УДК 517.95

А. И. Кожанов

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Получены теоремы существования решений краевых задач, изучены свойства решений для уравнений третьего порядка.

Для уравнений с частными производными третьего порядка [1]

$$Au = lL_0u + L_1u = f, \tag{1}$$

где L_0, L_1 — эллиптико-параболические операторы второго порядка; l — оператор первого порядка, была предложена краевая задача, определяемая коэффициентами уравнения, и доказаны существование обобщенного и единственность регулярного решений. В ряде работ, хронологически вышедших как ранее, так и позднее [1], изучались частные случаи уравнений (1) (в основном возникающие в приложениях так называемые псевдогиперболические и псевдопараболические уравнения) и для краевой задачи, совпадающей с краевой задачей [1] или близкой к ней, было доказано существование регулярных решений. Достаточно обширную библиографию, посвященную «псевдогиперболическим» и «псевдопараболическим» уравнениям, можно найти в работах [2—4]. Автором в работах [5, 6] рассмотрены уравнения составного типа и уравнения, имеющие анизотропный характер, в частности включающие в себя «псевдогиперболические» и «псевдопараболические» уравнения. Другие классы уравнений (1), имеющие регулярные решения, изучены в работах [7, 8]. В целом, необходимо отметить, что как постановка краевой задачи для всего класса уравнений (1), так и методы ее исследования в ряде случаев были близки к идеям и методам теории гиперболических уравнений.

Значительно менее изучен тот факт, что для уравнений (1) может быть корректна и другая краевая задача, исходящая из свойств эллиптических операторов. Подобные краевые задачи изучались в теории уравнений составного типа [9—12]. Характерным свойством, указывающим на отличие данного направления от направления, описанного выше, может послужить то, что для «псевдогиперболических» уравнений наряду с обычной смешанной начально-краевой задачей, изученной в работах [2—5] и совпадающей с краевой задачей [1], может быть корректна задача Дирихле, т. е. эллиптическая задача.

Не описывая в целом постановку новой краевой задачи в терминах коэффициентов для уравнений (1) (ввиду громоздкости, а также из-за того, что это будет сделано отдельно), в настоящей работе укажем некоторые свойства решений краевой задачи [1] и эллиптической краевой задачи на примере одного специального класса уравнений (1).

Пусть $x \in \mathcal{D} \subset R_x^n$, $y \in G \subset R_y^m$, $\mathcal{D}$, G — ограниченные области с гладкими границами Γ, S соответственно; $\Omega = \mathcal{D} \times G$, $0 < t < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0, T)$. В области Q рассмотрим уравнение

$$A_\varkappa u \equiv u_{tt} - \frac{\partial}{\partial t} L_0 u + L_1 u + \varkappa M u = f(x, y, t), \tag{2}$$

где L_0, M — равномерно эллиптические операторы соответственно вида

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}) - a_0(x) u, \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad a_0(x) \geqslant 0,$$

$$Mu = \sum_{p,q=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_p} (c^{pq}(y) u_{y_q}) - c_0(y) u, \quad c^{pq}(y) = c^{qp}(y), \quad c_0(y) \geqslant 0;$$

L_1 — оператор второго порядка вида

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x, t) u_{x_i} + b^0(x, t) u;$$

$\varkappa$ — параметр, принимающий одно из трех значений: 0, 1, —1. Все коэффициенты операторов L_0, L_1, M будем считать для простоты бесконечно дифференцируемыми при $x \in \overline{\mathcal{D}}$, $y \in \overline{G}$, $t \in [0, T]$.

Для уравнения (2) рассмотрим задачи: найти решение (2), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \ u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0; \tag{3}$$

найти решение (2), удовлетворяющее условию

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{4}$$

Замечание. При $\varkappa = 0$ подразумевается, что уравнение (2) рассматривается в области $\mathcal{D} \times (0, T)$, f, u_0, u_1 не зависят от y, коэффициенты M тождественно равны нулю.

Обозначим $\mathcal{E}^h = \mathcal{D} \times (h, T)$, $Q^h = \Omega \times (h, T)$, $h \geqslant 0$ $(Q^0 = Q)$, $\mathcal{E}_t = \mathcal{D} \times (0, t)$, $Q_t = \Omega \times (0, t)$.

Теорема 1. Пусть $\varkappa = 0$. Если $f \in L_2(\mathcal{E}^0)$, $u_0(x) \in W_2^2(\mathcal{D}) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\mathcal{D})$, $v_1(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\mathcal{D})$, то задача (2), (3) всегда имеет решение, такое, что

$$u,\ u_t,\ u_{x_i t},\ u_{x_i x_j} \in L_\infty(0, T;\ L_2(\Omega)),\ u_{tt},\ u_{x_i x_j t} \in L_2(Q_t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$i, j = 1, \ldots, n.$$

Если $f \in L_2(\mathcal{E}^0)$, выполнены условия

$$\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x, t)\,\xi_i \xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2,\quad (x, t) \in \overline{\mathcal{E}^0},\quad \lambda > 0,\ \xi \in R^n,$$

$$b^0(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i}(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}_{x_i x_j}(x, t) \leqslant -\delta_0 < 0,\quad (x, t) \in \overline{\mathcal{E}^0},$$

то задача (2), (4) всегда имеет решение, такое, что

$$u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\mathcal{E}^0),\ u_{x_i x_j},\ u_{x_i t} \in L_2(\mathcal{E}^0),\ u_t \in W_2^{2,1}(\mathcal{E}^h),\quad h > 0,\ i, j = 1, \ldots, n;$$

решения задач (2), (3) и (2), (4) в указанных классах единственны.

Доказательство. Первая часть теоремы доказана в [6]. Для доказательства второй части регуляризуем уравнение (2) уравнением

$$A_{0,\varepsilon} u = -\varepsilon L_0 L_0 u + A_0 u = f,\quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

и дополним краевым условием

$$L_0 u\,|_{\partial\mathcal{D} \times (0, T)} = 0. \tag{6}$$

Для краевой задачи (4)—(6) имеет место теорема существования решения, имеющего все производные, входящие в уравнение,— это следует, например, из [13]. Получая теперь априорные оценки, которые будут весовыми с весом, обращающимся в нуль при $t = 0$, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим требуемое.

Теорема 2. Пусть $\varkappa = -1$. Если $u_0(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$, $u_1(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ обращаются в нуль на $\partial\Omega$, $f \in L_2(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, $f(x, y, 0) \in L_2(\Omega)$, то задача (2), (3) всегда имеет решение, такое, что

$$u,\ u_t,\ u_{x_i t},\ u_{x_i x_j},\ u_{y_p},\ u_{y_p t} \in L_\infty(0, T;\ L_2(\Omega)),\ u_{tt},\ u_{x_i x_j t},\ u_{y_p y_q} \in L_2(Q_t),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ i, j = 1, \ldots, n,\quad p, q = 1, \ldots, m,$$

и это решение единственно в данном классе; однородная задача (2), (4) может иметь неединственное решение.

Доказательство существования решения задачи (2), (3) указанного класса приведено в [6]. Что касается неединственности решения задачи (2), (4), то пусть $L_1 \equiv 0$, $\{w_k(x)\}$ — базис в $W_2^2(\mathcal{D}) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\mathcal{D})$ из собственных функций задачи Дирихле для оператора L_0; $\{\psi_l(y)\}$ — базис в $W_2^2(G) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ из собственных функций задачи Дирихле для оператора M; $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_l\}$ — соответствующие собственные значения. Имеется бесконечно много чисел k, l, таких, что $\lambda_k^2 + 4\mu_l < 0$. Если существует целое число

r, такое, что

$$\frac{\lambda_k^2}{4} + \mu_l = -\frac{\pi^2 r^2}{T^2},$$

то функция

$$u_{kl}(x, y, t) = l^{\frac{\lambda_k t}{2}} \sin\left(\sqrt{-\frac{\lambda_k^2}{4} - \mu_l}\, t\right) \omega_k(x)\, \psi_l(y)$$

будет решением уравнения $A_{-1}u = 0$, удовлетворяющим условию (4).

Пусть k, l, p — целые неотрицательные числа. Обозначим через $W^{k,l,p}_{2,x,y,t}(Q)$ пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом по Q обобщенные производные по x до порядка k включительно, по y до порядка l включительно и по t до порядка p включительно.

Теорема 3. Пусть $\varkappa = 1$. Если выполнены условия второй части теоремы 1, $f \in W^{0,1,0}_{2,x,y,t}(Q)$, f обращается в нуль на $\mathscr{D} \times S \times (0, T)$, то задача (2), (4) имеет решение, такое, что $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(Q)$, $u_{x_i t}$, $u_{x_i x_j}$, $u_{x_i y_p}$, $u_{y_p y_q} \in L_2(Q)$, $u_t \in W^{2,0,1}_{2,x,y,t}(Q^h)$, $h > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, $p, q = 1, \ldots, m$; имеет место также единственность решения. Для задачи же (2), (3) имеет место неустойчивость по отношению к входным данным.

Доказательство теоремы 3 основано на использовании метода Галеркина с разложением приближенного решения по функциям $\psi_l(y)$, применении теоремы 1 и получении априорных оценок. Неустойчивость решения задачи (2), (3) при $\varkappa = 1$ показана в [6].

Теоремы 1—3 носят вспомогательный для данной работы характер, полное их доказательство приведено отдельно. Здесь изложим некоторые новые факты о свойствах решений задач (2), (3) и (2), (4).

Теорема 4. Если $\varkappa = -1$, $f \in W^{2k,2l,p}_{2,x,y,t}(Q)$, $f_t \in W^{2k,2l,p}_{2,x,y,t}(Q)$, f, $L_0 f$, … …, $L_0^k f$, Mf, …, $M^l f$ обращаются в нуль на $\partial\Omega \times (0, T)$, производные по t от тех же функций до порядка p включительно, взятые при $t = 0$, принадлежат $L_2(\Omega)$, и до порядка $p - 1$ включительно обращаются в нуль на $\partial\Omega$, $u_0 \in C^{2k+2l+p+2}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in C^{2k+2l+p+1}(\overline{\Omega})$, u_0, u_1 обращаются в нуль на $\partial\Omega$ вместе с производными до порядка $2k + 2l + p + 1$ включительно, то задача (2), (3) имеет решение, такое, что $u \in W^{2k+2,2l+2,p+1}_{2,x,y,t}(Q)$, $u_t \in W^{2k+2,2l+1,p+1}_{2,x,y,t}(Q)$.

Теорема 4 есть теорема о повышении гладкости решения задачи (2), (3). Укажем схему ее доказательства. Будем считать вначале, что искомое решение есть гладкая функция.

Повышение гладкости по t проводится с помощью последовательного дифференцирования; условия теоремы позволяют вычислить следы при $t = 0$ производных по t до p-го порядка, дифференцируя (2) по t p раз, умножая на $\frac{d^p u}{dt^p}$ и интегрируя, получаем оценку для p-й производной по t.

Для того чтобы повысить гладкость решения по x и y, заметим, что если к уравнению (2) применить оператор L_0^k, то для функции $v_k = L_0^k u$ сохраняются краевые условия (3); отсюда следует возможность получения оценки производных по x и y.

Завершаем доказательство теоремы 4 указанием на то, что решение задачи (2), (3) можно аппроксимировать гладкими функциями, затем можно получить требуемые оценки и перейти к пределу.

Особенностью задачи (2), (4) является то, что при $t = 0$ задается значение самого решения, а не производной, что и вызывает появление весовых пространств. Далее из (2) сразу не вычисляется значение u_{tt} при $t = 0$ и $t = T$, что не позволяет добиться повышения гладкости решения по t такими же методами, как и при доказательстве теоремы 4; по x же и y повышения гладкости можно достичь так же, как и раньше. Покажем это.

В отличие от задачи (2), (3) для задачи (2), (4) нет возможности использовать лемму Гроноулла, поэтому возникают условия малости коммутанта операторов L_0^k и L_1; чтобы не загромождать работу несущественными техническими деталями, будем считать, что $L_1 = L_0$.

Теорема 5. Если $\varkappa = 1$, $f \in W_{2,x,y,t}^{2k-1,2l-1,0}(Q)$, $f, L_0 f, \ldots, L_0^{k-1} f$, $Mf, \ldots$ $\ldots, M^{l-1} f$ обращаются в нуль соответственно на $\Gamma \times G \times (0, T)$ и $\mathcal{D} \times S \times$ $\times (0, T)$, то задача (2), (4) имеет решение, такое, что $u \in W_{2,x,y,t}^{2k+1,2l+1,1}(Q)$,

Следствие. Если $\varkappa = 1$ и дополнительно к условиям теоремы 3 $f \in$ $\in W_{2,x,y,t}^{1,1,0}(Q)$, f обращается в нуль на $\Gamma \times G \times (0, T)$, то решение задачи (2), (4) дополнительно удовлетворяет включению $u_t \in W_{2,x,y,t}^{2,0,1}(Q)$.

Укажем, как можно повысить гладкость решения по t. Из следствия теоремы 5 имеем, что $u_t(x, y, 0) \in W_2^{1/2}(\Omega)$, $u_t(x, y, T) \in W_2^{1/2}(\Omega)$. Если теперь $f(x, y, 0)$, $f(x, y, T)$ существуют, то мы можем вычислить $u_{tt}(x, y, 0)$, $u_{tt}(x, y, T)$. Дифференцируя уравнение (2) дважды по t, получаем уравнение для u_{tt} с краевым условием из некоторого соболевского пространства; умножая его на u_{tt} и интегрируя, получаем оценку для производной третьего порядка по t. Далее, вновь используя теорему 5 и ее следствие показываем, что четвертая производная по t существует и принадлежит $L_2(Q)$; отсюда извлекаем принадлежность следов $u_{ttt}(x, y, 0)$, $u_{ttt}(x, y, T)$ к $W_2^{1/2}(\Omega)$ и т. д.

Еще одна из особенностей решений задачи (2), (4) при $\varkappa = 1$ состоит в возможности получения оценки максимума модуля решения через правую часть.

Теорема 6. Пусть область $\mathcal{D}$ такова, что задача Дирихле для оператора L_0 имеет полную систему собственных функций $\{w_k(x)\}$, и эти функции гладкие, равномерно ограничены в $C(\overline{\mathcal{D}})$ и ортонормированы в $L_2(\mathcal{D})$. Для простоты пусть $L_1 \equiv 0$. Если $u(x, y, t)$ есть гладкое решение задачи (2), (4) при $\varkappa = 1$, то для нее справедлива оценка

$$\max_{\overline{Q}} |u| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \max_{y \in \overline{G}, t \in [0,T]} |f_k(y, t) l^{\frac{\lambda_k t}{2}}|,$$

где $f_k(y, t) = \int\limits_{\mathcal{D}} f(x, y, t) w_k(x)\, dx$.

Доказательство. Разложим $u(x, y, t)$ в ряд Фурье по функциям $w_k(x)$; для функций $c_k(y, t)$ получим задачу

$$c_{ktt} - \lambda_k c_{kt} + Mc_k = f_k, \quad c_k|_{\partial G \times (0,T)} = c_k|_{t=0} = c_k|_{t=T} = 0.$$

Применяя оценку принципа максимума для этой задачи, находим

$$|c_k(y, t)| \leqslant \frac{4 \max\limits_{y,t} |f_k l^{\frac{\lambda_k t}{2}}|}{\lambda_k^2}.$$

Возвращаясь к функции $u(x, y, t)$, получаем требуемое.

1. *Кожанов А. И.* Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка // Докл. АН СССР.— 1979.— 249, № 3.— С. 536—539.
2. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка.— Новосибирск, 1980.— 36 с.— (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 5).
3. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка // Мат. сб.— 1982.— 118, № 4.— С. 504—522.
4. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа.— Новосибирск : Наука, 1983.— 270 с.
5. *Кожанов А. И.* Краевая задача для одного класса сильно-нелинейных уравнений составного типа // Неклассические уравнения смешанного типа.— Новосибирск, 1983.— С. 91—107.
6. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи и свойствах решений для одного класса уравнений третьего порядка.— Новосибирск, 1986.— 39 с.— (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 11).

7. *Ларькин Н. А.* О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа.— Новосибирск, 1983.— С. 107—118.
8. *Попов С. В.* О постановке краевых задач для одного уравнения третьего порядка // Краевые задачи для нелинейных уравнений.— Новосибирск, 1982.— С. 43—50.
9. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.— Ташкент : Фан, 1974.— 156 с.
10. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.— Ташкент : Фан, 1979.— 298 с.
11. *Пятков С. Г.* О разрешимости некоторых классов уравнений смешанно-составного типа третьего порядка.—Новосибирск, 1980.—21 с.—(Препр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики).
12. *Пятков С. Г.* О задаче Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка // Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений; Тез. докл. (Алма-Ата, 1979).— Алма-Ата, 1979.— С. 178—179.
13. *Дубинский Ю. А.* О краевых задачах для эллиптико-параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1969.— 184, № 3.— С. 522—525.

Ин-т математики Сиб. отд-ния АН СССР,
Новосибирск

Получено 28.10.87