УДК 531.38; 531.39

©2018. **Г.В. Горр**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С помощью неособого преобразования получена редукция уравнений Д. Гриоли к уравнениям Х. Яхьи. Указан класс решений уравнений Х. Яхьи, зависящий от произвольной вектор-функции компонент единичного вектора оси симметрии силовых полей. Рассмотрены асимптотические решения по Ляпунову в случае, когда предельное решение описывается линейной вектор-функцией.

Ключевые слова: *потенциальные и гироскопические силы, уравнения Гриоли, уравнения Яхьи, асимптотические движения.*

Введение. Среди обобщений классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой особое место занимают задачи, уравнения которых допускают три первых интеграла, поскольку дополнительный первый интеграл уравнений движения позволяет применить теорию последнего множителя по Якоби. В данной статье рассмотрена задача о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, уравнения которой получил Д. Гриоли [1].

Из уравнений Гриоли можно для конкретных задач получить уравнения движения тела в жидкости [2–4], или уравнения движения тела под действием ньютоновых, электрических и магнитных сил Лоренца [5, 6]. Некоторые частные случаи уравнений Д. Гриоли предложили М.П. Харламов [7] и Х.М. Яхья [8].

В статье на основании результатов [9] установлено преобразование уравнений Д. Гриоли к уравнениям Яхьи. Кроме этого, показано, что из уравнений Яхьи можно получить решение, зависящее от произвольной вектор-функции, входящей в правую часть динамического уравнения. Проведено исследование асимптотических решений уравнений движения тела, предельное решение которых характеризуется линейной структурой указанной функции. Установлены новые случаи асимптотически-периодических и асимптотически-маятниковых движений тела с негоризонтальной осью предельного движения.

1. Уравнения динамики твердого тела. Запишем уравнения Д. Гриоли [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \Big(\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial L(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела; $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ $(a = (a_{ij})$ – гирационный тензор) – угловая скорость тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \mu(x_1, x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ –

скалярная дифференцируемая функция указанных аргументов; $L = L(\boldsymbol{\nu}) = L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – функция, характеризующая гироскопические силы; $U = U(\boldsymbol{\nu}) = U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – потенциальная функция; $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ – градиенты указанных функций; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t. Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} + L(\boldsymbol{\nu}) = k, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\boldsymbol{\nu}) = 2E, \tag{2}$$

где k и E – произвольные постоянные.

Если в уравнениях (1) и интегралах (2) положить

$$\mu \equiv 0, \qquad L(\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(D\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \qquad U(\boldsymbol{\nu}) = (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \tag{3}$$

то получим уравнения класса Кирхгофа [2] в предложенных позднее обобщениях [3–5]. В соотношениях (3) $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$ – постоянные векторы; $D = (D_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. В случае (3) из соотношений (1) и (2) следует

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times D\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(D\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E. \tag{5}$$

Через A обозначен тензор инерции тела ($A = a^{-1}$). Уравнения (4) с интегралами (5) описывают движение гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией ньютоновского, электрического и магнитного полей. Линейным преобразованием они могут быть сведены к уравнениям движения тела в идеальной несжимаемой жидкости [5]. В частных случаях указанная аналогия доказана В.А. Стекловым [3] и П.В. Харламовым [4].

Если функция $\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})$ зависит только от $\boldsymbol{\nu}$, то из уравнений (1) следуют уравнения М.П. Харламова [7], которые получены из соображений, отличных от соображений Д. Гриоли.

В статье [8] Х. Яхья получил другие уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} - \mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \operatorname{div} \mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}). \tag{7}$$

Уравнения (6) также имеют место в задаче о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил.

Запишем первые интегралы уравнений (6)

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{l}(\boldsymbol{\nu})) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{8}$$

Здесь часть обозначений ($\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, U$) сохранена и введен новый вектор $\mathbf{M}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ по формуле (7), т. е. в уравнениях Яхьи появился некоторый характерный вектор $\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{l}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

2. О преобразовании уравнений Гриоли к уравнениям Яхьи. Пусть заданы уравнения (6) с интегралами (8). Полагая

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} = L(\boldsymbol{\nu}), \qquad -\operatorname{div} \mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}) = \mu(\boldsymbol{\nu}),$$

получим уравнения (1), в которых следует считать, что функция μ зависит только от компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Рассмотрим уравнения (1) с интегралами (2) (считаем, что $\mu = \mu(\boldsymbol{\nu})$). Зададим некоторое произвольное решение этих уравнений в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}), \tag{9}$$

где вектор $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{g}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – дифференцируемая функция $\boldsymbol{\nu}$. Функции L и U найдем из интегралов (2) подстановкой в них (9):

$$L(\boldsymbol{\nu}) = k - \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad U(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2}(a\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})) - E, \tag{10}$$

где a – гирационный тензор. Внесем значение (9) в уравнение Пуассона из системы (1):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}). \tag{11}$$

Было показано [9, с. 72], что вектор-функция (9) будет решением первого уравнения системы (1) при выборе функций L и U в виде (10) и учете решения $\boldsymbol{\nu}(t)$ уравнения (11), если

$$\mu(\boldsymbol{\nu}) = \operatorname{div} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}). \tag{12}$$

Полагая в первом уравнении системы (1) функции $L(\boldsymbol{\nu})$ и $\mu(\boldsymbol{\nu})$, соответственно, в виде (10) и (12) и переобозначая $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu})$, получим первое уравнение системы (6). Таким образом, при рассмотрении уравнений Д. Гриоли можно ввести произвольный вектор $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})$ и в силу соотношений (10), (12) и $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu})$ получить уравнение Х. Яхьи, указанное в системе (6). Целесообразность такого преобразования обоснована ниже.

3. Применение первого метода Ляпунова. Уравнения в вариациях. Метод получения из уравнений (1) уравнений (6) позволяет сделать вывод о том, что уравнения (6) имеют решение

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\nu}^*) + k\boldsymbol{\nu}^*, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\nu}^* = (\nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*)$ – решение уравнения $\dot{\boldsymbol{\nu}}^* = \boldsymbol{\nu}^* \times a\mathbf{x}^*$, если силовая функция U имеет вид

$$U(\boldsymbol{\nu}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^* \cdot a\mathbf{x}^*) - E. \tag{14}$$

Это свойство показывает определенное преимущество уравнений (6) перед уравнениями (1), так как оно позволяет проводить исследования “окрестности” решения (13) для уравнений (6) с учетом выражения (14) без предварительного нахождения решений этих уравнений. Следует учитывать, что этот результат получен в рамках подхода обратных задач механики.

В общем случае исследование решения (13) методом Ляпунова [10] представляется весьма сложным. Поэтому на первом этапе целесообразно исследовать линейный случай. Зададим исследуемое решение (без ограничения общности предельного решения положим $k = 0$):

$$\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\nu}^*) = -\mathbf{n}_0 - B\boldsymbol{\nu}^*, \tag{15}$$

где $\mathbf{n}_0 = (n_1, n_2, n_3)$ – постоянный вектор, $B = B_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ – постоянная матрица третьего порядка (не обязательно симметричная). В силу равенства (15) вектор угловой скорости тела имеет значение

$$\boldsymbol{\omega}^*(\boldsymbol{\nu}^*) = -a\mathbf{n}_0 - aB\boldsymbol{\nu}^*, \tag{16}$$

на основании чего запишем: уравнение Пуассона из системы (1)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}^* = (a\mathbf{n}_0 + aB\boldsymbol{\nu}^*) \times \boldsymbol{\nu}^* \tag{17}$$

и силовую функцию (14)

$$U(\boldsymbol{\nu}^*) = \frac{1}{2}\Big[(a\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0) + 2(B^T a\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}^*) + \boldsymbol{\nu}^* \cdot (B^T aB\boldsymbol{\nu}^*)\Big] - E. \tag{18}$$

Предположим теперь, что $U(\nu)$ определяется формулой (18), в которой убраны звездочки, а $I(\nu) = n_0 + B\nu$. Тогда уравнения (6) примут вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \Big[-\operatorname{Tr}(B)\boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}_0 + (B + B^T)\boldsymbol{\nu}\Big] \times a\mathbf{x} + (B^T a\mathbf{n}_0 + B^T aB\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\operatorname{Tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^{3} B_{ii}$, B^T – транспонированная матрица B. Эти уравнения имеют первые интегралы (8), в которых в силу равенств (15), (16), (18), (13)

$$U(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2}\Big[2(B^T a\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu} \cdot (B^T aB\boldsymbol{\nu}) - E_0\Big], \qquad \mathbf{l} = \mathbf{n}_0 + B\boldsymbol{\nu}. \tag{20}$$

Здесь E_0 – произвольная постоянная.

Для исследования окрестности решения $\mathbf{x}^*(t)$, $\boldsymbol{\nu}^*(t)$ уравнений (19) введем возмущения $\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}, \qquad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}, \tag{21}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Следуя методу Ляпунова [10], подставим выражения (21) в систему (19) и рассмотрим только уравнения в вариациях

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \times a\mathbf{x}^* + \operatorname{Tr}(B)(a\mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\gamma}) + (B + B^T)\boldsymbol{\gamma} \times a\mathbf{x}^* + \\ + B^T\boldsymbol{\nu}^* \times a\mathbf{y} + \operatorname{Tr}(B)(a\mathbf{y} \times \boldsymbol{\nu}^*) + B^T aB\mathbf{y} \times \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma} \times B^T a\mathbf{x}^*,\end{gathered} \tag{22}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times a\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma} \times a\mathbf{x}^*. \tag{23}$$

Запишем первые интегралы уравнений (22), (23)

$$\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \qquad \boldsymbol{\nu}^* \cdot (\mathbf{y} + B\boldsymbol{\gamma}) = c_2, \qquad a\mathbf{x}^* \cdot (\mathbf{y} + B\boldsymbol{\gamma}) = c_3, \tag{24}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. В уравнениях (22)–(24) $\mathbf{x}^*$ имеет значение (15), а вектор $\boldsymbol{\nu}^*$ должен удовлетворять уравнению (17).

Введем вместо вектора $\mathbf{y}$ вектор $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(z_1, z_2, z_3) = \mathbf{y} + B\boldsymbol{\gamma}. \tag{25}$$

Тогда из системы (22), (23) найдем

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z} \times a\mathbf{x}^* + B^T a\mathbf{z} \times \boldsymbol{\nu}^*, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times a\mathbf{z} + \boldsymbol{\gamma} \times a\mathbf{x}^* + aB\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\nu}^*. \tag{26}$$

Уравнения (26) имеют первые интегралы, которые следуют из равенств (24), (25):

$$\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \qquad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \mathbf{z} = c_2, \qquad a\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{z} = c_3. \tag{27}$$

Учитывая решение (15), в скалярном виде из системы (26) получим

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}_1 &= (\widetilde{B}_{12}\nu_3^* - \widetilde{B}_{13}\nu_2^*)z_1 + (-\widetilde{B}_{31}\nu_1^* - \widetilde{C}_{23}\nu_2^* + \widetilde{D}_{23}\nu_3^* - \widetilde{n}_3)z_2 + \\
&\quad + (\widetilde{B}_{21}\nu_1^* + \widetilde{D}_{23}\nu_2^* + \widetilde{C}_{32}\nu_3^* + \widetilde{n}_2)z_3, \\
\dot{\mathbf{z}}_2 &= (\widetilde{C}_{13}\nu_1^* + \widetilde{B}_{32}\nu_2^* + \widetilde{D}_{32}\nu_3^* + \widetilde{n}_3)z_1 + (\widetilde{B}_{23}\nu_1^* - \widetilde{B}_{21}\nu_3^*)z_2 + \\
&\quad + (\widetilde{D}_{31}\nu_1^* - \widetilde{B}_{12}\nu_2^* - \widetilde{C}_{13}\nu_3^* - \widetilde{n}_1)z_3, \\
\dot{\mathbf{z}}_3 &= (-\widetilde{C}_{12}\nu_1^* + \widetilde{D}_{12}\nu_2^* - \widetilde{B}_{23}\nu_3^* - \widetilde{n}_2)z_1 + (\widetilde{D}_{12}\nu_1^* + \widetilde{C}_{12}\nu_2^* + \\
&\quad + \widetilde{B}_{13}\nu_3^* + \widetilde{n}_1)z_2 + (\widetilde{B}_{31}\nu_2^* - \widetilde{B}_{32}\nu_1^*)z_3,
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1 &= a_3\nu_2^* z_3 - a_2\nu_3^* z_2 + (\widetilde{B}_{21}\nu_3^* - \widetilde{B}_{31}\nu_2^*)\gamma_1 + (-\widetilde{B}_{31}\nu_1^* - 2\widetilde{B}_{32}\nu_2^* + \\
&\quad + \widetilde{D}_{23}\nu_3^* - \widetilde{n}_3)\gamma_2 + (\widetilde{B}_{21}\nu_1^* - \widetilde{D}_{23}\nu_2^* + 2\widetilde{B}_{23}\nu_3^* + \widetilde{n}_2)\gamma_3, \\
\dot{\gamma}_2 &= a_1\nu_3^* z_1 - a_3\nu_1^* z_3 + (2\widetilde{B}_{31}\nu_1^* + \widetilde{B}_{32}\nu_2^* + \widetilde{D}_{31}\nu_3^* + \widetilde{n}_3)\gamma_1 + \\
&\quad + (\widetilde{B}_{32}\nu_1^* - \widetilde{B}_{12}\nu_3^*)\gamma_2 + (\widetilde{D}_{31}\nu_1^* - \widetilde{B}_{12}\nu_2^* - 2\widetilde{B}_{13}\nu_3^* - \widetilde{n}_1)\gamma_3, \\
\dot{\gamma}_3 &= a_2\nu_1^* z_2 - a_1\nu_2^* z_1 + (-2\widetilde{B}_{21}\nu_1^* + \widetilde{D}_{12}\nu_2^* - \widetilde{B}_{23}\nu_3^* - \widetilde{n}_2)\gamma_1 + \\
&\quad + (\widetilde{D}_{12}\nu_1^* + 2\widetilde{B}_{12}\nu_2^* + \widetilde{B}_{13}\nu_3^* + \widetilde{n}_1)\gamma_2 + (\widetilde{B}_{13}\nu_2^* - \widetilde{B}_{23}\nu_1^*)\gamma_3.
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь использованы обозначения

$$\widetilde{B}_{ij} = a_i B_{ij}, \quad \widetilde{n}_i = a_i n_i, \quad \widetilde{C}_{ij} = B_{ij} + B_{ji}, \quad \widetilde{D}_{ij} = B_{ii} - B_{jj}; \quad i, j = 1, 2, 3\,,$$

где через a_i обозначены элементы гирационного тензора $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

Система уравнений (28) интересна тем, что интегрируется независимо от системы (29), так как в нее не входят переменные γ_i. Кроме этого, она имеет два первых интеграла, которые можно в силу равенства (16) записать из (27) в виде

$$\boldsymbol{\nu}^* \cdot z = c_2, \qquad (a\mathbf{n}_0 \cdot z) + (aB\boldsymbol{\nu}^* \cdot z) = -c_3. \tag{30}$$

4. Интегрирование уравнения Пуассона. Для применения известных результатов [10, 11] необходимо знать свойства исследуемого решения. Поэтому при интегрировании уравнения Пуассона (17) необходимо решение получить в явном виде. Воспользуемся результатом [9], который получен при условии, что матрица aB антисимметрична, т. е. выполнены равенства

$$\widetilde{B}_{11} = \widetilde{B}_{22} = \widetilde{B}_{33} = d, \quad \widetilde{B}_{21} = -\widetilde{B}_{12}, \quad \widetilde{B}_{31} = -\widetilde{B}_{13}, \quad \widetilde{B}_{32} = -\widetilde{B}_{23}. \tag{31}$$

Тогда из уравнения (17) имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{\nu_1}^* &= \widetilde{n}_2\nu_3^* - \widetilde{n}_3\nu_2^* + \widetilde{B}_{23}(\nu_2^{*2} + \nu_3^{*2}) - \widetilde{B}_{12}\nu_1^*\nu_3^* + \widetilde{B}_{13}\nu_1^*\nu_2^*, \\ \dot{\nu_2}^* &= \widetilde{n}_3\nu_1^* - \widetilde{n}_1\nu_3^* - \widetilde{B}_{13}(\nu_1^{*2} + \nu_3^{*2}) - \widetilde{B}_{23}\nu_1^*\nu_2^* - \widetilde{B}_{12}\nu_2^*\nu_3^*, \\ \dot{\nu_3}^* &= \widetilde{n}_1\nu_2^* - \widetilde{n}_2\nu_1^* + \widetilde{B}_{12}(\nu_2^{*2} + \nu_1^{*2}) + \widetilde{B}_{13}\nu_2^*\nu_3^* - \widetilde{B}_{23}\nu_1^*\nu_3^*, \end{aligned} \tag{32}$$

которая была записана [9] в векторном виде

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}^* = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\nu}^*(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\beta}). \tag{33}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, где

$$\alpha_i = \widetilde{n}_i \ \ (i = \overline{1,3}); \qquad \beta_1 = \widetilde{B}_{23}, \quad \beta_2 = -\widetilde{B}_{13}, \quad \beta_3 = \widetilde{B}_{12}. \tag{34}$$

При выполнении условия $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, или в силу обозначений (34) равенства

$$\widetilde{n}_1\widetilde{B}_{23} - \widetilde{n}_{12}\widetilde{B}_{13} + \widetilde{n}_3\widetilde{B}_{12} = 0, \tag{35}$$

уравнение (33) допускает первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\nu}^* = 1, \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\beta})}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}^*} = c_*, \tag{36}$$

где c_* – произвольная постоянная.

Следуя подходу [9], положим

$$\boldsymbol{\nu}^* = x\boldsymbol{\beta} + y\boldsymbol{\alpha} - \widetilde{z}\boldsymbol{\lambda}. \tag{37}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$, поэтому, если обозначим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то в силу (34) имеем

$$\lambda_1 = \widetilde{\mathbf{n}}_2\widetilde{B}_{12} + \widetilde{\mathbf{n}}_3\widetilde{B}_{13}, \quad \lambda_2 = \widetilde{\mathbf{n}}_3\widetilde{B}_{23} - \widetilde{\mathbf{n}}_1\widetilde{B}_{12}, \quad \lambda_3 = -\widetilde{\mathbf{n}}_1\widetilde{B}_{13} - \widetilde{\mathbf{n}}_2\widetilde{B}_{23}. \tag{38}$$

С помощью разложения (37) из уравнения (33) получим

$$\dot{x} = 1 - x^2\beta^2 + \widetilde{z}\alpha^2, \qquad \dot{y} = -\beta^2 xy, \qquad \dot{\widetilde{z}} = -x(\beta^2\widetilde{z} + 1). \tag{39}$$

Уравнения (39) имеют первые интегралы

$$\frac{1+\beta^2\widetilde{z}}{y}=c, \qquad x^2\beta^2+\alpha^2(y^2+\beta^2\widetilde{z}^2)=1, \tag{40}$$

где $\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$, $\beta^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$. Отметим, что в первой формуле (40) постоянная c имеет другой смысл, чем постоянная c_* во второй формуле (36).

Введя новую переменную θ уравнением

$$\dot{\theta}=h_0+h_1\sin\theta, \tag{41}$$

с помощью равенств (39) и (40) найдем решение уравнения (33):

$$\begin{gathered} x=-\frac{h_1}{\beta^2}\cos\theta, \qquad y=\frac{h_0(h_0+h_1\sin\theta)}{c\alpha^2}\cos\theta, \\ \widetilde{z}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}(h_0h_1\sin\theta+h_0^2-\alpha^2). \end{gathered} \tag{42}$$

В соотношениях (41), (42) введены обозначения

$$h_0=\frac{\alpha c}{\sqrt{c^2+\beta^2}}, \qquad h_1=\frac{\beta\sqrt{c^2+\beta^2-\alpha^2}}{\sqrt{c^2+\beta^2}}. \tag{43}$$

В скалярном виде из векторного равенства (37) следует

$$\nu_i^*=x\boldsymbol{\beta}_i+y\boldsymbol{\alpha}_i-\widetilde{z}\lambda_i \quad (i=\overline{1,3}). \tag{44}$$

Учтем в формуле (16) равенство (37):

$$\boldsymbol{\omega}^*=-\boldsymbol{\alpha}-\widetilde{B}_{11}\boldsymbol{\nu}^*+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nu}^*. \tag{45}$$

Используя соотношения (41), (42), запишем компоненты угловой скорости (45) с учетом (31), (34):

$$\omega_1^*=(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2-\alpha_1c)y-d\nu_1^* \quad (123). \tag{46}$$

Символ (123) означает, что компоненты ω_2^*,ω_3^* получим из (46) путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

В дальнейшем полагаем $h_0>h_1>0$ $(c^2>\alpha^2-\beta^2>0)$. В этом случае функция $\theta(t)$ из (41) – монотонная, т. е. ν_i^* и ω_i^* из соотношений (44) и (46) – периодические функции θ. В этом случае к анализу систем (22), (23) и (28), (29) применимы результаты Ляпунова [10], посвященные исследованию асимптотически-периодических решений, и результаты Пуанкаре [11], относящиеся к изучению числа нулевых характеристичных чисел линейных систем с периодическими коэффициентами.

5. Интегрирование уравнений (28). Запишем систему (28) с учетом равенств (31), используя при этом обозначения (34):

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= (\beta_3\nu_3^* + \beta_2\nu_2^*)z_1 - (\alpha_3 + \beta_2\nu_1^*)z_2 + (\alpha_2 - \beta_3\nu_1^*)z_3,\\
\dot{z}_2 &= (\alpha_3 - \beta_1\nu_2^*)z_1 + (\beta_3\nu_3^* + \beta_1\nu_1^*)z_2 - (\alpha_1 + \beta_3\nu_2^*)z_3,\\
\dot{z}_3 &= -(\alpha_2 + \beta_1\nu_3^*)z_1 + (\alpha_1 - \beta_2\nu_3^*)z_2 + (\beta_1\nu_1^* + \beta_2\nu_2^*)z_3.
\end{aligned} \tag{47}$$

Для получения решения системы (47) представим ее в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{z} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\nu}^*(\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\beta}). \tag{48}$$

Уравнение (48) будем исследовать с помощью первых интегралов из (27), которые с учетом (37), (41), (42), (45) примут вид

$$\begin{gathered}
x(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{z}) + y(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{z}) - \widetilde{z}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = c_2,\\
y[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{z}) + c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{z})] = \widetilde{c}_3,
\end{gathered} \tag{49}$$

где $\widetilde{c}_3$ – новая произвольная постоянная, введенная вместо c_3.

Введем вместо z_i переменные u_i $(i = \overline{1,3})$:

$$u_1 = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{z}, \qquad u_2 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{z}, \qquad u_3 = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{z}. \tag{50}$$

С помощью уравнения (48) для u_i $(i = \overline{1,3})$ получим систему уравнений

$$\dot{u}_1 = -u_3, \quad \dot{u}_2 = -\alpha^2 y u_1 + \beta^2 x u_2, \quad \dot{u}_3 = c\alpha^2 y u_1 + \beta^2 x u_3. \tag{51}$$

Преобразуем интегралы (49) к переменным u_i $(i = \overline{1,3})$:

$$\begin{aligned}
&x u_1 + y u_2 - \widetilde{z} u_3 = c_2,\\
&y(u_3 + c u_2) = \widetilde{c}_3.
\end{aligned} \tag{52}$$

Выразим из (52) переменные u_1, u_2 через u_3:

$$u_2 = \frac{\widetilde{c}_3 - y u_3}{c y}, \quad u_1 = \frac{1}{x}\Big[\widetilde{c}_2 + u_3\Big(\frac{y}{c} + \widetilde{z}\Big)\Big], \quad \widetilde{c}_2 = c_2 - \frac{\widetilde{c}_3}{c}. \tag{53}$$

Запишем третье уравнение системы (51) с учетом формул (41), (42), перейдя в нем к дифференцированию по переменной θ с помощью уравнения (41). Тогда получим

$$u_3'(\theta) + \frac{(h_1 + h_0 \sin\theta) u_3(\theta)}{(h_0 + h_1 \sin\theta)\cos\theta} = -\frac{\widetilde{c}_2 h_0 \beta^2}{h_1 \cos\theta}. \tag{54}$$

Общее решение уравнения (54) таково

$$u_3(\theta) = \frac{1}{h_1(h_0 + h_1 \sin\theta)}\Big[h_1 C \cos\theta - \widetilde{c}_2\beta^2(h_1 + h_0 \sin\theta)\Big] \quad (C = \mathrm{const}). \tag{55}$$

Характеристичное число функции (55) равно нулю. В силу (48), (41), (42) характеристичные числа функций $u_1(\theta), u_2(\theta)$ из (53) также равны нулю. Следовательно, система (48) имеет три нулевых характеристичных числа.

6. Интегрирование уравнений (29)**.** Рассмотрим систему (29) при условиях (31):

$$\dot\gamma_1 = a_3\nu_2^* z_3 - a_2\nu_3^* z_2 - (\beta_3\nu_3^* + \beta_2\nu_2^*)\gamma_1 + (-\beta_2\nu_1^* + 2\beta_1\nu_2^* - \alpha_3)\gamma_2 + \\ +(\alpha_2 - \beta_3\nu_1^* + 2\beta_1\nu_3^*)\gamma_3, \tag{56}$$

$$\dot\gamma_2 = a_1\nu_3^* z_1 - a_3\nu_1^* z_3 + (\alpha_3 + 2\beta_2\nu_1^* - \beta_1\nu_2^*)\gamma_1 - (\beta_1\nu_1^* + \beta_3\nu_3^*)\gamma_2 - \\ -(\alpha_1 + \beta_3\nu_2^* - 2\beta_2\nu_3^*)\gamma_3, \tag{57}$$

$$\dot\gamma_3 = a_2\nu_1^* z_2 - a_1\nu_2^* z_1 - (\alpha_2 - 2\beta_3\nu_1^* + \beta_1\nu_3^*)\gamma_1 + \\ +(\alpha_1 + 2\beta_3\nu_2^* - \beta_2\nu_3^*)\gamma_2 - (\beta_2\nu_2^* + \beta_1\nu_1^*)\gamma_3. \tag{58}$$

Поскольку $z_i(\theta)$ – периодические функции θ, то линейная система (56)–(58) будет иметь положительные характеристичные числа только в том случае, когда однородная по γ_i система из (56) – (58) имеет положительные характеристичные числа. Рассмотрим эту однородную систему и преобразуем ее к новым переменным v_i $(i = \overline{1,3})$:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma} = v_1, \qquad \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma} = v_2, \qquad \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma} = v_3. \tag{59}$$

Так как уравнения (56)–(58) имеют первый интеграл

$$x(\theta)(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + y(\theta)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - \widetilde{z}(\theta)(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = c_1, \tag{60}$$

из которого можно выразить функцию v_3 через v_1 и v_2

$$v_3 = \frac{1}{z(\theta)}\big[x(\theta)v_2(\theta) + y(\theta)v_1(\theta) - c_1\big], \tag{61}$$

то запишем только уравнения на v_1, v_2, которые следуют из (56)–(58) в силу замены (59):

$$\dot v_1 = -(\beta^2 x v_1 + \alpha^2 y v_2), \\ \dot v_2 = 2\beta^2 y v_1 - (1 + 2\beta^2 z)v_3. \tag{62}$$

Для анализа решений системы (62) перейдем в ней после подстановки во второе уравнение v_3 из (61) к дифференцированию по θ:

$$v_1'(\theta) = \frac{h_1\cos\theta}{h_0 + h_1\sin v}v_1 - \frac{h_0}{c}v_2, \tag{63}$$

$$v_2'(\theta) = \frac{1}{\widetilde{z}(\theta)}\Big[\frac{h_1\cos\theta(1 + 2\beta^2\widetilde{z}(\theta))v_2'(\theta)}{\beta^2(h_0 + h_1\sin\theta)} - \frac{h_0 v_1(\theta)}{c\alpha^2}\Big], \tag{64}$$

где

$$\widetilde{z} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}(h_0 h_1\sin\theta + h_0^2 - \alpha^2). \tag{65}$$

Выразим из (63) переменную v_2 через переменную v_1 и подставим найденное значение в уравнение (64). Тогда

$$v_1''(\theta)-\frac{h_1\cos\theta\cdot(1+3\beta^2\widetilde{z}(\theta))}{\beta^2\widetilde{z}(\theta)(h_0+h_1\sin\theta)}v_1'(\theta)+ \\ +\frac{v_1(\theta)}{(h_0+h_1\sin\theta)^2}\Big[h_1(h_1+h_0\sin\theta)+\frac{h_1^2(1+2\beta^2\widetilde{z}(\theta))}{\beta^2\widetilde{z}(\theta)}- \\ -\frac{h_0^2(h_0+h_1\sin\theta)^2}{c^2\alpha^2\widetilde{z}(\theta)}\Big]=0. \tag{66}$$

Для приведения уравнения (66) к уравнению класса Хилла необходимо выполнить замену переменной v_1:

$$v_1(\theta)=V(\theta)(h_0+h_1\sin\theta)\sqrt{h_0h_1\sin\theta+h_0^2-\alpha^2}. \tag{67}$$

Из (66) в силу (67) получим

$$V''(\theta)+R(\theta)V(\theta)=0, \tag{68}$$

где

$$R(\theta)=\Big\{c^2h_0h_1^2\sin^2\theta+2h_1\big[c^2(\alpha^2-h_0^2)-2h_0^2\beta^2\big]\sin\theta+ \\ +h_0\big[4\beta^2(\alpha^2-h_0^2)-3h_1^2c^2\big]\Big\}. \tag{69}$$

Условия на параметры α,β,c, которые указаны ранее, таковы

$$c^2>\alpha^2-\beta^2>0. \tag{70}$$

На основании критерия Ляпунова [10] потребуем выполнения условия

$$R(\theta)\le 0 \ \text{ при } \ \sin\theta=1 \ \text{ и } \ \sin\theta=-1.$$

Тогда из (69) получим

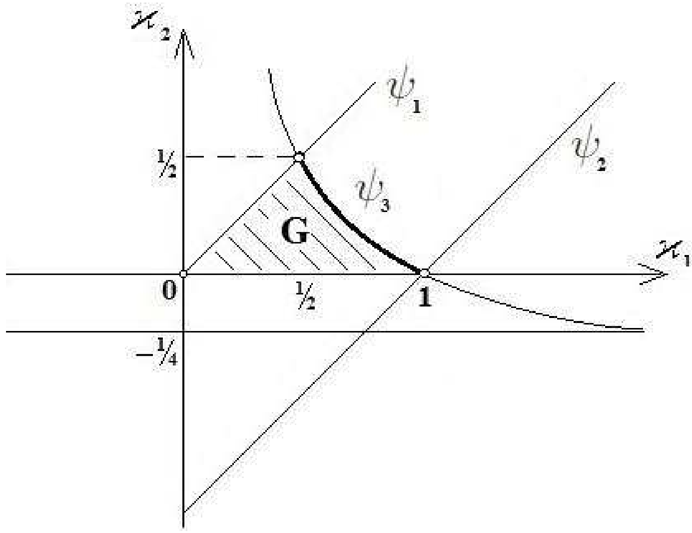
$$\alpha^2\beta^2\le\frac{c^2}{4}(c^2+\beta^2-\alpha^2). \tag{71}$$

При рассмотрении условий (70), (71) введем два параметра

$$\varkappa_1=\frac{\alpha^2}{c^2},\qquad \varkappa_2=\frac{\beta^2}{c^2}\qquad (\varkappa_1>0,\ \varkappa_2>0). \tag{72}$$

Запишем условия (70), (71) в силу (72)

$$\varkappa_1>\varkappa_2,\qquad \varkappa_2-\varkappa_1+1>0,\qquad 4\varkappa_1\varkappa_2\le 1+\varkappa_2-\varkappa_1. \tag{73}$$



На рисунке изображены линии ψ_i, уравнения которых имеют вид

$$\psi_1 : \varkappa_2 = \varkappa_1; \qquad \psi_2 : \varkappa_2 = \varkappa_1 - 1; \qquad \psi_3 : \varkappa_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4(4\varkappa_1 - 1)}.$$

Область параметров $\varkappa_1, \varkappa_2$, удовлетворяющих условиям (73), заштрихована. В ней функция (69) не положительна. Следовательно, по критерию Ляпунова [10], уравнение (68) имеет два решения с противоположными характеристичными числами. В силу (67), (63), (64) система уравнений относительно переменных $v_i(\theta)$ $(i = \overline{1,3})$ имеет одно нулевое, одно отрицательное и одно положительное характеристичное число. Это означает, что система уравнений (56)– (58) имеет одно положительное характеристичное число. Следовательно, и система (26) при выполнении условий (31), (70), (71) имеет одно положительное характеристичное число. Это же число имеет и система в вариациях (22), (23). Согласно теореме Ляпунова, нелинейная система уравнений, уравнениями в вариациях которых служат уравнения (22), (23), допускает асимптотическое решение: при $t \to \infty$ оно стремится к решению (15), (16) (зависимость его от θ определяют соотношения (41), (42)). Характер движения тела можно трактовать как асимптотически-периодический. Отметим, что его условия существования являются достаточными условиями. Полученный тип асимптотических движений тела дополняет классы асимптотических движений, полученных ранее [12–15].

1. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei. – Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. – 1963. – **35**. – F. 1–2. – P. 35–39.

2. *Kirchhoff G.R.* Uber die Bewegung eines Rotationskorpers in einer Flussigkeit // J. reine angew. Math. – 1870. – **71**. – P. 237–262.
3. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. – Харьков, 1893. – 234 с.
4. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Прикл. механика и техн. физика. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
5. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equations of motion and their transformations // J. Mec. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 747–754.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
7. *Харламов М.П.* Симметрия в системах с гироскопическими силами // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 87–93.
8. *Yehia H.M.* Equivalent mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems // Int. J. Non-Linear Mech. – 2001. – **36**. – P. 89–105.
9. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2017. – 424 с.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. В 5-ти т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
11. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. – Paris. Gauthier-Villars. – 1892. – T. 1. – 358 p. = Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. труды. В 3-х т. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 331 с.
12. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Асимптотически-маятниковые движения гироскопа Гесса–Аппельрота // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 3. – С. 490–495.
13. *Брюм А.З., Горр Г.В.* Достаточные условия существования асимптотически-маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 4. – С. 681–684.
14. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, вып. 1. – С. 51–58.
15. *Маркеев А.П.* Об устойчивости прецессии Гриоли // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 556–572.

G.V. Gorr

On a class of asymptotic solutions of equations of rigid body dynamics

With use of a non singular transformation, the reduction of Grioli equations to Yehia equations is obtained. A class of solutions of Yehia equations is found, which depends on an arbitrary vector function of components of the unit vector of the symmetry axis of the force fields. Lyapunov asymptotic solutions are considered in the case, when the limiting solution is described by the linear vector function.

Keywords: *potential and gyroscopic forces, Grioli equations, Yehia equations, asymptotic motions.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 03.09.18
gvgorr@gmail.com