ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Том 21

УДК 517.5

©2010. **В.Ф. Бабенко, Р.О. Биличенко**

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ТАЙКОВА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Получено обобщение неравенства Тайкова, оценивающего L_∞ – норму промежуточной производной через L_2 – нормы самой функции и старшей производной, на произвольные степени самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *неравенства, самосопряженные операторы, гильбертово пространство.*

1. Введение. Пусть G — действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T}$. Через $L^r_{2,2}(G)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство всех функций $x \in L_2(G)$, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(G)$.

В 1967 году Л.В. Тайков [1] (см. также [2, § 5.7]) установил, что для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, при любом $k \in \mathbb{N}$, $k < r$, имеет место точное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \beta_{r,k+1/2}\left(2r\sin\pi\frac{2k+1}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{r-k-1/2}{r}}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k+1/2}{r}}, \tag{1}$$

где

$$\beta_{r,\alpha} := \left\{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{r}}\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^{\frac{r-\alpha}{r}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

В 1990 году А.Ю. Шадрин [3] (см. также [2, § 5.8]) получил аналог неравенства (1) для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{T})$: при любых $k \in \mathbb{N}$, $k < r$, справедливо точное неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L\infty(\mathbb{T})} \leq \pi^{-\frac{1}{2}}\beta_{r,k+1/2}V_{r,k}\|x\|_{L_2(\mathbb{T})}^{\frac{r-k-1/2}{r}}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_2(\mathbb{T})}^{\frac{k+1/2}{r}}, \tag{3}$$

где

$$V_{r,k}(t) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2k+1}n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}}\right\}^{1/2}, \qquad V_{r,k} = \sup_{t>0}V_{r,k}(t). \tag{4}$$

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y) и нормой $\|x\| = (x,x)^{1/2}$, A — линейный, неограниченный, самосопряженный оператор в H, $D(A)$ — область его определения. Пусть также f — произвольный линейный непрерывный функционал, определенный в гильбертовом пространстве H. В данной заметке получено обобщение неравенств (1), (3) на натуральные степени оператора A, в котором L_∞ - норма промежуточной производной или, что эквивалентно, значение этой производной в точке 0, заменяется на значение $(A^k x, f)$ функционала f на элементе $A^k x$.

2. Предварительные сведения. Приведем некоторые сведения из спектральной теории самосопряженных операторов, которые можно найти, например, в [4, §§75, 88].

Разложением единицы называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов $E_t : H \to H$, заданное в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$ (если интервал $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается $E_{-\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} E_t$, $E_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} E_t$, в смысле сильной сходимости) и удовлетворяющее следующим условиям:

a) $E_u E_v = E_s \; \forall u, v \in [\alpha, \beta]$, где $s = \min\{u, v\}$;

b) в смысле сильной сходимости $E_{t-0} = E_t \quad (\alpha < t < \beta)$;

c) $E_\alpha = 0, E_\beta = I$ (I — тождественный оператор: $Ix = x \; \forall x \in H$).

Полагаем $E_t = 0$ при $t \le \alpha$ и $E_t = I$ при $t \ge \beta$.

Из определения следует, что для любого $x \in H$ функция

$$\sigma(t) = (E_t x, x)\,, \quad -\infty < t < \infty,$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченной вариации, для которой $\sigma(\alpha) = 0, \quad \sigma(\beta) = (x, x)$.

Согласно спектральной теореме каждому самосопряженному оператору A соответствует разложение единицы E_t, $t \in \mathbb{R}$, такое, что имеет место равенство

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t.$$

Приведенный здесь интеграл – это операторный интеграл Стилтьеса (см., например, [4, §72]). По поводу определения и свойств операторных интегралов см. также [5, гл. 13, §1,2]. Вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d\,(E_t x, x) < \infty,$$

и если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t x, \quad \|Ax\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d\,(E_t x, x) < \infty.$$

Для $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \, dE_t x, \quad \left\|A^k x\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \, d\,(E_t x, x)\,. \tag{5}$$

Используя спектральное разложение (5), для $x \in D\left(A^r\right)$ и функционала f можем записать

$$\left(A^k x, f\right) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \, dE_t x, f\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \, d\left(E_t x, f\right). \tag{6}$$

3. Аддитивные неравенства. Используя (6), для любого $\tau > 0$, любых $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и $x \in D(A^r)$ можем записать

$$\left(A^k x, f\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \, d\left(E_t x, f\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{\left(1+\tau t^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(1+\tau t^{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \, d\left(E_t x, f\right) \le$$

$$\le \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} \, d\left(E_t f, f\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1+\tau t^{2r}\right) \, d\left(E_t x, x\right)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} \, d\left(E_t f, f\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\|x\|^2 + \tau \left\|A^r x\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, нами доказано, что для любого $\tau > 0$, любых $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и $x \in D(A^r)$ имеет место неравенство

$$\left(A^k x, f\right) \le \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} \, d\left(E_t f, f\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\|x\|^2 + \tau \left\|A^r x\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Покажем, что неравенство (7) является точным в том смысле, что существует элемент $x_\tau \in D\left(A^r\right)$, для которого в (7) имеет место знак равенства. Выберем

$$x_\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{1+\tau t^{2r}} \, dE_t f. \tag{8}$$

Как нетрудно проверить,

$$\left\|x_\tau\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\left(1+\tau t^{2r}\right)^2} \, d\left(E_t f, f\right), \tag{9}$$

$$A^k x_\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} \, dE_t f, \quad A^r x_\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{r+k}}{1+\tau t^{2r}} \, dE_t f. \tag{10}$$

Из (6) и (10) следует, что

$$\left\|A^r x_\tau\right\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{\left(1+\tau t^{2r}\right)^2} \, d\left(E_t f, f\right) \tag{11}$$

и

$$(A^k x_\tau, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f)\,. \tag{12}$$

Используя (12), (9) и (11), получим

$$(A^k x_\tau, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f) =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}+\tau t^{2r+2k}}{(1+\tau t^{2r})^2} d\,(E_t f, f) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} d\,(E_t f, f) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|x_\tau\|^2 + \|A^r x_\tau\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и f — линейный непрерывный функционал, определенный в H. Тогда, для любого $x \in D\,(A^r)$ и любого $\tau > 0$ справедливо неравенство*

$$(A^k x, f) \le \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}}\, d\,(E_t f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|x\|^2 + \tau\, \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Неравенство (13) обращается в равенство для элемента вида (8).

4. Мультипликативные неравенства. Для $\alpha, z > 0$ положим

$$V_{r,k,\alpha}(f,z) = z^\alpha \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+z^{2r}t^{2r}}\, d\,(E_t f, f) \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad V_{r,k,\alpha}(f) = \sup_{z>0} V_{r,k,\alpha}(f,z).$$

Теорема 2. *Пусть оператор A, функционал f и числа r, k, α таковы, что $V_{r,k,\alpha}(f) < \infty$. Тогда имеет место неулучшаемое неравенство*

$$(A^k x, f) \le V_{r,k,\alpha}(f) \beta_{r,\alpha}\, \|x\|^{\frac{r-\alpha}{r}}\, \|A^r x\|^{\frac{\alpha}{r}}. \tag{14}$$

Доказательство. Полагая в (13) $\tau = z^{2r}$, получаем для любого $z > 0$

$$(A^k x, f) \le V_{r,k,\alpha}(f,z) \left\{ z^{-2\alpha} \|x\|^2 + z^{2r-2\alpha} \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le V_{r,k,\alpha} \left\{ z^{-2\alpha} \|x\|^2 + z^{2r-2\alpha} \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Полагая в (15) $z = \left\{ \dfrac{\alpha}{r-\alpha} \right\}^{1/2r} \left\{ \dfrac{\|x\|}{\|A^r x\|} \right\}^{1/r}$, получим неравенство (14).

Докажем точность этого неравенства. Для определенного соотношением (8) элемента $x_{z^{2r}}$ будем иметь

$$\|A^r x_{z^{2r}}\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k+2r}}{(1+z^{2r}t^{2r})^2} d(E_t f, f) =$$

$$= z^{-2r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t^{2k}}{1+z^{2r}t^{2r}} - \frac{t^{2k}}{(1+z^{2r}t^{2r})^2} \right) d(E_t f, f) = z^{-2r} \left[(A^k x_{z^{2r}}, f) - \|x_{z^{2r}}\|^2 \right].$$

Следовательно,

$$(A^k x_{z^{2r}}, f) = z^{2r} \|A^r x_{z^{2r}}\|^2 + \|x_{z^{2r}}\|^2,$$

$$\frac{(A^k x_{z^{2r}}, f)}{\|x_{z^{2r}}\|^{2-\frac{2\alpha}{r}} \|A^r x_{z^{2r}}\|^{\frac{2\alpha}{r}}} = z^{2r} \left(\frac{\|A^r x_{z^{2r}}\|}{\|x_{z^{2r}}\|} \right)^{2-\frac{2\alpha}{r}} + \left(\frac{\|x_{z^{2r}}\|}{\|A^r x_{z^{2r}}\|} \right)^{\frac{2\alpha}{r}} =$$

$$= z^{2\alpha}(u^{2r-2\alpha} + u^{-2\alpha}) \ge z^{2\alpha} \beta^2_{r,\alpha},$$

где положено $u = z \left(\frac{\|A^r x_{z^{2r}}\|}{\|x_{z^{2r}}\|} \right)^{\frac{1}{r}}$. Отсюда, с учетом (12), получаем

$$\frac{(A^k x_{z^{2r}}, f)^2}{\|x_{z^{2r}}\|^{2-\frac{2\alpha}{r}} \|A^r x_{z^{2r}}\|^{\frac{2\alpha}{r}}} \ge z^{2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+z^{2r}t^{2r}} d(E_t f, f) \beta^2_{r,\alpha} = V^2_{r,k,\alpha}(f,z) \beta^2_{r,\alpha}.$$

Остается задать z так, чтобы $V_{r,k,\alpha}(f,z) \to V_{r,k,\alpha}(f)$. Неулучшаемость неравенства (14) доказана. Теорема доказана. □

5. Замечания.

Замечание 1. Из неравенства (13) вытекает известное неравенство типа Харди-Литтлвуда-Полиа для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [2, §5.1]), а именно

$$\left\| A^k x \right\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^{\frac{k}{r}} \tag{16}$$

для всех $x \in D(A^r)$.

Действительно, для $x \in D(A^r)$ и любого $\tau > 0$

$$\left\|A^k x\right\| = \sup_{\|f\|\le 1} |(A^k x, f)| \le$$

$$\le \sup_{\|f\|\le 1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}}\, d\,(E_t f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|x\|^2 + \tau \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{ \max_t \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|x\|^2 + \tau \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{k}{\tau(r-k)} \right\}^{\frac{k}{2r}} \left\{ \frac{r-k}{r} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|x\|^2 + \tau \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{k}{r-k} \right\}^{\frac{k}{2r}} \left\{ \frac{r-k}{r} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \tau^{-\frac{k}{r}} \|x\|^2 + \tau^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\left\|A^k x\right\| \le \left\{ \frac{k}{r-k} \right\}^{\frac{k}{2r}} \left\{ \frac{r-k}{r} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \tau^{-\frac{k}{r}} \|x\|^2 + \tau^{1-\frac{k}{r}} \|A^r x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Минимизируя правую часть (17) по τ, получаем неравенство (16).

Замечание 2. В качестве оператора A в (13), действующего в $L_2(\mathbb{R})$, рассмотрим оператор дифференцирования $Ax(t) = i\frac{d}{dt}x(t)$. Отметим, что для соответствующего этому оператору разложения единицы имеет место соотношение [4, §89]

$$(E_t - E_s)x(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-u)} - e^{is(z-u)}}{i(z-u)} x(z)\, dz, \quad s,t \in \mathbb{R},\ s < t. \tag{18}$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}}, \quad t \in \mathbb{R}$. Учитывая (18), нетрудно проверить, что для любого $z > 0$

$$V_{r,k,k+1/2}(f_\varepsilon, z) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{1+u^{2r}} e^{-\varepsilon\left(\frac{u}{z}\right)^2} du \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{1+u^{2r}} du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, используя теорему 2, получаем, что для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^{(k)}(t) f_\varepsilon(t) dt \right| \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{1+u^{2r}} du \right)^{\frac{1}{2}} \beta_{r,k+1/2} \|x\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{r-k-1/2}{r}} \|A^r x\|\, L_2(\mathbb{R})^{\frac{k+1/2}{r}}. \tag{19}$$

Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{(k)(t)} f_\varepsilon(t)dt \to x^{(k)}(0)$, при $\varepsilon \to 0$, из (19) получаем неравенство (1), т. е. неравенство Л.В. Тайкова.

Замечание 3. Теперь рассмотрим оператор $Ax(u) = i\frac{d}{du}x(u)$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Разложение единицы E_t, $t \in \mathbb{R}$, для данного оператора A имеет вид

$$(E_t x)(u) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n<t}} \hat{x}(n)\, e^{int}, \ \ x \in L_2(\mathbb{T}), \tag{20}$$

где $\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}dt - n$ - й коэффициент Фурье функции x.

Пусть

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}, \ \ N \in \mathbb{N},$$

– ядро Дирихле. Как хорошо известно, для любой функции $x \in L_2(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_N(t)x(t)dt = S_N(x,0),$$

где $S_N(x,u)$ — частная сумма ряда Фурье функции x, и, следовательно,

$$(A^k x, D_N) = x^{(k)}(0). \tag{21}$$

Кроме того, как нетрудно проверить,

$$V_{r,k,k+1/2}(D_N, z) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{z^{2k+1}n^{2k}}{1+z^{2r}n^{2r}} \right\}^{1/2} \le \pi^{-\frac{1}{2}} V_{r,k}, \tag{22}$$

где $V_{r,k}$ определено соотношением (4). Применяя теорему 2 к функционалу, задаваемому фукцией D_N, и учитывая соотношения (22) и (21), получим

$$S_N(x^{(k)},0) \le \pi^{-\frac{1}{2}} V_{r,k}\beta_{r,k+1/2}\|x\|_{L_2(\mathbb{T})}^{\frac{r-k-1/2}{r}} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^{\frac{k+1/2}{r}}.$$

Устремляя в последнем неравенстве $N \to \infty$ и учитывая, что для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{T})$ при $k < r$

$$S_N(x^{(k)},0) \to x^{(k)}(0),$$

получим неравенство Шадрина (3).

1. *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования. – Мат. заметки. – 1967, Т. 4, №2. – С. 223 – 238.
2. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – К.: Наукова думка, 2003 – 590 с.

3. *Шадрин А. Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн – интерполяции для периодических классов W_2^m. – Мат. заметки. – 1990. – Т. 48, №4. – С. 132 – 139.
4. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Изд-во „Наука“, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966 – 544 с.
5. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З Г.* Функциональный анализ. – К.: Выща шк., 1990 - 600 с.

V.F. Babenko, R.O. Bilichenko

Inequalities of Taikov type for self-ajoint operators in Hilbert space.

The Taikov inequality, which estimate L_∞ – norm of intermediate derivative by L_2 – norms of a function and its higher derivative, is extended on arbitrary powers of self-adjoint operator acting in Hilbert space.

Keywords: *inequalities, self-ajoint operators, Hilbert space.*

В.Ф. Бабенко, Р.О. Біліченко

Нерівності типу Тайкова для самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.

Отримано узагальнення нерівності Тайкова, що оцінює L_∞ – норму проміжної похідної через L_2 – норми самої функції та її старшої похідної, на довільні степені самоспряженого оператора A, діючого в гільбертовому просторі.

Ключові слова: *нерівності, самоспряжені оператори, гільбертів простір.*

Днепропетровский национальный университет
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины
`babenko.vladislav@gmail.com`

Получено 10.12.10