

УДК 539.3

©2009. Р.Н. Нескородев

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Разработан численно аналитический метод решения задач вязкоупругости анизотропной среды при обобщенном плоском напряженном состоянии пластины. Указаны соотношения для нахождения резольвент интегральных уравнений, связывающих напряжения и деформации, а также выписаны уравнения закона Гука в любой момент времени. Проведены численные исследования и сравнение с уже известными результатами.

Введение. Одним из основных методов решения задач вязкоупругости является метод, основанный на применении принципа Вольтерра [1-3]. Непосредственное применение этого принципа к анализу напряженно-деформированного состояния пластин является весьма затруднительным. Это объясняется тем, что для таких задач зависимость перемещений и напряжений от упругих постоянных не является явной. Кроме того, при использовании принципа Вольтерра большое значение имеет аналитическая форма задания ядер ползучести и релаксации. Экспериментально найденные значения этих ядер задаются дискретным набором величин, соответствующим некоторым фиксированным значениям времени. По этим экспериментальным значениям, различными методами строят аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. Такая аппроксимация является источником дополнительных погрешностей, так как построить аналитическое выражение ядра, хорошо описывающего экспериментально найденные величины на достаточно большом временном интервале довольно сложно. В настоящей работе предлагается метод, не требующий аналитического описания ядер ползучести и релаксации, что освобождает от необходимости проведения аналитической аппроксимации экспериментальных значений. Проверка предложенного метода на достоверность осуществлялась сравнением результатов решения задачи для изотропной пластины с круговым отверстием. Метод с использованием принципа Вольтерра, который дает точное решение задачи, и предложенный в настоящей работе дают одинаковые результаты.

1. Основные соотношения вязкоупругих сред.

1.1. Связь между напряжениями и деформациями вязкоупругих сред.

Наиболее общая форма линейного вязкоупругого соотношения между напряжениями и деформациями для изотермических процессов нагружения анизотропных тел представляются в виде [1, 4, 5]:

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{s} = \{s_i\}$, $\mathbf{e} = \{e_k\}$ – векторы напряжений и деформаций, $\mathbf{R} = \{R_{ik}\}$ ($i, k = \overline{1,6}$)

– матрица, компоненты которой называются функциями релаксации материала. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги – модули упругости $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A}$ – характеризуют упругий.

Иную форму вязкоупругих соотношений деформации – напряжения можно записать, поменяв в (1) ролями деформации и напряжения

$$\mathbf{e}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(t - \tau) \frac{d\mathbf{s}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2)$$

Здесь компоненты матрицы $\mathbf{P} = \{P_{ik}\}$ называются функциями ползучести материала. Они характеризуют вязкоупругий материал также, как их упругие аналоги – коэффициенты деформации $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a}$ характеризуют свойства упругого материала.

Установлено [4], что ядра \mathbf{R} или \mathbf{P} должны иметь сингулярную составляющую в виде δ -функции. Тип δ особенностей ядер \mathbf{R} и \mathbf{P} является фундаментальным свойством мгновенной реакции тела. Вязкоупругие тела обычно предполагаются мгновенно упругими, то есть при больших скоростях нагружения или деформации ведут себя как идеально упругие. Закон Гука получается из (1) и (2) в предположении, что $\mathbf{R}(t - \tau) = \mathbf{R}^0 \delta(t - \tau)$, $\mathbf{P}(t - \tau) = \mathbf{P}^0 \delta(t - \tau)$, где \mathbf{R}^0 и \mathbf{P}^0 – матрицы константы.

1.2. Определение ядер ползучести и релаксации. В опытах на ползучесть, мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянные напряжения $\mathbf{s}(t) = \bar{\sigma} h(t)$, где $h(t)$ функция Хевисайда, а $\bar{\sigma} = \{\sigma_i\}$ – вектор напряжений констант [4,5]. Интегрирование уравнения (2) в этом случае дает

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t) \bar{\sigma} h(t). \quad (3)$$

По формуле (3) определяются значения функции $\mathbf{P}(t)$ по величинам измеренных деформаций во времени. Из уравнения (1) с учетом (3) найдем соотношения между функциями ползучести $\mathbf{P}(t)$ и релаксации $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}(t) \mathbf{P}(0) + \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4)$$

В опытах на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянные деформации $\mathbf{e}(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$, где $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}$ – вектор деформаций констант. Интегрирование уравнения (1) в этом случае дает

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t) \bar{\varepsilon} h(t). \quad (5)$$

По формуле (5) определяются значения функции $\mathbf{R}(t)$ по величине измеренных напряжений во времени. Из уравнения (2) с учетом (5) найдем соотношения между функциями релаксации $\mathbf{R}(t)$ и ползучести $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}(t) \mathbf{R}(0) + \int_0^t \mathbf{P}(t - \tau) \frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (6)$$

Из уравнения (4) находится функция релаксации $\mathbf{R}(t)$ по известной функции ползучести $\mathbf{P}(t)$, а из уравнения (6), наоборот.

1.3. Численное представление решений уравнений вязкоупругости. Решение уравнения (4) проведем численным методом. В этом случае нет необходимости использования аналитической аппроксимации экспериментальных значений функции $\mathbf{P}(t)$ в специальном виде. Пусть временной отрезок $[0, t]$ разбит на N равных интервалов длиной h точками, соответствующими значениям времени $\tau_0 = 0, \tau_1 = h, \dots, \tau_n = nh, \dots, \tau_N = t$, и пусть $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ – известные из эксперимента значения функции ползучести $\mathbf{P}(\tau)$ в этих точках. Тогда соотношение (4) в точках сетки можно приближенно записать так

$$\mathbf{R}_n = \left(\mathbf{E} - \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{n-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (7)$$

где $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\tau_i)$, $\mathbf{R}_{n-i} = \mathbf{R}(\tau_n - \tau_i)$ – значения функций в точке $\tau = \tau_i$.

Из полученных соотношений (7), по известным функциям ползучести в точках сетки находятся функции релаксации.

Решение уравнения (6) осуществляется аналогичным образом

$$\mathbf{P}_n = \left(\mathbf{E} - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{n-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (8)$$

Уравнения (1) и (2) в точках сетки можно записать в виде

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}_n \mathbf{e}_n h(t - \tau_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (9)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}_n \mathbf{s}_n h(t - \tau_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (10)$$

Для определения напряжений, деформаций и перемещений при заданных нагрузках, необходимо провести решение задачи вязкоупругости, используя уравнения состояния в форме (9) или (10). Это соответствует решению задачи теории упругости с уравнением закона Гука в момент времени $t = \tau_n$.

2. Изотропная среда. В этом пункте приведено решение упругой задачи для изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием. Решение представлено в виде явной зависимости перемещений и напряжений от упругих постоянных и приложенных усилий. Это дает возможность построить точное решение вязкоупругой задачи методом Вольтерра и провести численные исследования. Результаты этих исследований далее будут использованы в качестве теста при решении этой же задачи методом, предложенным в первом пункте.

2.1. Пластина с круговым отверстием. Решение упругой задачи для бесконечной изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R , когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_x^0 = p, \sigma_y^0 = q, \tau_{xy}^0 = 0$, представляются в виде [6]

$$\sigma_r = 2a + \frac{b_1}{r^2} - \left(b + \frac{4a_1}{r^2} - \frac{3b_3}{r^4} \right) \cos(2\theta),$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= 2a - \frac{b_1}{r^2} + \left(b - \frac{3b_3}{r^4}\right) \cos(2\theta), \quad \tau_{r\theta} = \left(b + \frac{3b_3}{r^4} - \frac{2a_1}{r^2}\right) \sin(2\theta), \quad (11) \\ u_r &= \frac{r}{2G} [a(\kappa - 1) - b \cos(2\theta)] + \frac{1}{2\bar{G}} \left[-\frac{b_1}{r} + \left(\frac{a_1(\bar{\kappa} + 1)}{r} - \frac{b_3}{r^3}\right) \cos(2\theta)\right], \\ u_\theta &= \frac{r}{2G} b \sin(2\theta) - \frac{1}{2\bar{G}} \left(\frac{a_1(\bar{\kappa} - 1)}{r} + \frac{b_3}{r^3}\right) \sin(2\theta).\end{aligned}$$

В соотношениях (11) введены обозначения: $a = (p + q)/4$, $b = (q - p)/2$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; черточками сверху обозначены величины \bar{G} и $\bar{\kappa}$, которые при решении вязкоупругой задачи будут меняться во времени.

Из граничных условий на контуре неподкрепленного отверстия $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$, когда $r = R$, находим коэффициенты функций (11). Они будут такими

$$a_1 = -bR^2, \quad b_1 = -2aR^2, \quad b_3 = -bR^4. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) видно, что в рассматриваемой задаче напряжения от времени не зависят, а изменяются только перемещения.

2.2. Решение вязкоупругих задач методом Вольтерра. Уравнения наследственной теории упругости Вольтерра получают заменой в соотношениях классической теории упругости констант G , E и ν операторами \bar{G} , \bar{E} и $\bar{\nu}$. Согласно принципу Вольтерра задачу вязкоупругости можно решать как задачу обычной теории упругости и лишь в окончательном результате заменить упругие константы G , E и ν операторами \bar{G} , \bar{E} и $\bar{\nu}$, которые определены соотношениями [2]

$$\bar{G} = G(1 - P^*), \quad \bar{E} = E(1 - M^*), \quad \bar{\nu} = \nu(1 + L^*). \quad (13)$$

Каждый из временных операторов (13) состоит из двух элементов: упругих постоянных G , E , ν , а также интегральных операторов P^* , M^* , L^* с ядрами наследственности $P(t - \tau)$, $M(t - \tau)$ и $L(t - \tau)$

$$P^* f = \int_0^t P(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad M^* f = \int_0^t M(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad L^* f = \int_0^t L(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Ядро ползучести вида

$$L(t - \tau) = \delta \mathcal{D}_\alpha(-\beta; t - \tau), \quad (15)$$

где

$$\mathcal{D}_\alpha(-\beta; t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{\alpha+n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (16)$$

предложено в работе [2]. Используя соотношения (13)–(15), найдем

$$\bar{\nu} = \nu [1 + \delta \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta)], \quad (17)$$

где $L^* \bullet 1 = \delta \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(-\beta; t - \tau) \bullet 1 d\tau = \delta \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta)$.

В формулы для перемещений (11) входят операторы $1/\bar{G}$ и $\bar{\kappa}/\bar{G}$. Распифруем их, учитывая, что соотношения между различными упругими операторами такие же, как и соотношения между упругими постоянными, а также считая, что объемная деформация материала пластинки является упругой [2, 3]. Воспользуемся равенствами

$$\frac{1 - 2\nu}{E} = \frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}}, \quad \bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1 + \bar{\nu})}, \quad \bar{\kappa} = \frac{3 - \bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}}. \quad (18)$$

Из этих равенств, с учетом (17) и свойств оператора $\mathcal{D}_\alpha^*(-\beta)$ [2] находим

$$\frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G} [1 + \delta_2 \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta_2)], \quad \frac{\bar{\kappa}}{\bar{G}} = \frac{\kappa}{G} [1 + \delta_4 \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta_2)], \quad (19)$$

$$\delta_2 = 3\nu\delta / (1 - 2\nu) / (1 + \nu), \quad \beta_2 = \beta - 2\nu\delta / (1 - 2\nu), \quad \delta_4 = 5\nu\delta / (3 - \nu) / (1 - 2\nu).$$

Для вычисления интегрального оператора $\mathcal{D}_\alpha^*(-\beta)$ используют функцию Миттаг-Леффлера [2]

$$\beta \mathcal{D}_\alpha^*(-\beta) \bullet 1 = \beta \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(\beta; t - \tau) \bullet 1 d\tau = 1 - E_{1+\alpha}(-\eta), \quad (20)$$

которая определена формулой

$$E_{1+\alpha}(-\eta) = 1 - \frac{\eta}{\varphi(1)} + \frac{\eta^2}{\varphi(2)} - \frac{\eta^3}{\varphi(3)} + \dots, \quad \varphi(n) = \Gamma[n(1 + \alpha) + 1], \quad \eta = \beta t^{1+\alpha}. \quad (21)$$

Исследования показали, что вычисление функции (21) для больших значений аргумента η вызывает трудности. Поэтому, при вычислении функции $\mathcal{D}_\alpha^*(-\beta)$ исследователи вместо (20) применяют формулу [2]

$$\mathcal{D}_\alpha^*(-\beta) = [1 - \exp(-\eta \omega)] / \beta, \quad \omega = (1 + \alpha)^{1+\alpha}. \quad (22)$$

3. Плоская задача теории упругости анизотропного тела. В этом пункте приведено точное решение упругой задачи для анизотропной пластинки, ослабленной отверстием эллиптической формы. Полученное решение не содержит явной зависимости напряжений и перемещений от упругих постоянных, поэтому решение вязкоупругой задачи осуществляется методом, предложенным в первом пункте.

3.1. Обобщенное плоское напряженное состояние. Рассмотрим упругое равновесие анизотропной пластины толщиной $2h$. Отнесем ее к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ее срединная плоскость совпала с плоскостью Ox_1x_2 , а ось Ox_3 была нормальна к срединной плоскости. Уравнения закона Гука представим в компактной форме

$$\bar{\sigma} = \mathbf{A}\bar{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \bar{\varepsilon} = \mathbf{a}\bar{\sigma}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}. \quad (23)$$

Здесь $\bar{\sigma} = \{\sigma_i\}$, $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_k\}$ – векторы напряжений и деформаций, $\mathbf{A} = \{A_{ik}\}$ – матрица модулей упругости, $\mathbf{a} = \{a_{ik}\}$ – матрица коэффициентов деформации ($i, k = \overline{1, 6}$).

В задаче растяжения-сжатия введем средние по толщине значения перемещений, напряжений и деформаций:

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \mathbf{u} dx_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [u_1, u_2, u_3] dx_3 = [u_1^*, u_2^*, 0], \quad (24)$$

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \bar{\varepsilon} dx_3 = [\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, 0, 0, \varepsilon_6^*], \quad \bar{\sigma}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \bar{\sigma} dx_3 = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*, 0, 0, \sigma_6^*].$$

Напряженное состояние пластинки в этом случае называют обобщенным плоским напряженным состоянием, а напряжения σ_3 , σ_4 и σ_5 полагают равными нулю [7].

Для средних по толщине пластинки напряжений, из первого уравнения (23) с учетом (24), получим

$$\sigma_i^* = (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2) u_1^* + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2) u_2^* + A_{i3}\varepsilon_3^*. \quad (25)$$

Чтобы удовлетворить условиям $\sigma_3^* = \sigma_4^* = \sigma_5^* = 0$, полагаем

$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{56} = A_{46} = 0, \quad (26)$$

$$\varepsilon_3^* = - \left[\frac{A_{31}}{A_{33}} \varepsilon_1^* + \frac{A_{32}}{A_{33}} \varepsilon_2^* + \frac{A_{36}}{A_{33}} \varepsilon_6^* \right].$$

Тогда уравнения закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния пластинки запишутся так

$$\sigma_i^* = B_{ik}\varepsilon_k^*, \quad \varepsilon_i^* = a_{ik}\sigma_k^*, \quad B_{ik} = A_{ik} - A_{i3}A_{3k}/A_{33} \quad (i, k = 1, 2, 6). \quad (27)$$

Далее уравнения закона Гука (27) будем использовать в форме (23). Для этого следует индексы i и k равные 6 заменить индексами m и n равными 3 и убрать звездочки: $\bar{\sigma} = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_6^*] = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_6^*] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$, $\mathbf{A} = \{B_{ik}\} = \{A_{mn}\}$, $\mathbf{a} = \{a_{ik}\} = \{a_{mn}\}$.

Уравнения равновесия приводятся к системе дифференциальных уравнений относительно перемещений

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 = 0, \quad L_{21}u_1 + L_{22}u_2 = 0, \quad (28)$$

где

$$L_{11} = A_{11}\partial_1^2 + 2A_{13}\partial_1\partial_2 + A_{33}\partial_2^2, \quad L_{22} = A_{33}\partial_1^2 + 2A_{23}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, \quad (29)$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{13}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{33})\partial_1\partial_2 + A_{23}\partial_2^2.$$

3.2. Перемещения и напряжения в пластине с отверстиями. Функции, определяющие перемещения и деформации в пластине без отверстия, когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_1^0 = p$, $\sigma_2^0 = q$, $\sigma_3^0 = 0$, представляются в форме

$$u_1^0 = \varepsilon_1^0 x_1 + \frac{\varepsilon_3^0}{2} x_2, \quad u_2^0 = \frac{\varepsilon_3^0}{2} x_1 + \varepsilon_2^0 x_2, \quad (30)$$

$$\varepsilon_1^0 = a_{11}p + a_{12}q, \quad \varepsilon_2^0 = a_{21}p + a_{22}q, \quad \varepsilon_3^0 = a_{31}p + a_{32}q.$$

Перемещения и напряжения, учитывающие влияние отверстий, описываются функциями u_k^{00} и σ_i^{00} , являющимися результатом интегрирования системы (28)

$$u_k^{00} = 2Re \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j), \quad (31)$$

$$\sigma_1^{00} = 2Re (\mu_1^2 \Phi_1' + \mu_2^2 \Phi_2'), \quad \sigma_2^{00} = 2Re (\Phi_1' + \Phi_2'), \quad \sigma_3^{00} = -2Re (\mu_1 \Phi_1' + \mu_2 \Phi_2'). \quad (32)$$

Здесь $\Phi_j(z_j)$ – произвольные функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$; μ_j – параметры, являющиеся корнями характеристического уравнения $l_{11}(\mu) l_{22}(\mu) - l_{12}(\mu) l_{21}(\mu) = 0$; величины $l_{ik}(\mu)$ получены из операторов (29) заменой операций дифференцирования ∂_1 и ∂_2 значениями 1 и μ соответственно; $\Phi_j' = d\Phi_j/dz_j$; $R_{kj} = R_{kj}^*/\Delta_j(\mu_j)$; $R_{11}^* = l_{22}(\mu_1)$, $R_{21}^* = -l_{21}(\mu_1)$, $R_{12}^* = -l_{12}(\mu_2)$, $R_{22}^* = l_{11}(\mu_2)$, $\Delta_j = [A_{21}R_{1j}^* + A_{23}R_{2j}^* + \mu_j (A_{22}R_{2j}^* + A_{23}R_{1j}^*)]$.

Таким образом, смещения и напряжения, отражающие влияние отверстий, выражаются через две функции $\Phi_j(z_j)$. Исследование напряженного состояния пластины с неподкрепленными отверстиями сводится к определению этих функций из граничных условий на контурах отверстий. В рассматриваемом случае эти условия имеют вид [7]

$$2Re [\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2] = -px_2 + c_1, \quad 2Re [\Phi_1 + \Phi_2] = -qx_1 + c_2. \quad (33)$$

Функции $\Phi_j(z_j)$ можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных $z_j = x_{1j} + ix_{2j}$, где

$$x_{1j} = x_1 + \alpha_j x_2, \quad x_{2j} = \beta_j x_2, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \quad (34)$$

При этом комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$ должны быть определены не в области S , занятой срединной плоскостью пластины, а в областях S_j , полученных из области S путем аффинных преобразований (34).

3.3. Пластина с эллиптическим отверстием. Рассмотрим пластину, которая ослаблена отверстием эллиптического сечения. Полуоси эллипса a и b . Уравнение контура L в параметрической форме имеет вид

$$x_1 = a \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (35)$$

Эллиптическому контуру L в областях S_j соответствуют эллипсы L_j , уравнения контуров которых запишутся так

$$t_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j \sigma + m_j / \sigma, \quad (36)$$

$$R_j = (a - i\mu_j b) / 2, \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2, \quad \sigma = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура L_j , на основании формулы (36), принимает вид

$$z_j = R_j \varsigma_j + m_j / \varsigma_j, \quad \varsigma_j = r_j \sigma, \quad r_j \geq 1. \quad (37)$$

Из соотношений (36) и (37) видно, что на контуре единичного круга имеем равенство $\varsigma_j = \sigma$. Это обстоятельство дает возможность для кругового или эллиптического контура получить точное решение задачи. Представим функцию $\Phi_j(z_j)$ в виде:

$$\Phi_j(z_j) = a_j / \varsigma_j, \quad (38)$$

где переменная ς_j связана с z_j зависимостями (37).

Методом рядов из условий (33) найдем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов функции (38):

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = -ipb/2, \quad a_1 + a_2 = -qa/2. \quad (39)$$

4. Численные исследования. Задача определения напряжений и перемещений в изотропной пластине с круговым отверстием с учетом ползучести, осуществлялась в соответствии с соотношениями пункта 2. Значения параметров: $\nu = 0.25$, $\alpha = -0.5$, $\beta = 0.0065 c^{-0.5}$ и $\delta = 0.05615 c^{-0.5}$ для алюминиевых образцов заимствованы из монографии [3]. Результаты для отверстия радиуса $R = 1$ приведены ниже. Такие же результаты получились при решении этой задачи методами, изложенными в первом и третьем пунктах. При этом, уравнение закона Гука следует выбирать в форме (10), а для проведения исследований для изотропных сред были использованы алгоритмы, разработанные для анизотропных материалов с учетом методики, предложенной в работе [8].

На рис.1 представлены значения максимальных перемещений u_r , возникающих в точке A , в зависимости от времени t , когда пластинки растягиваются на бесконечности усилиями интенсивности q вдоль оси Oy . Кривая 1 соответствует значениям перемещений, вычисленных при помощи функции Миттаг-Леффлера (21), а кривая 2 – значениям перемещений, вычисленных по экспоненциальной формуле (22). В таблице 1 приведены значения перемещений u_r и u_θ в характерных точках кругового отверстия в различные моменты времени. Левый столбец для каждого перемещения соответствует точным значениям, а правый посчитан с помощью приближенной формулы (22).

Таблица 1

t , час	$u_r(\theta = 0), \text{м}^{-10}$		$u_r(\theta = \pi/2), \text{м}^{-10}$		$u_\theta(\theta = \pi/4), \text{м}^{-10}$	
0	-0.4	-0.4	1.2	1.2	0.8	0.8
100	-1.0529	-0.8702	3.8115	3.0808	2.4322	1.9755
500	-1.5375	-1.3292	5.7501	4.9166	3.6438	3.1229
1000	-1.7726	-1.6022	6.6905	6.0089	4.2316	3.8056
5000	-2.2622	-2.3111	8.6486	8.8444	5.4554	5.5777

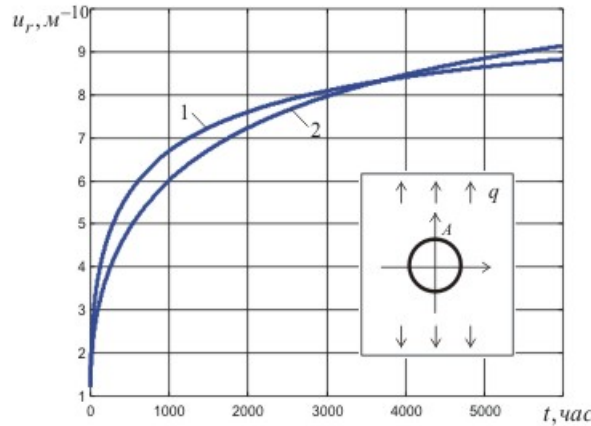


Рис. 1.

Как видно из рис.1 и таблицы 1 стабилизация изменения перемещений происходит через достаточно большой промежуток времени, а использование аппроксимации оператора Работнова в виде (22) для некоторых значений времени дает погрешность 16.5%.

Численные исследования были проведены также для ортотропной пластины, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего. Значения упругих и реологических констант следующие [9]: $E_{11}^0 = 23.0 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_1 = 0.0323 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_1 = 0.157 c^{-(1+\alpha)}$, $E_{22}^0 = 16.0 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_2 = 0.1295 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_2 = 0.2745 c^{-(1+\alpha)}$, $G_{12}^0 = 3.08 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_g = 0.0717 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_g = 0.0276 c^{-(1+\alpha)}$, $\nu_{12} = 0.11$, $\nu_{21} = 0.0765$, $\alpha = -0.846$.

Проведенные численные исследования показали, что для ортотропного материала напряжения зависят от времени. Максимальные значения возникают в точке $\theta = \pi/2$ и растут со временем. В таблице 2 приведены напряжения σ_θ/p в точках контура эллиптического отверстия для случая растяжения пластинки усилиями интенсивности p вдоль оси Ox . Соотношение полуосей эллипса $a/b = 2$. Слева даны значения напряжений, полученные по предложенной методике, а справа – по методике, предложенной в работе [10].

Таблица 2

t, c	σ_θ				$\sigma_\theta, [10]$			
	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
0	-0.8341	0.3995	1.6465	2.5529	-0.8341	0.3995	1.6465	2.5529
10	-0.7965	0.3778	1.6335	2.5997	-0.7964	0.3915	1.6501	2.5992
200	-0.7861	0.3692	1.6252	2.6244	-0.7860	0.3897	1.6511	2.6236
400	-0.7837	0.3669	1.6226	2.6316	-0.7836	0.3893	1.6513	2.6308
600	-0.7823	0.3655	1.6210	2.6361	-0.7823	0.3891	1.6514	2.6353

Как видно, результаты полученные по методике, предложенной в данной работе,

хорошо согласуются с уже известными результатами.

1. *Победра Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344с.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752с.
3. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887с.
4. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. – М: Наука, 1970. – 280с.
5. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338с.
6. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707с.
7. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463с.
8. *Космодамианский А.С., Нескородев Н.М.* Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т.62, №2. – С.344-346.
9. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248с.
10. *Подильчук И.Ю.* Исследование концентрации напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с эллиптическим отверстием // Прикл. механика. – 1997. – Т.33, №9. – С.64-73.

Донецкий национальный ун-т
nesk_rom@matfak.dongu.donetsk.ua

Получено 16.11.09