УДК 517.95

Н. А. Бобылев, А. М. Красносельский,
М. А. Красносельский, А. В. Покровский

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ИДЕЯХ В НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛИЗЕ

В работе обращается внимание на новые подходы к трем различным задачам: глобальным теоремам о периодических колебаниях автономных систем, теоремам Фредгольма для квазилинейных уравнений, точкам бифуркации для квазивариационных задач. Эти задачи в последние месяцы интенсивно обсуждались в Институте проблем управления.

1. Вращение векторных полей и нелокальные задачи о периодических режимах в автономных системах. Хорошо известно, что задачи о вынужденных колебаниях, как правило, существенно проще задач о периодических решениях автономных систем дифференциальных уравнений. Это объясняется обширным арсеналом возможностей сведения задач о вынужденных колебаниях к задачам о неподвижных точках соответствующих операторов. Для задач о периодических решениях автономных систем построение аналогичных операторов существенно сложнее и требует, как правило, некоторой предварительной информации о локализации искомого периодического решения. Если такая локализация есть, то можно перейти, как это часто делают, к задаче о неподвижных точках отображения последования или использовать метод функционализации параметра, после чего применимы те же, по существу, топологические конструкции, которые используются при обнаружении вынужденных периодических колебаний. В частности, эффективен метод изучения вращений соответствующих векторных полей.

В первой части работы мы хотим обратить внимание на новые возможности применения вращения векторного поля к установлению нелокальных теорем существования периодических решений у автономных систем. Системы, которые удалось изучить с точностью до достаточно малых членов двухмерны. Поэтому ограничимся формулировкой двух типичных утверждений для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \psi(x, y). \tag{1}$$

Правые части будем считать непрерывными на R^2, причем через каждую точку плоскости проходит единственная траектория системы (1).

Пусть у системы (1) есть два цикла Γ_0 и Γ_1, которые ограничивают кольцеобразную область Ω, не содержащую состояний равновесия системы (1). Соединим одну из точек M_0 цикла Γ_0 с некоторой точкой M_1 цикла Γ_1, лежащей в области Ω гладкой кривой Π без самопересечений. Для простоты будем считать, что кривая Π в точке M_0 ортогональна кривой Γ_0 и в точке M_1 — кривой Γ_1. Пусть кривая Π запараметризована параметром $\tau \in [0, 1]$, так что $M(0) = M_0$, $M(1) = M_1$. Тогда в каждой точке $M(\tau) \in \Pi$ будет определена многозначная функция $\Theta(\tau)$ со значением — углом, измеряемым от вектора $\frac{dM}{d\tau}$ до вектора с компонентами, определяемыми правыми частями системы (1). Обозначим через $\theta(\tau)$ одну из непрерывных ветвей угловой функции $\Theta(\tau)$ и положим

$$\alpha = \frac{1}{\pi} |\theta(1) - \theta(0)|. \qquad (2)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha > 1$. Тогда в кольце Ω расположено не меньше чем $\alpha - 1$ цикл системы (1).

Теорему 1 можно дополнить различными утверждениями о количестве лежащих в области Ω устойчивых циклов. Например, всегда можно гарантировать существование не менее чем $[\frac{\alpha - 1}{2}]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа) орбитально устойчивых по Ляпунову, но не обязательно орбитально асимптотически устойчивых циклов. Если в области Ω лежит конечное число циклов системы (1), то не менее чем $[\frac{\alpha - 1}{2}]$ из них орбитально асимптотически устойчивы.

Если правые части системы (1) периодичны по каждой переменной с периодом 1, то система описывает движение на торе. Пусть такая система не имеет состояний равновесия. Обозначим через $\theta_1(\tau)$, $\theta_2(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ однозначные непрерывные ветви функций

$$\operatorname{Arctg} \frac{\varphi(\tau, 0)}{\psi(\tau, 0)}, \quad \operatorname{Arctg} \frac{\varphi(0, \tau)}{\psi(0, \tau)}$$

и положим

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} |\theta_1(1) - \theta_1(0)|, \quad \beta_2 = \frac{1}{\pi} |\theta_2(1) - \theta_2(0)|.$$

Теорема 2. Пусть для определенности $\beta_1 = 0$. Тогда система (1) имеет на торе не меньше чем β_2 циклов и не меньше чем $\frac{1}{2}\beta_2$ циклов, орбитально устойчивых по Ляпунову.

Доказательства приведенных теорем основаны на самых элементарных конструкциях, типа изобретенных Пуанкаре и Бендиксоном для изучения систем на плоскости. Было бы интересно найти аналоги приведенных теорем, справедливые для динамических систем более высокой размерности.

2. О теореме Фредгольма для квазилинейных уравнений. Пусть Ω — ограниченная замкнутая область в некотором R^N. Рассматривается уравнение

$$x(t) = A[x(t) + f(t, x(t))] + b(t) \qquad (4)$$

с линейным оператором A, который вполне непрерывен в $L_2 = L_2(\Omega, R^N)$ и непрерывен как оператор из L_2 в $L_\infty = L_\infty(\Omega, R^1)$. Функция $f(t, x)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и удовлетворяющей оценке

$$|f(t, x)| \leqslant \Psi(|x|) \quad (t \in \Omega, x \in R^1), \qquad (5)$$

где $\Psi(u)$ $(u \geqslant 0)$ положительна и не убывает, причем

$$\lim_{u \to \infty} u^{-1} \Psi(u) = 0. \qquad (6)$$

Функции $b(t)$ предполагаются измеримыми и ограниченными.

Если число 1 не является собственным значением оператора A, то разрешимость уравнения (4) вытекает из принципа Шаудера. Если число 1 — это собственное значение оператора A, но уравнение (4) линейно (т. е. $f(t, x) \equiv 0$), то разрешимость в силу теорем Фредгольма имеет место в том и только том случае, когда функция $b(t)$ ортогональна всем собственным функциям $g(t)$ сопряженного оператора A^*, отвечающих тому же собственному значению 1. Здесь обсуждается случай, когда число 1 — собственное значение оператора A, но $f(t, x) \not\equiv 0$.

Рассматриваемую задачу изучали S. Fucik, J. Mawhin, A. C. Lazer, S. R. Chang, C. P. Gupta, P. Drabek, S. Tersian, E. N. Danzer и другие авторы. Формулируемые ниже признаки носят другой характер.

Для простоты ограничимся случаем, когда собственное значение 1 оператора A простое, а отвечающая этому собственному значению собственная функция $e(t)$ ограничена. Собственное значение 1 оператора A назовем правильным, если у оператора A^* есть такая отвечающая тому же собственному значению собственная функция $g(t)$, что

$$\operatorname{mes}\{t : t \in \Omega,\ e(t)g(t) \leqslant 0\} = 0. \tag{7}$$

Положим

$$\chi(\delta) = \int\limits_{\{t: t\in\Omega,\ |e(t)| \leqslant \delta\}} |g(t)|\, dt. \tag{8}$$

Пусть справедлива одна из оценок

$$f(t, x) \operatorname{sign} x \geqslant \varphi(t\,|x|) \quad (t \in \Omega,\ |x| \geqslant u_0), \tag{9}$$

$$f(t, x) \operatorname{sign} x \leqslant -\varphi(t, |x|) \quad (t \in \Omega,\ |x| \geqslant u_0), \tag{10}$$

где u_0 — некоторое положительное число, функция $\varphi(t, u)$ $(t \in \Omega,\ u \geqslant u_0)$ неотрицательна и не возрастает, причем $\varphi(t, u)$ строго положительна при всех $u \geqslant u_0$ и значениях t из некоторого множества $\Omega_0 \subset \Omega$ ненулевой меры.

Теорема 3. Пусть 1 — правильное собственное значение оператора A, причем функция (8) равна нулю при малых $\delta > 0$. Тогда из разрешимости в L_2 линейного уравнения

$$x(t) = Ax(t) + b(t) \tag{11}$$

вытекает разрешимость в L_∞ нелинейного уравнения (4).

Теорема 4. Пусть 1 — правильное собственное значение оператора A, причем функция (8) положительна при всех $\delta > 0$. Пусть при любом $R > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int\limits_{\Omega} |g(t)|\, \varphi[t, u_0 + u\,|e(t)|]\, dt}{\chi[u^{-1}R\Psi(Ru)] \cdot \Psi[R\Psi(Ru)]} = \infty. \tag{12}$$

Тогда из разрешимости в L_2 линейного уравнения (11) вытекает разрешимость в L_∞ нелинейного уравнения (4).

Применения теорем 3 и 4 к конкретным задачам очевидны. Если оператор A самосопряжен или нормален, то его простое собственное значение 1, как правило, правильное (достаточно положить $g(t) = e(t)$). Если оператор A положителен относительно конуса K неотрицательных функций, то в весьма общих условиях (в силу теорем Ентча, М. Г. Крейна и других авторов) число 1 является правильным собственным значением, если оно является спектральным радиусом оператора A — здесь уже не играет роли самосопряженность или нормальность оператора A.

Наибольшие трудности связаны с проверкой условия (12). Однако во многих случаях здесь возможны существенные упрощения. Пусть, например,

$$\varphi(t, u) \equiv \varphi(u), \quad \Psi(u) = c(1 + u^{\beta}) \quad (t \in \Omega,\ u \geqslant 0),$$

где $\beta \in [0, 1)$, и

$$c_1\delta^\alpha \leqslant \chi(\delta) \leqslant c_2\delta^\alpha \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0).$$

Тогда условие (12) заведомо выполнено при $\alpha > \beta(1-\beta)^{-1}$ и $\beta \neq 0$, если

$$\lim_{u\to\infty} u^{\alpha-\beta-\alpha\beta}\varphi(u) = \infty,$$

а при $\beta = 0$, если

$$\int_a^\infty u^{\alpha-1}\varphi(u)du = \infty \quad (a > 0).$$

Последние признаки легко проверяются, например, при изучении уравнений вида (4), возникающих в задачах о вынужденных периодических колебаниях в системах управления.

Для доказательства теорем 3 и 4 используются леммы специального и, по-видимому, нового типа об априорных оценках норм $|\xi| + \|h(t)\|_{L_\infty}$ решений $\{\xi, h(t)\}$ системы двух неравенств вида

$$\xi \int_\Omega g(t)\varphi[t, \xi e(t) + h(t)]dt < 0, \ \|h(t)\|_{L_\infty} \leqslant \Psi(|\xi|),$$

где $e(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию (7), а функции $\varphi(t, u)$ и $\Psi(u)$ связаны некоторым условием, аналогичным условию (12).

3. Об одной новой схеме применения вариационных методов в задачах о точках бифуркации. Пусть банахово пространство E непрерывно и плотно вложено в гильбертово пространство H. Заданный на пространстве E и зависящий от скалярного параметра λ функционал $V(x, \lambda)$ будем называть $\{E, H\}$-правильным, если выполнены следующие условия.

а. Для каждой точки $x \in E$ приращение $V(x+h, \lambda) - V(x, \lambda)$ $(h \in E)$ допускает представление

$$V(x+h, \lambda) - V(x, \lambda) = (h, y)_H + \omega(x, h) \quad (h \in E), \tag{13}$$

где равномерно относительно x из каждого ограниченного в E множества выполнено равенство

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{|\omega(x, h)|}{\|h\|_H} = 0.$$

Представление (13) определяет H-градиент

$$f(x; \lambda) = \operatorname{grad}_x V(x; \lambda) \overset{\text{def}}{=} y \tag{14}$$

функционала $V(x; \lambda)$.

б. Оператор (14) действует в E и равномерно относительно значений x и λ из любых ограниченных множеств дифференцируем по x. Ниже используется обозначение

$$f'_x(x; \lambda) = A(x; \lambda).$$

Рассмотрим уравнение

$$f(x; \lambda) = 0. \tag{15}$$

Допустим, что $f(0; \lambda) \equiv 0$. Тогда число λ_0 называется точкой бифуркации для уравнения (15), если найдется такая последовательность $\{x_n, \lambda_n\}$ $(x_n \neq 0)$, что

$$f(x_n; \lambda_n) = 0, \ \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E = 0, \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda_0. \tag{16}$$

Из теоремы о неявной функции вытекает, что λ_0 может быть точкой бифуркации лишь в случае, когда 0 является точкой спектра линейного оператора $A(0; \lambda_0)$.

Предположим, что число 0 — изолированная точка спектра оператора $A(0; \lambda_0)$ и одновременно собственное значение конечной кратности k, которому соответствует k-мерное подпространство $E(\lambda_0)$ собственных векторов. Обозначим через $P(\lambda_0)$ — оператор ортогонального проектирования в H на E_0; пусть оператор $P(\lambda_0)$ на E коммутирует с $A(0; \lambda_0)$. Каждый элемент $x \in E$ допускает представление

$$x = u + v, \quad u = P(\lambda_0)\, x. \tag{17}$$

Для изучения уравнения (15) при близких к λ_0 значениях параметра λ запишем его в виде системы

$$P(\lambda_0)\, f(u+v; \lambda) = 0, \quad [I - P(\lambda_0)]\, f(u+v; \lambda) = 0. \tag{18}$$

Второе из уравнений (18) при $\lambda = \lambda_0$ и $u = 0$ имеет решение $v = 0$, поэтому из теоремы о неявной функции (здесь используется стандартная схема А. М. Ляпунова построения уравнения разветвления) вытекает существование в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, $u = 0$ гладкого решения

$$v = R(u; \lambda) \quad (R(0; \lambda_0) = 0) \tag{19}$$

этого уравнения.

Построим определенную на конечномерном пространстве $E(\lambda_0)$ функцию

$$G(u; \lambda) = V[x + R(u; \lambda); \lambda]; \tag{20}$$

назовем ее информативной.

Теорема 5. Число λ_0 является точкой бифуркации уравнения (15), если и только если оно является точкой бифуркации уравнения

$$\operatorname{grad}_u G(u; \lambda) = 0 \quad (u \in E(\lambda_0)). \tag{21}$$

Теорема 5 позволяет исследовать принципиально более широкие классы задач, чем изучавшиеся ранее. Непосредственное применение теоремы 5 возможно лишь в редких случаях, поскольку фактическое построение информативной функции (20) возможно лишь в исключительных случаях. Однако теорема 5 в сочетании с различными утверждениями об инвариантах деформаций функций конечного числа переменных приводит к ряду вполне эффективных утверждений о точках бифуркации. Приведем два таких утверждения.

Из теории возмущений вытекает, что при близких к λ_0 значениях λ оператор $A(0; \lambda)$ имеет в окрестности нуля конечное число собственных значений суммарной кратности k. Сумму кратностей указанных собственных значений, которые отрицательны, обозначим через $k_-(\lambda)$, а которые положительны — через $k_+(\lambda)$.

Теорема 6. Пусть в каждой окрестности точки λ_0 найдутся такие λ_1 и λ_2, что $k_-(\lambda_1) = k$ и $k_+(\lambda_2) = k$. Тогда λ_0 — точка бифуркации для уравнения (15).

Теорема 7. Пусть в каждой окрестности точки λ_0 найдутся такие λ_1 и λ_2, что $k_-(k_1) + k_+(\lambda_1) = k_-(\lambda_2) + k_+(\lambda_2) = k$, но $k_-(\lambda_2) \neq k_-(\lambda_2)$. Тогда λ_0 — точка бифуркации для уравнения (15).

Теоремы 6 и 7 удается применить к анализу точек бифуркации экстремалей уравнений Эйлера одномерных и многомерных задач классического вариационного исчисления (без ограничений на рост лагранжианов и их производных). Они приводят к новым результатам в задачах о точках бифуркации решений квазилинейных эллиптических уравнений, интегральных уравнений Гаммерштейна и др.

Ин-т пробл. управления
АН СССР, Москва

Получено 23.09.87