УДК 517.946

Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ РЕШЕНИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

1. В ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$ с бесконечно гладкой границей ∂G рассматривается граничная задача

$$Lu = f, \quad B_j u\,|_{\partial G} = \varphi_j \quad (j = 1, \dots, m). \tag{1}$$

Здесь $L = L(x, D)$ — правильно эллиптическое линейное дифференциальное выражение порядка $2m$; $B_j = B_j(x, D)$ — граничные линейные дифференциальные выражения порядков $m < 2m$, удовлетворяющие условию Лопатинского. Коэффициенты выражений L, B_j — бесконечно гладкие комплекснозначные функции.

Пусть $\Gamma_1 \subset G$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие без края; Γ — открытое подмножество Γ_1. Для любого гладкого решения u задачи (1) положим $\gamma_r u = (u\,|_\Gamma, \dots, D_\nu^{r-1} u\,|_\Gamma)$, $D_\nu = i\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu$ — производная по нормали к Γ. Будем произвольно изменять функцию f в сколь угодно малой фиксированной подобласти $G_0 \subset G$ (либо произвольно изменять $\{\varphi_j\}$ на сколь угодно малом куске $\gamma \subset \partial G$).

Исследуется вопрос о возможности приближения полученными при таком изменении векторами $\gamma_r u$ любой заданной на Γ функции $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$. Такого рода задачи впервые рассматривались в 1960 г. Беккертом [1], а затем в ряде работ Вильденхайна, Шульце, Хаманна и др. (см. [2] и приведенную там библиографию). Во всех этих работах граничные условия предполагались нормальными в смысле Аронша́йна—Мильграма — Шехтера. Поскольку требование нормальности весьма ограничительно, естественно возникает задача об освобождении от этого требования. Эта задача решена в данной работе.

2. Всюду в дальнейшем предполагается, что для формально сопряженного с L выражения L^+ имеет место свойство единственности для задачи Коши: если $L^+ v = 0$ в области $G_1 \subset G$ и $v \equiv 0$ в области $G_2 \subset G_1$, то $v \equiv 0$ в G_1.

Для $p, t \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $t \geqslant 0$ через $H^{t,p}(G)$ обозначим пространство бесселевых потенциалов, $H^{-t,p}(G)$ — пространство, сопряженное с $H^{t,p'}(G)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(G)$; $\|\cdot\|_{t,p}$ — норма в $H^{t,p}(G)$ $(t \in \mathbb{R})$. Через $B^{t,p}(\Gamma)$ $(t \in \mathbb{R})$ обозначаются пространства Бесова; $B^{-t,p'}(\Gamma)$ и $B^{t,p}(\Gamma)$ взаимно сопряжены относительно расширения $\langle\cdot, \cdot\rangle$ скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$; $\langle\langle\cdot\rangle\rangle_{t,p}$ — норма в $B^{t,p}(\Gamma)$.

Лемма. Пусть $v \in H^{-s,p'}(G)$, $s > 0$, причем $\operatorname{supp} v \subset \Gamma_1$. Тогда а) если $s \leqslant 1/p$, то $v = 0$; б) если $s > \frac{1}{p}$ и $\varkappa$ — наибольшее целое число, меньшее $s - \frac{1}{p}$, то

$$v = \sum_{j=0}^{\varkappa} D_\nu^j (\tau_j + \delta_{\Gamma_1}),$$

где $\tau_j \in B^{-\left(s-j-\frac{1}{p}\right),p'}(\Gamma_1)$; δ_{Γ_1} — мера Дирака, сосредоточенная на Γ_1.

Доказательство. Из условия леммы следует, что $(v, w) = 0$ $(\forall w \in C_0^\infty(\bar{G} \setminus \Gamma_1))$. Если $s \leqslant \frac{1}{p}$, то, как известно, $C_0^\infty(\bar{G} \setminus \Gamma_1)$ плотно в $H^{s,p}(G)$; поэтому $(v, w) = 0$ $(\forall w \in H^{s,p}(G))$ и, следовательно, $v = 0$.

Если $s > \frac{1}{p}$, то замыкание $C_0^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma_1)$ состоит из тех и только тех $w \in H^{s,p}(G)$, для которых $D_\nu^j w|_{\Gamma_1} = 0$ $(j = 1, \ldots, \varkappa)$. Поэтому антилинейный функционал $l(w) = (v, w)$ $(w \in H^{s,p}(G))$ зависит лишь от набора нормальных производных $(w|_{\Gamma_1}, \ldots, D_\nu^\varkappa w|_{\Gamma_1}) \in \prod_{j=0}^{\varkappa} B^{s-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma_1)$. Следовательно, существуют такие $\tau_j \in B^{-\left(s-j-\frac{1}{p}\right),p'}(\Gamma_1)$ $(j=0, 1, \ldots, \varkappa)$, что при всех $w \in H^{s,p}(G)$

$$(v, w) = l(w) = \sum_{j=0}^{\varkappa} \langle \tau_j, D_\nu^j w \rangle = \Big(\sum_{j=0}^{\varkappa} D_\nu^j (\tau_j \times \delta_{\Gamma_1}), w \Big).$$

Пусть G_0 — открытое подмножество G, такое, что $G_0 \subset G \setminus \overline{\Gamma}$. Диаметр G_0 произволен, он может быть сколь угодно малым. Положим $M(G_0) = \{u \in C^\infty(\overline{G}) : \operatorname{supp} Lu \subset G_0,\ B_j u|_{\partial G} = 0\ (j = 1, \ldots, m)\}$ и

$$v_r M(G_0) = \{(u|_\Gamma, D_\nu u|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_\Gamma) : u \in M(G_0)\}.$$

Теорема 1. Если множество $G \setminus \overline{\Gamma}$ связно, то $v_{2m} M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{j=1}^{2m} B^{s_j,p}(\Gamma)$ для любых $s_j \geqslant 0$ $(j=1,\ldots,2m)$ и $1 < p < \infty$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $s \geqslant 0$ и $1 < p < \infty$ множество $v_{2m} M(G_0)$ плотно в $\prod_{r=1}^{2m} B^{2m+s-r+1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. Для этого надо проверить, что если $t_r \in B^{-\left(2m+s-r+1-\frac{1}{p}\right),p'}(\Gamma)$ $(r = 1, \ldots, 2m)$ и

$$\sum_{r=1}^{2m} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u \rangle = 0 \quad (\forall u \in M(G_0)), \tag{2}$$

то $t_r = 0$ $(r = 1, \ldots, 2m)$. Равенство (2) перепишем в виде

$$\Big(\sum_{r=1}^{2m} D_\nu^{r-1} (t_r \times \delta_\Gamma), u \Big) = 0 \quad (\forall u \in M(G_0)), \tag{3}$$

где δ_Γ — мера Дирака, сосредоточенная на Γ. Но поскольку

$$|(D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma), u)| = |\langle t_r, D_\nu^{r-1} u \rangle| \leqslant \langle\langle t_r \rangle\rangle_{-\left(2m+s-r+1-\frac{1}{p}\right),p'} \times$$

$$\times \langle\langle D_\nu^{r-1} u \rangle\rangle_{2m+s-r+1-\frac{1}{p},p} \leqslant \langle\langle t_r \rangle\rangle_{-\left(2m+s-r+1-\frac{1}{p}\right),p'} \|u\|_{2m+s,p},$$

то

$$w = \sum_{r=1}^{2m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma) \in H^{-2m-s,p'}(G).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ ядро задачи (1). Поскольку $\mathfrak{N} \subset C^\infty(\overline{G})$, то из (3) сразу следует, что $(w, u) = 0$ $(\forall u \in \mathfrak{N})$. Поэтому, согласно теореме 7 из [3], существует элемент $v \in H^{-s,p'}(G)$, являющийся решением задачи

$$L^+ v = w, \quad \check{q}^+ B_j' v|_{\partial G} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

формально сопряженной относительно формулы Грина (1.39) из [3] к задаче (1). Здесь $\underset{\smile}{q}^+B_j'$ — граничное выражение порядка $m_j'<2m$, дифференциальное в нормальном и псевдодифференциальное в касательных к ∂G направлениях. По теореме о локальном повышении гладкости $v\in C^\infty(\overline{G}\setminus\overline{\Gamma})$ и удовлетворяет граничным условиям (4) в обычном смысле. Из (3) и (4) с помощью упомянутой формулы Грина получаем $0=(w,u)=(L^+v,u)=(v,Lu)$ $(\forall u\in M(G_0))$, или

$$(v, Lu)=0 \quad (\forall u\in M(G_0)). \tag{5}$$

Из эллиптичности задачи (1) следует существование такого конечномерного пространства $\mathfrak{N}_0^+\subset C^\infty(\overline{G})$, что задача (1) с $\varphi_1=\ldots=\varphi_m=0$ разрешима тогда и только тогда, когда $(f,\mathfrak{N}_0^+)=0$. При этом элементы $\mathfrak{N}_0^+$ являются решениями задачи (4) с $w=0$. Покажем, что решение v задачи (4) можно заменить таким решением $v_1=v+v_0$, что $v_0\in\mathfrak{N}_0^+$ и $v_1=0$ в G_0.

Действительно, пусть $e_1,\ldots,e_k$ — базис в $\mathfrak{N}_0^+$ и пусть $h_1,\ldots,h_k\in C_0^\infty(G_0)$ таковы, что $(e_i,h_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,k)$.

Для любой функции $g\in C_0^\infty(G_0)$ положим

$$g_1=g-\sum_{j=1}^{k}(g,e_j)h_j. \tag{6}$$

Ясно, что $\operatorname{supp} g_1\subset G_0$ и $(g_1,e_i)=0$ $(i=1,\ldots,k)$, т. е. $(g_1,\mathfrak{N}_0^+)=0$. Поэтому существует $u\in C^\infty(G)$, такой, что $Lu=g_1$, $B_ju|_{\partial G}=0$ $(j=1,\ldots,m)$. Это означает, что $u\in M(G_0)$. Но тогда из (5) и (6) получаем

$$0=\left(v,g-\sum_{j=1}^{k}(g,e_j)h_j\right)=\left(v-\sum_{j=1}^{k}(v,h_j)e_j,g\right)\quad(\forall g\in C_0^\infty(G_0)). \tag{7}$$

Поскольку $e_j\in\mathfrak{N}_0^+$, то элемент $v_1=v-\sum\limits_{j=1}^{k}(v,h_j)e_j$ является, как и v, решением задачи (4). Вместе с тем из (7) следует, что $v_1\equiv0$ в G_0; но тогда в силу условия единственности задачи Коши для L^+ и связности $\overline{G}\setminus\overline{\Gamma}$ находим, что $v_1\equiv0$ в $\overline{G}\setminus\overline{\Gamma}$, т. е. $\operatorname{supp} v_1\subset\Gamma\subset\Gamma_1$. Поскольку $v_1\in H^{-s,p'}(G_0)$, то из доказанной выше леммы получаем $v_1=\sum\limits_{j=0}^{\varkappa}D_\nu^j(\tau_j\times\delta_\Gamma)$, где $\tau_j\in B^{-\left(s-j-\frac{1}{p}\right),p'}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,\varkappa)$ (так как из условия $\operatorname{supp} v_1\subset\overline{\Gamma}$ следует, что и $\operatorname{supp}\tau_j\subset\overline{\Gamma}$). Теперь из (4) находим

$$L^+\left(\sum_{j=1}^{\varkappa}D_\nu^j(\tau_j\times\delta_\Gamma)\right)=\sum_{r=1}^{2m}D_\nu^{r-1}(t_r\times\delta_\Gamma). \tag{8}$$

Из равенства (8), учитывая линейную независимость мер Дирака и их производных и эллиптичность выражения L^+, последовательно находим $\tau_\varkappa=\ldots=\tau_1=0$. Но тогда из (8) следует, что и $t_r=0$ $(r=1,\ldots,2m)$.

Теорема 2. Пусть $\Gamma=\Gamma_1$ ограничивает подобласть G_1 области G (т. е. $G\setminus\Gamma$ несвязно) и пусть в области G_1 задача Дирихле для уравнения $L^+v=0$ имеет не более одного решения. Тогда множество $\nu_m M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod\limits_{r=1}^{m}B^{m-r+1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что если

$$t_r\in B^{-\left(m-r+1-\frac{1}{p}\right),p'}(\Gamma)\quad(r=1,\ldots,m)$$

таковы, что

$$\sum_{r=1}^{m} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u\rangle = 0 \quad (\forall u \in M(G_0)), \tag{9}$$

то $t_1 = \ldots = t_m = 0$. Переписав (9), как и при доказательстве теоремы (1), в виде $\left(\sum_{r=1}^{m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma), u\right) = 0$ и воспользовавшись оценкой

$$|(D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma), u)| \leqslant \langle\langle t_r\rangle\rangle_{-\left(m-r+1-\frac{1}{p}\right),p'} \|u\|_{m,p'},$$

получаем $w = \sum_{r=1}^{m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma) \in H^{-m,p'}(G)$. Но тогда задача (4) имеет решение $v \in H^{m,p'}(G)$, причем по теореме о локальном повышении гладкости $v \in C^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma)$ Рассуждая далее, как и при доказательстве теоремы 1, и построив решение v_1 задачи (4), находим, что $v_1 \equiv 0$ в $\overline{G} \setminus \overline{G}_1$. Поскольку $v_1 \in H^{m,p'}(G)$, отсюда следует, что $D_\nu^{j-1} v_1|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Таким образом, v_1 — решение задачи Дирихле $L^+ v_1 = 0$ в G_1, $D_\nu^{j-1} v|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \ldots m)$, поэтому $v_1 \equiv 0$ в $\overline{G}$. Но тогда из (4) вытекает, что $t_1 = \ldots = t_m = 0$.

3. Пусть теперь γ — открытое подмножество ∂G; положим $N(\gamma) = \{u \in C^\infty(\overline{G}) : Lu = 0, \quad \operatorname{supp} B_j u|_{\partial G} \subset \gamma \quad (j = 1, \ldots, m)\}$ и $v_r N(\gamma) = \{(u|_\Gamma, D_\nu u|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_\Gamma) : u \in N(\gamma)\}$.

Теорема 3. Если подмножество $G \setminus \overline{\Gamma}$ связно, то $v_{2m} N(\gamma)$ плотно в $\prod_{j=1}^{2m} B^{s_j,p}(\Gamma)$ для любых $s_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, 2m)$ и $1 < p < \infty$.

Доказательство. Построим содержащую G область G' с гладкой границей $\partial G' \supset \partial G \setminus \gamma$. При этом область G' выберем настолько близкой к G, чтобы коэффициенты дифференциальных выражений L и B_j можно было продолжить соответственно в G' и на ∂G с сохранением гладкости, эллиптичности и условия Лопатинского. Пусть теперь G_0 — открытое подмножество $G' \setminus \overline{G}$. Тогда в силу теоремы 1, примененной к области G', получаем

$$\overline{v_{2m} M(G_0)} = \prod_{j=1}^{2m} B^{s_j,p}(\Gamma). \tag{10}$$

Но функции из $M(G_0)$ удовлетворяют на $\partial G'$ нулевым граничным условиям, следовательно, если $u \in M(G_0)$, то $\operatorname{supp} B_j u|_{\partial G} \subset \gamma \quad (j = 1, \ldots, m)$. Поэтому $M(G_0) \subset N(\gamma)$, и из (10) следует требуемое.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то множество $v_m N(\gamma)$ плотно в $\prod_{j=1}^{m} B^{m-r+1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3.

4. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 3, имеют место и в том случае, когда Γ_1 — многообразие размерности k, $1 \leqslant k < n-1$, Γ — открытое подмножество Γ_1 (ср. [2]).

1. *Beckert H.* Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Losungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleitungen // Math. Ann.— 1960.— 139.— P. 255—264.

2. *Hamann U.* Approximation durch Normalableitungen von Losungen elliptischer Randwertprobleme in beliebigen Sobolev — Raumen // Math. Nachr.— 1986.— 128.— P. 199—214.

3. *Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными // Мат. сб.— 1970.— 8, № 2.— С. 181—213.

Чернигов. пед. ин-т Получено 23.09.87