

УДК 531.36

©2012. Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ МОДЕЛИ КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА С УПРАВЛЯЕМЫМ КОЛЕСНЫМ МОДУЛЕМ

Анализируется характер потери устойчивости (опасный-безопасный) модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем на основе численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам; проведена оценка амплитуд автоколебаний колесного модуля в области флаттерной неустойчивости прямолинейного движения.

Ключевые слова: стационарные состояния, вещественные бифуркации, колесный экипаж, автоколебания.

Введение. Дивергентная потеря устойчивости прямолинейного стационарного режима движения экипажа в простейшем случае связана с реализацией бифуркации сборки. Прямолинейному режиму на фазовой плоскости соответствует начало координат, из которого при критической скорости либо рождается пара устойчивых стационарных состояний, либо приходит пара неустойчивых стационарных состояний и сливается с устойчивым прямолинейным режимом.

В случае симметричного экипажа с абсолютно жестким рулевым управлением существенными “внутренними” параметрами, влияющими на характер потери устойчивости, являются коэффициенты сцепления на осях – при уменьшении коэффициента сцепления на передней оси меняется характер опасности границы области устойчивости вследствие реализации катастрофы бабочки. Бифуркационное множество в этом случае имеет характерное сечение с тремя точками заострения (каспами) [1].

В [2] найдено аналитическое соотношение, которое приближенно определяет условие опасной-безопасной потери устойчивости прямолинейного движения модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем. К характерным параметрам, влияющим на условия безопасной потери устойчивости прямолинейного режима движения модели с жестким рулевым управлением, добавляется параметр крутильной жесткости колесного модуля.

В данной работе вопрос о смене характера потери устойчивости (опасной-безопасной) модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем решается на основе реализации численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам (при росте числа степеней свободы необходимо преодолевать лавинообразное увеличение объема вычислений) [3]. Далее проведена оценка амплитуд автоколебаний колесного модуля в области флаттерной неустойчивости прямолинейного движения.

1. Постановка задачи. На рис. 1 представлена расчетная схема модели экипажа с управляемым колесным модулем. Управляемый модуль шарнирно соединен с корпусом экипажа, θ – угол между продольной осью корпуса

и вертикальной продольной плоскостью колеса. На связку корпус–колесный модуль действует упругий восстанавливающий момент, стремящийся вернуть систему в положение $\theta = \theta_0$, где θ_0 – устанавливаемый оператором угол поворота колес переднего ряда; Y_i – приведенные поперечные силы (силы увода), действующие в пятне контакта колес с опорной поверхностью, определяются в соответствии с аксиоматикой И. Рокара; ось колеса удалена от оси шарнирного соединения на расстоянии выноса λ ($\lambda < 0$ в случае, когда ось колеса располагается впереди точки шарнирного соединения звеньев); v – продольная составляющая скорости центра масс корпуса (поддерживается постоянной); a, b – расстояния от центра масс (точка C) до точки крепления управляемого колесного модуля и задней оси соответственно; k_1 и k_2 – коэффициенты сопротивления уводу на осях; k – приведенный коэффициент жесткости управляемого модуля; h – коэффициент демпфирования по углу поворота управляемого модуля; φ_1 и φ_2 – коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода; θ_1 – устанавливаемый угол поворота колес заднего ряда.

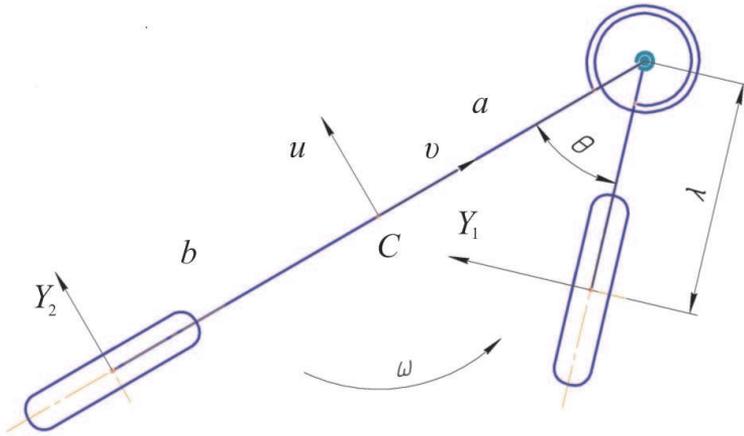


Рис. 1. Расчетная схема экипажа.

Масса и момент инерции корпуса относительно центральной вертикальной оси соответственно m, J ; m_1, J_1 – масса и момент инерции управляемого колесного модуля относительно центральной вертикальной оси, проходящей через ось колеса.

Система дифференциальных уравнений движения модели экипажа с управляемым колесным модулем (фазовые переменные $u, \omega, \theta, \dot{\theta}$) получена при предположениях, принятых в [4]:

$$E_1: -m(\dot{u} + \omega v) + m_1 \lambda (\dot{\omega} + \ddot{\theta}) \cos \theta - m_1 (a \dot{\omega} + \omega v + \dot{u}) - m_1 \lambda (\omega^2 + \dot{\theta}^2 + 2\omega \dot{\theta}) \sin \theta + Y_1 \cos \theta + X_1 \sin \theta + Y_2 \cos \theta_1 - X_2 \sin \theta_1 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 E_2 : & -J\dot{\omega} + am_1\lambda(\dot{\omega} + \ddot{\theta}) \cos \theta - am_1\lambda(2\omega\dot{\theta} + \omega^2 + \dot{\theta}^2) \sin \theta - \\
 & - am_1(a\dot{\omega} + \omega v + \dot{u}) + h\dot{\theta} + k(\theta - \theta_0) + Y_1 a \cos \theta + X_1 a \sin \theta - \\
 & - Y_2 b \cos \theta_1 - X_2 b \sin \theta_1 = 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 E_3 : & (J_1 + m_1\lambda^2)\ddot{\theta} + (J_1 + m_1\lambda(\lambda - a \cos \theta))\dot{\omega} - m_1\lambda(\dot{u} + v\omega) \cos \theta - \\
 & - m_1\omega\lambda(u + a\omega) \sin \theta + h\dot{\theta} + k(\theta - \theta_0) + Y_1\lambda = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь \dot{u} – производная поперечной составляющей скорости центра масс; $\dot{\omega}$ – производная угловой скорости; $\dot{\theta}$ – угловая скорость управляемого модуля; $\ddot{\theta}$ – угловое ускорение управляемого модуля.

В (1) силы увода аппроксимируются монотонной зависимостью $Y_i(\delta_i) = k_i\delta_i(1 + k_i^2\delta_i^2/(N_i^2\varphi_i^2))^{-1/2}$, имеющей характер кривой насыщения. Будем считать, что в системе (1) приведенная продольная сила на передней оси $X_1 = 0$, угол поворота колес заднего ряда $\theta_1 = 0$.

Условие дивергентной потери устойчивости прямолинейного режима найдено в общем виде в [4]:

$$v_{kp}^2 = \frac{-k_1k_2k(a + b - \lambda)^2}{m\{k_1k_2\lambda b - k[k_1(a - \lambda) - k_2b]\} + km_1k_2(a + b - \lambda)},$$

а условия опасной-безопасной потери устойчивости исследовались в [2].

2. Построение бифуркационного множества модели автомобиля с управляемым колесным модулем. Обозначим через E_i левые части уравнения (1). Тогда стационарные состояния системы (1) (особые точки фазового пространства) удовлетворяют системе конечных уравнений

$$E_i(\dot{u} = 0, \dot{\omega} = 0, \ddot{\theta} = 0, \dot{\theta} = 0, u, \omega, \theta, v, \theta_0) = 0. \tag{2}$$

Система (2) имеет два управляющих параметра (v, θ_0) . Метод продолжения по параметру, предложенный Шинохарой [5], дает возможность определить различные ветви равновесной кривой и оценить максимальное количество стационарных режимов в конечной области параметров управления.

В [6] рассматривается вопрос об эволюции стационарных состояний при изменении одного из управляющих параметров. Многообразии бифуркационных значений параметров (v^*, θ_0^*) , которым соответствуют кратные стационарные режимы движения $(u^*, \omega^*, \theta^*)$ системы (2), может быть найдено с помощью метода продолжения по двум параметрам. Условием реализации кратного стационарного режима $(u^*, \omega^*, \theta^*)$ является выполнение равенства

$$E_4|_{(u^*, \omega^*, \theta^*, v^*, \theta_0^*)} = \frac{D(E_1, E_2, E_3)}{D(u, \omega, \theta)} \Big|_{(u^*, \omega^*, \theta^*, v^*, \theta_0^*)} = 0,$$

(т.е. якобиан системы (2) обращается в нуль).

Система (2) вместе с последним уравнением задает критическое множество стационарных состояний. Метод продолжения по двум параметрам приводит к вспомогательной системе дифференциальных уравнений

$$u' = D_1\Delta, \quad \omega' = -D_2\Delta, \quad \theta' = D_3\Delta, \quad v' = -D_4\Delta, \quad \theta_0' = D_5\Delta,$$

$$\text{где } D_1 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(\omega, \theta, v, \theta_0)}, \quad D_2 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \theta, v, \theta_0)},$$

$$D_3 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, v, \theta_0)}, \quad D_4 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, \theta, \theta_0)},$$

$$D_5 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, \theta, v)}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2}}.$$

Стартовая точка для реализации метода продолжения – $(0, 0, 0, v_{kp}, 0)$, где v_{kp} – критическая скорость прямолинейного режима движения экипажа определяется из решения уравнения $E_4|_{(u=0, \omega=0, \theta=0, \theta_0=0)} = 0$.

На рис. 2 представлено бифуркационное множество, полученное численным интегрированием вспомогательной системы дифференциальных уравнений при следующем наборе числовых значений конструктивных параметров: $a = 1.45$ м; $b = 1.55$ м; $\lambda = -0.00223$ м; $k = 400$ Н·м; $m = 2090$ кг; $\varphi_1 = 0.8$; $\varphi_2 = 0.8$; $k_1 = 91500$ Н; $k_2 = 61000$ Н; $m_1 = 100$ кг; $J_1 = 3.22$ кг·м².

Бифуркационное множество делит плоскость управляющих параметров (v, θ_0) на области с различным количеством стационарных режимов: во внутренней области (под куполом бифуркационного множества) – три режима, во внешней – один. В точках бифуркационного множества (рис. 2) происходит вещественная бифуркация складки (слияния-рождения) пары стационарных режимов: устойчивого и неустойчивого. При фиксированной скорости $v_i < v_{kp}$ и увеличении параметра θ_0 от нуля до θ_0^* устойчивый симметричный стационарный режим $\omega = \omega(v_i, \theta_0)$ перемещается из начала координат по равновесной кривой (рис. 3), в точке поворота $M(\theta_0^*)$ происходит дивергентная потеря устойчивости. Точка поворота M делит равновесную кривую на устойчивую (сплошная линия) и неустойчивую (пунктир) части. Проекция множества точек поворота на плоскость параметров управления (v, θ_0) задает бифуркационное множество (рис. 2). При $v_i = v_{kp}$ ($\theta_0^* = 0$) имеем точку возврата. Потере устойчивости прямолинейного режима при данном числовом наборе значений конструктивных параметров отвечает бифуркация слияния (устойчивого и двух неустойчивых стационарных режимов). При закритической скорости прямолинейному режиму соответствует седловая особая точка, возмущения фазовых переменных в этом случае апериодически растут: имеет место опасная потеря устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [7].

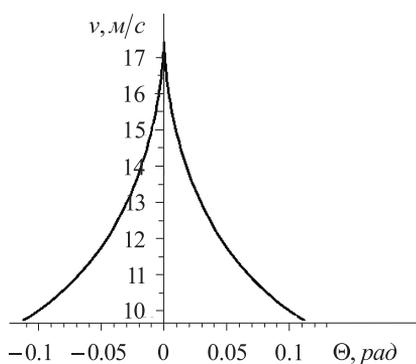


Рис. 2. Бифуркационное множество.

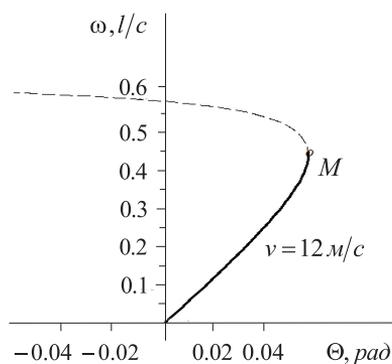


Рис. 3. Равновесная кривая.

При уменьшении величины крутильной жесткости до $k = 40$ Н·м наблюдается существенное изменение характера бифуркационного множества (рис. 4), происходит процесс выворачивания сборки через реализацию бифуркации ласточкин хвост – имеются области с пятью, тремя и одним стационарными режимами. При скорости $v < 6.3$ м/с имеется один стационарный режим: устойчивый. Например, при скорости $v = 6$ м/с устойчивый стационарный режим существует, по крайней мере, в диапазоне -0.25 рад $< \theta_0 < 0.25$ рад (принадлежит равновесной полуветви без точек поворота, рис. 5 – первый квадрант).

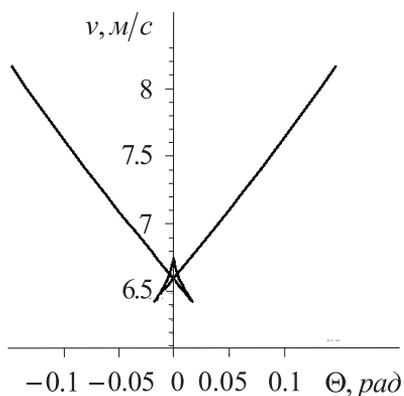


Рис. 4. Бифуркационное множество.

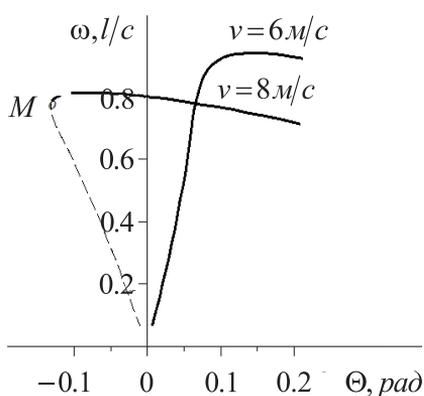


Рис. 5. Равновесные кривые.

При критической скорости $v = 8$ м/с равновесная кривая делится точкой поворота на устойчивую (сплошная) и неустойчивую (пунктир) части (рис. 5): в диапазоне -0.15 рад $< \theta_0 < 0.15$ рад могут реализовываться три стационарных режима: один неустойчивый, два устойчивых; в диапазоне 0.15 рад $< |\theta_0| < 0.25$ рад – один устойчивый (принадлежат полуветви равно-

весных состояний, располагающейся во втором и первом квадрантах). Заметим, что ветви равновесных состояний для симметричного экипажа обладают свойством центральной симметрии.

Из структуры бифуркационного множества (рис. 4) следует, что характер потери устойчивости прямолинейного стационарного режима при $k = 400$ Н·м – безопасный по Н.Н. Баутину [7] – в верхнем каспе происходит вещественная бифуркация слияния трех стационарных режимов: устойчивого и двух неустойчивых, но, в отличие от предыдущего случая ($k = 40$ Н·м), имеется дополнительно пара устойчивых режимов, которые при закритической скорости ограничивают рост возмущений (фазовый поток “впадает” в бассейны притяжения двух устойчивых круговых режимов).

3. Результаты анализа условий устойчивости прямолинейного режима по линейному приближению. Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы воспользуемся критерием Рауса–Гурвица. Аналитическое выражение, определяющее условие флаттерной неустойчивости, не позволяет сделать вывод о влиянии конкретных параметров модели на условия устойчивости из-за его громоздкости. Численным методом, с использованием пакета Maple, найдем границы в плоскости параметров (k, v) , где нарушаются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости.

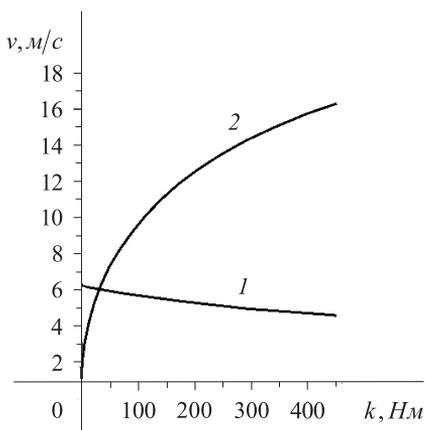


Рис. 6. Граница дивергентной и колебательной неустойчивости.

На рис. 6 представлена характерная граница дивергентной и колебательной неустойчивости для случая отрицательного выноса передней стойки шасси. Ниспадающая граница, кривая 1, отвечает паре чисто мнимых корней характеристического уравнения (область флаттерной неустойчивости лежит ниже), кривая 2 – нулевому корню (область дивергентной неустойчивости лежит выше). Тогда при всех значениях крутильной жесткости $k > 20$ Н·м и достаточно малой скорости движения имеет место флаттерная неустойчивость. При превышении некоторого порога по скорости попадаем в область асимптотической устойчивости, которая сменяется

областью дивергентной неустойчивости при $v > v_{кр}$.

На границе интервала скорости, отвечающей паре чисто мнимых корней, в соответствии с теоремой Андронова–Хопфа происходит комплексная бифуркация (рождения-исчезновения) предельного цикла [8]. Ниже проведена оценка амплитуды автоколебаний в области флаттерной неустойчивости на основе подхода [9], реализованного ранее при исследовании автоколебаний отдельно взятой стойки шасси [10].

4. Оценка амплитуд автоколебаний в окрестности прямолинейного режима движения. Для удобства вычислительных процедур, связанных с последовательным исключением неизвестных и получения амплитудного уравнения, перейдем к новым переменным $\delta_1, \delta_2, \theta$, где δ_1, δ_2 – углы увода на передней и задней осях экипажа. Предполагается, что периодическое решение системы (1) в окрестности момента времени наибольшего отклонения от положения равновесия и в окрестности момента времени, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе $\delta_1 = \alpha \sin \mu t$, $\delta_2 = p_0 \sin(\mu t + \varphi_\delta)$, $\theta = k_0 \sin(\mu t + \varphi_\theta)$; здесь α, p_0, k_0 – амплитуды, μ – круговая частота автоколебаний, $\varphi_\theta, \varphi_\delta$ – запаздывания фаз.

В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\mu t = \pi/2 : \begin{aligned} \delta_1 &= \alpha, & \dot{\delta}_1 &= 0, & \ddot{\delta}_1 &= -\alpha\mu^2 \\ \delta_2 &= p_0 \cos \varphi_\delta, & \dot{\delta}_2 &= -p_0\mu \sin \varphi_\delta, & \ddot{\delta}_2 &= -p_0\mu^2 \cos \varphi_\delta, \\ \theta &= k_0 \cos \varphi_\theta, & \dot{\theta} &= -k_0\mu \sin \varphi_\theta, & \ddot{\theta} &= -k_0\mu^2 \cos \varphi_\theta. \end{aligned}$$

$$\mu t = 0 : \begin{aligned} \delta_1 &= 0, & \dot{\delta}_1 &= \alpha\mu, & \ddot{\delta}_1 &= 0, \\ \delta_2 &= p_0 \sin \varphi_\delta, & \dot{\delta}_2 &= p_0\mu \cos \varphi_\delta, & \ddot{\delta}_2 &= -p_0\mu^2 \sin \varphi_\delta, \\ \theta &= k_0 \sin \varphi_\theta, & \dot{\theta} &= k_0\mu \cos \varphi_\theta, & \ddot{\theta} &= -k_0\mu^2 \sin \varphi_\theta. \end{aligned}$$

В этом случае параметры автоколебаний ($\alpha, p_0, k_0, \mu, \varphi_\delta, \varphi_\theta$) определяются из системы шести конечных уравнений. Исключаем неизвестные $p_0, k_0, \varphi_\delta, \varphi_\theta$ из первых четырех уравнений системы. Из оставшихся двух составляем результат (исключается неизвестная круговая частота μ), определяющий неявную зависимость амплитуды автоколебаний от скорости движения v .

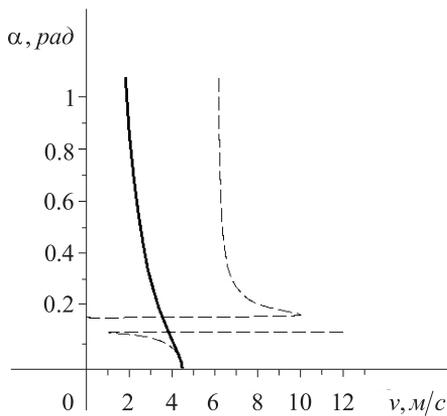


Рис. 7. Амплитудные кривые.

Амплитудная кривая была получена как для случая представления силы увода в виде дробно-иррациональной функции $Y_1(\delta_1) = k_1 \delta_1 (1 + k_1^2 \delta_1^2 / (N_1^2 \varphi_1^2))^{-1/2}$, так и для случая ее приближенного представления – до членов третьего порядка включительно. Сила увода на задней оси представлялась в виде линейной функции $Y_2(\delta_2) = k_2 \delta_2$. На рис. 7 представлены амплитудные кривые для случая приближенного представления силы Y_1 , сплошная – для случая дробно-иррациональной зависимости (получено при указанных выше числовых значениях параметров).

Результаты, полученные для двух случаев аппроксимации силы Y_1 , имеют существенные качественные различия. Численное интегрирование исходной нелинейной системы (1) указывает на невозможность приближенного представления силы увода Y_1 в виде линейного и кубического приближения. В то

же время, принятые в ходе реализации приближенного анализа допущения не приводят к искажению качественной картины процесса автоколебаний при использовании исходной нелинейной зависимости силы увода Y_1 .

5. Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования. Для исходных нелинейных уравнений (1) численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при характерных числовых значениях конструктивных параметров. Рис. 8, *а* иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при $k = 400$ Н·м, $v = 25$ м/с. В этом случае экипаж выходит на одну из круговых траекторий (рис. 8, *б*) при произвольно малых возмущениях (реализация левого-правого поворотов зависит от начальных возмущений).

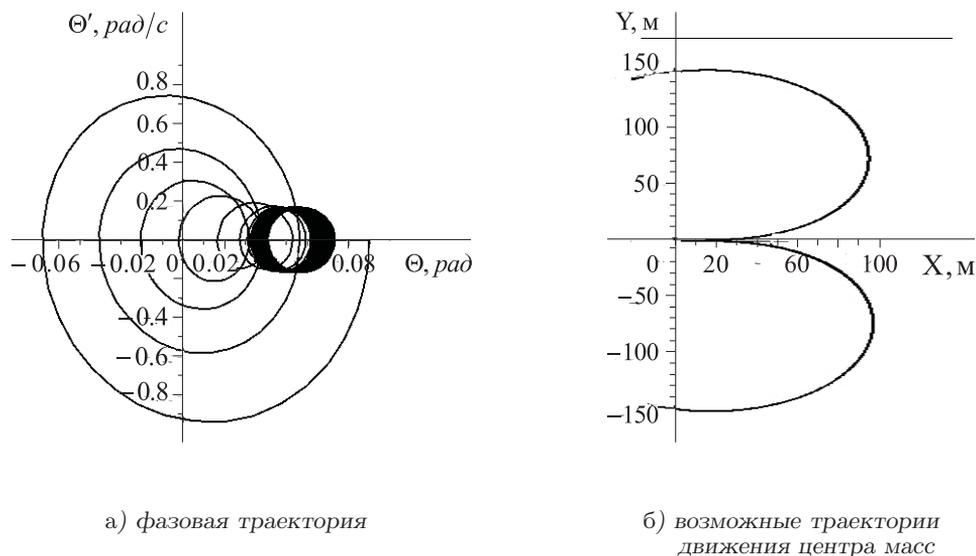


Рис. 8. Случай дивергентной неустойчивости.

Случай флаттерной неустойчивости имеем при $k = 400$ Н·м, $v = 4$ м/с: фазовые траектории в плоскости переменных $(\theta, \dot{\theta})$ наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис. 9, *а*); на рис. 9, *б* представлен график зависимости угла увода δ_1 от времени.

Результаты, полученные на основе численного интегрирования, указывают на достаточно хорошее согласование с результатами, полученными на основе приближенного численно-аналитического подхода.

Рис. 10, *а* иллюстрирует практическую неограниченность области притяжения невозмущенного прямолинейного движения при $v = 8$ м/с. При $k = 400$ Н·м, $v = 2$ м/с (рис. 10, *б*) реализуется колебательная неустойчивость с неограниченным ростом возмущений.

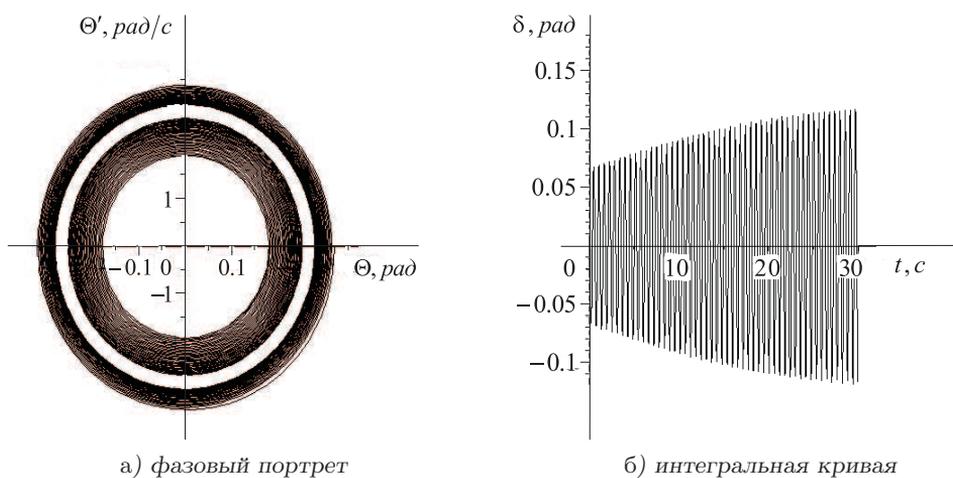


Рис. 9. Случай устойчивого предельного цикла.

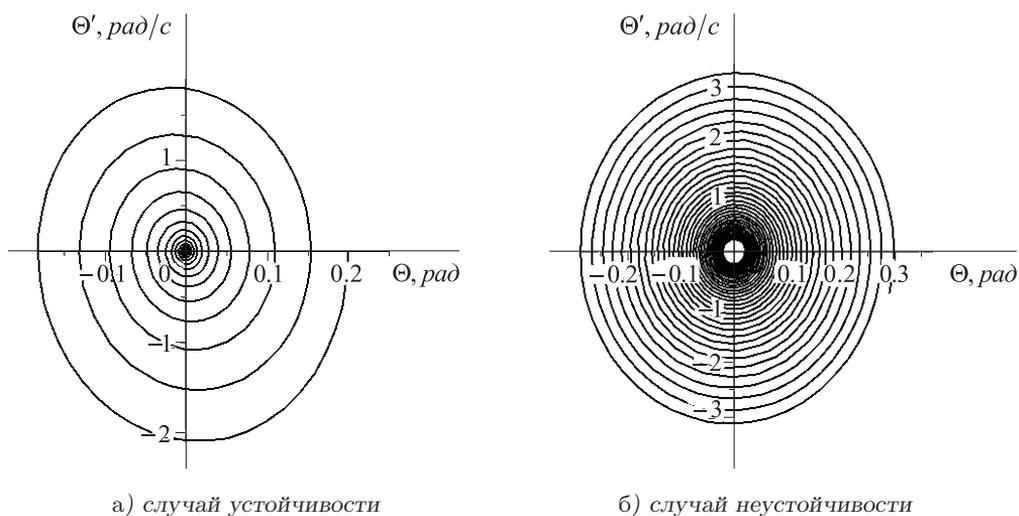


Рис. 10. Фазовые кривые.

Таким образом, результаты численного интегрирования полностью подтверждают качественную картину развития автоколебаний в окрестности прямолинейного движения экипажа, полученную на основе приближенного аналитического подхода.

Выводы. Для модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем получена оценка количества стационарных режимов движения в окрестности критической скорости прямолинейного движения. На основе построения бифуркационного множества сделан вывод о характере потери устойчивости (опасный-безопасный) прямолинейного стационарного режима по Н.Н. Баутину. Получено аналитическое выражение, определяющее ампли-

туду автоколебаний модели экипажа как функцию продольной скорости движения.

1. *Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г.* Бифуркации стационарных состояний в системах с качением при постоянных силовых возмущениях // Прикл. математика и механика. – 1994. – **58**, № 5. – С. 165–170.
2. *Лобас Л.Г., Сахно В.П., Вербицкий В.Г., Барылович Е.Л.* Бифуркации и катастрофы в динамических системах с симметрией: приложения к транспортной механике // Тр. II Междунар. научно-техн. конф. “Актуальные проблемы фундаментальных наук”. – 1994. – Т. 2, ч. 1. Симпозиум “Теор. и прикл. механика”. – М.: Техносфера-Информ. – 180 с; С. (А-35)–(А-38).
3. *Вербицкий В.Г., Новак А., Даниленко Э., Ситаж М.* Введение в теории устойчивости колесных экипажей и рельсового пути. – Донецк: “Вебер”, 2007. – 255 с.
4. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Об устойчивости движения транспортных машин с учетом колебаний управляющего колесного модуля // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 4. – С. 86–93.
5. *Крюков Б.И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
6. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. – К.: Наук. думка, 1990. – 232 с.
7. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – Наука, 1984. – С. 176.
8. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 366 с.
9. *Вербицкий В.Г., Садков М.Я.* Приближенный анализ автоколебательной системы // Докл. НАН Украины. – 2001. – № 10. – С. 48–52.
10. *Вельмагина Н.А., Вербицкий В.Г.* Анализ автоколебаний колесного модуля в прямолинейном режиме движения // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 100–108.

N.O. Velmagina, V.G. Verbitskii

Stability and bifurcation stationary states of motion of model wheeled vehicle with steering wheel module

Character of loss of stability (dangerous-safe) of a model of the wheeled vehicle is analysed for the guided wheeled module on the basis of numeral-analytical method of continuation on two parameters; the estimation of amplitudes of self-oscillations of the wheeled module is conducted in area of flutter instability of rectilinear motion.

Keywords: *steady-states, real bifurcations, wheeled vehicle, self-oscillations.*

Н.О. Вельмагина, В.Г. Вербицкий

Стійкість і біфуркації стаціонарних режимів руху моделі колісного екіпажу з керованим колісним модулем

Аналізується характер втрати стійкості (небезпечний-безпечний) моделі колісного екіпажу з керованим колісним модулем на основі чисельно-аналітичного методу продовження за двома параметрами; проведено оцінку амплітуд автоколивань колісного модуля в області флатерної нестійкості прямолінійного руху.

Ключові слова: *стаціонарні стани, дійсні біфуркації, колісний екіпаж, автоколивання.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
verb@mail.ru

Получено 29.11.12