УДК 531.38; 531.39

©2020. **Г.В. Горр, Т.В. Балаклицкая**

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ К ПОКОЮ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. На основе первого метода Ляпунова исследованы условия существования асимптотических к покою движений гиростата. Показано, что существуют два типа асимптотических решений уравнений движения: *первый* класс характеризуется однопараметрическими рядами Ляпунова, *второй* – двухпараметрическими рядами Ляпунова.

Ключевые слова: *асимптотические к покою движения, потенциальные и гироскопические силы.*

Введение. В динамике твердого тела и в классической механике изучению асимптотических движений уделяется значительное внимание, так как результаты, полученные в данных задачах, позволяют провести более полный анализ интегрального многообразия уравнений движения. На основании общих методов теории дифференциальных уравнений асимптотические решения рассмотрены в [1–3]. Первый метод Ляпунова [4] построения асимптотических решений дифференциальных уравнений применен в исследовании различных классов асимптотических движений твердого тела и гиростата. Е. Меттлер [5] изучал асимптотически равномерные движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В статье [6] с помощью теоремы Г.В. Каменкова [7] построены асимптотические к покою движения тяжелого твердого тела. Несмотря на то, что ряды Г.В. Каменкова являются частным вариантом рядов А.М. Ляпунова, применение их в [6] позволило получить рекуррентные соотношения для нахождения асимптотических решений уравнений Эйлера–Пуассона.

Свойства асимптотически равномерных движений тяжелого твердого тела рассмотрены в статьях [8, 9]. Большое внимание в изучении асимптотических движений уделено рассмотрению асимптотически маятниковых движений гироскопа Гесса–Аппельрота, в [11] установлены новые классы таких движений. Важно отметить, что при исследовании маятниковых движений тяжелого твердого тела применялись и методы нелинейного анализа [12, 13].

Поскольку прецессионные движения твердого тела, наряду с равномерными вращениями, находят широкое применение в приложениях, то исследование асимптотически-прецессионных движений в динамике твердого тела представляет большой интерес. Асимптотически-прецессионные движения, описываемые уравнениями Эйлера–Пуассона, рассмотрены в статьях [14, 15]. В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил данный класс движений изучен в [16, 17].

Обзор результатов, полученных в задаче об исследовании асимптотических движений гиростата, изложен в [18].

Методика нахождения характеристичных чисел линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в динамике твердого тела [18], разработанная А.М. Ляпуновым и А. Пуанкаре для общего случая, применена в [19].

Данная статья посвящена изучению асимптотических к покою движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. В отличие от работы [20], где применяется только теорема Г.В. Каменкова [7], построены асимптотические ряды А.М. Ляпунова [4] двух типов.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения твердого тела в обозначениях [21]:

$$A\,\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \\ A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнения движения гиростата являются обобщениями уравнений (1)–(3):

$$A\,\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \\ A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E. \end{gathered} \tag{6}$$

В (3), (6) k, E – произвольные постоянные.

Обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента; $A = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата; $B = \mathrm{diag}\,(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \mathrm{diag}\,(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, характеризующая потенциальные силы; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Представим уравнения (4)–(6) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} A_1\,\dot{\omega}_1 = {} & (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + B_3\nu_3\omega_2 - B_2\nu_2\omega_3 + \\ & + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} A_2\,\dot{\omega}_2 = {} & (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 + B_1\nu_1\omega_3 - B_3\nu_3\omega_1 + \\ & + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \end{aligned} \tag{8}$$

$$A_3\,\dot\omega_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + B_2\nu_2\omega_1 - B_1\nu_1\omega_2 + \\ + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \tag{9}$$

$$\dot\nu_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot\nu_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot\nu_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \tag{10}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1\,\omega_1^2 + A_2\,\omega_2^2 + A_3\,\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) + \\ + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E, \tag{11}$$

$$(A_1\omega_1+\lambda_1)\nu_1+(A_2\omega_2+\lambda_2)\nu_2+(A_3\omega_3+\lambda_3)\nu_3-\frac{1}{2}(B_1\nu_1^2+B_2\nu_2^2+B_3\nu_3^2) = k. \tag{12}$$

Определение. Движение гиростата называется *равномерным движением* (*вращением*), если в течение всего времени выполняется равенство

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{const}, \tag{13}$$

т. е. $\omega_i = \omega_i^{(0)} \quad (i = \overline{1,3})$.

Для изучения равномерных движений приведем уравнения (7)–(12) к безразмерному виду. Выбором подвижной системы можно добиться условия $s > 0$. Тогда безразмерные переменные $\widetilde{\omega}_i$, безразмерное время $\widetilde{t}$, параметры задачи выберем так:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{s}{A_0}}\,\widetilde{\omega}_i, \qquad t = \sqrt{\frac{A_0}{s}}\,\widetilde{t}, \qquad s_i = s\widetilde{s}_i, \\ A_i = A_0\widetilde{A}_i, \qquad B_i = \sqrt{A_0 s}\,\widetilde{B}_i, \qquad C_i = s\widetilde{C}_i, \qquad \lambda_i = \sqrt{A_0 s}\,\widetilde{\lambda}_i, \tag{14}$$

где $A_0 = A_1 + A_2 + A_3$. В дальнейшем "тильду" опускаем. Введение величин (14) упрощает получение результатов. Отметим, что в интегралах (11), (12) обозначения для k и E не изменяем.

Если в равенстве (13) $\omega_0 = 0$, то гиростат покоится; если $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{\nu}$ $(\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$, $\omega_0 \neq \mathbf{0})$ – гиростат равномерно вращается вокруг вектора вертикали. Если $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{\gamma}$, где $\dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\gamma} \neq \boldsymbol{\nu}$, то равномерное вращение будет происходить вокруг вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

Целью данной статьи является: исследование условий существования решений $\omega_i(t) = 0 \quad (i = \overline{1,3})$; изучение уравнений движения в вариациях для данных решений и получение условий на параметры задачи, при выполнении которых существуют решения уравнений (7)–(10), описывающие асимптотические к покою движения гиростата.

2. Уравнения в вариациях. Запишем уравнения движения гиростата в виде

$$\dot\omega_i = F_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3), \\ \dot\nu_i = G_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \quad (i = \overline{1,3}). \tag{15}$$

Пусть уравнения (15) допускают решение

$$\omega_i = \omega_i^{(0)}(t), \qquad \nu_i = \nu_i^{(0)}(t), \tag{16}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i^{(0)}(t) &= F_i\big(\omega_1^{(0)}(t), \omega_2^{(0)}(t), \omega_3^{(0)}(t), \nu_1^{(0)}(t), \nu_2^{(0)}(t), \nu_3^{(0)}(t)\big), \\ \dot{\nu}_i^{(0)}(t) &= G_i\big(\omega_1^{(0)}(t), \omega_2^{(0)}(t), \omega_3^{(0)}(t), \nu_1^{(0)}(t), \nu_2^{(0)}(t), \nu_3^{(0)}(t)\big). \end{aligned} \tag{17}$$

Для исследования асимптотических движений гиростата положим

$$\omega_i = \omega_i^{(0)}(t) + \Omega_i, \qquad \nu_i = \nu_i^{(0)}(t) + \gamma_i. \tag{18}$$

Тогда, используя общую теорию получения уравнений для возмущений Ω_i, γ_i, выпишем линейную часть:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{\partial F_i}{\partial \omega_1}\Omega_1 + \frac{\partial F_i}{\partial \omega_2}\Omega_2 + \frac{\partial F_i}{\partial \omega_3}\Omega_3 + \frac{\partial F_i}{\partial \nu_1}\gamma_1 + \frac{\partial F_i}{\partial \nu_2}\gamma_2 + \frac{\partial F_i}{\partial \nu_3}\gamma_3, \tag{19}$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\partial G_i}{\partial \omega_1}\Omega_1 + \frac{\partial G_i}{\partial \omega_2}\Omega_2 + \frac{\partial G_i}{\partial \omega_3}\Omega_3 + \frac{\partial G_i}{\partial \nu_1}\gamma_1 + \frac{\partial G_i}{\partial \nu_2}\gamma_2 + \frac{\partial G_i}{\partial \nu_3}\gamma_3. \tag{20}$$

(123)

Символ (123) означает, что остальные уравнения получаем циклической перестановкой символов 1, 2, 3.

Частные производные в уравнениях (19), (20) вычислены на решениях (16). В нашем случае в силу (7)–(10) имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial \omega_2} = \frac{(A_2 - A_3)\omega_3 - \lambda_3 + B_2\nu_3}{A_1},\ \frac{\partial F_1}{\partial \omega_3} = \frac{(A_2 - A_3)\omega_2 + \lambda_2 - B_2\nu_2}{A_1},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \nu_1} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial \nu_2} = \frac{-s_3 + (C_3 - C_2)\nu_3 - B_2\omega_3}{A_1},\ \frac{\partial F_1}{\partial \nu_3} = \frac{s_2 + (C_3 - C_2)\nu_2 + B_3\omega_2}{A_1}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \omega_1} = 0,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial \omega_2} = -\nu_3,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial \omega_3} = \nu_2,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial \nu_1} = 0,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial \nu_2} = \omega_3,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial \nu_3} = -\omega_2.$$

(123)

Остальные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial \omega_j}, \dfrac{\partial F_i}{\partial \nu_j}, \dfrac{\partial G_i}{\partial \omega_j}, \dfrac{\partial G_i}{\partial \nu_j}$ $(i = 2,3;\ j = \overline{1,3})$ получим круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Очевидно, что частные производные (21) вычисляются на исследуемом решении. В частных случаях решения (16) могут описывать и равномерные вращения, состояние покоя гиростата и периодические решения уравнений (17).

Первый метод Ляпунова состоит в том, что для правильной линейной системы (19), (20) (таким свойством обладают перечисленные выше решения) вычисляются положительные характеристичные числа. В исследуемом случае (15) количество положительных чисел не превышает шести. Для описания рядов Ляпунова положим $x_1 = \Omega_1$, $x_2 = \Omega_2$, $x_3 = \Omega_3$, $x_4 = \gamma_1$, $x_5 = \gamma_2$, $x_6 = \gamma_3$, т. е. систему (19), (20) запишем в виде

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots x_6) \quad (i = \overline{1,6}). \tag{22}$$

Системе (22) сопоставляется линейная система

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}\, y_j,$$

где $y_j(t)$ – возмущения, которые вводятся для решения (16), а $\dfrac{\partial X_j}{\partial x_j}$ вычисляются на решении (18). Пусть $\beta_1, \dots, \beta_k$ – положительные характеристичные числа линейной системы. Тогда нелинейная система дифференциальных уравнений относительно y_i допускает асимптотическое решение Ляпунова

$$y_i = \sum_{\begin{pmatrix} m_1 + \dots + m_k = m \\ m = 1 \end{pmatrix}}^{\infty} L_i^{(m_1,\dots,m_k)}(t)\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} \exp - \Big(\sum_{j=1}^{k} m_j\beta_j\Big)t, \tag{23}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – малые произвольные постоянные, а характеристичные числа функций $L_i^{(m_1,\dots,m_k)}(t)$ – не менее нуля ($m_1, \dots, m_k \in N$ или нули).

3. Исследование условий существования решения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Положим в уравнениях (7) – (10) $\omega_i = \omega_i^{(0)} = 0$ $(i = \overline{1,3})$. Тогда из уравнений (10) следует $\nu_i = \nu_i^{(0)}$ $(i = \overline{1,3})$, где $\nu_i^{(0)}$ – постоянные, которые в силу геометрического интеграла из (11) должны удовлетворять равенству

$$\big(\nu_1^{(0)}\big)^2 + \big(\nu_2^{(0)}\big)^2 + \big(\nu_3^{(0)}\big)^2 = 1. \tag{24}$$

Запишем уравнения (7) – (9) при $\boldsymbol{\omega}_i^{(0)} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} s_2\nu_3^{(0)} - s_3\nu_2^{(0)} + (C_3 - C_2)\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)} = 0,\\ s_3\nu_1^{(0)} - s_1\nu_3^{(0)} + (C_1 - C_3)\nu_3^{(0)}\nu_1^{(0)} = 0,\\ s_1\nu_2^{(0)} - s_2\nu_1^{(0)} + (C_2 - C_1)\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Перечислим возможные варианты решений системы (25).

1. **Случай** $C_3 = C_2 = C_1$:

$$\nu_i^{(0)} = \frac{s_i}{s} \quad (i = \overline{1,3}). \tag{26}$$

2. **Случай** $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_1 \neq 0$:
 2.1. $C_3 = C_2$:

$$\nu_1^{(0)} = \pm 1, \quad \nu_2^{(0)} = 0, \quad \nu_3^{(0)} = 0. \tag{27}$$

 2.2. $C_3 = C_2$:

$$\nu_1^{(0)} = \frac{s_1}{C_1 - C_2}, \quad (\nu_2^{(0)})^2 + (\nu_3^{(0)})^2 + \frac{s_1^2}{(C_1 - C_2)^2} = 1. \tag{28}$$

 2.3. $C_3 \neq C_2$:

$$\nu_2^{(0)} = 0, \quad \nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)} = \pm 1. \tag{29}$$

 2.4. $C_3 \neq C_2$:

$$\nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)} = \frac{s_1}{C_1 - C_2}, \quad \nu_2^{(0)} = \pm\sqrt{1 - \frac{s_1^2}{(C_1 - C_2)^2}}. \tag{30}$$

3. **Случай** $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, $s_3 = 0$:
 3.1. $C_2 = C_1$, $\nu_3^{(0)} = 0$:

$$\nu_1^{(0)} = \frac{s_1}{\pm\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad \nu_2^{(0)} = \frac{s_2}{\pm\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}. \tag{31}$$

 3.2. $C_2 \neq C_1$:

$$\nu_1^{(0)} = \frac{s_1}{C_1 - \beta}, \quad \nu_2^{(0)} = \frac{s_2}{C_2 - \beta}, \quad \nu_3^{(0)} = 0, \tag{32}$$

где параметр β удовлетворяет уравнению

$$F(\beta) = \frac{s_1^2}{(C_1 - \beta)^2} + \frac{s_2^2}{(C_2 - \beta)^2} - 1 = 0. \tag{33}$$

Полагая $C_2 > C_1$, из уравнения (33) получим, что оно имеет по крайней мере два действительных корня (при $\beta \to \infty$ $F(\beta) \to -1$, при $\beta \to C_1 - 0$ $F(\beta) \to \infty$ и при $\beta \to C_2 + 0$ $F(\beta) \to \infty$).

4. **Случай** $s_i \neq 0$ $(i = \overline{1,3})$:

$$\nu_i^{(0)} = \frac{s_i}{C_i - \beta}, \quad F(\beta) = \frac{s_1^2}{(C_1 - \beta)^2} + \frac{s_2^2}{(C_2 - \beta)^2} + \frac{s_3^2}{(C_3 - \beta)^2} - 1 = 0. \tag{34}$$

По аналогии со случаем исследования уравнения (33), можно показать, что при $C_1 < C_2 < C_3$ (что не ограничивает общности) уравнение (34) имеет по крайней мере два корня β_1, β_2 ($\beta_1 < C_1$, $\beta_2 > C_2$).

4. Уравнения в вариациях в общем случае асимптотических решений уравнений (7) – (10). Запишем уравнения (19), (20) для общего варианта решения (16):

$$\dot\Omega_1 = \frac{(A_2-A_3)\omega_3^{(0)}(t)-\lambda_3+B_3\nu_3^{(0)}(t)}{A_1}\Omega_2 + \frac{(A_2-A_3)\omega_2^{(0)}(t)+\lambda_2-B_2\nu_2^{(0)}(t)}{A_1}\Omega_3 + \\ + \frac{(C_3-C_2)\nu_3^{(0)}(t)-s_3-B_2\omega_3^{(0)}(t)}{A_1}\gamma_2 + \frac{(C_3-C_2)\nu_2^{(0)}(t)+s_2+B_3\omega_2^{(0)}(t)}{A_1}\gamma_3, \tag{35}$$

$$\dot\Omega_2 = \frac{(A_3-A_1)\omega_3^{(0)}(t)+\lambda_3-B_3\nu_3^{(0)}(t)}{A_2}\Omega_1 + \frac{(A_3-A_1)\omega_1^{(0)}(t)-\lambda_1+B_1\nu_1^{(0)}(t)}{A_2}\Omega_3 + \\ + \frac{(C_1-C_3)\nu_3^{(0)}(t)+s_3+B_1\omega_3^{(0)}(t)}{A_2}\gamma_1 + \frac{(C_1-C_3)\nu_1^{(0)}(t)-s_1-B_3\omega_1^{(0)}(t)}{A_2}\gamma_3, \tag{36}$$

$$\dot\Omega_3 = \frac{(A_1-A_2)\omega_2^{(0)}(t)-\lambda_2+B_2\nu_2^{(0)}(t)}{A_3}\Omega_1 + \frac{(A_1-A_2)\omega_1^{(0)}(t)+\lambda_1-B_1\nu_1^{(0)}(t)}{A_3}\Omega_2 + \\ + \frac{(C_2-C_1)\nu_2^{(0)}(t)-s_2-B_1\omega_2^{(0)}(t)}{A_3}\gamma_1 + \frac{(C_2-C_1)\nu_1^{(0)}(t)+s_1+B_2\omega_1^{(0)}(t)}{A_3}\gamma_2, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1 &= -\nu_3^{(0)}(t)\Omega_2 + \nu_2^{(0)}(t)\Omega_3 + \omega_3^{(0)}(t)\gamma_2 - \omega_2^{(0)}(t)\gamma_3, \\ \dot\gamma_2 &= \nu_3^{(0)}(t)\Omega_1 - \nu_1^{(0)}(t)\Omega_3 - \omega_3^{(0)}(t)\gamma_1 + \omega_1^{(0)}(t)\gamma_3, \\ \dot\gamma_3 &= -\nu_2^{(0)}(t)\Omega_1 + \nu_1^{(0)}(t)\Omega_2 + \omega_2^{(0)}(t)\gamma_1 - \omega_1^{(0)}(t)\gamma_2. \end{aligned} \tag{38}$$

В случае $\omega_i^{(0)} = 0$ из уравнений (35) – (38) имеем

$$\begin{aligned} A_1\dot\Omega_1 &= (B_3\nu_3^{(0)} - \lambda_3)\Omega_2 + (\lambda_2 - B_2\nu_2^{(0)})\Omega_3 + \big[(C_3 - C_2)\nu_3^{(0)} - s_3\big]\gamma_2 + \\ &\quad + \big[(C_3 - C_2)\nu_2^{(0)} + s_2\big]\gamma_3, \\ A_2\dot\Omega_2 &= (\lambda_3 - B_3\nu_3^{(0)})\Omega_1 + (B_1\nu_1^{(0)} - \lambda_1)\Omega_3 + \big[(C_1 - C_3)\nu_3^{(0)} + s_3\big]\gamma_1 + \\ &\quad + \big[(C_1 - C_3)\nu_1^{(0)} - s_1\big]\gamma_3, \\ A_3\dot\Omega_3 &= (B_2\nu_2^{(0)} - \lambda_2)\Omega_1 + (\lambda_1 - B_1\nu_1^{(0)})\Omega_2 + \big[(C_2 - C_1)\nu_2^{(0)} - s_2\big]\gamma_1 + \\ &\quad + \big[(C_2 - C_1)\nu_1^{(0)} + s_1\big]\gamma_2, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1 &= \nu_2^{(0)}\Omega_3 - \nu_3^{(0)}\Omega_2, \\ \dot\gamma_2 &= \nu_3^{(0)}\Omega_1 - \nu_1^{(0)}\Omega_3, \\ \dot\gamma_3 &= \nu_1^{(0)}\Omega_2 - \nu_2^{(0)}\Omega_1. \end{aligned} \tag{40}$$

В общем случае компоненты $\nu_i^{(0)}$ удовлетворяют первому равенству из (34), в котором β – параметр.

5. Случай, когда вектор $\boldsymbol{\nu}_i^{(0)}$ принадлежит главной оси инерции гиростата. Рассмотрим вариант $\nu_1^{(0)} = \varepsilon \ \ (\varepsilon = \pm 1)$. Составим характеристическое уравнение для системы (39), (40):

$$\mu^2(\mu^4 + a\mu^2 + b) = 0, \tag{41}$$

где μ – корень характеристического уравнения и

$$\begin{aligned} a = &-\frac{1}{A_1A_2A_3}\Big\{A_1(B_1\varepsilon - \lambda_1)^2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_3^2 - \varepsilon s_1 A_1(A_2 + A_3) + \\ &+A_1[A_2(C_1 - C_2) + A_3(C_1 - C_3)]\Big\}, \\ b = &\frac{1}{A_1A_2A_3}\Big\{A_1[s_1 + \varepsilon(C_2 - C_1)]\,[s_1 + \varepsilon(C_3 - C_1)] + \varepsilon s_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \\ &+\lambda_2^2(C_3 - C_1) + \lambda_3^2(C_2 - C_1)\Big\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Введем в (41) вместо μ параметр z: $\mu^2 = z$. Тогда, опуская нулевые значения μ, из (41) имеем

$$z^2 + az + b = 0. \tag{43}$$

Сравним полученное уравнение с характеристическим уравнением, указанным в [6] для случая тяжелого твердого тела. Полагая $s_1 = 1$ (что не ограничивает общности задачи), из (43) устанавливаем

$$z^2 + \frac{\varepsilon(A_2 + A_3)}{A_2A_3}z + \frac{1}{A_2A_3} = 0. \tag{44}$$

По методу Ляпунова [4] построения асимптотических решений для нелинейных систем, исходя из значений характеристичных чисел уравнений в вариациях (39), (40), нужно в случае (44) полагать $\varepsilon = -1$. То есть считать, что

$$\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{A_2}}, \qquad \mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{A_3}}. \tag{45}$$

Тогда нелинейные уравнения для возмущений $\Omega_1 = x_1,\ \Omega_2 = x_2,\ \Omega_3 = x_3,$ $\gamma_1 = x_4,\ \gamma_2 = x_5,\ \gamma_3 = x_6$ имеют решение

$$x_i(t) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} m_1 + m_2 = m \\ m = 1 \end{smallmatrix}\right)}^{\infty} L_i^{(m_1,m_2)}(t)\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\exp\Big(-\frac{m_1}{\sqrt{A_2}} - \frac{m_2}{\sqrt{A_3}}\Big)t, \tag{46}$$

где $i = \overline{1,6}$; $L_i^{(m_1,m_2)}(t)$ – дифференцируемые функции t; m_1 и m_2 – натуральные числа или нули; α_1 и α_2 – малые произвольные постоянные. Отметим, что в [6] построен только однопараметрический ряд (46), основанный на теореме Г.В. Каменкова [7].

Остановимся на общих условиях для коэффициентов a и b уравнения (43), при выполнении которых существуют либо отрицательные действительные корни, либо мнимые корни с отрицательными действительными частями.

Пусть $b = 0$, тогда при $a > 0$ $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_{3,4} = \pm i\sqrt{a}$ (асимптотических решений нет); при $a < 0$ для $\mu_3 = -\sqrt{-a}$ имеет место однопараметрическое асимптотическое решение.

Если $a = 0$, то при $b > 0$ существует однопараметрический асимптотический ряд Ляпунова

$$x_i(t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} L_i^{(m_1)}(t)\alpha_1^{m_1}\exp\Big(-\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{2}}t\Big), \tag{47}$$

где α_1 – произвольная постоянная. Если $a = 0$, $b < 0$, то имеет место двухпараметрический ряд Ляпунова класса (46), в котором характеристические числа $-\dfrac{1}{\sqrt{A_2}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{A_3}}$ необходимо заменить на $-\sqrt[4]{-b}$, $-\sqrt[4]{-b}/\sqrt{2}$.

При условии $b < 0$ (дискриминант уравнения (43) $D > 0$) можно построить однопараметрический ряд Ляпунова класса (47), в котором характеристический показатель имеет значение

$$\mu^* = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}. \tag{48}$$

В случае $b > 0$, $D = 0$ асимптотический ряд Ляпунова имеет место только при $a < 0$ с одним характеристическим показателем $-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$.

Если $b > 0$, $a < 0$, $D > 0$, то можно построить двухпараметрический ряд Ляпунова с характеристическими показателями $-\sqrt{z_1}$ и $-\sqrt{z_2}$, где z_1 и z_2 – корни уравнения (43).

Рассмотрим последний вариант: $b > 0$, $D = a^2 - 4b < 0$. Анализ свойств корней (43) позволяет сделать вывод о том, что существует только однопараметрический ряд Ляпунова с характеристическим показателем

$$\varkappa_0 = -\sqrt{\frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2}}, \qquad u_0 = -\frac{a}{2}, \quad v_0 = \frac{\sqrt{-D}}{2}. \tag{49}$$

Рассмотрим равенства (42) при условии

$$C_3 = C_2 = C_1. \tag{50}$$

Тогда соотношения (42) упрощаются:

$$a = -\frac{1}{A_1A_2A_3}\Big[A_1(B_1\varepsilon - \lambda_1)^2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_3^2 - \varepsilon s_1 A_1(A_2 + A_3)\Big], \tag{51}$$

$$b = \frac{1}{A_1A_2A_3}\Big[A_1s_1^2 + \varepsilon s_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Big]. \tag{52}$$

При больших значениях λ_i $(i = \overline{1,3})$ из (51) следует $a < 0$, а из (52) при $\varepsilon = 1$ — значение $b > 0$, при $\varepsilon = -1$ – значение $b < 0$. В первом случае при $D > 0$ существует двухпараметрический ряд Ляпунова, а во втором – однопараметрический. Отметим, что для данных вариантов в уравнения (7)–(9) матрица C не входит, т. е. имеем задачу о движении гиростата под действием силы тяжести и силы Лоренца.

Интерес представляет и случай $\lambda_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$, $B_1 = 0$, для которого

$$a = \frac{1}{A_2A_3}\Big[\varepsilon s_1(A_2 + A_3) + A_2(C_2 - C_1) + A_3(C_3 - C_1)\Big], \tag{53}$$

$$b = \frac{1}{A_2A_3}\big[s_1 + \varepsilon(C_2 - C_1)\big]\big[s_1 + \varepsilon(C_3 - C_1)\big]. \tag{54}$$

Если в формулах (53), (54) предполагать, что разности $C_2 - C_1$ и $C_3 - C_1$ представляют собой малые величины по сравнению с другими параметрами, то получим результат, который имел место при анализе уравнения (44). То есть асимптотическое к покою движение гиростата возможно только в случае, когда центр масс гиростата занимает "верхнее" положение равновесия.

Аналогично рассматривается и вариант, когда разности $C_2 - C_1$ и $C_3 - C_1$ могут быть назначены большими параметрами, имеющими отрицательные значения.

6. Исследование случая (28)**.** Запишем характеристические уравнения для системы (39), (40), принимая во внимание условия (28):

$$\mu^2(\mu^4 + a\mu^2 + b) = 0, \tag{55}$$

где

$$a = \frac{1}{A_1A_2A_3}\Big[A_1h_1^2 + A_2h_2^2 + A_3h_3^2 + A_1(C_1 - C_2)\big(A_2(\nu_2^{(0)})^2 + A_3(\nu_3^{(0)})^2\big)\Big],$$
$$b = \frac{C_1 - C_2}{A_1A_2A_3}\Big[1 - \frac{s_1^2}{(C_1 - C_2)^2}\Big], \qquad h_i = B_i\nu_i^{(0)} - \lambda_i \qquad (i = \overline{1,3}). \tag{56}$$

Очевидно, что выражение в квадратных скобках второй формулы из (56) положительно. Поэтому при $C_1 - C_2 > 0$ значение $b > 0$, при $C_1 - C_2 < 0$ значение $b < 0$. Из соотношений (56) следует, что при малых значениях величин h_i значения a и b в уравнении (55) имеют одинаковые знаки. В случае, когда разность $C_1 - C_2$ можно считать малой, в (56) значение $a > 0$, а значение b зависит от знака разности $C_1 - C_2$. Данные свойства позволяют указать различные варианты рядов Ляпунова, которые описывают асимптотические к покою движения гиростата. Важно отметить, что ряды не зависят от параметра s_1, как это имело место в случае асимптотических к покою движений в классической задаче [6].

7. Исследование общего случая. Для получения характеристического уравнения линейной системы (39), (40) целесообразно в преобразованиях использовать выражения

$$s_i = g_i \nu_i^{(0)} \quad (i = \overline{1,3}), \tag{57}$$

где

$$g_i = (C_i - \beta), \tag{58}$$

а параметр β удовлетворяет уравнению (34). Обозначения $h_i = B_i \nu_i^{(0)} - \lambda_i \quad (i = \overline{1,3})$, указанные в (56), оставим без изменения. Выпишем коэффициенты уравнения (41):

$$a = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \Big[g_1 A_1 \big(A_2 (\nu_2^{(0)})^2 + A_3 (\nu_3^{(0)})^2 \big) + g_2 A_2 \big(A_3 (\nu_3^{(0)})^2 + A_1 (\nu_1^{(0)})^2 \big) + \\ + g_3 A_3 \big(A_1 (\nu_1^{(0)})^2 + A_2 (\nu_2^{(0)})^2 \big) + (A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2 + A_3 h_3^2) \Big], \tag{59}$$

$$b = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \Big[g_1 \big(h_2 \nu_3^{(0)} - h_3 \nu_2^{(0)} \big)^2 + g_2 \big(h_3 \nu_1^{(0)} - h_1 \nu_3^{(0)} \big)^2 + \\ + g_3 \big(h_1 \nu_2^{(0)} - h_2 \nu_1^{(0)} \big)^2 + \big(A_1 (\nu_1^{(0)})^2 + A_2 (\nu_2^{(0)})^2 + A_3 (\nu_3^{(0)})^2 \big) \big(g_1 g_2 (\nu_3^{(0)})^2 + \\ + g_2 g_3 (\nu_1^{(0)})^2 + g_3 g_1 (\nu_2^{(0)})^2 \big) \Big]. \tag{60}$$

Рассмотрим два варианта значений параметров a и b. В первом случае будем полагать

$$\beta_1 < C_1 < C_2 < C_3, \tag{61}$$

где β_1 – меньший корень уравнения (34). Из (58) в силу (61) следует неравенство $g_i > 0$, а из формул для a и b (59), (60) следует $a > 0$, $b > 0$. Это означает, что при значении $\beta = \beta_1$ построить асимптотический ряд Ляпунова невозможно.

Во втором случае в качестве параметра β выберем больший корень уравнения (34), т. е. положим

$$C_1 < C_2 < C_3 < \beta_2. \tag{62}$$

На основании (58), (62) заключаем, что $g_i < 0 \quad (i = \overline{1,3})$. Положим, что параметры h_i $(i = \overline{1,3})$ малы по сравнению с другими параметрами. Тогда из (59), (60) следует, что $a < 0$, $b > 0$ и, следовательно, в зависимости от значения дискриминанта характеристического уравнения, существует либо двухпараметрический ряд Ляпунова, либо однопараметрический. Аналогичный результат можно получить при выполнении равенств

$$h_i = B_i \nu_i^{(0)} - \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \tag{63}$$

которые накладывают ограничения на параметры $B_i, \lambda_i \quad (i = \overline{1,3})$. Например, если $B_i \quad (i = \overline{1,3})$ заданы, то равенства (63) служат для определения компонент $\lambda_i \quad (i = \overline{1,3})$ гиростатического момента.

Другие варианты существования асимптотических рядов Ляпунова для общего случая получить не представляет принципиальных трудностей, но сопряжены с трудоемкими вычислительными операциями, которые бы существенно увеличили объем статьи.

Заключение. В статье исследованы условия существования решений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, соответствующие покою гиростата. На основании первого метода Ляпунова построены асимптотические решения исходных дифференциальных уравнений, которые определяют асимптотические к покою движения. Показано, что свойства этих движений, в общем случае, отличаются от свойства асимптотического движения тяжелого твердого тела к состоянию покоя, которое характеризуется положением центра тяжести выше неподвижной точки.

1. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, вып. 4. – С. 573–577.
2. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1980. – № 4. – С. 84–89.
3. *Маркеев А.П.* Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, вып. 3. – С. 363–371.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
5. *Mettler E.* Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels // Mathematische Zeitschrift. – 1937. – Bd. 43, № 1. – S. 60–100.
6. *Горр Г.В.* Новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – С. 1316–1317.
7. *Каменков Г.В.* Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. Избр. тр.: в 2 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 210 с.
8. *Горр Г.В.* Асимптотически равномерные движения твердого тела с неподвижной точкой в потенциальном поле сил // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12.– С. 19–26.
9. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Свойства одного класса асимптотических движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 2 (36). – С. 14–18.
10. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса–Аппельрота // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 3. – С. 490–493.
11. *Брюм А.З., Горр Г.В.* Достаточные условия существования асимптотически маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 4. – С. 681–684.
12. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 1316–1317.
13. *Маркеев А.П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 2. – С. 282–293.
14. *Брюм А.З.* Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 68–72.

15. *Маркеев А.П.* Об устойчивости прецессии Гриоли // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 556–572.
16. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(I). – С. 20–28.
17. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Об асимптотически прецессионных движениях сферического гиростата // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56–62.
18. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25–41.
19. *Мазнев А.В., Пилпани Ю.Ю.* Асимптотически равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – 2012. – **76**, вып. 2. – С. 237–246.
20. *Носырева Е.П.* Асимптотические к покою движения гиростата в обобщенной задаче динамики // Применение первого метода Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела. – Донецк, 1991. – С. 43–60 (Препринт АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; № 91.07).
21. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 304 с.

G.V. Gorr, T.V. Balaklitskaya

Investigation of asymptotic to rest motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces

The problem on motion of a gyrostat with a fixed point under the action of potential and gyroscopic forces is considered. On the basis of the first Lyapunov method, existence conditions are investigated for asymptotic to rest motions of the gyrostat. It is shown that there exist two types of asymptotic solutions for the equations of motion, the first class is characterized by one-parameter Lyapunov series, and the second class is characterized by two-parameter Lyapunov series.

Keywords: *asymptotic to rest motions, potential and gyroscopic forces.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 24.08.20
gvgorr@gmail.com, barilka@ukr.net