ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 517.925, 531.38

©2005. **А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко**

КОНЕЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ Н. КОВАЛЕВСКОГО

Ранее были получены все 24 семейства степенно-логарифмических разложений по p решений системы уравнений Н. Ковалевского, описывающей движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в случае $B \neq C$, $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Из них 10 семейств при $p \to 0$ (хвосты) и 14 семейств при $p \to \infty$ (головы). Для поиска конечных разложений мы проверяем, какие пары "хвост–голова"дают конечное разложение, а какие — нет. На этом пути получаем все конечные решения уравнений Н. Ковалевского, в том числе все 7 известных и еще 5 новых. Все новые решения – комплексные. Доказывается, что нет других решений, являющихся конечными суммами рациональных степеней p.

Введение. В изучении уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, успехи традиционно связываются с нахождением интегрируемых и неинтегрируемых случаев, а также — частных решений. Новые возможности такого изучения дает степенная геометрия [1]. К настоящему времени она систематически применялась к системе уравнений Н. Ковалевского

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma''\tau + \frac{\sigma'\tau'}{2} + a_1 + a_2\sigma + a_3 p\tau' + a_4\tau + a_5 p^2 = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{\sigma'\tau'}{2} + b_1 + b_2 p\sigma' + b_3\sigma + b_4\tau + b_5 p^2 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dp$, p — независимая переменная, $\sigma(p)$ и $\tau(p)$ — зависимые переменные. К системе (1) сводятся уравнения Эйлера–Пуассона при

$$B \neq C, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = z_0 = 0.$$

Для уравнений Н. Ковалевского (1) имеются 2 случая интегрируемости (С. Ковалевской и Чаплыгина) и известны 9 семейств частных решений (Стеклова, Горячева, Чаплыгина, Н. Ковалевского, Аппельрота, Горра, Докшевича и Коносевича–Поздняковича). В неинтегрируемых случаях все известные частные решения являются конечными суммами рациональных степеней переменных трех видов:

а) p, б) $p + \text{const}$, в) $p^2 + \text{const}$.

Теперь появилась возможность найти все такие решения. А именно, в [2–10] было найдено 22 семейства степенно-логарифмических по p разложений решений системы Н. Ковалевского. Недавно [11] мы нашли еще два таких семейства и доказали, что других нет. Итого, уравнения Н. Ковалевского (1) имеют 24 семейства таких разложений решений. Из них 10 семейств при $p \to 0$ (хвосты) и 14 семейств при $p \to \infty$ (головы). Для поиска конечных разложений решений вида а) мы проверили, какие пары "хвост–голова" совместимы, т.е. дают конечное разложение, а какие — нет. На этом пути получены все частные решения вида а), в том числе — все 7 известных [12–19] и еще 5 новых.

1. Постановка задачи. Здесь используется та же нумерация семейств разложений решений уравнений Н. Ковалевского, что и в [8,10], только эти семейства обозначаются буквой $\mathcal{F}$ вместо $\mathcal{H}$. На самом деле, используются только степенные разложения с рациональными показателями степени. Мы рассматриваем те комплексные решения уравнений Н. Ковалевского, которым соответствуют комплексные решения уравнений Эйлера–Пуассона. Система (1) имеет, как известно, два первых интеграла

$$\begin{array}{lcl} f_3 & \stackrel{\text{def}}{=} & \sigma'\tau - \sigma\tau' + c_1 + c_2 p + c_3 p\sigma + c_4 p\tau + c_5 p^3 = 0, \\ f_4 & \stackrel{\text{def}}{=} & d_1(\sigma')^2\tau + \sigma(\tau')^2 + d_2 + d_3\sigma + d_4\tau + d_5\sigma^2 + \\ & + & d_6 p\sigma'\tau + d_7 p\sigma\tau' + d_8\sigma\tau + d_9\tau^2 + d_{10}p^2 + \\ & + & d_{11}p^2\sigma + d_{12}p^2\tau + d_{13}p^4 = 0. \end{array} \tag{2}$$

В (1) и (2) коэффициенты a_i, b_i, c_i и d_i являются рациональными функциями параметров

$$x \stackrel{\text{def}}{=} A/C, \quad y \stackrel{\text{def}}{=} B/C, \qquad z \stackrel{\text{def}}{=} h/C, \qquad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} l/C, \qquad \xi \stackrel{\text{def}}{=} x_0/C,$$

где h и l — это значения интегралов энергии и момента для уравнений Эйлера–Пуассона. Здесь x, y вещественны и удовлетворяют неравенствам

$$x + y \geq 1, \quad x - y \geq -1, \quad y - x \geq -1, \quad y \neq 0, \quad y \neq 1, \tag{3}$$

которые определяют множество $\mathbf{D}$; z и $\lambda \in \mathbb{C}$; $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Системы (1) и (2) имеют симметрию

$$(p, \sigma, \tau, x, y, z, \lambda, \xi) \to \left(\bar{p}, -\bar{\tau}, -\bar{\sigma}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{z}}{\bar{y}}, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{y}}, \frac{\bar{\xi}}{\bar{y}}\right). \tag{4}$$

Задача. *Найти все такие решения $\sigma(p)$, $\tau(p)$ системы* (1), *которые являются конечными суммами рациональных степеней p :*

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k\, p^{\alpha_k}, \quad \tau = \sum_{l=0}^{n} \tau_l\, p^{\beta_l}, \tag{5}$$

где α_k, β_l — рациональные числа; постоянные $\sigma_k, \tau_l \in \mathbb{C}$; $\sigma_0, \sigma_m, \tau_0, \tau_n \neq 0$.

Под вещественными решениями мы понимаем те решения уравнений Н. Ковалевского, которым отвечают вещественные решения уравнений Эйлера–Пуассона, т.е. $\lambda, z \in \mathbb{R}$ и $(y-1)\sigma$, $(y-1)\tau \geq 0$. Конечное решение (5) считается известным, если оно где-то опубликовано, если оно получается из опубликованного отображением симметрии (4) или учетом другого корня алгебраического уравнения, определяющего значение специфического параметра. Решение, являющееся границей (порождающего) семейства решений, не считается самостоятельным.

2. Метод. Для решения задачи был использован перечень всех 23 семейств $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{21}$, $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{F}_{24}$ степенных разложений

$$\sigma = \sigma_0\, p^{\alpha} + \sum \sigma_{\alpha+s}\, p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0\, p^{\beta} + \sum \tau_{\beta+s}\, p^{\beta+s}, \quad s \in \mathbf{K} \tag{6}$$

решений системы (1). В (6) полагаем $\alpha, \beta, s \in \mathbb{R}$; $\sigma_0, \tau_0, \sigma_{\alpha+s}, \tau_{\beta+s} \in \mathbb{C}$; $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$. Семейства $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{21}$ были найдены в [2–10], а $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{F}_{24}$ — в [11]. В [11] также доказано, что других разложений нет. Этот перечень вместе с семейством $\mathcal{F}_j$ содержит также симметричное по (4) семейство $\overline{\mathcal{F}}_j$. Обычно $\overline{\mathcal{F}}_j \neq \mathcal{F}_j$; только $\mathcal{F}_3 = \overline{\mathcal{F}}_3$, $\mathcal{F}_4 = \overline{\mathcal{F}}_4$ и $\mathcal{F}_{19} = \overline{\mathcal{F}}_{19}$.

У 10 семейств $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{F}_{24}$ переменная $p \to 0$; их называем *хвосты.* У тринадцати семейств $\mathcal{F}_9$–$\mathcal{F}_{21}$ переменная $p \to \infty$; их называем *головы.* Каждое конечное разложение (5) имеет один хвост и одну голову. Поэтому для каждой пары семейств: хвост $\mathcal{F}_i$ и голова $\mathcal{F}_j$

$$i \in 1, 2, \ldots, 8, 23, 24; \quad j \in 9, 10, \ldots, 21, \tag{7}$$

надо изучить пересечение

$$\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j. \tag{8}$$

Если оно не пусто, то дает конечное разложение (5). Если же оно пусто, то не существует разложения (5) с такими хвостом и головой. Этот подход позволяет найти все конечные разложения (5).

Анализ пересечений (7), (8) производится следующим образом. Для каждого семейства $\mathcal{F}_m$ разложений (6) известны:

$$\alpha^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha, \quad \beta^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta;$$

множество $\mathbf{K}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}$ значений s, т.е. множества $\mathbf{K}_\sigma^{(m)}$ и $\mathbf{K}_\tau^{(m)}$ показателей степени $\alpha + s$ и $\beta + s$;

множество $\mathbf{M}^{(m)}$ допустимых значений параметров x, y, z, λ, ξ;

произвольные коэффициенты среди $\sigma_{\alpha+s}$ и $\tau_{\beta+s}$.

Для каждого семейства $\mathcal{F}_m$ в его разложении (6) можно вычислить любое конечное число коэффициентов $\sigma_{\alpha+s}$ и $\tau_{\beta+s}$ в виде рациональных функций параметров.

Условия

$$\begin{gathered} \alpha^{(i)} \leq \alpha^{(j)}, \quad \beta^{(i)} \leq \beta^{(j)}, \\ \mathbf{K}_\sigma^{(i)} \cap \mathbf{K}_\sigma^{(j)}, \quad \mathbf{K}_\tau^{(i)} \cap \mathbf{K}_\tau^{(j)}, \quad \mathbf{M}^{(i)} \cap \mathbf{M}^{(j)} \neq \emptyset \end{gathered} \tag{9}$$

необходимы для существования непустого пересечения (7), (8).

Следующий шаг: для каждой пары

$$\alpha^{(i)} + s^{(i)} = \alpha^{(j)} + s^{(j)}$$

проверяется возможность равенства

$$\sigma_{\alpha^{(i)}+s^{(i)}} = \sigma_{\alpha^{(j)}+s^{(j)}}.$$

Аналогично для $\tau_{\beta+s}$.

3. Результаты. Если конечное разложение (5) записать в виде

$$\sigma = \sigma_0 p^{\alpha_1} + \ldots + \sigma_n p^{\alpha_2}, \quad \tau = \tau_0 p^{\beta_1} + \ldots + \tau_m p^{\beta_2},$$

где $\alpha_1 \leq \alpha_2$ и $\beta_1 \leq \beta_2$, то результаты представлены в табл. 1. Ее столбцы соответствуют основным хвостам (без симметричных), а строки соответствуют всем головам. Звездочкой “ * ” отмечены известные решения, знак “ + ” отмечает новое решение, знак “ – ” отмечает отсутствие решения.

В табл. 2 дан список всех 30 конечных решений вида (5). Всего имеется 16 основных

Таблица 1. Конечные разложения с рациональными показателями

			$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{23}$
			$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 2/3$	$\alpha_1 = -1$	$\alpha_1 < 0$	$\alpha_1 \in (0,1)$
			$\beta_1 = 1$	$\beta_1 = 0$	$\beta_1 = 2/3$	$\beta_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\beta_1 \in (1,2)$
$\mathcal{F}_9$	$\alpha_2 > 2$	$\beta_2 = 2$	$-$	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{10}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 > 2$	$*$	$*$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathcal{F}_{11}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2/3$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{12}$	$\alpha_2 = 2/3$	$\beta_2 = 2$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{13}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{14}$	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{15}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	$-$	$-$	$*$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{16}$	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	$-$	$-$	$*$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{17}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{18}$	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathcal{F}_{19}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	$-$	$*$	$*$	$-$	$+$	$-$
$\mathcal{F}_{20}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	$*$	$*$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\mathcal{F}_{21}$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$	$-$

решений и еще 14 симметричных по (4). Новыми являются

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1: \quad & x = y = 2,\ z = 0,\ \lambda \neq 0, \\
& \sigma = \frac{\xi\lambda}{8}\,p^{-1} + \frac{\xi}{2\lambda}\,p - \frac{p^2}{2},\ \tau = -2p^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2: \quad & y = 1 + x/2, \quad z = \lambda = 0, \\
& \sigma = -\frac{2\xi^2\,p^{-2}}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{(1-x)\,p^2}{2},\ \tau = -\frac{p^2}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3: \quad & x = y = 2,\ z = \lambda = 0, \\
& \sigma = -\frac{2\xi^2\,p^{-2}}{3} - \frac{p^2}{2},\ \tau = -\frac{p^2}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_5: \quad & x = y,\ \lambda = z = 0,\ \sigma = \sigma_0 p^{2/3} + \sigma_2 p^2,\ \tau = \tau_0 p^{2/3}; \\
& \tau_0^3 = \frac{81y\xi^2}{y+2},\ \frac{\sigma_0}{\tau_0} = -\frac{y+2}{3y^2},\ \sigma_2 = \frac{1-y}{y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{15}: \quad & x = \frac{8}{5},\ y = \frac{9}{5}, \quad z = \lambda = 0, \\
& \sigma = \frac{125}{288}\xi^2 p^{-2} - \frac{1}{18}p^2, \quad \tau = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{88}{625\xi^2}p^6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{16}: \quad & x = \frac{14}{9},\ y = \frac{16}{9},\ z = -\frac{11\,\tau_1^{-1}}{36},\ \lambda = 0, \\
& \sigma = -\frac{11}{1152}\,\tau_1^{-2} p^{-2} - \frac{11}{144}\,\tau_1^{-1} - \frac{p^2}{8},\ \tau = -\frac{p^2}{2} - \tau_1 p^4.
\end{aligned}$$

При этом $\mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}_2$. Все эти решения комплексные.

Таблица 2. Конечные степенные решения с рациональными показателями

Решение	хвост	голова	α_1	α_2	β_1	β_2	пар.	ограничения параметров
$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_{20}$	-1	2	2	2	λ	$x = y = 2,\ z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_1$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_{21}$	2	2	-1	2	λ	$x = 1,\ y = 1/2,\ z = 0$
$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{19}$	-2	2	2	2	x	$y = 1 + x/2,\ \lambda = z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_2$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_{19}$	2	2	-2	2	x	$y = 1 - x/2,\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{20}$	-2	2	2	2	–	$x = y = 2,\ \lambda = z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_3$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_{21}$	2	2	-2	2	–	$x = 1,\ y = 1/2,\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_9$	2/3	10/3	2/3	2	–	$x \approx 1.0,\ y \approx 0.7,\ \lambda = z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_4$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{10}$	2/3	2	2/3	10/3	–	$x \approx 1.4,\ y \approx 1.39,\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{11}$	2/3	2	2/3	2/3	y	$x = y,\ \lambda = z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_5$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{12}$	2/3	2/3	2/3	2	y	$x = 1,\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_6$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{15}$	2/3	2	2/3	4/3	z	$x = y = 4,\ \lambda = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_6$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{16}$	2/3	4/3	2/3	2	z	$x = 1,\ y = 1/4,\ \lambda = 0$
$\mathcal{R}_7 = \overline{\mathcal{R}}_7$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_{19}$	2/3	2	2/3	2	x	$y = \mathrm{y}(x),\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_8$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_{10}$	0	2	1	3	–	$(x_3, y_3, \lambda_3, z_3),\ (x_4, y_4, \lambda_4, z_4)$
$\overline{\mathcal{R}}_8$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_9$	1	3	0	2	–	$(x_1, y_1, \lambda_1, z_1),\ (x_2, y_2, \lambda_2, z_2)$
$\mathcal{R}_9$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_{21}$	0	2	1	2	λ	$x = 1,\ y = 1/2,\ z = 2\lambda^2$
$\overline{\mathcal{R}}_9$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_{20}$	1	2	0	2	λ	$x = y = 2,\ z = \lambda^2$
$\mathcal{R}_{10}$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_{20}$	0	2	1	2	λ	$x = y = 2,\ z = \mathrm{z}(\lambda)$
$\overline{\mathcal{R}}_{10}$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_{21}$	1	2	0	2	λ	$x = 1,\ y = 1/2,\ z = \mathrm{z}(\lambda)$
$\mathcal{R}_{11}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_9$	0	3	0	2	y	$x = \mathrm{x}(y),\ \lambda = \lambda(y),\ z = \mathrm{z}(y)$
$\overline{\mathcal{R}}_{11}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_{10}$	0	2	0	3	y	$x = \mathrm{x}(y),\ \lambda = \lambda(y),\ z = \mathrm{z}(y)$
$\mathcal{R}_{12}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_9$	0	4	0	2	y	$x = \mathrm{x}(y),\ \lambda = 0,\ z = \mathrm{z}(y)$
$\overline{\mathcal{R}}_{12}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_{10}$	0	2	0	4	y	$x = \mathrm{x}(y),\ \lambda = 0,\ z = \mathrm{z}(y)$
$\mathcal{R}_{13} = \overline{\mathcal{R}}_{13}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_{19}$	0	2	0	2	x, y	$\lambda = 0,\ z = \mathrm{z}(x, y)$
$\mathcal{R}_{14}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_{20}$	0	2	0	2	λ, z	$x = y = 2$
$\overline{\mathcal{R}}_{14}$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_{21}$	0	2	0	2	λ, z	$x = 1,\ y = 1/2$
$\mathcal{R}_{15}$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{10}$	-2	2	2	6	–	$x = 8/5,\ y = 9/5,\ \lambda = z = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_{15}$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_9$	2	6	-2	2	–	$x = 8/9,\ y = 5/9,\ \lambda = z = 0$
$\mathcal{R}_{16}$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{10}$	-2	2	2	4	–	$x = 14/9,\ y = 16/9,\ \lambda = 0$
$\overline{\mathcal{R}}_{16}$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_9$	2	4	-2	2	–	$x = 14/16,\ y = 9/16,\ \lambda = 0$

В табл. 3 приведены все известные вещественные решения. При этом $\mathcal{R}_8 \subset \mathcal{R}_{11}$ и $\mathcal{R}_9,\ \mathcal{R}_{10} \subset \mathcal{R}_{14}$.

В [17] Г.В. Горр нашел комплексное решение

$$\mathcal{R}_4: \quad x = \frac{1268 - 44\sqrt{409}}{375}, \quad y = \frac{241 - 3\sqrt{409}}{250}, \quad z = 0, \quad \lambda = 0,$$

$$\sigma = \sigma_0 p^{10/3} + \sigma_2 p^2 + \sigma_4 p^{2/3}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \tau_2 p^{2/3},$$

где σ_0 удовлетворяет уравнению

$$\sigma_0^3 \xi^2 = \frac{99714082763947063\sqrt{409} - 2016592523367734611}{1305600000000000} < 0,$$

а другие коэффициенты суть

$$\sigma_2 = \frac{16459 - 847\sqrt{409}}{4352}, \qquad \sigma_4 = \frac{1211697549 - 59858217\sqrt{409}}{189399040\sigma_0},$$

$$\tau_0 = \frac{7\sqrt{409} - 109}{100}, \qquad \tau_2 = \frac{2521\sqrt{409} - 51037}{16000\sigma_0}.$$

Но там же он пропустил решение $\mathcal{R}_5$, выписанное выше.

Таблица 3. Вещественные решения уравнений Н. Ковалевского

Решение	пар.	ограничения	Автор
$\mathcal{R}_6$	z	$16a^3 - z^2 + 4\xi^2 = 0$	Горячев, Горр [18]
$\mathcal{R}_7 = \overline{\mathcal{R}}_7$	x	$x \in (5/3, (2\sqrt{73} - 2)/9)$	Чаплыгин [15]
$\mathcal{R}_8$	$-$	$y = y_1,\ \sigma_0 < 0$	Н. Ковалевский [12]
$\mathcal{R}_9$	λ	$z = 2\lambda^2$	С. Ковалевская, Делоне [19]
$\mathcal{R}_{10}$	λ	$\lambda^4 - 3z\lambda^2 + 2(z^2 - \xi^2) = 0$	С. Ковалевская, Аппельрот [16]
$\mathcal{R}_{11}$	y	$y \in (10/27, y_1) \cup (y_1, y_*),\ \sigma_0 < 0$	Н. Ковалевский [12]
$\mathcal{R}_{12}$	y	$y \in (3/8, 1/2)$	Горячев [13]
$\mathcal{R}_{13} = \overline{\mathcal{R}}_{13}$	x, y	$x > 2,\ \ z > 0$	Стеклов [14]
$\mathcal{R}_{14}$	λ, z	$-$	С. Ковалевская, Аппельрот [16]

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Уравнения Н. Ковалевского имеют 16 семейств частных решений $\mathcal{R}_1$ — R_{16} и не допускают других решений, являющихся конечными суммами рациональных степеней p.*

Подробное изложение этой работы содержится в препринте [20].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00050).

1. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Физматлит, 1998. – 288 с.
2. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Модифицированная система уравнений движения твердого тела. – М., 2001. – 36 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 49).
3. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Локальные разложения модифицированных движений твердого тела. – М., 2001. – 39 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 73).
4. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Асимптотические разложения модифицированных движений твердого тела. – М., 2001. – 34 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 90).
5. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Свойства разложений модифицированных движений твердого тела. – М., 2002. – 44 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 23).
6. *Брюно А.Д.* Разложения решений системы ОДУ. – М., 2003. – 27 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 59).
7. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* О вычислении степенных разложений модифицированных движений твердого тела// Докл. РАН. – 2002. – **386**, № 1. – С. 11–17.
8. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Семейства степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Там же. – **387**, № 3. – С. 297–303.
9. *Брюно А.Д.* Степенные свойства движений твердого тела // Там же. – **387**, № 6. – С. 727–732.
10. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 3–15.
11. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Последние разложения модифицированных движений твердого тела. – М., 2005. – 13 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 65).

12. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – B. 65. – S. 528–537.
13. *Горячев Д.Н.* Новый частный случай в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой // Тр. отд. физ. наук о–ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 23–24.
14. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. – С. 1–3.
15. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Собрание сочинений. – Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1948. – С. 125–132.
16. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С.В. Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–155.
17. *Горр Г.В.* Об алгебраическом инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 89–102.
18. *Горр Г.В.* Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Прикл. математики и механика. – 1970. – **34**, вып. 6. – С. 1139–1143.
19. *Делоне Н.Б.* Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – С.-Петербург, 1892. – 78 с.
20. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Простые конечные решения уравнений Н. Ковалевского. – М., 2005. – 32 с. – (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики, № 68).

Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
bruno@keldysh.ru, gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.09.05