

УДК 517.925.4; 531.537

©2014. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

АППРОКСИМАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА ДЕМПФИРОВАНИЯ ДЛЯ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

При использовании простейшей модели синхронного электромотора его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно угловой переменной – разности углов поворота магнитных полей статора и ротора. Это уравнение имеет два счетных набора стационарных точек, соответствующих устойчивым и неустойчивым режимам равномерного вращения ротора. Глобальное поведение фазовых траекторий данного уравнения зависит от того, будет ли входящий в него параметр демпфирования больше или меньше некоторого критического значения. Путем расчета на компьютере построен график кривой, изображающей критическое значение параметра демпфирования для синхронного электромотора в зависимости от стационарного значения угловой переменной. Получены линейная и синусоидальная аппроксимации данной кривой, позволяющие вычислять критические значения с высокой точностью.

Ключевые слова: синхронный электромотор, критическое значение, глобальное притяжение.

1. Математическая модель синхронного электромотора. Детальная модель синхронного электромотора описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка относительно токов в обмотках ротора и угловой переменной, определяющей положение ротора (см. [1, 2]). Простейшая модель синхронного электромотора описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно переменной $\theta = \omega t - \varphi$, где $\omega > 0$ – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электромотора, φ – угол поворота ротора относительно статора. Путем введения безразмерного времени и двух безразмерных параметров $a, c > 0$ это уравнение приводится к виду [3, 4]

$$\ddot{\theta} = -a\dot{\theta} - \sin \theta + c. \quad (1)$$

Равномерным вращениям ротора электромотора с угловой скоростью ω соответствуют стационарные решения этого уравнения, в которых значения угла θ определяются равенством $\sin \theta = c$. При $c > 1$ стационарные решения не существуют. Отбрасывая особый случай, когда $c = 1$, будем предполагать, что $c < 1$. Тогда уравнение электромотора имеет два семейства стационарных решений при значениях угла θ равных

$$\theta_0 + 2\pi n, \quad \theta_1 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Здесь

$$\theta_0 = \arcsin c \in (0, \pi/2), \quad \theta_1 = -\pi - \theta_0 \in (-3\pi/2, -\pi). \quad (2)$$

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно показать, что решениям первого семейства соответствуют асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения (1) – устойчивый фокус или устойчивый узел, а ре-

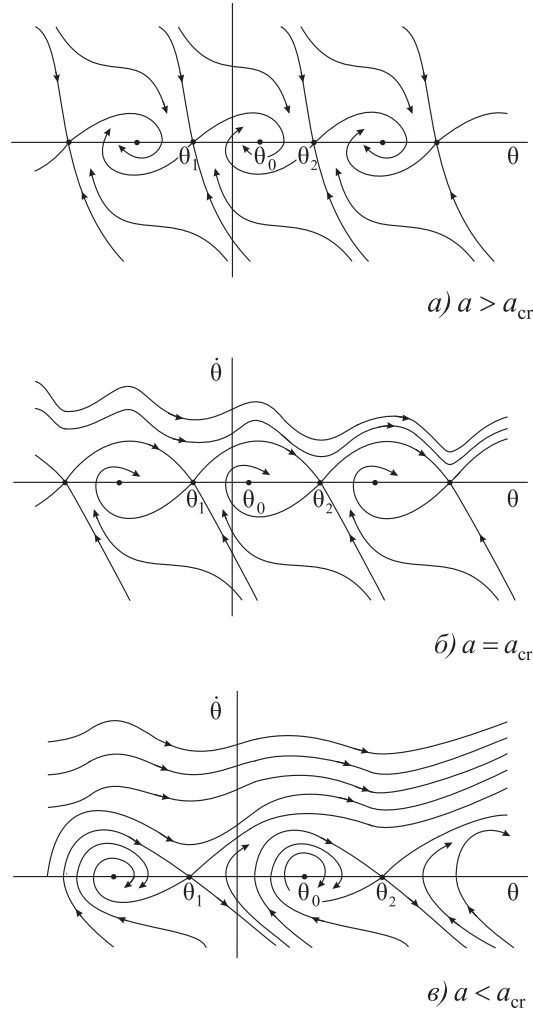


Рис. 1. Фазовые портреты синхронного электромотора.

шениям второго семейства соответствуют неустойчивые стационарные решения – седловые точки.

Нелокальный анализ уравнения электромотора, проведенный Ф. Трикоми [5, 3], показывает, что для этого уравнения возможны три качественно различных типа фазовых портретов, изображенных на рис. 1. А именно, существует *критическое значение* параметра a , которое является монотонной функцией $a_{cr} = a_{cr}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$, обращающейся в нуль при $c = 0$, и обладает следующими свойствами.

- В случае $a > a_{cr}$ сепаратрисы неустойчивых седловых точек разбивают всю фазовую плоскость на области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек (рис. 1, а). В этом случае множество стационарных точек уравнения электромотора (1) является *глобально притягивающим*, т. е. каждое решение этого уравнения стремится к одной из стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$.

• При $a \leq a_{\text{cr}}$ существуют решения, вдоль которых угол θ неограниченно возрастает с течением времени. Поэтому при $a \leq a_{\text{cr}}$ множество стационарных точек уравнения электромотора уже не является глобально притягивающим (рис. 1, б, в). Режимы работы электромотора, на которых угол θ неограниченно возрастает, являются нежелательными.

При $a = a_{\text{cr}}$ существуют сепаратрисы, соединяющие соседние седловые точки (рис. 1, б).

Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin \theta_0$, и величину $a_{\text{cr}}(c)$ можно рассматривать как функцию $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. Для этой функции не существует явного выражения, но разными авторами найдены ее теоретические оценки сверху и снизу [3]. В настоящей работе с помощью компьютера построен график функции $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(\theta_0)$, и для нее получены две простые аппроксимации.

2. Вычисление критических значений параметра демпфирования. Сепаратриса седловой точки уравнения (1) есть фазовая траектория этого уравнения, вдоль которой его решение стремится к данной седловой точке при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$. На плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ стационарная точка $(\theta_0, 0)$ лежит на оси абсцисс между седловыми точками $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_2, 0)$. Здесь $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, θ_0 и θ_1 определены в (2).

Пусть $\dot{\theta} = F_1(\theta, a, \theta_0)$ – уравнение той из четырех сепаратрис седловой точки $(\theta_1, 0)$, которая выходит из этой точки в верхнюю полуплоскость при возрастании θ , а $\dot{\theta} = F_2(\theta, a, \theta_0)$ – уравнение той из сепаратрис седловой точки $(\theta_2, 0)$, которая выходит из этой точки в верхнюю полуплоскость при убывании θ (см. рис. 1). Область определения F_1 всегда содержит отрезок $[\theta_1, \theta_0]$, а область определения F_2 всегда содержит отрезок $[\theta_0, \theta_2]$. При $a = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ эти две сепаратрисы совпадают, и поэтому для определения $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ при заданном θ_0 имеем уравнение $D(a, \theta_0) = 0$, где функция $D(a, \theta_0) = F_1(\theta_0, a, \theta_0) - F_2(\theta_0, a, \theta_0)$ определена при всех $a > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$.

Для численного решения этого уравнения при каждом заданном θ_0 достаточно воспользоваться методом половинного деления. При этом значения $F_1, F_2(\theta_0, a, \theta_0)$, входящие в определение функции $D(a, \theta_0)$, определяются путем численного интегрирования уравнения интегральных кривых

$$d\dot{\theta}/d\theta = -a - (\sin \theta - \sin \theta_0)/\dot{\theta} \quad (3)$$

при начальных данных, соответствующих седловым точкам $(\theta_1, 0)$, $(\theta_2, 0)$. В этих точках числитель и знаменатель дроби в (3) обращаются в нуль. С учетом этого при проведении расчетов в малой окрестности седловых точек сепаратрисы F_1, F_2 аппроксимируются касательными к ним в этих точках: $\dot{\theta} = k_1(\theta - \theta_1)$, $\dot{\theta} = k_2(\theta - \theta_2)$. Их угловые коэффициенты равны

$$k_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos \theta_1}, \quad k_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos \theta_1}.$$

Поскольку $\cos \theta_1 < 0$, имеем $k_1 > 0$, $k_2 < 0$.

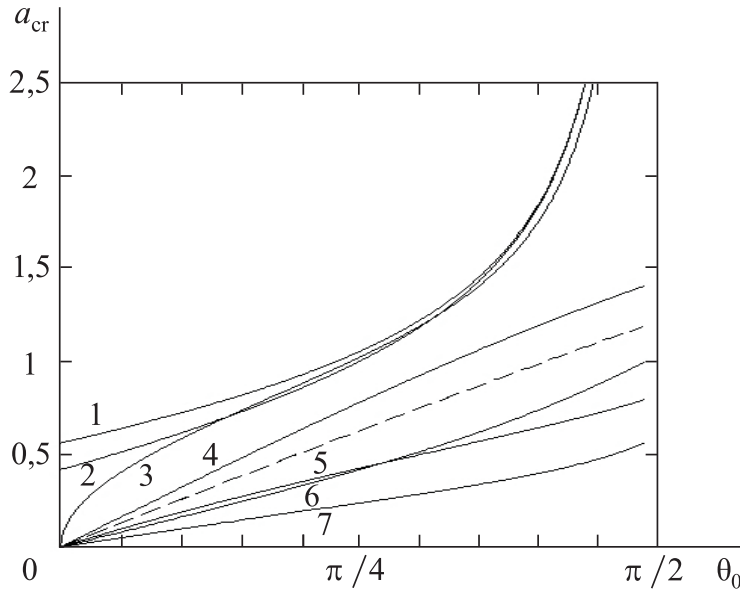


Рис. 2. График вычисленной зависимости $a_{cr}(\theta_0)$ (прерывистая кривая) и графики правых частей ее теоретических оценок (непрерывные кривые).

На рис. 2 прерывистой линией изображен график функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ на промежутке от 0 до 89 градусов, полученный путем вычисления ее значений с мелким шагом по θ_0 . Выше этой расчетной кривой лежат графики правых частей верхних теоретических оценок величины a_{cr} , найденных 1) Трикоми, 2) Табуевой, 3) Зайфертом, 4) Бёмом, а ниже – графики правых частей нижних теоретических оценок, найденных 5) Бёмом, 6) Хейзом, 7) Трикоми (см. [3, с. 122–123]).

3. Аппроксимация критических значений. Рис. 2 показывает, что вычисленная кривая $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ близка к прямой. Проводя хорду через концы вычисленной кривой, получим для a_{cr} линейную аппроксимацию

$$a_{crL} = 0,76 \cdot \theta_0. \quad (4)$$

На рис. 3 представлен график разности вычисленной функции $a_{cr}(\theta_0)$ и ее линейной аппроксимации. Из него видно, что абсолютная погрешность линейной аппроксимации (4) не больше, чем $1,5 \cdot 10^{-2}$.

Рис. 3 позволяет предположить, что более точную аппроксимацию критических значений можно получить в классе синусоидальных функций вида $a_{crS} = A \sin(\Omega \theta_0)$, где A, Ω – некоторые числа. Чтобы определить эти числа, заметим, что при заданном значении Ω величина A однозначно определяется из условия, что на правом конце рассматриваемого интервала изменения θ_0 , т. е. при $\theta_0 = 90^\circ$, значение $A \sin(\Omega \theta_0)$ равно вычисленному значению $a_{cr}(\theta_0)$.

Для вычисления наилучшего значения величины Ω задается диапазон изменения этой величины и затем с мелким шагом перебираются все значения Ω из этого диа-

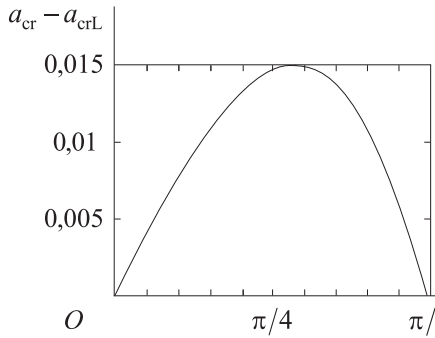


Рис. 3. График разности функции $a_{cr}(\theta_0)$ и ее линейной аппроксимации $a_{crL}(\theta_0)$.

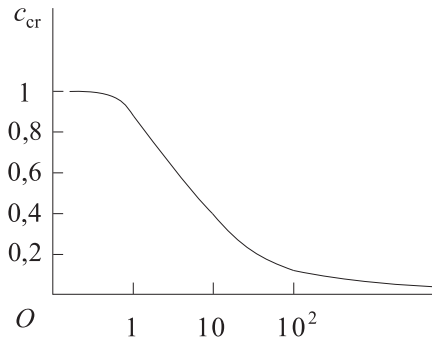


Рис. 4. График зависимости критического значения величины $c = \sin \theta_0$ от $1/a^2$.

пазона. Для каждого из них вычисляется максимальная абсолютная погрешность синусоидальной аппроксимации, то есть максимум $|A \sin(\Omega \theta_0) - a_{cr}(\theta_0)|$ на рассматриваемом интервале изменения θ_0 . В качестве наилучшего выбирается то значение Ω , для которого эта погрешность минимальна. Такие вычисления показывают, что оптимальная аппроксимация получается при $A = 2,766222$ и $\Omega = 0,2838860$. Таким образом, получаем приближенную формулу

$$a_{crS} = 2,766222 \cdot \sin(0,2838860 \cdot \theta_0).$$

Она обеспечивает вычисление критического значения c с абсолютной погрешностью не больше, чем $3,4 \cdot 10^{-5}$.

Вопрос о вычислении критических значений для уравнения (1) рассматривался в литературе. При этом вместо функции $a_{cr}(c)$ вычислялась обратная к ней функция $c_{cr}(a)$. На рис. 4 показан график функции $c_{cr}(1/a^2)$, приведенный в [1, с. 268]. Для нее трудно подобрать простую аппроксимацию.

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. – № 4. – 2012. – С. 18–27. (Leonov G.A., Zaretskiy A.M. Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. – 45, no. 4. – 2012. – P. 157–163. © Allerton Press, Inc., 2012.)
3. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
4. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
5. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – 2, no. 2. – P. 1–20.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

Approximation of the critical value of the damping parameter for a synchronous electric motor.

The simplest model of a synchronous electric motor can be described by a second order nonlinear differential equation with respect to the variable $\theta = \omega t - \varphi$, where ωt is the rotational angle of the magnetic field in the stator, and φ is the rotational angle of the rotor. This equation includes two parameters, namely, the damping parameter a and the value $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ of θ in the asymptotically stable rotation of the rotor.

F. Tricomi proved that there exists a critical value $a_{cr}(\theta_0)$ of the damping parameter such that the set of steady rotations of the motor is globally attracting in the case $a > a_{cr}(\theta_0)$ only. In the paper, using computer calculation, the graph of the function $a_{cr}(\theta_0)$ is obtained and simple high accuracy approximations of this functions are given.

Keywords: *synchronous electric motor, critical value, global attraction.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 22.05.14