geq 1; \\ n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\} & \text{if } m = 2, p > 2; \\ \sqrt{\ln(n+1)} & \text{if } m = 2, p \in [1, 2]. \end{cases}$$

**5. Estimating  $\mathcal{H}_{n,p}$  from below.** We begin with two-dimensional case. For  $1 \leq p \leq 2$

$$\mathcal{H}_{n,p} = H_{n,p} + O(1) \geq \alpha_m \sqrt{\ln(n+1)}.$$

In addition, for  $p > 2$  the relations

$$H_{n,p} \asymp n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\} \text{ и } \mathcal{H}_{n,p} = H_{n,p} + O(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}})$$

imply

$$\mathcal{H}_{n,p} \geq \beta_m n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\}$$

at least for  $p$ , sufficiently close to 2.

We need following result for  $p \geq 2$ .

Further,  $R > 1$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ;  $f_{R,\delta}$  is a function, equal to  $\cos(R\|x\| - \frac{\pi}{4}(m+1))$  for  $\|x\| \leq \delta$  and zero for other  $x \in \mathbb{T}^m$ ;  $B(r)$  is the ball of radius  $r$  centered at zero.

**Lemma 2.** *If  $\delta$  is sufficiently small and the product  $R\delta$  is sufficiently large (the boundaries depend only the dimension  $m$ ), then the function  $f_{R,\delta}$  satisfies the inequality*

$$S_r(f_{R,\delta}, 0) = \int_{B(\delta)} f_{R,\delta}(x) D_r(x) dx \geq c_m (r\delta)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{for all } r, |r - R| \leq 1/\delta.$$

For the coefficient  $c_m$  we can take the fraction  $\pi^{\frac{m-1}{2}} / 2\Gamma(1 + \frac{m}{2})$ .

In view [1]  $|S_r(f, 0)| \leq \int_{\mathbb{T}^m} |D_r(x)| dx = O(r^{\frac{m-1}{2}})$ , if  $|f| \leq 1$ , then this implies that, for  $f_{R,\delta}$ , not only the spherical sum  $S_R(f_{R,\delta}, 0)$ , but also all the sums  $S_r(f_{R,\delta}, 0)$  for  $R - 1/\delta \leq r \leq R + 1/\delta$  are the largest possible (among bounded functions).

For  $p \geq 2$  the lemma 2 (for  $R=n$  and small  $\delta$ ) immediately yields the lower bound:

$$\mathcal{H}_{n,p} = \sup_{|f| \leq 1} \left( \frac{1}{n} \int_0^n |S_r(f, 0)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \int_{n-1}^n S_r(f_{n,\delta}, 0) dr \geq c_m \delta^{\frac{m-1}{2}} n^{\frac{m-1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

In the two-dimensional case, for "large"  $p > 2$  (the difference  $p - 2$  is bounded away from zero), the above relations are equivalent to the inequality

$$\mathcal{H}_{n,p} \geq \beta_m n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\},$$

which, for “small”  $p > 2$ , was established at the beginning. Thus, for  $p > 2$  the required lower bound for the norms  $\mathcal{H}_{n,p}$  is obtained for all  $m = 2, 3, \dots$ . Recall that, at the beginning of this section, the lower bound was also obtained for  $m = 2$  and  $1 \leq p \leq 2$ .

**6. On  $p$ -summation of the Fourier series in the strong sense.** The estimates of the norms  $\mathcal{H}_{R,p}$ , established above, by standard arguments lead to condition on a continuous periodic function  $f$  that ensures the uniform strong  $p$ -summability of the Fourier series, i.e., the uniform (with respect to  $x \in \mathbb{R}^m$ ) convergence to zero as  $R \rightarrow +\infty$  of the quantities

$$\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr.$$

To do this, we shall need the notion of best uniform approximation of a function  $f$ , which is defined by the equality

$$E_R(f) = \min_M \|f - M\|_C, \quad \text{where } M(x) = \sum_{\|k\| \leq R} c_k e^{ik \cdot x}.$$

**Corollary.** *Let  $f$  be a continuous and  $2\pi$ -periodic (in each variable) function in  $\mathbb{R}^m$  such that  $\mathcal{H}_{R,p} E_R(f) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ . Then*

$$\max_x \frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

By Jackson’s theorem, the best approximation  $E_R(f)$  is majorized by the modulus of smoothness of the functions  $f$ . Therefore, in the two-dimensional, for  $1 \leq p \leq 2$ , the condition

$$\omega_f(t) = o(1/\sqrt{|\ln t|})$$

on the modulus of continuity of the function  $f$  is sufficient for the uniform strong  $p$ -summability of the spherical sums and, for a fixed  $p > 2$ , it ensures the more restrictive Lipschitz condition

$$\omega_f(t) = o(|t|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}).$$

1. Babenko K.I. On the mean convergence of multiple Fourier series and the asymptotic behavior of the Dirichlet kernel of the spherical means, Preprint № 52, Inst. Prikl. Mat. Akad. Nauk SSSR (1971).
2. Il’in V.A. Localization and convergence problem for Fourier series in fundamental function systems of Laplace’s operator // Uspehi Mat. Nauk. – 1968. – **23:2**. – P. 61–120.
3. Hardy G.H., Littlewood J.E. Sur la serie de Fourier d’une fonction á carré summable // CR. – 1913. – **156**. – P. 1303–1309.
4. Kuznetsova O.I. Strong means and the convergence in  $L$  multiple trigonometric series // Ukr. Math. Bull. – 2006. – **3:1**. – P. 46–63.
5. Kuznetsova O.I. Strong means and the convergence of multiple trigonometric series in  $L$  // Dokl. Akad. Nauk. – 2003. – **391:3**. – P. 303–305.
6. Kuznetsova O.I. On the problem of strong summation over disks // Ukrainian Math. J. – 1996. – **48:5**. – P. 629–634.
7. Kuznetsova O.I. Strong spherical means of multiple Fourier series // J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci. – 2009. – **44:4**. – P. 219–229.

8. *Kuznetsova O.I., Podkorytov A.N.* On strong averages of spherical Fourier sums // – Algebra Anal. – 2013. – **25:3**. – P. 447–453.
9. *Kuznetsova O.I., Podkorytov A.N.* On the norms of the integral means of spherical Fourier sums // Mathematical Notes. – 2014. – **96:5**. – P. 55–62.

**О. И. Кузнецова**

**О нормах средних сферических сумм Фурье.**

Сферическая сумма Фурье  $S_R(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$  периодической функции  $m$  переменных, ее сильные средние и сильные интегральные средние рассмотрены при  $p \geq 1$ . В отличие от одномерного случая, рассмотренного Харди и Литвудом, при  $m \geq 2$  нормы соответствующих операторов в пространстве  $L_\infty$  не ограничены. Найден точный порядок роста этих норм. Оценки сверху и снизу различаются на коэффициенты, зависящие лишь от размерности. Получено достаточное условие на функцию, обеспечивающее равномерную сильную суммируемость ее ряда Фурье.

**Ключевые слова:** Кратные ряды Фурье, сферические суммы, сильные средние

Ин-т прикл. математики и механики, Донецк  
*kuznets@iamm.su*

Received 02.10.15

УДК 539.3:534.1

©2015. И. А. Моисеенко

## СПЕКТРЫ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В данной работе исследуется проблема построения решения для задачи распространения нормальных волн в радиально неоднородных трансверсально изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения. Модули упругости и плотность задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Для компонент вектора перемещений и тензора напряжений получены разложения в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по радиальной координате. Получены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник симметричных и антисимметричных нормальных волн в радиально неоднородном цилиндрическом волноводе с идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием граничной поверхности секторного выреза и свободным или жестко закрепленным цилиндрическим участком боковой поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности и угловой меры секторного выреза на топологию дисперсионных спектров и распределение фазовых скоростей распространяющихся нормальных волн.

*Ключевые слова:* цилиндрический волновод, секторное сечение, нормальные волны, функционально-градиентный, трансверсально-изотропный, дисперсионное уравнение.

**Введение.** Задачи динамики деформируемых сред, связанные с проблемами получения дисперсионных спектров нормальных упругих волн в цилиндрических телах с варьируемыми геометрией и физико-механическими свойствами приобретают все большую актуальность в связи с появлением новых приложений в ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике. Одним из направлений анализа указанного класса задач является поиск возможностей целенаправленного изменения структуры спектра.

Вопросы теоретического и численно-аналитического исследования эффектов влияния фактора наличия в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе кругового и кольцевого сечения секторного выреза варьируемой угловой меры с нанесенным на участки границы секторного выреза идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием, рассматривались в работах [1–3]. Влияние радиальной функционально-градиентной неоднородности анизотропных материалов цилиндрических волноводов на характеристики дисперсионных спектров распространяющихся нормальных волн применительно к осесимметричным волнам продольно-сдвигового и крутильного типа в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения рассматривались в работах [4–6]. В данной работе методика построения и исследования дисперсионных соотношений для нормальных волн в цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов с функционально-градиентной радиальной неоднородностью распространена на случай наличия секторного выреза, участки границы которого покрыты идеально гибкой нерастяжимой мембраной.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндрический волновод радиуса  $R$ , в поперечном сечении которого имеется секторный вырез произвольной угловой меры. Волновод занимает в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = R$  безразмерных цилиндрических координатах область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Задача анализа спектров нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого волновода формулируется с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат. Данные соотношения формулируются для проекций безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений на оси цилиндрической системы координат  $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ , отнесенных к нормирующему параметру  $R_*$ , а также для безразмерных характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта на основных площадках цилиндрической координатной системы  $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}\}$ , отнесенных к нормирующему параметру  $c_*$ .

Основные соотношения модели включают:

– систему уравнений связи между компонентами тензора малых деформаций  $\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}\}$  и компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, & \varepsilon_{\theta\theta} &= r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, & \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, & \varepsilon_{rz} &= \partial_z u_r + \partial_r u_z, \\ \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1} \partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - r^{-1} u_\theta; \end{aligned} \quad (1)$$

– систему соотношений обобщенного линейного закона Гука для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \varepsilon_{rr} + c_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44} \varepsilon_{\theta z}, & \sigma_{rz} &= c_{44} \varepsilon_{rz}, & \sigma_{r\theta} &= c_{66} \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (2)$$

– систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемого тела в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Во введенных представлениях  $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2\}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  ненулевые модули упругости трансверсально-изотропного материала волновода;  $\rho$  – плотность материала волновода;  $t$  – время;  $\partial_q = \partial/\partial q$  ( $q = r, \theta, z, t$ ).

Поставленная спектральная задача наряду с моделью (1)–(3) включает также граничные условия:

– на участках граничной поверхности секторного выреза рассматриваются граничные условия, моделирующие нанесение абсолютно гибкого микропанцирного покрытия

$$\begin{aligned} u_q|_{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)} &= 0 \quad (q = r, z), \\ \sigma_{\theta\theta}|_{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)} &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

– на цилиндрическом участке граничной поверхности рассматривается альтернативная форма классических граничных условий:

$$u_q|_{r=1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)} = 0 \quad (q = r, \theta, z) \quad (5)$$

либо

$$\sigma_q|_{r=1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)} = 0 \quad (q = rr, r\theta, rz). \quad (6)$$

Полагается, что материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости описываются представлениями

$$\begin{aligned} c_q &= \tilde{c}_q \exp(f_{\lambda,p}(r)) \quad (q \in \{11, 12, 13, 33, 44, 66\}), \\ \rho &= \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,p}(r)), \quad f_{\lambda,p}(r) = \lambda r^p, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $p$  ( $p \in \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ) – параметры функциональной неоднородности.

**2. Интегрирование уравнений волнового деформирования и получение дисперсионных соотношений.** Для функций колебательных упругих перемещений в исследуемых нормальных волнах вдоль цилиндра секторного поперечного сечения с круговой частотой  $\omega$  и нормированным продольным волновым числом  $k$ , следуя методу разделения переменных и с учетом граничных условий (4) вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_\theta(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i \tilde{u}_z(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz) \\ & \quad (\tau \in \mathbb{R}, \beta \in \{0, \pi/2\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\beta$  – параметр, задающий тип волновых движений, а именно, условно симметричные (волны  $S$ -типа)  $u_r(r, -\theta, z, t) = u_r(r, \theta, z, t)$ ,  $u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t)$ ,

$u_z(r, -\theta, z, t) = u_z(r, \theta, z, t)$  ( $\beta = 0$ ) и условно антисимметричные (волны А-типа)  
 $u_r(r, -\theta, z, t) = -u_r(r, \theta, z, t)$ ,  $u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t)$ ,  $u_z(r, -\theta, z, t) =$   
 $= -u_z(r, \theta, z, t)$  ( $\beta = \pi/2$ );  $\tau$  – параметр, полученный из спектральной подзадачи (1)–(4)

$$\tau = \tau_n = \begin{cases} (n - 1/2) \pi / \alpha & \text{если } \beta = 0 \\ n \pi / \alpha & \text{если } \beta = \pi / 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (9)$$

Последовательная подстановка представлений (7), (8) в соотношения модели (1), (2), (3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих функций смещений

$$\begin{aligned} & (\tilde{c}_{11} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - 1) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 - \\ & - \lambda p r^p (p (\lambda r^p / 2 + 1) \tilde{c}_{11} / 2 - \tilde{c}_{12}) - \tau^2 \tilde{c}_{66}) \tilde{u}_r + \\ & + \tau (((\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / 2) r \partial_r - (\lambda p r^p (\tilde{c}_{11} - 3 \tilde{c}_{12}) + 2 (3 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})) / 4) \tilde{u}_\theta - \\ & - k r ((\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \partial_r - \lambda p r^p (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13}) / 2) \tilde{u}_z = 0, \quad (10) \\ & - \tau (((\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / 2) r \partial_r + (\lambda p r^p (\tilde{c}_{11} - 3 \tilde{c}_{12}) + 2 (3 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})) / 4) \tilde{u}_r + \\ & + (\tilde{c}_{66} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - 1) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 - \\ & - \lambda p r^p (p (\lambda r^p / 2 + 1) / 2 + 1) \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{11}) \tilde{u}_\theta + k \tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \tilde{u}_z = 0, \\ & k r ((\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) (r \partial_r + 1) + \lambda p r^p (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13}) / 2) \tilde{u}_r + k \tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \tilde{u}_\theta + \\ & + (\tilde{c}_{44} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) r^2 - \\ & - (\lambda p^2 r^p (\lambda r^p / 2 + 1) / 2 + \tau^2) \tilde{c}_{44}) \tilde{u}_z = 0. \end{aligned}$$

В уравнениях (10)  $\Omega^2 = \tilde{\rho} R_*^2 \omega^2 / c_*$ .

В качестве метода построения базисных решений системы (10) используется подход, основанный на представлениях искомых решений в виде рядов. С учетом физических аспектов модели волнового процесса, а также структуры дифференциальных уравнений (10), для искомых решений вводятся представления

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{m+1-\eta+\delta}, \quad \tilde{u}_\theta(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m r^{m+1-\eta+\delta}, \\ \tilde{u}_z(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m r^{m+\eta+\delta} \quad (\delta \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \{0, 1\}) \quad (11) \end{aligned}$$

и рассматривается подзадача определения разрешающих условий  $\{(\eta_j, \delta_j)\}_{j=1}^3$  для трех независимых базисных решений уравнений (10) при заданном значении параметра  $\tau$  (9). В результате подстановки разложений (11) в уравнения (10) получается система рекуррентных уравнений, в матричной форме имеющая следующий вид:

$$\mathbf{A}_m^{(1)} \cdot \mathbf{X}_m + \mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} +$$

$$+\mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} = \mathbf{O} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

В записи уравнений (12) используются обозначения векторно-матричных объектов размерности 3:  $\mathbf{X}_m = [a_m, b_m, d_m]^{trans}$  ( $m = \overline{0, \infty}$ ) – вектор-столбцы с неизвестными коэффициентами разложений (11);  $\mathbf{X}_n = \mathbf{O}$  ( $n = \overline{-\max(p+2, 2p), -1}$ );  $\mathbf{O}$  – нулевой вектор-столбец;  $\mathbf{A}_m^{(n)}$  ( $n = \overline{1, 2}$ ) и  $\mathbf{A}^{(n)}$  ( $n = \overline{3, 5}$ ) – квадратные матрицы, ненулевые элементы которых имеют представления:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,1} &= (\delta + m - \eta) (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{11} - \tau^2 \tilde{c}_{66}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,2} &= \tau ((\delta + m - 2 - \eta) \tilde{c}_{11} + (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{12})/2, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,3} &= -k (\delta + m) (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,1} &= -\tau ((\delta + m + 4 - \eta) \tilde{c}_{11} + (\delta + m - \eta) \tilde{c}_{12})/2, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,2} &= (\delta + m - \eta) (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{11}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,3} &= k\tau (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \quad \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,2} = k\tau\eta (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,1} &= k\eta (\delta + m + \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,3} &= ((\delta + m + \eta)^2 - \tau^2) \tilde{c}_{44}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{1,1} &= \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{2,2} = \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{1,3} &= -k\eta (\delta + m - 1) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,1} &= k (\delta + m) (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{2,3} &= k\tau\eta (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \quad \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,2} = k\tau (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,3} &= \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}, \quad \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,1} = \lambda p (2\tilde{c}_{12} - p\tilde{c}_{11})/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,2} &= \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{2,1} = \tau\lambda p (3\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{11})/4, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,3} &= \left(\mathbf{A}^{(4)}\right)_{3,1} = k\lambda p (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13})/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{2,2} &= -\lambda p (p + 2) \tilde{c}_{66}/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{3,1} &= \left(\mathbf{A}^{(4)}\right)_{1,3} = k\lambda p\eta (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13})/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{3,3} &= -\lambda p^2 \tilde{c}_{44}/2, & \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{1,1} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{11}/4, \\ \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{2,2} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{66}/4, & \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{3,3} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{44}/4. \end{aligned}$$

Следствием свойств опорных матричных коэффициентов  $\mathbf{A}_m^{(1)}$  уравнений (12)

$$\det \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \Big|_{\eta=0} \right) = \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} \tilde{c}_{66} \left( (\delta + m + 2)^2 - \tau^2 \right) \left( (\delta + m)^2 - \tau^2 \right)^2, \quad (13)$$

$$\det \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \Big|_{\eta=1} \right) = \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} \tilde{c}_{66} \left( (\delta + m - 1)^2 - \tau^2 \right) \left( (\delta + m + 1)^2 - \tau^2 \right)^2 \quad (14)$$

в случае  $\eta = 0$  из требования  $\det \left( \mathbf{A}_0^{(1)} \right) = 0$  для двух искомого независимых базисных решений определяются:

– двукратное разрешающее условие  $(\eta_1, \delta_1) = (\eta_2, \delta_2) = (0, \tau)$  при котором из (13) следуют свойства

$$\det \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \right) \neq 0 \quad (m = \overline{1, \infty}); \quad (15)$$

– ограничения на параметр  $\tau$  в представлениях (9)

$$\tau = \tau_n > 1/2 \quad (n \in \mathbb{N}); \quad (16)$$

– начальные условия

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \{ \eta = 0, \delta = \tau, a_0 = 0, b_0 = k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ & d_0 = \tau ((\tau - 2) \tilde{c}_{11} + (\tau + 2) \tilde{c}_{12})/2 \}, \\ \Upsilon_2 &= \{ \eta = 0, \delta = \tau, a_0 = k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ & b_0 = 0, d_0 = \tau ((\tau + 4) \tilde{c}_{11} + \tau \tilde{c}_{12})/2 \}; \end{aligned} \quad (17)$$

– рекуррентные соотношения отдельно для случая  $p = 0$

$$\mathbf{X}_{2n} = - \left( \mathbf{A}_{2n}^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)}, \quad \mathbf{X}_{2n-1} = \mathbf{O} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

для случая  $p = 2l$  ( $l \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{2n} &= - \left( \mathbf{A}_{2n}^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l)} + \right. \\ & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l-1)} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-2l)} \right), \quad \mathbf{X}_{2n-1} = \mathbf{O} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (19)$$

для случая  $p = 2l - 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ )

$$\mathbf{X}_m = - \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \right.$$

$$+\mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

При  $\eta = 1$  аналогично из требования  $\det(\mathbf{A}_0^{(1)}) = 0$  определяется третье разрешающее условие

$$(\eta_3, \delta_3) = \begin{cases} (1, 1 - \tau) & \text{если } 1/2 < \tau < 1 \\ (1, \tau - 1) & \text{если } \tau \geq 1 \end{cases}.$$

В случае  $(\eta_3, \delta_3) = (1, 1 - \tau)$  из (14) также следует свойство (15) с учетом которого определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = 1 - \tau, a_0 = (\tau + 2) \tilde{c}_{11} + (\tau - 2) \tilde{c}_{12}, \\ b_0 = (\tau - 4) \tilde{c}_{11} + \tau \tilde{c}_{12}, d_0 = -2k(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) \tilde{c}_{66} / \tilde{c}_{44} \} \quad (21)$$

для рекуррентных соотношений (18)–(20), генерирующих  $\mathbf{X}_m$  ( $m = \overline{1, \infty}$ ). В случае  $(\eta_3, \delta_3) = (1, \tau - 1)$  из (14) следуют свойства

$$\det(\mathbf{A}_2^{(1)}) = 0, \quad \det(\mathbf{A}_m^{(1)}) \neq 0 \quad (m = 1, \overline{3, \infty}),$$

непосредственным следствием которых становится зависимость структуры порождающих соотношений для определения начального условия от параметра функциональной неоднородности  $p$ . При  $p = 0$  получается однородная система линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{(1)} & \Theta \\ \mathbf{A}_2^{(2)} & \mathbf{A}_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

в результате решения которой определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = \tau - 1, a_0 = -1, b_0 = 1, \\ d_0 = -(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / (k\tau(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})), a_2 = 0, b_2 = 0, \\ d_2 = (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33})(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / (4k\tau(\tau + 1)\tilde{c}_{44}(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})) \}. \quad (22)$$

В записи представленной системы линейных уравнений для нулевой матрицы размерности 3 использовалось обозначение  $\Theta$ . Рекуррентные соотношения для определения  $\mathbf{X}_m$  ( $m = 1, \overline{3, \infty}$ ) получаются в таком виде

$$\mathbf{X}_{2n} = -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)}, \quad \mathbf{X}_{2n-3} = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (23)$$

При  $p = 2$  для получающейся системы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{(1)} & \Theta \\ \mathbf{A}_2^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)} & \mathbf{A}_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = \tau - 1, a_0 = -1, b_0 = 1, d_0 = -(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda ((\tau - 4) \tilde{c}_{11} - (3\tau - 4) \tilde{c}_{12}) / (2) / (k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})), a_2 = 0, \\
 & b_2 = 0, d_2 = k\lambda (1 - \tilde{c}_{13} / \tilde{c}_{44}) / (4(\tau + 1)) + \\
 & + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} + \lambda ((\tau - 4) \tilde{c}_{11} - (3\tau - 4) \tilde{c}_{12}) / 2) * \\
 & * (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33} - 2\lambda \tilde{c}_{44}) / (4k\tau (\tau + 1) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) \tilde{c}_{44}) \}
 \end{aligned} \tag{24}$$

и записываются определяющие  $\mathbf{X}_m$  ( $m = \overline{3, \infty}$ ) рекуррентные соотношения в таком виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{2n} &= -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \left( (\mathbf{A}_{2n}^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)}) \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + (\mathbf{A}^{(4)} + \mathbf{A}^{(5)}) \cdot \mathbf{X}_{2(n-2)} \right), \\
 \mathbf{X}_{2n-3} &= \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Наконец, при  $p \geq 3$  начальное условие задается представлением (22), а рекуррентные соотношения для определения  $\mathbf{X}_m$  ( $m = 1, \overline{3, \infty}$ ) записываются так:

– для случая  $p = 2l$  ( $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ )

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{2n} &= -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \left( \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l)} + \right. \\
 & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l-1)} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-2l)} \right), \quad \mathbf{X}_{2n-3} = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots);
 \end{aligned} \tag{26}$$

– для случая  $p = 2l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1 &= \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_m = -(\mathbf{A}_m^{(1)})^{-1} \cdot \left( \mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \right. \\
 & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} \right) \quad (m = 3, 4, \dots).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для введенных векторно-матричных обозначений получаются представления

$$\mathbf{U}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_r(r) \\ \tilde{u}_\theta(r) \\ \tilde{u}_z(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{\delta+1-\eta} & 0 & 0 \\ 0 & r^{\delta+1-\eta} & 0 \\ 0 & 0 & r^{\delta+\eta} \end{bmatrix} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m. \tag{28}$$

По аналогии с (8) вводятся представления

$$\begin{aligned}
 \sigma_q(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_q(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz) \\
 & (q = rr, \theta\theta, zz),
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{\theta z}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{rz}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = \tilde{\sigma}_{r\theta}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz)$$

и на основании (1), (2), (7), (8), (11) с целью постановки и решения спектральной задачи определяются функциональные векторно-матричные объекты

$$\mathbf{S}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}(r) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}(r) \end{bmatrix} = r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{Q}_m(r) \cdot \mathbf{X}_m. \quad (29)$$

Здесь  $\mathbf{Q}_m(r)$  – квадратные функциональные матрицы размерности 3, ненулевые элементы которых имеют представления

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_m(r))_{1,1} &= ((-\lambda pr^p/2 + \delta + m + 1 - \eta) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) r^{\delta+1-\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{2,2} &= (-\lambda pr^p/2 + \delta + m - \eta) \tilde{c}_{66} r^{\delta+1-\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{3,3} &= (-\lambda pr^p/2 + \delta + m + \eta) \tilde{c}_{44} r^{\delta+\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{1,2} &= \tau \tilde{c}_{12} r^{\delta+1-\eta}, \quad (\mathbf{Q}_m(r))_{1,3} = -k \tilde{c}_{13} r^{\delta+1+\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{2,1} &= -\tau \tilde{c}_{66} r^{\delta+1-\eta}, \quad (\mathbf{Q}_m(r))_{3,1} = k \tilde{c}_{44} r^{\delta+2-\eta}. \end{aligned}$$

На основе построенных базисных решений

$$\left\{ \mathbf{U}_j^{(baz)}(r) = \mathbf{U}(r)|_{\Gamma_j} \right\}_{j=1}^3, \quad \left\{ \mathbf{S}_j^{(baz)}(r) = \mathbf{S}(r)|_{\Gamma_j} \right\}_{j=1}^3$$

определяются спектральные решения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(sp)}(r) &= \mathbf{M}_1(r) \cdot \mathbf{Y}, \quad \mathbf{S}^{(sp)}(r) = \mathbf{M}_2(r) \cdot \mathbf{Y}, \\ \mathbf{M}_1(r) &= \left[ \mathbf{U}_1^{(baz)}(r) \quad \mathbf{U}_2^{(baz)}(r) \quad \mathbf{U}_3^{(baz)}(r) \right], \\ \mathbf{M}_2(r) &= \left[ \mathbf{S}_1^{(baz)}(r) \quad \mathbf{S}_2^{(baz)}(r) \quad \mathbf{S}_3^{(baz)}(r) \right], \end{aligned}$$

в представлениях которых вектор-столбец  $\mathbf{Y}$  неизвестных определяется из спектральной задачи, полученной на основе альтернативных граничных условий (5) и (6):

$$\begin{aligned} \det \left( \mathbf{M}_j(1)|_{(k,\Omega)=(k_*,\Omega_*)} \right) &= 0 \quad (j = 1, 2); \quad (30) \\ \mathbf{M}_j(1)|_{(k,\Omega)=(k_*,\Omega_*)} \cdot \mathbf{Y} &= \mathbf{O} \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

На основании представленных спектральных решений можно сделать вывод о наличии в поле напряжений особенностей вида  $r^{\tau-1}$  и  $r^{-\tau}$  при  $\tau \in (1/2, 1)$  для волн  $S$ -типа, а также вида  $r^{\tau-2}$  при  $\tau \in (1, 2)$  для волн  $S$  и  $A$ -типов.

Таким образом, в зависимости от значений параметров  $p$  и  $\tau$  соотношениями (17), (21), (22), (24) определены начальные условия формирования трех независимых базисных решений; в явном виде (18)–(20), (23), (25)–(27) получены рекуррентные соотношения для построения искомым базисных решений; определены дисперсионные соотношения спектральной задачи (30) соответственно для жестко закрепленного

( $j = 1$ ) и свободного ( $j = 2$ ) цилиндрического участка граничной поверхности волновода. Специальный вид комплексных представлений для функций колебательных упругих перемещений в форме (8) обеспечивает при  $m \rightarrow \infty$  справедливость оценок

$$\left\| \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_m^{(2)} \right\| \leq \kappa_1/m, \quad \left\| \left( \mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^j \right\| \leq \kappa_2/m^2 \quad (j = \overline{3,5}),$$

непосредственным следствием которых является вывод об абсолютной и равномерной сходимости разложений (28), (29) на отрезке  $r \in [0, 1]$ .

**3. Результаты вычислительного эксперимента.** В процессе численных исследований с целью верификации построенных в работе аналитических решений реализован расчет фрагмента спектра мод распространяющихся нормальных волн в однородном ( $\lambda = 0$ ,  $p = 0$ ) трансверсально-изотропном цилиндре секторного поперечного сечения угловой меры  $\alpha = \pi/2$  из кобальта в случае второй спектральной задачи (30) ( $j = 2$ ) для волн  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ), характеризуемых спектральным параметром  $\tau = 1$ . Особенностью описанной модели волнового процесса является ее полная идентичность модели распространения нормальных волн с окружным волновым числом равным единице вдоль сплошного цилиндрического волновода со свободной граничной поверхностью. Результаты ранее проводившихся исследований для аналогичного волновода представлены в работе [7]. Сопоставление результатов выполненных расчетов обнаруживает их полное соответствие.

При исследовании факторов влияния величины показателей радиальной неоднородности ( $\lambda, p$ ) и угловой меры сектора  $\alpha$  на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн при численном эксперименте в качестве базовых однородных ( $\lambda = 0$ ,  $p = 0$ ) были выбраны конкретные трансверсально-изотропные материалы, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами введенного в [8] приведенного параметра волновой анизотропии  $\Delta$ . Из групп материалов с отрицательными и положительными значениями этого параметра взяты  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  и  $Co^{(\lambda=0, p=0)}$  соответственно с характеристиками ( $c_* = 10^{10}$  Па)

$$\{ \tilde{c}_{11} = 16.35, \tilde{c}_{12} = 2.64, \tilde{c}_{13} = 5.17, \tilde{c}_{33} = 5.31, \tilde{c}_{44} = 3.78, \rho = 7134 \text{ кг/м}^3 \},$$

$$\{ \tilde{c}_{11} = 30.7, \tilde{c}_{12} = 16.5, \tilde{c}_{13} = 10.27, \tilde{c}_{33} = 35.8, \tilde{c}_{44} = 7.55, \rho = 8836 \text{ кг/м}^3 \}.$$

Расчет фрагментов дисперсионных спектров бегущих нормальных волн осуществлялся в диапазонах изменения параметров приведенной частоты  $\Omega \in [0, 45]$  и продольного нормализованного волнового числа  $ka \in [0, 30]$  ( $a = R_*$ ) для значений угловой меры сектора  $\alpha = \pi/3$  ( $\tau = 3/2$ ,  $\beta = 0$ ) и  $\alpha = 5\pi/6$  ( $\tau = 3/5$ ,  $\beta = 0$ ) в случаях однородного ( $\lambda = 0$ ,  $p = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндров со свободным участком цилиндрической граничной поверхности. С целью анализа влияния радиальной неоднородности материала волновода на топологию получаемых спектров введена нормализованная частота  $\omega a/c_t$ , нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости в представлении которой при визуализации парных

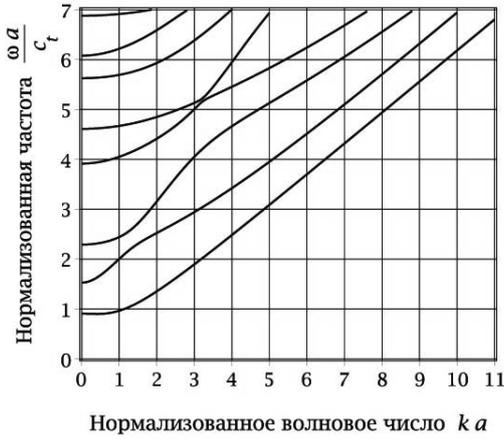


Рис. 1. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Co^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = \pi/3$ ,  $\tau = 3/2$ ,  $\beta = 0$ )

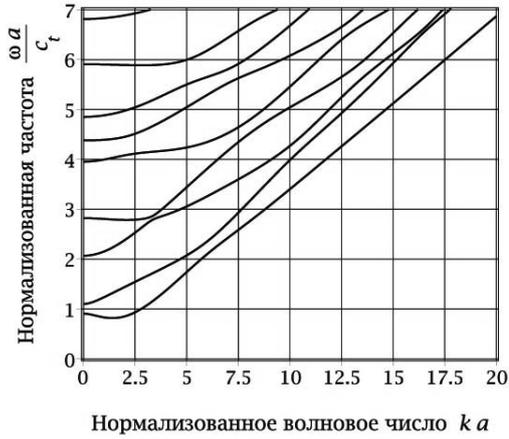


Рис. 2. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = \pi/3$ ,  $\tau = 3/2$ ,  $\beta = 0$ )

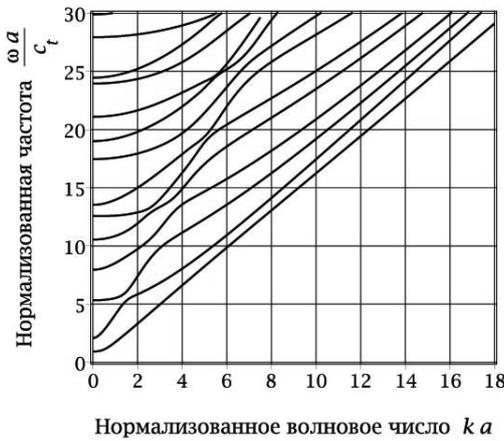


Рис. 3. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Co^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = 5\pi/6$ ,  $\tau = 3/5$ ,  $\beta = 0$ )



Рис. 4. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = 5\pi/6$ ,  $\tau = 3/5$ ,  $\beta = 0$ )

(однородный-неоднородный) спектров на рис. (1–6) определялся из условия равенства единице нижней ненулевой нормализованной критической частоты в соответствующем однородном волноводе. Характерной отличительной особенностью представленных на рис. (1–4) распределений является существенная локализация в длинноволновом диапазоне двух первых мод в окрестности первой критической частоты для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  при угловой мере сектора в его поперечном сечении  $\alpha = \pi/3$ .

На рис. 5 и рис. 6 представлены результаты сравнительного количественного анализа различий в поведении первых шести мод спектров для однородного ( $\lambda = 0$ ,  $p = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндров из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  для

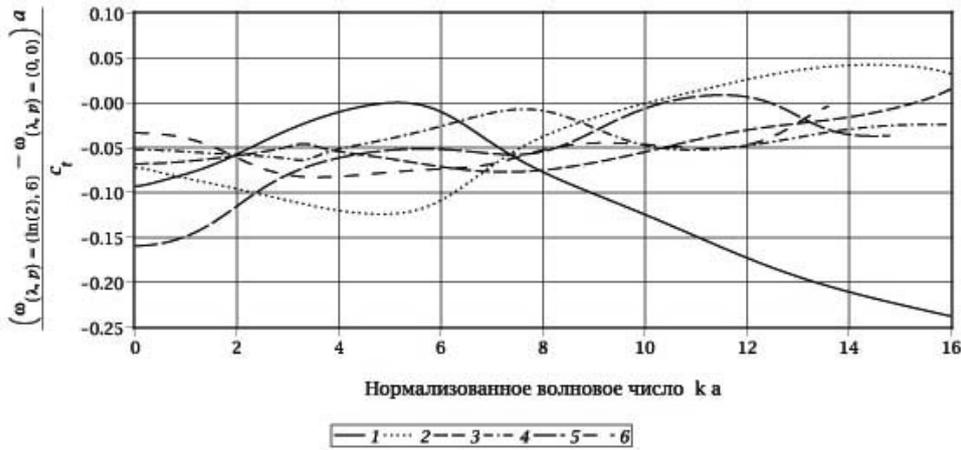


Рис. 5. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ( $\lambda = 0, p = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2), p = 6$ ) цилиндров из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  при  $\alpha = \pi/3$  ( $\tau = 3/2, \beta = 0$ )

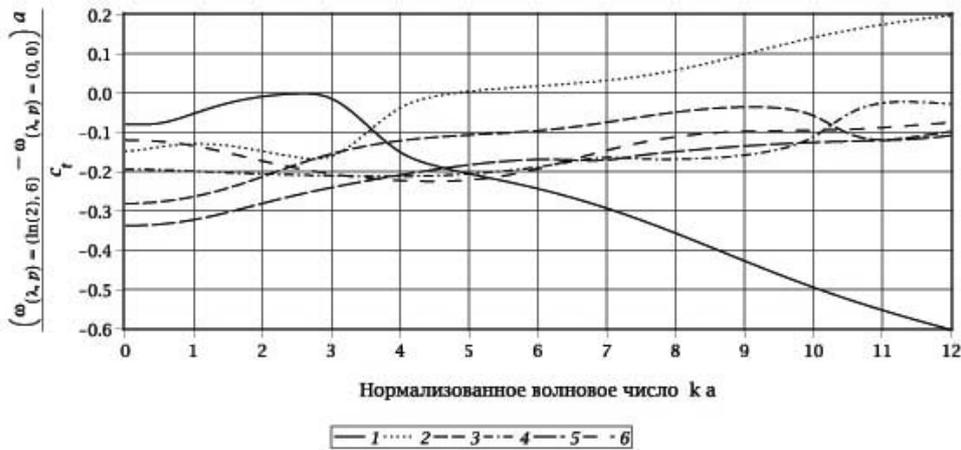


Рис. 6. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ( $\lambda = 0, p = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2), p = 6$ ) цилиндров из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  при  $\alpha = 5\pi/6$  ( $\tau = 3/5, \beta = 0$ )

различных значений угловой меры сектора в его поперечном сечении. В качестве количественной меры отличий в распределениях ветвей сопоставляемых спектров использовалась функция сравнения двух парных по номеру в соответствующих спектрах мод  $\Delta\omega(x) = (\omega_{(\lambda=\lambda^*, p=p^*)}(x) - \omega_{(\lambda=0, p=0)}(x)) a/c_t$ , характеризующая эффекты уменьшения либо увеличения нормализованной частоты волны в парной моде неоднородного волновода при рассматриваемой относительной ее длине. Здесь можно отметить общую закономерность понижения нормализованной частоты для первых шести мод спектра в неоднородном волноводе в длинноволновом диапазоне соответственно  $ka < 10.0$  ( $\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$ ) и  $ka < 4.8$  ( $\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0$ ) при сохранении указанной тенденции для первой моды и в оставшейся части волнового диапазона.

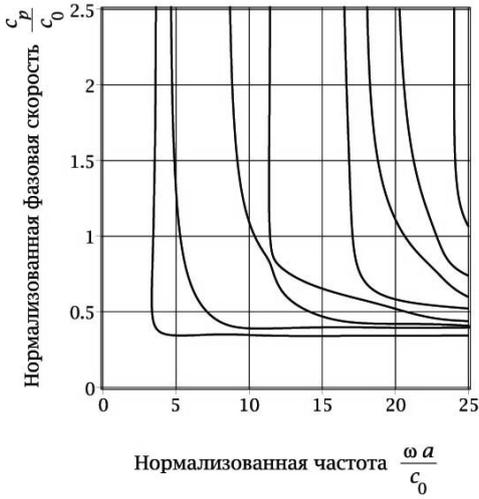


Рис. 7. Расчет фазовых скоростей для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = \pi/3$ ,  $\tau = 3/2$ ,  $\beta = 0$ )

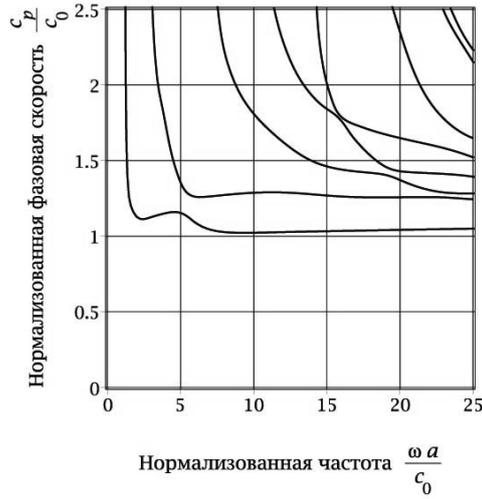


Рис. 8. Расчет фазовых скоростей для неоднородного ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндра из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  ( $\alpha = 5\pi/6$ ,  $\tau = 3/5$ ,  $\beta = 0$ )

Результаты расчетов нормализованных фазовых скоростей для нормальных распространяющихся упругих волн в неоднородном ( $\lambda = \ln(2)$ ,  $p = 6$ ) цилиндре из  $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$  при различных значениях угловой меры сектора в его поперечном сечении представлены на рис. 7 и рис. 8, в которых использовался нормирующий параметр  $c_0 = \sqrt{c_*/\rho}$  с размерностью скорости. В качестве различающих при переходе от  $\alpha = \pi/3$  к  $\alpha = 5\pi/6$  отмечается: увеличение более чем в два раза асимптотического значения для нормализованной фазовой скорости низшей моды спектра; “сдвиг” устойчивого асимптотического поведения всех исследованных мод спектров в более высокочастотную область; переход эффекта взаимного влияния третьей и четвертой мод при  $\omega a/c_0 \approx 11$  к первой и второй модам при  $\omega a/c_0 \approx 5$ .

**Выводы.** В результате проведенных исследований в форме абсолютно и равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами получено решение системы дифференциальных уравнений, описывающее распространение симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн в протяженных цилиндрах с вырезом секторной формы, изготовленных из трансверсально-изотропных материалов с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью. Построенное решение использовано для получения дисперсионных уравнений, определяющих спектры указанных волн для цилиндров со свободным и жестко закрепленным участком цилиндрической граничной поверхности. На основе предложенной модели проанализирована зависимость топологии распределений действительных ветвей спектров и фазовых скоростей бегущих нормальных волн от параметров радиальной неоднородности и угловой меры сектора в поперечном сечении волновода. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой акустической диагностики, акустоэлектроника.

1. Космодамианский А.С., Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Дисперсионный спектр анизотропного волновода секторного сечения с закрепленной границей // Прикладная механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 46–51.
2. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с сечением в форме кольцевого сектора // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 127–133.
3. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом: случай свободных участков цилиндрических границ // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 52–60.
4. Моисеенко И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
5. Моисеенко И.А. Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Вісник Запорізького національного університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 179–189.
6. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – №. 9 (55). – С. 139–145.
7. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N., Mirnezami S.A. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – 44. – P. 5236–5246.
8. Космодамианский А.С., Сторожжев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.

#### I. A. Moiseyenko

##### The spectra of normal elastic waves in transversely isotropic waveguides with sector-shaped cross section and functionally graded radial non-homogeneity.

In this paper, of constructing solutions for the propagation of normal waves in radially non-homogeneous transversely isotropic cylinder with sector-shaped cross section problems is investigated. The elastic modules and density are taken as an exponential-power function of the radial coordinate. Expansions in uniformly and absolutely convergent series on radial coordinate for the components of the vector displacements and the components of the tensor stresses obtained. Dispersion relations describing the spectra of harmonics for symmetric and antisymmetric normal waves in the radially non-homogeneous cylindrical waveguide with perfectly flexible inextensible membrane covering boundary surfaces of the channel and free or rigidly fixed of the cylindrical portion of the lateral surface made of transversely isotropic material obtained. The effect of radial non-homogeneity ratios and angular channel measure on the topology of the dispersion spectrums and distribution of the phase velocities of normal propagating waves studied.

**Keywords:** *cylindrical waveguide, sector-shaped cross section, normal waves, functionally graded, transversely isotropic, frequency equation.*

УДК 531.376

©2015. Р. Н. Нескородев

## МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе предложен метод решения задач теории вязкоупругости, основанный на построении матриц уравнений закона Гука исходя из интегральных уравнений состояния. Элементы этих матриц строятся с использованием дробно-экспоненциальных функций Ю.Н. Работнова и зависят от времени. Это позволяет решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости. Приведены результаты численных исследований.

**Ключевые слова:** ползучесть, релаксация, резольвентный оператор, метод Вольтерра, ортотропный вязкоупругий материал, переменные коэффициенты упругости.

**Введение.** Непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным. Это связано с тем, что существует лишь незначительное число задач теории упругости, для которых известна явная зависимость от упругих постоянных, если использовать упругое решение в обычной форме. В общем случае это решение может содержать иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к решению таких задач. Поэтому, для решения упругих задач, применяются приближенные методы, идея которых состоит в поиске решения, когда его зависимость от упругих постоянных устанавливается в явном виде. Широкое применение нашло использование рядов по малому параметру. Этим методом решен ряд задач для изотропных и анизотропных сред [14].

Степенные ряды, в которые раскладываются иррациональные и трансцендентные функции, как правило, сходятся медленно. Чтобы обойти эту проблему в работах [5–6] предлагается использование цепных дробей, которые обеспечивают быстро сходящийся процесс последовательных приближений.

Методом переменных модулей названы способы решения задач вязкоупругости с использованием функций времени вместо интегральных операторов [1, 3].

В настоящей работе предлагается метод решения задач теории вязкоупругости, основанный на построении матриц уравнений закона Гука исходя из интегральных уравнений состояния. Элементы этих матриц строятся с использованием дробно-экспоненциальных функций Ю.Н. Работнова и зависят от времени. Это позволяет решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости [9, 12, 13].

**1. Уравнения состояния. Функции ползучести и релаксации.** Рассмотрим упругое равновесие анизотропного тела, отнесенного к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Для определения перемещений, напряжений и деформаций, возникающих в теле при его длительном нагружении внешними усилиями, используются уравнения со-

стояния, учитывающие свойства материала деформироваться во времени [4]

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0) \mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{e}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0) \mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь принято:  $\mathbf{s}(t) = s_m = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]$ ,  $\mathbf{e}(t) = e_n = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]$  – векторы напряжений и деформаций в произвольный момент времени  $t$ ;  $\mathbf{R}(t) = R_{mn}(t)$  и  $\mathbf{P}(t) = P_{mn}(t)$  ( $m, n = \overline{1, 6}$ ) – регулярные части матриц функций релаксации и ползучести. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги, матрицы модулей упругости  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A} = A_{mn}$  и коэффициентов деформации  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a} = a_{mn}$  – характеризуют свойства упругого материала.

Закон Гука для упругой задачи получаем из уравнений (1) и (2) в предположении, что  $t = 0$ . В момент приложения внешних усилий или деформаций (время  $t = 0$ ) упругие постоянные материала характеризуются матрицей  $\mathbf{A}$  – модулей упругости, или  $\mathbf{a}$  – коэффициентов деформации, а решение является упругим. Дальнейшее поддержание усилий или деформаций (время  $t > 0$ ), приводит к тому, что материал продолжает деформироваться. Мгновенные значения функций ползучести  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a}$ , релаксации  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A}$ , напряжений  $\mathbf{s}(0) = \sigma$  и деформаций  $\mathbf{e}(0) = \varepsilon$  показывают, что функции времени наделяются начальными значениями, являющимися решением упругой задачи.

Представим функции  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{P}$  в виде произведения  $\mathbf{R}(t) = R_{mn}(t) = A_{mn}r_{mn}(t)$ ,  $\mathbf{P}(t) = P_{mn}(t) = a_{mn}p_{mn}(t)$ , где  $r_{mn}(t)$ ,  $p_{mn}(t)$  – матрицы функций релаксации и ползучести. Уравнения состояния (1) и (2) легко преобразовать к виду

$$s_m(t) = \bar{A}_{mn}e_n(t) = A_{mn}(1 - r_{mn}^*)e_n, \quad r_{mn}^*e_n = - \int_0^t \frac{dr_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_n(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$e_m(t) = \bar{a}_{mn}s_n(t) = a_{mn}(1 + p_{mn}^*)s_n, \quad p_{mn}^*s_n = \int_0^t \frac{dp_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_n(\tau) d\tau. \quad (4)$$

При использовании принципа Вольтерра, существенное значение имеет аналитическое задание ядер ползучести и релаксации. Ю.Н. Работнов [10] построил класс функций

$$\mathcal{D}_\alpha(\beta; t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (t-\tau)^{\alpha+n(1+\alpha)} \beta^n / \Gamma[(n+1)(1+\alpha)]. \quad (5)$$

Эти функции названы дробно-экспоненциальными. Операторы с ядрами вида (5) обладают специальной алгеброй, резольвенты их образованы из функций того

же класса. Если принять  $dp_{mn}(t - \tau) / d(t - \tau) = \lambda \mathcal{D}_\alpha(\beta; t - \tau)$ , то интегральный оператор  $\bar{a}_{mn}$  представлений (4) станет таким

$$\bar{a}_{mn} = a_{mn} [1 + \lambda_{mn} \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta_{mn})]. \quad (6)$$

Уравнения состояния (3) и (4) имеют такой же вид, что и обычный закон Гука, только матрицы упругих постоянных  $A_{mn}$  и  $a_{mn}$  заменены упругими операторами  $\bar{A}_{mn}$  и  $\bar{a}_{mn}$ , которые зависят от времени.

Функции  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  определяются из эксперимента. В опыте на ползучесть мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными напряжения [4]. Если нагрузки постоянны, то напряжения  $s(\tau)$  в (2) можно принять зависимыми от верхнего предела и вынести из под знака интеграла. Интегрирование уравнения (2) в этом случае дает

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{s}(t). \quad (7)$$

В опыте на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации [4]. Полагаем их зависимыми от верхнего предела и выносим из под знака интеграла в уравнении (1). Интегрирование уравнения (1) в этом случае дает

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{e}(t). \quad (8)$$

Опыты на ползучесть и релаксацию осуществляются при одноосном растяжении, сжатии, изгибе или сдвиге. Они являются базовыми экспериментами, которые необходимы для определения ядер ползучести и релаксации. В одномерном случае при одноосном усилии  $s_n$  матричное уравнение (7) состоит из элементов

$$e_{mn} = P_{mn} s_n = a_{mn} p_{mn} s_n, \quad (9)$$

где  $e_{mn}$  – деформация  $e_m$  от воздействия усилия  $s_n$ .

Из соотношения (9) находим значения элементов матрицы  $\mathbf{P}(t)$  по величине измеренных деформаций во времени

$$P_{mn} = a_{mn} p_{mn} = e_{mn} / s_n. \quad (10)$$

При усилиях  $s_n$ , для которых свойства материала остаются линейными, величина  $P_{mn}(t) = e_{mn} / s_n$  не зависит от  $s_n$ .

Аналогично, матричное уравнение (8) в одномерном случае при одноосной деформации  $e_n$  распадается на элементы

$$s_{mn} = R_{mn} e_n = A_{mn} r_{mn} e_n, \quad (11)$$

где  $s_{mn}$  – усилия  $s_m$  от воздействия деформации  $e_n$ .

Из соотношения (11) находим значения элементов матрицы  $\mathbf{R}(t)$  по величине измеренных напряжений во времени

$$R_{mn} = A_{mn} r_{mn} = s_{mn} / e_n. \quad (12)$$

При деформациях  $e_n$ , для которых свойства материала остаются линейными, величина  $R_{mn}(t) = s_{mn}/e_n$  не зависит от  $e_n$ .

Экспериментальные данные  $e_{mn}/s_n$  и  $s_{mn}/e_n$  позволяют вычислить функции ползучести  $p_{mn}(t)$  и релаксации  $r_{mn}(t)$  и сформировать матрицы  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$ . Отметим, что экспериментально найденные данные задаются таблично, дискретным набором значений, соответствующим некоторым фиксированным временам. При использовании таких данных в вычислениях, для обеспечения точности расчетов необходимо осуществить математическую обработку табличных данных. Такая обработка включает в себя сглаживание кривых ползучести или релаксации и восполнение табличных данных путем увеличения числа точек разбиения временного отрезка  $[0, t]$ . Эти вопросы рассмотрены в работе [13].

Связь между матрицами  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  установлена в работах [9, 12]. Имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_k = \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{k-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k = \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{k-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (14)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$ ,  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$ ,  $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$ ,  $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$  – значения функций в соответствующие моменты времени.

С помощью представлений (13) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находим функции релаксации, а с помощью (14) – наоборот. Таким образом, соотношения (13) и (14) полностью решают задачу обращения уравнений (1) или (2).

Опытные данные по ползучести и релаксации, которые позволили бы определить все величины, входящие в правые части соотношений (10) и (12), в литературе отсутствуют. Поэтому, для уменьшения числа параметров, находящихся из экспериментов, при решении конкретных задач применяются различные допущения относительно реологического поведения материала [6, 10]. Симметрия матриц  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  показывает, что должны выполняться равенства  $P_{ik} = P_{ki}$ ,  $R_{ik} = R_{ki}$ . Отсюда следует, что не все параметры должны определяться из эксперимента. В случае изотропного материала часто используется допущение об упруго сжимаемом материале. Это позволяет по заданному интегральному оператору  $\overline{\mathcal{V}}$  определять оператор  $\overline{E}$  и наоборот [10].

Для ортотропного материала, принимаются допущения, аналогичные принятым допущениям для изотропного материала. Вводится величина обратная модулю объемной деформации при гидростатическом давлении [2]

$$\frac{1}{K} = \frac{1 - \nu_{12} - \nu_{13}}{E_1} + \frac{1 - \nu_{21} - \nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - \nu_{31} - \nu_{32}}{E_3}. \quad (15)$$

Упругие постоянные, входящие в представление (15), для всякого однородного

анизотропного тела удовлетворяют условию [8]

$$\frac{2}{K} = \frac{1 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{21}}{E_2} + \frac{1 - 2\nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - 2\nu_{32}}{E_3} + \frac{1 - 2\nu_{31}}{E_3} + \frac{1 - 2\nu_{13}}{E_1} \geq 0. \quad (16)$$

Следуя Работнову [10], потребуем, чтобы оператор, соответствующий величине (15) был постоянным. Это значит, что

$$1/\overline{K} = 1/K = \text{const}. \quad (17)$$

Считая объемную деформацию упругой, полагаем приведенные ниже слагаемые представления (16) постоянными

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{21}}{E_2} &= \frac{1 - 2\overline{\nu}_{12}}{\overline{E}_1} + \frac{1 - 2\overline{\nu}_{21}}{\overline{E}_2}, \quad \frac{1 - 2\nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - 2\nu_{32}}{E_3} = \frac{1 - 2\overline{\nu}_{23}}{\overline{E}_2} + \frac{1 - 2\overline{\nu}_{32}}{\overline{E}_3}, \\ \frac{1 - 2\nu_{13}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{31}}{E_3} &= \frac{1 - 2\overline{\nu}_{13}}{\overline{E}_1} + \frac{1 - 2\overline{\nu}_{31}}{\overline{E}_3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Условия (18) дают постоянство соотношению (17), а из условия (16) следует, что анизотропное тело в условиях ползучести находится в упругом состоянии. Соотношения (18) позволяют определить величины  $\overline{\nu}_{ik}$  по известному значению операторов  $\overline{E}_i$  и наоборот.

**2. Установление связи между интегральными операторами и функциями ползучести и релаксации.** Матричные уравнения (8) и (7) запишем в форме

$$s_m(t) = A_{mn} r_{mn}(t) e_n(t) \quad \text{и} \quad e_m(t) = a_{mn} p_{mn}(t) s_n(t) \quad (m, n = \overline{1, 6}), \quad (19)$$

и сравним с уравнениями состояния (3) и (4). В результате получим равенства

$$(1 - r_{mn}^*) = r_{nm}(t), \quad (1 + p_{mn}^*) = p_{nm}(t). \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда из эксперимента на ползучесть определена матрица функций ползучести  $P_{mn} = a_{mn} p_{mn}(t)$ . В этом случае второе равенство (20) с учетом представления (6) будет таким

$$p_{mn}(t) = 1 + p_{mn}^* = 1 + \lambda_{mn} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_{mn}). \quad (21)$$

Соотношение (21) позволяет, путем аппроксимации, по заданной функции ползучести  $p_{mn}(t)$ , определить значение интегрального оператора  $\lambda_{mn} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_{mn})$ . Временные матрицы уравнений закона Гука определяется соотношениями

$$\overline{a}_{mn} = a_{mn} [1 + \lambda_{mn} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_{mn})], \quad \overline{A}_{mn} = (\overline{a}_{mn})^{-1}. \quad (22)$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда из эксперимента на релаксацию определена матрица функций релаксации  $R_{mn}(t)$ . В этом случае имеем

$$r_{mn}(t) = 1 - r_{mn}^* = 1 - \lambda_{mn} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_{mn}). \quad (23)$$

Соотношение (23) позволяет, путем аппроксимации, по заданной функции релаксации  $r_{mn}(t)$ , определить значение интегрального оператора  $\lambda_{mn}\mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_{mn})$ . Временные матрицы уравнений закона Гука определяются соотношениями

$$\bar{A}_{mn} = A_{mn} [1 - \lambda_{mn}\mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_{mn})], \quad \bar{a}_{mn} = (\bar{A}_{mn})^{-1}. \quad (24)$$

Дальнейшее решение задач теории вязкоупругости в любой момент времени ничем не отличается от решения задач теории упругости.

Из представлений  $\mathbf{P}(t) = a_{mn}p_{mn}(t)$  и  $\mathbf{R}(t) = A_{mn}r_{mn}(t)$  и связи между ними, отмеченную соотношениями (13) и (14) следует, что если экспериментально найдена матрица функций ползучести  $\mathbf{P}(t)$  (или релаксации  $\mathbf{R}(t)$ ), то матрица функций релаксации  $\mathbf{R}(t)$  (или ползучести  $\mathbf{P}(t)$ ) может быть найдена аналитически по формулам (13) (или (14)) или экспериментально.

### 3. Обобщенное плоское напряженное состояние анизотропной пластины.

**3.1. Представление решения.** Рассмотрим упругое равновесие анизотропной пластины толщиной  $2h$ . Отнесем ее к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы ее срединная плоскость совпала с плоскостью  $Ox_1x_2$ , а ось  $Ox_3$  направим по нормали к срединной плоскости. Предполагаем, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [7]. Уравнения закона Гука для средних напряжений и деформаций в этом случае можно записать в форме (3) или (4), когда  $t = 0$  и введены векторы напряжений и деформаций  $s_n(0) = \sigma_n = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6]$ ,  $e_m(0) = \varepsilon_m = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6]$ , а матрицы коэффициентов деформации и модулей упругости будут такими

$$a_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad A_{mn} = (a_{mn})^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Указанные уравнения закона Гука вместе с уравнениями равновесия без учета объемных сил  $\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 = 0$ ,  $\partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 = 0$ , и уравнениями связи между составляющими деформации и перемещений  $\varepsilon_1 = \partial_1u_1$ ,  $\varepsilon_2 = \partial_2u_2$ ,  $\varepsilon_6 = \partial_1u_2 + \partial_2u_1$ ,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ , образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропной пластине.

Общее решение этой системы уравнений выражается через две аналитические функции  $\Phi_j(z_j)$  обобщенных комплексных переменных  $z_j = x_1 + \mu_j x_2$  [13]

$$u_k^* = 2Re \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j). \quad (26)$$

В соответствии с решением (26), представление для напряжений примут вид:

$$\sigma_1^* = 2Re (\mu_1^2 \Phi_1' + \mu_2^2 \Phi_2'), \quad \sigma_2^* = 2Re (\Phi_1' + \Phi_2'), \quad \sigma_6^* = -2Re (\mu_1 \Phi_1' + \mu_2 \Phi_2'). \quad (27)$$

Комплексные параметры  $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  являются решением характеристического уравнения четвертого порядка

$$l_{11}(\mu) l_{22}(\mu) - l_{12}(\mu) l_{21}(\mu) = 0. \quad (28)$$

Величины  $l_{ik}(\mu)$  и коэффициенты  $R_{kj}$  находятся из соотношений

$$\begin{aligned} l_{11} &= A_{11} + 2A_{16}\mu + A_{66}\mu^2, \quad l_{12} = l_{21} = A_{16} + (A_{12} + A_{66})\mu + A_{26}\mu^2, \\ l_{22} &= A_{66} + 2A_{26}\mu + A_{22}\mu^2, \quad R_{1j} = l_{22}(\mu_j) / \Delta_j, \quad R_{2j} = -l_{21}(\mu_j) / \Delta_j, \\ \Delta_j &= A_{21}l_{22}(\mu_j) - A_{26}l_{21}(\mu_j) + \mu_j [A_{26}l_{22}(\mu_j) - A_{22}l_{21}(\mu_j)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что решение (26) выписано для случая, когда параметры  $\mu_j$  различны. В случае, когда пластина изотропна или уравнение (28) имеет равные комплексные параметры  $\mu_1 = \mu_2$  при решении граничных задач можно использовать соотношения (26), (27) с учетом методики, предложенной в работе [15].

Плоскость  $Ox_1x_2$ , в которой определены функции  $\Phi_j(z_j)$  и их производные  $\Phi'_j(z_j) = d\Phi_j/dz_j$ , обозначим буквой  $S$ . Функции  $\Phi_j(z_j)$  можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных  $z_j = x_j + iy_j$ , где

$$x_j = x_1 + \alpha_j x_2, \quad y_j = \beta_j x_2, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \quad (30)$$

При этом, функции  $\Phi_j(z_j)$  должны быть определены не в области  $S$ , а в областях  $S_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ), полученных из области  $S$  аффинными преобразованиями (30).

**3.2. Упругая задача для пластины с отверстиями.** Рассмотрим решение задачи для пластины с отверстиями, когда на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_1^0 = p, \quad \sigma_2^0 = q, \quad \sigma_6^0 = l. \quad (31)$$

Перемещения и деформации в пластине без отверстий представляются в форме

$$u_1^0 = \varepsilon_1^0 x_1 + \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_2, \quad u_2^0 = \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_1 + \varepsilon_2^0 x_2, \quad (32)$$

$$\varepsilon_1^0 = a_{11}p + a_{12}q + a_{16}l, \quad \varepsilon_2^0 = a_{21}p + a_{22}q + a_{26}l, \quad \varepsilon_6^0 = a_{61}p + a_{62}q + a_{66}l.$$

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет отверстий, описывается функциями (26), (27). Определение этих функций осуществляется из граничных условий на контурах отверстий. Рассмотрим два вида таких условий.

**Контур не подкреплён.** Граничные условия на контуре для определения функций  $\Phi_j(z_j)$  будут такими [7]:

$$2Re[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2] = lx - py + c_1, \quad 2Re[\Phi_1 + \Phi_2] = ly - qx + c_2. \quad (33)$$

**Контур жестко подкреплён.** При жестко подкреплённом контуре на его боковой поверхности нужно положить равными нулю перемещения. Условия для определения функций  $\Phi_j(z_j)$  будут такими

$$2Re \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j) = -u_k^0 \quad (k = \overline{1, 2}). \quad (34)$$

**3.3. Пластина с одним отверстием эллиптического сечения.** Рассмотрим случай, когда пластина ослаблена одним отверстием эллиптического сечения. Полуоси эллипса  $a$  и  $b$ . Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура  $L_j$  будет такой [13]

$$z_j = R_j \varsigma_j + m_j / \varsigma_j \quad (35)$$

$$R_j = (a - i\mu_j b) / 2, \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2, \quad \varsigma_j = r_j \sigma, \quad r_j \geq 1, \quad \sigma = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Представим функцию  $\Phi_j(z_j)$  в виде:

$$\Phi_j(z_j) = a_j / \varsigma_j. \quad (36)$$

Методом рядов из граничных условий (33) и (34) найдем системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов функции (36):

**для неподкрепленного контура**

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = (la - pbi) / 2, \quad a_1 + a_2 = (lbi - qa) / 2; \quad (37)$$

**для жестко подкрепленного контура**

$$R_{11} a_1 + R_{12} a_2 = -(\varepsilon_1^0 a + \varepsilon_6^0 bi / 2) / 2, \quad R_{21} a_1 + R_{22} a_2 = -(\varepsilon_6^0 a / 2 + \varepsilon_2^0 bi) / 2. \quad (38)$$

Решение вязкоупругой задачи проводится аналогичным образом, но вместо уравнений состояния (3) или (4), когда  $t = 0$ , выбирается случай, когда  $t$  – произвольно. При этом, если контур не подкреплен, выбирается уравнение состояния (4), при жестком подкреплении используется уравнение состояния (3).

**4. Формирование матриц уравнений состояния, меняющихся во времени.** Рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случая обобщенного плоского напряженного состояния ортотропной пластинки. Матрицы  $a_{mn}$  и  $A_{mn}$  представлений (25) формируются с помощью технических упругих постоянных, которые в процессе длительного нагружения пластинки заменяются временными интегральными операторами. Отметим, что из экспериментов на ползучесть или релаксацию определяются операторы именно технических упругих постоянных. Из упругих постоянных матриц  $a_{mn}$  и  $A_{mn}$  формируется матрица интегральных операторов  $\bar{a}_{mn}$  и  $\bar{A}_{mn}$

$$\bar{a}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\bar{\nu}_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\bar{\nu}_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{G}_{12}} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{E}_1}{1 - \bar{\nu}_{12} \bar{\nu}_{21}} & \frac{\bar{E}_2 \bar{\nu}_{12}}{1 - \bar{\nu}_{12} \bar{\nu}_{21}} & 0 \\ \frac{\bar{E}_1 \bar{\nu}_{21}}{1 - \bar{\nu}_{12} \bar{\nu}_{21}} & \frac{\bar{E}_2}{1 - \bar{\nu}_{12} \bar{\nu}_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_{12} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Здесь модули Юнга  $E_i$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_{ik}$ , модуль сдвига  $G_{12}$ , входящие в уравнения закона Гука, заменены линейными интегральными операторами  $\bar{E}_i$ ,  $\bar{\nu}_{ik}$ , и  $\bar{G}_{12}$ . Для сохранения симметрии матрицы уравнений состояния, необходимо чтобы выполнялись условия

$$\bar{\nu}_{12} \bar{E}_2 = \bar{\nu}_{21} \bar{E}_1. \quad (40)$$

В работе [5] приведены результаты экспериментов по ползучести полимерного композитного материала на основе эпоксидного связующего (материал 1). Операторы  $1/\bar{E}_i$  и  $1/\bar{G}_{12}$  аппроксимировались с помощью операторов

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E_i} [1 + \lambda_i \Theta_\alpha^*(-\beta_i)], \quad \frac{1}{\bar{G}_{12}} = \frac{1}{G_{12}} [1 + \lambda_6 \Theta_\alpha^*(-\beta_6)], \quad (41)$$

где интегральные операторы  $\Theta_\alpha^*(-\beta_i)$  содержат ядро Работнова (5).

Операторный коэффициент Пуассона принят равным мгновенному значению. Упругие и реологические характеристики указанного материала приведены ниже.

**Материал 1.**

$$\begin{aligned} E_1 &= 23 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0.0323 c^\delta, \quad \beta_1 = 0.1570 c^\delta, \quad \nu_{12} = 0.11, \\ E_2 &= 16 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0.1295 c^\delta, \quad \beta_2 = 0.2745 c^\delta, \quad \nu_{21} = 0.0765, \\ G_{12} &= 3.08 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_6 = 0.0717 c^\delta, \quad \beta_6 = 0.0276 c^\delta, \\ \lambda_{12} &= \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0, \quad \delta = -(1 + \alpha), \quad \alpha = -0.846. \end{aligned} \quad (42)$$

Исходные операторы имеют вид (41) и

$$\bar{\nu}_{12} = \nu_{12} [1 + \lambda_{12} \Theta_\alpha^*(-\beta_{12})], \quad \bar{\nu}_{21} = \nu_{21} [1 + \lambda_{21} \Theta_\alpha^*(-\beta_{21})].$$

Требование одновременного равенства операторов  $\bar{\nu}_{12}$  и  $\bar{\nu}_{21}$ , мгновенному значению, как это указано в соотношениях (42) приводит к нарушению равенства (40). Укажем несколько возможных выходов из создавшегося положения.

1. Полагаем  $\bar{\nu}_{12} = \nu_{12} = const$ . Тогда из равенства (40) находим  $\bar{\nu}_{21}$ . Затем полагаем  $\bar{\nu}_{21} = \nu_{21} = const$ . Из равенства (40) определяем  $\bar{\nu}_{12}$ . Комбинируя полученные соотношения, получим

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{12} &= \nu_{12} [1 + (1 - \gamma) \lambda_{12} \Theta_\alpha^*(-\beta_2) - (1 - \gamma) \lambda_{11} \Theta_\alpha^*(-\beta_1 - \lambda_1)], \\ \bar{\nu}_{21} &= \nu_{21} [1 + \gamma \lambda_{21} \Theta_\alpha^*(-\beta_1) - \gamma \lambda_{22} \Theta_\alpha^*(-\beta_2 - \lambda_2)] \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \\ \lambda_{12} &= \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \beta_1 - \beta_2}, \quad \lambda_{11} = \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \beta_1 - \beta_2}, \\ \lambda_{21} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + \beta_2 - \beta_1}, \quad \lambda_{22} = \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + \beta_2 - \beta_1}. \end{aligned} \quad (43)$$

2. Из первого соотношения (18) находим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} &= \frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\bar{E}_1} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{\bar{E}_2} - \frac{1}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} \right] = \\ &= \frac{\nu_{12}}{E_1} \left[ 1 + \frac{\lambda_1}{4\nu_{12}} \Theta_\alpha^*(-\beta_1) + \frac{\lambda_2}{4\nu_{21}} \Theta_\alpha^*(-\beta_2) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Представление (44) позволяет, используя алгебру операторов Работнова, определить операторы  $\bar{\nu}_{12}$  и  $\bar{\nu}_{21}$ .

3. Полагаем

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (45)$$

Таким образом, для приведенного выше материала можно сформировать симметричную матрицу  $\bar{a}_{mn}$  уравнений состояния (39).

Для изотропного материала имеем  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ,  $G_{12} = G = E/2/(1 + \nu)$ .

В работе [11] приведены опытные данные об изменении коэффициента Пуассона во времени в медных образцах. Оператор  $\bar{\nu}$  аппроксимировался с помощью дробно-экспоненциального оператора с ядром Работнова (5)

$$\bar{\nu} = \nu [1 + \lambda_\nu \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_\nu)]. \quad (46)$$

Упругие и реологические характеристики для меди приведены ниже.

**Материал 2 – медь**

$$G = 4.51 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad E = 2(1 + \nu)G, \quad \lambda_\nu = 6.65 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}, \\ \beta_\nu = 9.2 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu = 0.25, \quad \alpha = -0.5. \quad (47)$$

Приведенные в работе [11] опытные данные не содержат информации для определения операторов  $\bar{E}$  или  $\bar{G}$ . Используем предположение об упруго сжимаемом материале. Тогда, на основании первого равенства (18), соотношений алгебры операторов, а также известных зависимостей  $1/\bar{G} = 2(1 + \bar{\nu})/\bar{E}$ , последовательно найдем

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E} [1 + \lambda_e \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_e)], \quad \lambda_e = 2\nu\lambda_\nu / (1 - 2\nu), \quad \beta_e = \beta_\nu - \lambda_e, \\ \frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G} [1 + \lambda_g \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_g)], \quad \lambda_g = \frac{3\lambda_\nu\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad (48) \\ \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{\nu}{E} [1 + \lambda_{\nu e} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_e)], \quad \lambda_{\nu e} = \frac{\lambda_\nu}{1 - 2\nu}.$$

Реологические постоянные приведенных операторов, выразились через известные величины  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda_\nu$  и  $\beta_\nu$ , которые найдены в результате эксперимента.

Операторы (43)–(45) и (48) могут восполнить недостающие данные для представленных выше материалов.

**5. Решение для изотропной пластинки с круговым отверстием.** Решение упругой задачи для изотропной пластины с круговым отверстием радиуса  $R$ , когда на бесконечности заданы усилия  $\sigma_1^0 = p$ ,  $\sigma_2^0 = q$  представлены в работах [9, 12]. Ниже представлено решение, когда на бесконечности заданы усилия  $\sigma_6^0 = l$

$$\sigma_\theta = - \left( l + \frac{3b_{3i}}{r^4} \right) f_1, \quad \sigma_r = \left( l - \frac{4a_{1i}}{r^2} + \frac{3b_{3i}}{r^4} \right) f_1, \quad \tau_{r\theta} = \left( l - \frac{3b_{3i}}{r^4} + \frac{2a_{1i}}{r^2} \right) f_2, \\ u_r = \frac{1}{2G} \left[ rl + \frac{a_{1i}(\kappa + 1)}{r} - \frac{b_{3i}}{r^3} \right] f_1, \quad u_\theta = \frac{r}{2G} \left[ l + \frac{a_{1i}(\kappa - 1)}{r} + \frac{b_{3i}}{r^3} \right] f_2, \quad (49)$$

$$\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu), \quad f_1 = \sin(2\theta), \quad f_2 = \cos(2\theta).$$

**Решение для свободного контура.** Коэффициенты  $a_{1i}$  и  $b_{3i}$  определяются из граничных условий на контуре неподкрепленного отверстия  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  при  $r = R$ . Они будут такими

$$a_{1i} = lR^2, \quad b_{3i} = lR^4. \quad (50)$$

Из соотношений (50) видно, что найденные коэффициенты от упругих постоянных не зависят. Тогда и напряжения, определенные соотношениями (49), от упругих постоянных также не зависят и во времени не меняются. В представления для перемещений входят величины  $1/G$  и  $\kappa/G$ . Операторы, соответствующие этим величинам будут входить в выражения для перемещений.

**Решение для жестко подкрепленного контура.** Если контур отверстия жестко подкреплен, то из граничных условий  $u_r = u_\theta = 0$  при  $r = R$ , находим коэффициенты  $a_{1i}$  и  $b_{3i}$ . Они будут такими

$$a_{1i} = -\frac{R^2}{\kappa}l, \quad b_{3i} = -\frac{R^4}{\kappa}l. \quad (51)$$

Из соотношений (51) видно, что коэффициенты представлений (49) зависят от упругих постоянных. Этот факт свидетельствует об изменении в этом случае во времени как перемещений, так и напряжений. При этом, кроме приведенных выше, возникают и другие комбинации упругих постоянных:  $1/k$ ,  $1/(Gk)$ . Операторы, соответствующие этим величинам будут входить в выражения для напряжений и перемещений.

**6. Численные исследования.** Апробация предложенного метода осуществлена проведением численных исследований для изотропной и ортотропной пластин с неподкрепленным и жестко подкрепленным контуром. Результаты для изотропной пластины были получены методом, предложенным в данной работе при использовании методики, изложенной в работе [15]. Решение упругой задачи для бесконечной изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса  $R$ , когда на бесконечности заданы усилия (31), представлено в виде явной зависимости перемещений и напряжений от упругих постоянных [9, 12] и (49). Это дает возможность построить точное решение вязкоупругой задачи методом Вольтерра и провести численные исследования. Результаты исследований, в случае, когда контур не подкреплен или жестко подкреплен, использованы в виде теста при решении этих же задач методом, предложенным в настоящей работе. Сравнение результатов, полученных методом Вольтерра и предложенным в настоящей работе, показало их полное совпадение.

В табл. 1 приведены значения перемещений  $u_r$  и  $u_\theta$  в характерных точках кругового отверстия изотропной медной пластинки в различные моменты времени для случая когда  $\sigma_1^0 = 0$ ,  $\sigma_2^0 = 0$ ,  $\sigma_6^0 = l$ . Результаты, полученные методом Вольтерра и предложенными в данной работе полностью совпадают. Как видно из табл. 1 стабилизация перемещений с течением времени происходит довольно медленно.

Таблица 1

Перемещения	$t$ , час				
	0	100	500	1000	5000
$u_r \cdot G/(lR)(\theta = 45^\circ)$	1.6	4.4509	5.1107	5.2958	5.5559
$u_\theta \cdot G/(lR)(\theta = 0^\circ)$	1.6	4.4509	5.1107	5.2958	5.5559

Исследования, проведенные для ортотропного материала с упругими и реологическими параметрами (42) показали, что напряжения, возникающие на контуре свободного отверстия, зависят от времени. Максимальные значения напряжений  $\sigma_\theta/l$  возникают в точках близких к  $\theta = 60^\circ$  и растут со временем. В табл. 2 эти напряжения приведены для точек контура кругового отверстия в условиях предположения  $\bar{\nu}_{12}/\bar{E}_1 = \nu_{12}/E_1$  и  $\bar{\nu}_{21}/\bar{E}_2 = \nu_{21}/E_2$ .

Таблица 2

Напряжения	$t$ , сек.				
	0	10	100	300	600
$\sigma_\theta/l$	3.5514	3.6001	3.6104	3.6150	3.6183

Сравнение результатов, полученных по предложенной методике переменных коэффициентов, с результатами, полученными по методу Вольтерра, для случая жесткого подкрепления кругового отверстия в медной пластинке представлены в табл. 3.

Таблица 3

$t$ , с	Метод Вольтерра			Метод переменных коэффициентов		
	$\sigma_r/l(45^\circ)$	$\sigma_\theta/l(45^\circ)$	$\tau_{r\theta}/l(0^\circ)$	$\sigma_r/l(45^\circ)$	$\sigma_\theta/l(45^\circ)$	$\tau_{r\theta}/l(0^\circ)$
0	1.4545	0.3636	1.4545	1.4537	0.3634	1.4545
100	1.4638	0.3913	1.4638	1.4630	0.3914	1.4639
300	1.4697	0.4091	1.4697	1.4691	0.4099	1.4700
600	1.4749	0.4248	1.4749	1.4747	0.4264	1.4756

Максимальные значения напряжений  $|\sigma_r/l|$  в ортотропной пластинке с круговым жестко подкрепленным отверстием возникают в точках  $\theta = \pm 45^\circ$  и  $\theta = \pm 135^\circ$ . Максимальные значения напряжений  $|\sigma_\theta/l|$  получаются вблизи  $\theta = \pm 73^\circ$  и  $\theta = \pm 107^\circ$ . Максимальные значения касательных напряжений  $\tau_{r\theta}/l$  возникают при  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$  и минимальные при  $\theta = 90^\circ$  и  $\theta = 270^\circ$ . В табл. 4 даны соответствующие значения напряжений, изменяющиеся во времени.

Таблица 4

$t$ , с	$ \sigma_r/l $	$ \sigma_\theta/l $	$\tau_{r\theta}/l(0^\circ)$	$\tau_{r\theta}/l(90^\circ)$
0	1.8367	1.7836	1.7255	-1.9478
100	1.8557	1.9819	1.7074	-2.0040
300	1.8622	2.0191	1.7100	-2.0144
600	1.8671	2.0460	1.7124	-2.0218

Проведенные испытания метода переменных коэффициентов упругости выявили его высокую эффективность и сравнительную, с другими методами, простоту решений задач вязкоупругости. Метод не требует решения, представленного в явном виде от упругих коэффициентов. Достаточно сформировать матрицу операторов представлений (39). Компоненты этой матрицы зависят от времени. Поэтому последующее решение задачи вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в необходимый момент времени.

1. *Айталиев Ш.М.* Развитие механики подземных и специальных сооружений в Казахстане за последние 49 лет // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 10. – С. 3–35.
2. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение. – 1980. – 247 с.
3. *Бульчев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
4. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
5. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
6. *Каминский А.А.* Разрушение вязко-упругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с.
7. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
9. *Нескородев Р.Н.* О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред // Вестник Донецкого нац. университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 7–15.
10. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
11. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
12. *Шевченко В.П., Нескородев Р.Н.* Новый метод решения задач вязкоупругости анизотропных сред // Доповіді НАН України. – 2010. – № 11. – С. 51–58; 2009. – Вып. 2. – С. 7–15.
13. *Шевченко В.П., Нескородев Р.Н.* Численно-аналитический метод решения задач линейной теории вязкоупругости // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 3. – С. 42–53.
14. *Kaloerov S.A., Kolomiets M.A.* Determination of the Viscoelastic State of an Anisotropic Plate with Rigid Inclusions // J. Math. Sciences. – 2010. – 167, № 2. – P. 242–254.
15. *Kosmodamianskii A.S., Neskorojev N.M.* The Relation Between the Equations of the Two-dimensional Theory of Elasticity for Anisotropic and Isotropic Bodies // J. Appl. Maths Mechs. – 1998. – 62, № 2. – P. 319–321.
16. *Podil'chuk I.Yu.* Stress Concentration in Viscoelastic Orthotropic Plate with Rigid Circular Inclusion // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, № 8. – P. 660–668.
17. *Podil'chuk I.Yu.* Study of Stress Concentration in a Viscoelastic Orthotropic Plate with an Elliptical Hole // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, № 9. – P. 731–739.

**R. N. Neskorojev**

**Method of variable elasticity coefficients solving problems of viscoelasticity.**

The paper presents a method for solving the problems of the theory of viscoelasticity, based on the construction of the matrix equations of Hooke's law on the basis of integral equations of state. The elements of these matrices are constructed using fractional exponential functions Yu.N. Rabotnova and time-dependent. This allows you to solve the problems of viscoelasticity at any time as normal elasticity problem. The results of numerical studies.

**Keywords:** *creep, relaxation, resolvent operator, method Volterra, orthotropic viscoelastic material, variable elasticity coefficients.*

Донецкий национальный ун-т  
nrom@i.ua

Получено 04.09.15

УДК 519.865

©2015. А. А. Симогин

## СТОИМОСТЬ ДВУХЦВЕТНОГО ОПЦИОНА В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СО СКАЧКАМИ

В работе рассматривается двухцветный опцион покупки европейского типа в диффузионной модели (B,S)-финансового рынка. Получена аналитическая формула, определяющая стоимость данного опциона.

*Ключевые слова:* финансовый рынок, двухцветный опцион, модель скачкообразной диффузии.

**1. Введение.** Определение справедливой стоимости производных финансовых инструментов является одной из основных задач финансовой инженерии. При этом используется аппарат стохастической математики. Впервые использовать броуновское движение для расчета цен опционов предложил в своей диссертации «Теория спекуляций» [1] французский математик Луи Башелье.

На данный момент известны различные модели ценообразования опционов. Тем не менее до 1973 года не было эффективных, для решения этой задачи, моделей ценообразования опционов. Существенное влияние на развитие биржевого рынка производных инструментов оказали опубликованные в 1973 году фундаментальные работы Фишера Блэка, Майрона Шоулса [2] и Роберта Мертона [4]. В модели Блэка–Шоулса цена акции имеет логнормальное распределение и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = S_0.$$

Таким образом, в этой модели изменение цены акции является непрерывным диффузионным процессом.

Формула Блэка–Шоулса привлекает участников финансового рынка своей простотой, поэтому на практике для оценки стоимости производных финансовых инструментов предпочитают использовать именно ее. Но, несмотря на всю ее практическую ценность, формула Блэка–Шоулса не лишена недостатков. Основной из них, и, наверное, самый очевидный, – в условиях реального финансового рынка цена актива может изменяться скачкообразно, что противоречит свойству непрерывности геометрического процесса диффузии.

Различными исследователями в области финансовой математики были предложены модели оценки стоимости акции, которые в той или иной степени смягчают недостатки модели Блэка–Шоулса.

В частности, были предложены модели скачкообразной диффузии, согласно которым эволюция цены базового актива уже не является непрерывным процессом, а является в общем случае решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dS(t) = (r - \lambda\alpha) S(t) dt + (e^\xi - 1) S(t) dN(t) + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = S_0,$$

где  $r$  – безрисковая процентная ставка,  $\sigma$  – волатильность.  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс,  $N(t)$  – пуассоновский процесс с постоянной интенсивностью  $\lambda$ ,  $\xi$  – случайная величина с плотностью распределения вероятностей  $f(z)$  определяет магнитуду скачков. Предполагается, что процессы  $W(t)$ ,  $N(t)$  и случайная величина  $\xi$  независимы в совокупности.

В 1976 году в работе [5] Роберт Мертон получил аналитическую формулу для цены европейского опциона в случае логнормального распределения магнитуд скачков.

Все существующие на данный момент опционы делятся на две большие группы. К первой относятся стандартные (ванильные): европейского и американского типа. Ко второй – экзотические опционы. Они появились и стали популярны в 80-х годах прошлого столетия, заменив комбинации стандартных. Существуют различные стили экзотических опционов [1].

В группу многофакторных опционов входят опционы на несколько базисных активов. Среди них можно выделить три основные группы опционов: радуга (rainbow option), корзина (basket option) и кванто (quanto option). Существуют и другие разновидности многофакторных опционов, и все они характеризуются тем, что их стоимость определяется ценами двух или более активов, а также корреляцией между ценами этих активов.

Если в основе опциона лежат два базисных актива, то его называют двухцветным опционом. Среди двухцветных опционов европейского типа можно выделить основные со следующими платежными функциями, через  $K$  обозначена цена исполнения опциона.

*Лучший актив или деньги*,  $f(T) = \max(S_1(T), S_2(T), K)$ , обеспечивает владельцу получение максимального по стоимости из двух рискованных активов и денежных средств по истечении срока исполнения опциона. Исследован Штульцем [13], Джонсоном [8], Рубинштейном [12].

*Покупка по максимальной цене*,  $f(T) = \max(\max(S_1(T) - S_2(T)) - K, 0)$ , дает право его владельцу на приобретение максимального по стоимости актива по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Шульцем [13] и Джонсоном [8].

*Покупка по минимальной цене*,  $f(T) = \max(\min(S_1(T) - S_2(T)) - K, 0)$ , дает право его владельцу на приобретение минимального по стоимости актива по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Штульцем [13] и Джонсоном [8].

*Продажа по максимальной цене*,  $f(T) = \max(K - \max(S_1(T) - S_2(T)), 0)$ , дает его владельцу право продать один из двух рискованных активов с наибольшей стоимостью по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Марграбе [9], Штульцем [13] и Джонсоном [8].

*Продажа по минимальной цене*,  $f(T) = \max(K - \min(S_1(T) - S_2(T)), 0)$ , дает его владельцу право продать один из двух рискованных активов с наименьшей стоимостью по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Штульцем [13] и Джонсоном [8].

*Обмениваемый*,  $f(T) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0)$ , дает его держателю право обменять при исполнении контракта первый актив на второй. Основу теории обме-

ниваемых опционов в модели Блека-Шоулса положили две независимые работы, опубликованные в 1978 году Вильямом Марграбе [9] и Стенли Фишером [7]. Они рассмотрели стандартный обмениваемый опцион, который может быть интерпретирован как колл-опцион на первый актив со страйком равным будущей цене второго актива на дату погашения или пут-опцион на второй актив со страйком равным будущей цене первого актива на дату погашения. В дальнейшем эта теория нашла свое продолжение в работе Штульца [13] 1982 года.

**2. Постановка задачи.** Пусть  $(\Omega, F, \mathfrak{F}_t, P)$  полное вероятностное пространство, где  $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_s, N_s, s \leq t)$  непрерывная справа возрастающая фильтрация,  $\{W_t, t \geq 0\}$  стандартный винеровский процесс,  $\{N_t, t \geq 0\}$  процесс Пуассона с постоянной интенсивностью  $\lambda$ . Будем предполагать, что процессы  $W_t$  и  $N_t$  независимы.

Рассмотрим  $(B, S)$ -рынок с непрерывным временем, состоящий из банковского счета  $B$  (нерисковый актив) и двух акций  $S^1, S^2$  (рисковые активы). Относительно банковского счета  $B$  будем предполагать, что  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  – детерминированная функция, которая подчиняется дифференциальному уравнению

$$dB_t = rB_t dt \quad (1)$$

с начальным условием  $B_0 = 1$ , т.е.  $B_t = e^{rt}$ ,  $r \geq 0$ , здесь  $r$  – краткосрочная процентная ставка. Эволюции стоимости акций  $S^i = \{S_t^i, t \geq 0\}$ ,  $i = 1, 2$ , описываются решениями стохастических дифференциальных уравнений скачкообразной диффузии

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^1}{S_{t-}^1} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t - \nu_1 dN_t, & S_0^1 > 0; \\ \frac{dS_t^2}{S_{t-}^2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t - \nu_2 dN_t, & S_0^2 > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\mu_i \geq 0$  (параметры дрейфа),  $\sigma_i > 0$  (волатильности диффузии) и  $\nu_i < 1$  (магнитуды скачков).

Согласно [2] плотность меры  $\tilde{P}(\cdot)$  эквивалентной  $P(\cdot)$ , относительно которой дисконтированные цены акций являются мартингалами, имеет вид

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp \left\{ \phi W_t - \frac{\phi^2}{2} t + \psi (N_t - \lambda t) \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \psi \Delta N_s) \exp \{-\psi \Delta N_s\}, \quad (3)$$

где константы  $\phi$  и  $\psi$  являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 - r - \nu_1 \lambda + \phi \sigma_1 - \psi \nu_1 \lambda = 0; \\ \mu_2 - r - \nu_2 \lambda + \phi \sigma_2 - \psi \nu_2 \lambda = 0. \end{cases}$$

При условии, что  $\sigma_1 \nu_2 - \sigma_2 \nu_1 \neq 0$ , она имеет единственное решение

$$\phi = \frac{(\mu_1 - r) \nu_1 - (\mu_2 - r) \nu_2}{\sigma_2 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2},$$

$$\psi = \frac{(\mu_1 - r) \sigma_2 - (\mu_2 - r) \sigma_1}{\lambda (\sigma_2 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2)} - 1.$$

Откуда непосредственно вытекает, что риск-нейтральная мера единственна и, как следствие [3], рассматриваемая модель финансового рынка является полной.

Согласно теореме Гирсанова, процесс  $\tilde{W}_t = W_t - \phi t$  относительно меры  $\tilde{P}(\cdot)$  является винеровским, а процесс  $N_t$  – пуассоновским с интенсивностью

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \psi) = \frac{(\mu_1 - r) \sigma_2 - (\mu_2 - r) \sigma_1}{(\sigma_2 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2)}.$$

Таким образом, плотность (3) мартингальной меры  $\tilde{P}(\cdot)$  относительно исходной меры  $P(\cdot)$  приобретает вид

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp \left\{ \phi W_t - \frac{\phi^2}{2} t + (\lambda - \tilde{\lambda}) t + (\ln \tilde{\lambda} - \ln \lambda) N_t \right\}. \quad (4)$$

Запишем решения уравнений (2) в экспоненциальной форме. Для этого полезным будет следующее утверждение.

**Лемма Ито для процесса скачкообразной диффузии [6].** Пусть  $X_t$  диффузионный процесс со скачками, определенный как сумма дрейфа  $a_t$ , стохастического дифференциального интеграла Ито и сложного процесса Пуассона

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{k=1}^{N_t} \Delta X_k,$$

где  $a_t$   $\sigma_t$  непрерывные неупреждающие процессы, причем

$$E \left[ \int_0^T \sigma_t^2 dW_s \right] < +\infty.$$

Тогда для любой функции  $f(x, t): [0, T] \times R \rightarrow R$  из пространства  $C_{[0, T] \times R}^{1,2}$  процесс  $Y_t = f(t, X_t)$  представим в виде

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \left[ \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial s} + a_s \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial x} + \frac{\sigma_s^2}{2} \frac{\partial^2 f(s, X_s)}{\partial x^2} \right] ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial x} dW_s + \sum_{i \geq 1, \tau_i \leq t} [f(X_{\tau_i-} + \Delta X_i) - f(X_{\tau_i-})],$$

или в дифференциальной форме

$$dY_t = df(t, X_t) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + a_t \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dt + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} dt + \sigma_t \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dW_t + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]. \quad (5)$$

Применяя формулу (5) к функции  $\ln S_t^i$ ,  $i = 1, 2$ , получим

$$\begin{aligned} d \ln S_t^i &= \mu_i S_t^i \frac{\partial \ln S_t^i}{\partial x} dt + \frac{[\sigma_i S_t^i]^2}{2} \frac{\partial^2 \ln S_t^i}{\partial x^2} dt + \\ &+ \sigma_i S_t^i \frac{\partial \ln S_t^i}{\partial x} dW_t + [\ln S_{t-}^i (1 - \nu_i) - \ln f(S_{t-}^i)] = \\ &= \left( \mu_i - \frac{[\sigma_i]^2}{2} \right) dt + \sigma_i dW_t + \ln(1 - \nu_i). \end{aligned}$$

Таким образом, решения уравнений (2) имеют вид

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_0^i \exp \left\{ \left( \mu_i - \frac{[\sigma_i]^2}{2} \right) t + \sigma_i W_t + \sum_{\tau_i \leq t, \Delta N_{\tau_i} \neq 0} \ln(1 - \nu_i) \right\} = \\ &= S_0^i \exp \left\{ \left( \mu_i - \frac{[\sigma_i]^2}{2} \right) t + \sigma_i W_t + N_t \ln(1 - \nu_i) \right\}. \end{aligned}$$

С учетом представления  $W_t = \tilde{W}_t + \phi t$ , выражения для  $S_t^i$ ,  $i = 1, 2$ , имеют вид

$$S_t^i = S_0^i \exp \left\{ \left( \nu_i \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_i]^2}{2} + r \right) t + \sigma_i \tilde{W}_t + N_t \ln(1 - \nu_i) \right\}. \quad (6)$$

Рассмотрим на предложенном финансовом рынке обменный опцион европейского типа с платежной функцией следующего вида

$$f(T) = \max \{ S_T^1 - S_T^2, 0 \} = (S_T^1 - S_T^2)^+. \quad (7)$$

В данной работе изучается ценообразование обмениваемого опциона в случае, когда уравнения, которые описывают эволюции стоимости акций (2), возмущены не только диффузионной составляющей, но и процессом Пуассона.

### 3. Стоимость опциона.

**Теорема.** Пусть  $(B, S)$ -рынок описывается уравнениями (1)–(2), причем  $\sigma_1 \nu_2 - \sigma_2 \nu_1 \neq 0$ . Тогда стоимость опциона с платежной функцией вида (7) определяется соотношениями при  $\sigma_1 < \sigma_2$ ,

$$\begin{aligned} C(T) &= e^{-\tilde{\lambda}T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \left[ A_{1,n} \left( 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)\sqrt{T}}{2} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_{2,n} \left( 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{T}}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

при  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,

$$\begin{aligned} C(T) &= e^{-\tilde{\lambda}T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \left[ A_{1,n} \left( 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)\sqrt{T}}{2} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_{2,n} \left( 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{T}}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A_{1,n}$ ,  $A_{2,n}$  и  $B_n$  определяются равенствами

$$A_{1,n} = S_0^1 (1 - \nu_1)^n \exp \{ \nu_1 \tilde{\lambda}T \}, \quad A_{2,n} = S_0^2 (1 - \nu_2)^n \exp \{ \nu_2 \tilde{\lambda}T \}, \quad (10)$$

$$B_n = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{T}} \ln \frac{A_{2,n}}{A_{1,n}}, \quad (11)$$

а  $F(x)$  – функция распределения случайной стандартной нормальной величины.

*Доказательство.* Как показано в [1], [2] при существовании и единственности мартингальной меры финансовый рынок является полным безарбитражным. Справедливая стоимость опциона европейского типа, в этом случае, определяется соотношением

$$C(T) = \tilde{E} [B^{-1}(T) f(T)] = \tilde{E} \left[ \exp \{ -rT \} (S_T^1 - S_T^2)^+ \right], \quad (12)$$

здесь  $\tilde{\mathbb{E}}(\cdot)$  – математическое ожидание относительно меры  $\tilde{P}(\cdot)$ .

Подставим в равенство (12) выражения (6) для явного вида процессов изменения стоимости акций  $S_t^i$ ,  $i = 1, 2$ . Имеем

$$C(T) = \tilde{\mathbb{E}} \left( S_0^1 \exp \left\{ \left( \nu_1 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_1]^2}{2} \right) T + \sigma_1 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_1) \right\} - S_0^2 \exp \left\{ \left( \nu_2 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_2]^2}{2} \right) T + \sigma_2 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_2) \right\} \right)^+ \quad (13)$$

С учетом того, что процессы  $\tilde{W}_t$  и  $N_t$  независимы относительно мартингальной меры  $\tilde{P}(\cdot)$ , продолжая равенство (13), получим

$$\begin{aligned} C(T) &= \tilde{\mathbb{E}} \left( \tilde{\mathbb{E}} \left[ \left( S_0^1 \exp \left\{ \left( \nu_1 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_1]^2}{2} \right) T + \sigma_1 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_1) \right\} - S_0^2 \exp \left\{ \left( \nu_2 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_2]^2}{2} \right) T + \sigma_2 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_2) \right\} \right)^+ \middle| N_T \right] \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}} \left[ \left( S_0^1 \exp \left\{ \left( \nu_1 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_1]^2}{2} \right) T + \sigma_1 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_1) \right\} - S_0^2 \exp \left\{ \left( \nu_2 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_2]^2}{2} \right) T + \sigma_2 \tilde{W}_T + N_T \ln(1 - \nu_2) \right\} \right)^+ \middle| N_T = n \right] \times \\ &\quad \times \frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} e^{-\tilde{\lambda}T} = \\ &= e^{-\tilde{\lambda}T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \tilde{\mathbb{E}} \left( S_0^1 (1 - \nu_1)^n \exp \left\{ \left( \nu_1 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_1]^2}{2} \right) T \right\} \exp \left\{ \sigma_1 \tilde{W}_T \right\} - S_0^2 (1 - \nu_2)^n \exp \left\{ \left( \nu_2 \tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_2]^2}{2} \right) T \right\} \exp \left\{ \sigma_2 \tilde{W}_T \right\} \right)^+ = e^{-\tilde{\lambda}T} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \tilde{\mathbb{E}} \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_1]^2}{2} T \right\} - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_2]^2}{2} T \right\} \right)^+, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $A_{1,n}$  и  $A_{2,n}$  определяются соотношениями (10) соответственно.

Найдем математическое ожидание, входящее в выражение (14):

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_1]^2}{2} T \right\} - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_2]^2}{2} T \right\} \right)^+ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 x - \frac{[\sigma_1]^2}{2} T \right\} - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 x - \frac{[\sigma_2]^2}{2} T \right\} \right)^+ \exp \left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем следующее обозначение:  $K = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)T}{2}$ . Если  $\sigma_1 < \sigma_2$ , то

продолжая равенство (15), получим

$$\begin{aligned}
 & \tilde{E} \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_1]^2 T}{2} \right\} - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_2]^2 T}{2} \right\} \right)^+ = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^K \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 x - \frac{[\sigma_1]^2 T}{2} \right\} - \right. \\
 & \left. - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 x - \frac{[\sigma_2]^2 T}{2} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\} dx = \\
 & = \frac{A_{1,n}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^K \exp \left\{ -\frac{(x-\sigma_1 T)^2}{2T} \right\} dx - \\
 & - \frac{A_{2,n}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^K \exp \left\{ -\frac{(x-\sigma_2 T)^2}{2T} \right\} dx = \\
 & = A_{1,n} F \left( \frac{K-\sigma_1 T}{\sqrt{T}} \right) - A_{2,n} F \left( \frac{K-\sigma_2 T}{\sqrt{T}} \right) = \\
 & = A_{1,n} F \left( \frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}} \ln \frac{A_{2,n}}{A_{1,n}} + \frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2} \right) - \\
 & - A_{2,n} F \left( \frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}} \ln \frac{A_{2,n}}{A_{1,n}} + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2} \right) = \\
 & = A_{1,n} F \left( B_n + \frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2} \right) - A_{2,n} F \left( B_n + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя выражение (16) в равенство (14), получим соотношение (8).

В случае если  $\sigma_1 > \sigma_2$ , тогда

$$\begin{aligned}
 & \tilde{E} \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_1]^2 T}{2} \right\} - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 \tilde{W}_T - \frac{[\sigma_2]^2 T}{2} \right\} \right)^+ = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_K^{+\infty} \left( \left( A_{1,n} \exp \left\{ \sigma_1 x - \frac{[\sigma_1]^2 T}{2} \right\} \right) - \right. \\
 & \left. - A_{2,n} \exp \left\{ \sigma_2 x - \frac{[\sigma_2]^2 T}{2} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\} dx = \\
 & = A_{1,n} \left[ 1 - F \left( \frac{K-\sigma_1 T}{\sqrt{T}} \right) \right] - A_{2,n} \left[ 1 - F \left( \frac{K-\sigma_2 T}{\sqrt{T}} \right) \right] = \\
 & = A_{1,n} \left[ 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2} \right) \right] - \\
 & - A_{2,n} \left[ 1 - F \left( B_n + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{17}$$

И, наконец, подставляя выражение (17) в равенство (14), получим требуемое в теореме соотношение (9).  $\square$

**4. Заключение.** В работе рассмотрена модель финансового (B,S)-рынка с непрерывным временем. Рынок состоит из банковского счета и двух рисковых активов. При этом эволюция стоимости акции является процессом скачкообразной диффузии, т.е. цена актива подчиняется геометрическому броуновскому движению, но иногда испытывает скачки вверх или вниз с постоянными магнитудами.

Показано, что для данной модели существует единственная мартингальная мера, т.е. рынок является полным безарбитражным. Выписана явная аналитическая формула для справедливой стоимости обмениваемого опциона, аналогичная формуле Марграбе.

1. Буренин А.Н. Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные. – М.: Научно-техническое общество имени академика С.И. Вавилова, 2005. – 534 с.
2. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.

3. Шуряев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. – М.: ФАЗИС, Т. 1: Факты и модели, 1998. – 512 с.
4. Bachelier L. Theorie de la Speculation // Annales de l'Ecole Normale Superieure. – 1900. – **17**. – P. 21–86.
5. Black F., Scholes The Pricing of Otions and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – **81**. – № 3. – P. 637–659.
6. Cont R., Tankov P. Financial modelling with jump processes. – Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 606 p.
7. Fischer S. Call Option Pricing When the Exercise Price is Uncertain, and the Valuation of Index Bonds // Journal of Finance. – 1978. – P. 169–176.
8. Johnson H. Options on the maximum or the minimum of several assets // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1987. – **22**. – P. 277–283.
9. Margrabe W. The value of an option to exchange one asset for another // The Journal of Finance. – 1978. – **23**. – P. 177–186.
10. Merton R.C. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – **4**, № 1. – P. 141–183.
11. Merton R.C. Option Pricing When Underlying Stock Return are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. – **3**, № 1. – P. 125–144.
12. Rubinstein M. Somewhere over the rainbow // Risk. – 1991. – **4**. – P. 63–66.
13. Stulz R. M. Options on the minimum or the maximum of two risky assets // Journal of Financial Economics. – 1982. – XXXIII. – № 1. – P. 161–185.
14. West, G. Better approximations to cumulative normal functions // WILMOTT Magazine May, 2005. – P. 70–76.

**A. A. Simogin**

**Two-Color Option Pricing Under a Jump Diffusion Model.**

The article considers of exotic purchase two-color option of European type a jump diffusion model of (B, S)-financial market. The author have obtained the analytical formulas determining the options prices.

**Keywords:** *financial market, two-color option, jump diffusion model.*

Донецкий национальный ун-т  
anatolsimogin@gmail.com

Получено 19.05.15