

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ



С Е Р И Я

«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ:
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, КИБЕРНЕТИКА»

Том 2

А.А. КОВАЛЕВСКИЙ
И.И. СКРЫПНИК
А.Е. ШИШКОВ

**СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ**

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2010

УДК 517.9

Во втором томе серии «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика» представлены несколько направлений исследования сингулярных решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений. Изложены результаты о существовании и свойствах слабых и энтропийных решений для эллиптических уравнений второго порядка и некоторых классов уравнений четвертого порядка с L^1 -данными. Освещены вопросы об устранимости особенностей и асимптотическом поведении решений в окрестности множества сингулярности для общих дивергентных эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Дано описание локализованных и нелокализованных сингулярно обостряющихся граничных режимов для различных классов квазилинейных дивергентных параболических уравнений второго и высокого порядков.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и нелинейного анализа.

У другому томі серії «Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика» подано декілька напрямків дослідження сингулярних розв'язків нелінійних еліптичних і параболических рівнянь. Викладено результати про існування і властивості слабких і ентропійних розв'язків для еліптичних рівнянь другого порядку і деяких класів рівнянь четвертого порядку з L^1 -даними. Висвітлено питання про усунення особливостей і асимптотичну поведінку розв'язків в околі множини сингулярності для загальних дивергентних еліптичних і параболических рівнянь другого порядку. Дано опис локалізованих і нелокалізованих сингулярно загострених граничних режимів для різних класів квазілінійних дивергентних параболических рівнянь другого і високого порядків.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і нелінійного аналізу.

Редакционная коллегия серии:

Б.В. Базалий, И.Н. Гашененко, В.Я. Гутлянский,

А.М. Ковалев (ответственный редактор),

А.А. Ковалевский, В.А. Козловский, С.Я. Махно, В.И. Рязанов, А.Я. Савченко,

В.Ю. Скобцов (ответственный секретарь), А.Ф. Тедеев,

В.Н. Ткаченко, Н.С. Хапилова, Е.И. Харламова, А.Е. Шишков

Рецензенты:

академик НАН Украины Е.Я. Хруслов, доктор физ.-мат. наук М.А. Бородин

Утверждено к печати ученым советом

Института прикладной математики и механики НАН Украины

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы

Редактор *И.Л. Абрамюк*

ISBN 978-966-00-0 883-X

© Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

В монографии, предлагаемой Вашему вниманию, представлены результаты исследований авторов по актуальным направлениям современной теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Коротко эти направления можно обозначить так: исследование существования и свойств решений уравнений со слабо интегрируемыми и нерегулярными данными, изучение условий устранимости особенностей решений и исследование граничных режимов с сингулярным обострением. Объединяющая особенность указанных направлений состоит в том, что присущие им результаты и методы исследования в значительной степени отражают сингулярный характер решений рассматриваемых уравнений.

Первое направление включает изучение нелинейных уравнений дивергентного вида с L^1 -правыми частями и мерами в качестве правых частей. Исследования в этом направлении стали активно развиваться с конца 80-х годов прошлого столетия, и к настоящему времени в целом построена теория нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -данными или данными-мерами. В рамках этой теории введены понятия слабого, энтропийного и ренормализованного решений рассматриваемых уравнений, доказаны теоремы существования и единственности таких решений и описаны их свойства суммируемости. Среди исследователей, внесших существенный вклад в развитие данной теории, отметим, например, таких математиков, как Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, F. Murat, M. Pierre и J. L. Vázquez. В монографии изложению некоторых вопросов, изучаемых в пределах рассматриваемого направления, посвящена часть I, состоящая из глав 1 и 2. Основное содержание этой части составляют результаты А. А. Ковалевского. В главе 1, отведенной нелинейным эллиптическим уравнениям второго порядка с L^1 -данными, изложены результаты об условиях на правую часть уравнения, обеспечивающих предельную суммируемость энтропийного решения соответствующей задачи Дирихле, описано улучшение свойств суммируе-

мости энтропийного решения в зависимости от повышения интегрируемости правой части уравнения и детально представлены результаты о существовании и априорных свойствах энтропийных решений задачи Дирихле для уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -правыми частями. Глава 2 посвящена нелинейным эллиптическим уравнениям четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью и L^1 -данными. В ней рассмотрены понятия энтропийного и правильного энтропийного решений задачи Дирихле для указанных уравнений. Даны априорные оценки и изложены теоремы существования и единственности этих решений, а также описаны их свойства суммируемости. Рассмотрены и другие типы решений той же задачи.

Второе направление связано с изучением устранимости особенностей решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. Исследования в этом направлении активно развиваются, начиная с 60-х годов прошлого века. В рамках соответствующей теории получены точные условия устранимости особенностей решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений с коэффициентами из лебеговых классов и классов Като. Среди исследователей, внесших значительный вклад в развитие данного направления, отметим, например, таких математиков, как D. G. Aronson, H. Brézis, A. Friedman, S. Kamin, L. A. Peletier, В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, J. Serrin и L. Véron. Изложению некоторых аспектов, изучаемых в пределах рассматриваемого направления, в монографии посвящена часть II, состоящая из глав 3–5. Основное содержание этой части – результаты В. Лискевича, И. И. Скрыпника и И. В. Скрыпника. В главе 3 описаны точные условия устранимости изолированных особенностей и особенностей на многообразиях решений квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из лебеговых классов. В главе 4 даны точные условия устранимости изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с коэффициентами из лебеговых классов. Наконец, в главе 5 рассмотрены квазилинейные эллиптические уравнения с коэффициентами из классов Като. Здесь дано доказательство неравенства Харнака для неотрицательных решений и описаны точные условия устранимости изолированных особенностей решений рассматриваемых уравнений.

Третье направление представляет исследования асимптотических свойств решений параболических уравнений с сингулярно обостряющимися в некоторый момент времени граничными данными. Эти исследования, инициированные различными новыми физико-математическими моделями, в частности, моделями, связанными с проблемами управле-

мого термоядерного синтеза, активно развиваются с начала 60-х годов двадцатого столетия. Впервые эффект пространственной локализации множества интенсификации (blow-up-множества) решения или, иначе говоря, локализации сингулярного граничного режима, был обнаружен А. А. Самарским и И. М. Соболев (1963 г.) для модельного квазилинейного уравнения теплопроводности. В дальнейшем для различных классов модельных параболических уравнений, допускающих применение метода суб- и супер-решений, условия локализации и нелокализации граничных режимов, а также различные оценки поведения решений в окрестности времени обострения граничного режима были установлены в работах А. А. Самарского, С. П. Курдюмова, В. А. Галактионова, В. Н. Gilding, М. А. Herrero, С. Cortazar, М. Elgueta и других математиков. В конце 90-х годов прошлого века А. Е. Шишковым был разработан альтернативный метод исследования сингулярных граничных режимов для общих квазилинейных параболических уравнений второго порядка, не связанный с барьерной техникой, а являющийся некоторой трансформацией метода локальных энергетических оценок, использовавшегося ранее для исследования носителей вырождающихся параболических уравнений. В монографии изложению методов и результатов, принадлежащих рассматриваемому направлению, посвящена часть III, состоящая из глав 6–9. Основное содержание этой части составляют результаты А. Е. Шишкова. В главе 6 на основе упомянутого трансформированного метода локальных энергетических оценок описаны точные достаточные условия локализации сингулярных граничных режимов для общих дивергентных "дважды" нелинейных параболических уравнений второго порядка типа медленной, быстрой и "нейтральной" диффузии. Отметим, что в последние годы А. Е. Шишковым и В. А. Галактионовым метод локальных интегральных оценок был развит применительно к общим квазилинейным параболическим уравнениям произвольного порядка. В главе 7 дано модифицированное доказательство достаточных условий локализации сингулярных режимов для разных классов уравнений высокого порядка, а в главе 8 изучены нелокализованные режимы и установлены точные оценки сверху для скорости распространения волны сингулярности. Наконец, глава 9 содержит технические элементы доказательств результатов глав 6–8.

Донецк, июнь 2010 г.

Авторы

ЧАСТЬ I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

С L^1 -ДАНЫМИ

ГЛАВА 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С L^1 -ДАННЫМИ

1.1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$. Пусть $c_1, c_2 > 0$, $g \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $g \geq 0$ в Ω , и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + g(x), \quad (1.1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 |\xi|^p. \quad (1.1.2)$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (1.1.3)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.1.5)$$

Изучению существования и свойств решений этой задачи и близких к ней задач для уравнений второго порядка с правыми частями из пространства $L^1(\Omega)$ или класса мер Радона посвящена довольно обширная литература (см., например, [4, 5, 13, 18, 19, 22–28, 35, 65, 68, 69, 71–73, 97, 105, 107, 108, 111]). Были введены и исследованы такие понятия решений рассматриваемых задач, как слабое, энтропийное и ренормализованное решения.

Понятие слабого решения (решения из $\overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$ в смысле интегрального тождества для гладких функций) является естественным аналогом обычного понятия обобщенного решения, которое в случае L^1 -данных, вообще говоря, не имеет смысла. Теоремы существования слабых решений получены, например, в [23–26]. Отметим, что слабое решение существует, вообще говоря, не для всех допустимых значений параметра p . Подробнее об этом будет сказано ниже. Кроме того, в случае $p = 2$ существует пример неединственности слабого решения. По этому поводу см. замечание 8 в [23].

Эффективный подход к исследованию разрешимости задач с L^1 -данными, подобных задаче (1.1.4), (1.1.5), предложен в работе [13]. Он связан с введением понятия энтропийного решения таких задач. Вообще говоря, энтропийные решения являются элементами существенно более широкого функционального множества по сравнению с соответствующим энергетическим соболевским пространством. Оказывается, что энтропийное решение, например, задачи (1.1.4), (1.1.5), существует без дополнительных ограничений на параметр p и оно единственно.

Применительно к задаче (1.1.4), (1.1.5) суть подхода, предложенного в [13], состоит в следующем. Наряду с исходной задачей рассматривается последовательность аналогичных задач с данными $f_l \in C_0^\infty(\Omega)$, аппроксимирующими функцию f в $L^1(\Omega)$, и исследуется соответствующая последовательность обобщенных решений $u_l \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ этих задач. При этом

(i) устанавливаются некоторые равномерные относительно l оценки для мер множеств $\{|u_l| \geq k\}$ и $\{|\nabla u_l| \geq k\}$, $k > 0$;

(ii) с использованием этих оценок доказывается, что для некоторой возрастающей последовательности $\{l_j\} \subset \mathbb{N}$ последовательности $\{u_{l_j}\}$ и $\{D_i u_{l_j}\}$, $i = 1, \dots, n$, сходятся почти всюду на Ω соответственно к некоторым функциям $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$;

(iii) используя установленные сходимости, осуществляется предельный переход в интегральном тождестве, соответствующем аппроксимирующим задачам.

В результате получается семейство интегральных неравенств, определяющее функцию u как энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Заметим, что функции v_i однозначно определяются по функции u и являются своего рода производными u .

Кроме работы [13] вопросы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -данными или мерами в качестве данных изучались, например, в [27, 111].

Что касается ренормализованных решений, то, коротко говоря, они являются элементами того же функционального множества, что и энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны. Это верно, например, по отношению к задаче (1.1.4), (1.1.5). Исследованию существования и единственности ренормализованных решений посвящены, например, работы [19, 35, 97, 108].

Приведем ряд используемых в дальнейшем определений и результатов относительно задачи (1.1.4), (1.1.5) и связанных с нею классов функций.

Определение 1.1.1. Слабым решением задачи (1.1.4), (1.1.5) будем называть функцию $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$ такую, что выполняются условия:

- (i) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

По поводу этого определения см., например, [23, 24]. Если $p > 2 - 1/n$, то согласно теореме 1 из [24] существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого λ , $1 \leq \lambda < n(p - 1)/(n - 1)$.

Далее, пусть для любого $k > 0$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Известно, что если $\lambda \geq 1$, $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (1.1.6)$$

Через $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.

Очевидно, что

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathring{T}^{1,p}(\Omega). \quad (1.1.7)$$

Вместе с тем множество $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ содержит функции, не принадлежащие $L^1(\Omega)$. Например, если $\lambda \geq n$, $y \in \Omega$, $\rho > 0$, B_1 и B_2 – замкнутые шары

в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке y и радиусами ρ и $\rho/2$ соответственно, $B_1 \subset \Omega$, $\varphi \in C^1(\Omega)$, причем $0 \leq \varphi \leq 1$ в Ω , $\varphi = 1$ в B_2 , $\varphi = 0$ в $\Omega \setminus B_1$ и w – функция на Ω такая, что

$$w(x) = \begin{cases} |x - y|^{-\lambda} \varphi(x), & \text{если } x \in \Omega \setminus \{y\}, \\ 0, & \text{если } x = y, \end{cases}$$

то $w \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega) \setminus L^1(\Omega)$. Следовательно, множество $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ шире пространства $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.

Заметим, что элементы множества $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ являются измеримыми функциями. Действительно, если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, то измеримость функции u следует из измеримости функций $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и поточечной сходимости последовательности $\{T_k(u)\}$ к u .

Множество функций $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ введено в работе [13].

Для произвольных $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим

$$k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leq l\}.$$

Определение 1.1.2. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x). \quad (1.1.8)$$

Предложение 1.1.1. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $k > 0$

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{n. в. на } \Omega. \quad (1.1.9)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k > 0$. Покажем, что

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \quad \text{п. в. на } \{|u| < k\}. \quad (1.1.10)$$

Положим $l_0 = \min\{l \in \mathbb{N} : k \leq l\}$. Так как $T_{l_0}(u) = T_k(u)$ на $\{|u| < k\}$, то существует множество $E_{l_0} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \{|u| < k\} \setminus E_{l_0}$

$$D_i T_{l_0}(u)(x) = D_i T_k(u)(x). \quad (1.1.11)$$

Если $l_0 = 1$, то для любого $x \in \{|u| < k\}$ имеем $k(u, x) = l_0$. Тогда из (1.1.11) выводим (1.1.10). Пусть теперь $l_0 > 1$. Легко видеть, что если $l \in \mathbb{N}$, $l < l_0$, то существует множество $E_l \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \{|u| \leq l\} \setminus E_l$

$$D_i T_l(u)(x) = D_i T_k(u)(x). \quad (1.1.12)$$

Пусть $x \in \{|u| < k\} \setminus \bigcup_{l=1}^{l_0} E_l$. Положим $l_1 = k(u, x)$. Имеем $l_1 \leq l_0$. Если $l_1 < l_0$, то $x \in \{|u| \leq l_1\} \setminus E_{l_1}$ и в силу (1.1.12) $D_i T_k(u)(x) = \delta_i u(x)$. Если же $l_1 = l_0$, то значения функций $D_i T_k(u)$ и $\delta_i u$ в точке x равны в силу (1.1.11). Таким образом, можно заключить, что (1.1.10) верно и в случае $l_0 > 1$.

Ясно, что если $\text{meas}\{|u| \geq k\} > 0$, то $D_i T_k(u) = 0$ п. в. на $\{|u| \geq k\}$. Отсюда и из (1.1.10) вытекает (1.1.9). $\square$

Отметим, что предложение 1.1.1 установлено в статье [69]. Кроме того, заметим, что в [13] равенство вида (1.1.9) служит для определения "градиента" элементов некоторого функционального класса, содержащего множество $\mathring{T}^{1,p}(\Omega)$. Непосредственное определение функций $\delta_i u$ для $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ формулой (1.1.8) дано в [69].

Из (1.1.6), (1.1.7) и предложения 1.1.1 следует, что если $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω . Более того, из (1.1.6) и предложения 1.1.1 вытекает, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω .

Наконец, из предложения 1.1.1 следует, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_k(u) \rightarrow \delta_i u$ п. в. на Ω . Отсюда заключаем, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, то функции $\delta_i u$, $i = 1, \dots, n$, измеримы.

Определение 1.1.3. Если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.

Для любого $\lambda \in [1, n)$ положим $\lambda^* = n\lambda/(n - \lambda)$.

Напомним (см., например, [48, гл. 7]), что если $\lambda \in [1, n)$, то $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $c_{n,\lambda}$, зависящая только от n и λ , такая, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{\lambda^*} dx \right)^{1/\lambda^*} \leq c_{n,\lambda} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda}. \quad (1.1.13)$$

Предложение 1.1.2. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$ и $|\delta u| \in L^{\lambda}(\Omega)$. Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u = \delta_i u$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 1.1.1, (1.1.13) и условий данного предложения для последовательности функций $T_k(u)$,

$k \in \mathbb{N}$, имеем: $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$, $T_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$ и $D_i T_k(u) \rightarrow \delta_i u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = \delta_i u$ п. в. на Ω , и можно заключить, что $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_k(u) \rightarrow u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. $\square$

Этот простой результат полезен при исследовании свойств суммируемости решений задач вида (1.1.4), (1.1.5). Он был сформулирован и использовался, например в [65, 69, 71, 73].

Предложение 1.1.3. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда

- (i) $u - v \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$;
- (ii) если $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, то $D_i T_k(u - v) = \delta_i u - \delta_i v$ п. в. на $\{|u - v| < k\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем

$$|v(x)| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.1.14)$$

Зафиксируем произвольное $k > 0$, и пусть $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$u_j = T_j(u) - v. \quad (1.1.15)$$

Пусть теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k_1$, и $x \in \{|u_j| < k\} \setminus E$. Тогда

$$|T_j(u(x)) - v(x)| < k. \quad (1.1.16)$$

Если $|u(x)| > j$, то в силу (1.1.14) и (1.1.16) имеем $j = |T_j(u(x))| \leq |T_j(u(x)) - v(x)| + |v(x)| < k_1$. Следовательно, $j < k_1$, что противоречит первоначальному предположению относительно j . Значит, $|u(x)| \leq j$. Тогда из (1.1.16) вытекает, что $|u(x) - v(x)| < k$. Отсюда и из (1.1.14) следует неравенство $|u(x)| < k_1$. Тогда ввиду (1.1.15) $u_j(x) = T_j(u(x)) - v(x) = u(x) - v(x) = T_{k_1}(u(x)) - v(x)$. Таким образом, $u_j = T_{k_1}(u) - v$ п. в. на $\{|u_j| < k\}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i u_j = D_i T_{k_1}(u) - D_i v \quad \text{п. в. на } \{|u_j| < k\}.$$

Теперь можно заключить, что последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из того, что $T_k(u_j) \rightarrow T_k(u - v)$ сильно в $L^p(\Omega)$, выводим включение $T_k(u - v) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу произвольности $k > 0$ получаем $u - v \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Далее, пусть $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу (1.1.14) имеем

$$\{|u - v| < k\} \setminus E \subset \{|u| < k_1\}. \quad (1.1.17)$$

Тогда $T_k(u - v) = T_{k_1}(u) - v$ п.в. на $\{|u - v| < k\}$. Следовательно,

$$D_i T_k(u - v) = D_i T_{k_1}(u) - D_i v \text{ п.в. на } \{|u - v| < k\}. \quad (1.1.18)$$

Кроме того, в силу предложения 1.1.1 и (1.1.17) имеем $D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u$ п.в. на $\{|u - v| < k\}$. Отсюда и из (1.1.18) выводим, что $D_i T_k(u - v) = \delta_i u - \delta_i v$ п.в. на $\{|u - v| < k\}$, и тем самым справедливость утверждения (ii) установлена. $\square$

Изложенный результат взят из работы [73].

Далее, заметим, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, то функция $a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi)$ суммируема на множестве $\{|u - \varphi| < k\}$. Это вытекает из (1.1.1) и предложения 1.1.1.

Определение 1.1.4. Энтропийным решением задачи (1.1.4), (1.1.5) будем называть функцию $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ такую, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\{|u - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (1.1.19)$$

Заметим, что если u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), то неравенство (1.1.19) справедливо для любых $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$.

Понятие энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) введено и детально изучено в [13].

В силу сделанных выше предположений относительно функций a_i и теоремы 6.1 работы [13] справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1.1. *Существует единственное энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5).*

Отметим, что условие (1.1.3) важно не только для доказательства единственности, но и для установления самого существования энтропийного решения.

Заметим еще, что в результате применения подхода, предложенного в [13], энтропийное решение u задачи (1.1.4), (1.1.5) получается как поточечный предел последовательности решений $u_l \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ задач Дирихле

с гладкими данными f_l , аппроксимирующими функцию f в $L^1(\Omega)$. Некоторые дополнительные построения позволяют показать, что для любого $k > 0$ $T_k(u_l) \rightarrow T_k(u)$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$. Это, в свою очередь, приводит к заключению, что для любых $\varphi \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо равенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx.$$

Указанный факт был отмечен в [13].

Из следствия 4.3 работы [13] и предложения 1.1.2 вытекает такой результат.

Теорема 1.1.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), и пусть $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Тогда u – слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5).

Положим

$$q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad r = \frac{n(p-1)}{n-1}.$$

Теорема 1.1.3. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда для любого $\lambda \in (0, q)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и для любого $\lambda \in (0, r)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$.

Эта теорема является следствием лемм 3.1, 4.1 и 4.2 статьи [13].

Из теорем 1.1.3 и 1.1.2 и предложения 1.1.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1.4. Пусть $p > 2 - 1/n$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда u – слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), и для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u \in \overset{\circ}{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Наконец, следствием теорем 1.1.1 и 1.1.4 является такой результат.

Теорема 1.1.5. Пусть $p > 2 - 1/n$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\overset{\circ}{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [1, r)$.

Этот результат уже упоминался выше со ссылкой на работу [24].

Замечание 1.1.1. Если $p \leq 2 - 1/n$, то задача (1.1.4), (1.1.5), вообще говоря, может не иметь слабых решений. По этому поводу см. пример в [13]. Построение примеров такого типа связано с использованием известного принципа равномерной ограниченности [40, гл. 2].

Замечание 1.1.2. Слабые решения задачи (1.1.4), (1.1.5), вообще говоря, могут не принадлежать пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$. Это обстоятельство отмечено еще в [24], хотя соответствующие примеры там и не были указаны. Некоторые примеры, показывающие, что энтропийное и слабое решения задачи (1.1.4), (1.1.5) могут не принадлежать $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$, даны в [68, 69]. Эти примеры будут рассмотрены в разделах 1.3 и 1.4.

В связи с последним замечанием возникает вопрос о дополнительных условиях на функцию f , обеспечивающих принадлежность рассматриваемых типов решений задачи (1.1.4), (1.1.5) предельному пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$. Так, в статье [24] существование слабого решения задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащего пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$, доказано при условиях $p > 2 - 1/n$ и $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$. В работах [65, 68, 69, 71] это сделано, причем исходя из других соображений, при более слабых предположениях относительно p и f . Изложение результатов этих работ составляет существенную часть содержания данной главы (разделы 1.2–1.5).

Кроме того, в главе детально представлены результаты статей [72, 73] о существовании и априорных свойствах энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -правыми частями (разделы 1.6–1.8). Основное структурное отличие таких уравнений от уравнения (1.1.4) состоит в том, что их коэффициенты $\bar{a}_i$ зависят ещё и от переменной, соответствующей неизвестной функции, и вместо условия (1.1.2) предполагается выполненным условие вида

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i(x, s, \xi) \xi_i \geq \frac{\bar{c} |\xi|^p}{(1 + |s|)^{p_1}}, \quad p_1 > 0.$$

Среди более ранних работ, посвященных изучению существования решений эллиптических уравнений с вырождающейся коэрцитивностью, отметим, например, статьи [4, 22]. В частности, в [4] доказана теорема существования энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными. Заметим, что в отношении условий роста по s коэффициентов рассматриваемых уравнений в работе [72] получен более общий результат по сравнению с указанной теоремой.

Дадим более подробное описание структуры главы. В разделе 1.2 излагаются результаты работы [71] об общих условиях принадлежности решений задачи (1.1.4), (1.1.5) предельным пространствам $L^q(\Omega)$ и $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$. Указанные условия формулируются в терминах суммируемости

на $[1, +\infty)$ некоторых числовых функций, зависящих от f . Основным структурным компонентом этих функций является функция, значения которой равны интегралам функции $|f|$ по множествам $\{|f| \geq s\}$, $s \geq 0$.

В разделах 1.3 и 1.4 представлены результаты, являющиеся следствиями основных теорем раздела 1.2. В разделе 1.3 рассмотрены случаи принадлежности правой части уравнения (1.1.4) логарифмическим классам, а в разделе 1.4 изложены некоторые интегрально-логарифмические условия на функцию f , гарантирующие принадлежность энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) пространствам $L^q(\Omega)$ и $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$. Кроме того, в разделе 1.4 на примере показана определенная точность одного из этих условий. Прямое доказательство основных результатов разделов 1.3 и 1.4 ранее было получено в статьях [65, 68, 69].

В разделе 1.5 рассмотрен случай принадлежности функции f пространству $L^m(\Omega)$ с m , удовлетворяющим неравенству $1 < m < p^*/(p^* - 1)$, и описана зависимость свойств суммируемости энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) от параметра m . Основные результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в работе [65]. Отметим, что при указанном условии на f и $p > 2 - 1/n$ в более ранней статье [24] было установлено существование слабого решения задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащего соболевскому пространству с той же зависимостью от m , что описана в разделе 1.5 для энтропийного и слабого решений рассматриваемой задачи при более общем условии $m^*(p - 1) \geq 1$.

В разделе 1.6 представлены результаты о сходимости функций из пространства $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$, тесно связанные с упомянутым выше подходом к исследованию разрешимости задачи Дирихле с L^1 -данными, предложенным в [13]. Реализация этого подхода в различных случаях, зависящих от условий на коэффициенты уравнений, приводят к основным ситуациям, обобщением которых являются предлагаемые результаты. Изложенные утверждения, с одной стороны, имеют определенный самостоятельный интерес, а с другой – позволяют упростить доказательство существования решений нелинейных задач с L^1 -данными в рамках подхода работы [13]. Приложение результатов, представленных в разделе 1.6, к доказательству существования энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью, нулевым младшим коэффициентом и L^1 -правой частью дано в разделе 1.7. В целом в разделах 1.6 и 1.7 изложен основной материал статьи [72].

Наконец, в разделе 1.8 рассматривается задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения общего дивергентного вида второго порядка с L^1 -правой частью. Предполагается, что старшие коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям, включающим вырождающуюся коэрцитивность. Основные результаты раздела касаются априорных

свойств суммируемости и оценок энтропийных решений рассматриваемой задачи. При этом никакие ограничения на рост и знак младшего коэффициента уравнения не требуются. Определенные условия на рост младшего коэффициента по переменным, соответствующим неизвестной функции и её градиенту, предполагаются лишь в формулируемой в конце раздела теореме существования энтропийного решения. Всё содержание раздела 1.8 – это основной материал статьи [73]. Заметим, что налагаемые в цитировавшихся выше работах [4, 5, 13–18, 19, 22–25, 27, 28, 35, 65, 68, 69, 71, 72, 97, 105, 107, 108, 111] и других исследованиях условия на коэффициенты уравнений не охватывают общности предположений статьи [73]. Более того, насколько известно, основные результаты [73] являются новыми не только в данной общей постановке, но и в частных случаях, рассматривавшихся ранее.

Для большей полноты изложения вводный раздел главы завершим рассмотрением упомянутого выше понятия ренормализованного решения задачи (1.1.4), (1.1.5).

Определение 1.1.5. Ренормализованным решением задачи (1.1.4), (1.1.5) будем называть функцию $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ такую, что

$$(i) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_{\{m \leq |u| \leq 2m\}} |\delta u|^p dx = 0;$$

$$(ii) \quad \text{для любых } h \in C_0^1(\mathbb{R}) \text{ и } \varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\ + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx = \int_{\Omega} f h(u) \varphi dx. \end{aligned}$$

По поводу этого определения см., например, [97].

Теорема 1.1.6. Функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ есть ренормализованное решение задачи (1.1.4), (1.1.5) тогда и только тогда, когда эта функция есть энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5).

Доказательство. Пусть u – ренормализованное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Очевидно, что $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$. Зафиксируем произвольные $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$. В силу предложений 1.1.3 и 1.1.1 имеем

$$T_k(u - \varphi) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad (1.1.20)$$

и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i T_k(u - \varphi) = (\delta_i u - \delta_i \varphi) \cdot 1_{\{|u - \varphi| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (1.1.21)$$

Возьмем функцию $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \sigma \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $\sigma(s) = 1$, если $|s| \leq 1$, и $\sigma(s) = 0$, если $|s| \geq 2$. Пусть теперь для любого $m \in \mathbb{N}$ σ_m — функция на $\mathbb{R}$ такая, что $\sigma_m(s) = \sigma(s/m)$, $s \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\{\sigma_m\} \subset C_0^1(\mathbb{R})$. Учитывая это и (1.1.20), в силу условия (ii) определения 1.1.5 для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} \sigma_m(u) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} T_k(u - \varphi) \sigma'_m(u) dx \\ & \quad = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) \sigma_m(u) dx. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Положим $\bar{\sigma} = \max_{[-2,2]} |\sigma'|$. Используя (1.1.1) и свойства функции σ , устанавливаем, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} T_k(u - \varphi) \sigma'_m(u) dx \right| \\ & \quad \leq \frac{\bar{\sigma} k}{m} (c_1 + 1) \int_{\{m \leq |u| \leq 2m\}} |\delta u|^p dx + \frac{\bar{\sigma} k}{m} \int_{\Omega} g^{p/(p-1)} dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (i) определения 1.1.5 вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} T_k(u - \varphi) \sigma'_m(u) dx = 0. \quad (1.1.23)$$

Кроме того, учитывая, что $\sigma_m(u) \rightarrow 1$ на Ω , получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} \sigma_m(u) dx \\ & \quad = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx, \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) \sigma_m(u) dx = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (1.1.25)$$

Из (1.1.21)–(1.1.25) выводим, что

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (1.1.26)$$

Следовательно, согласно определению 1.1.4 u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5).

Обратно, пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Имеем $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$. Пусть $m, k > 0$. Поскольку $T_m(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу (1.1.19) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-T_m(u)|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)(\delta_i u - D_i T_m(u)) \right\} dx \\ \leq \int_{\Omega} f T_k(u - T_m(u)) dx. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Заметим, что

$$\{|u - T_m(u)| < k\} = \{|u| < m\} \cup \{m \leq |u| < m + k\}. \quad (1.1.28)$$

Обозначим через $I_{m,k}$ интеграл в левой части неравенства (1.1.27). Используя (1.1.28), предложение 1.1.1 и (1.1.2), получаем

$$I_{m,k} = \int_{\{m \leq |u| < m+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} dx \geq c_2 \int_{\{m \leq |u| < m+k\}} |\delta u|^p dx.$$

Отсюда и из (1.1.27) вытекает, что

$$c_2 \int_{\{m \leq |u| < m+k\}} |\delta u|^p dx \leq k \int_{\{|u|>m\}} |f| dx. \quad (1.1.29)$$

Отметим, что по существу проделанный вывод неравенства (1.1.29) повторяет доказательство следствия 3.4 из работы [13].

Полученный результат и тот факт, что $\text{meas}\{|u| > m\} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, позволяют заключить, что выполняется условие (i) определения 1.1.5.

Далее, пусть $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ясно, что существуют положительные постоянные M и M_1 такие, что $\text{supp } h \subset [-M, M]$ и для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем $|h(s)| \leq M_1$. Зафиксируем число $k > M_1 \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$, и пусть $m \in \mathbb{N}$, $m > M$. Положим

$$\varphi_m = T_m(u) - h(T_m(u))\varphi. \quad (1.1.30)$$

Имеем $\varphi_m \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\delta_i \varphi_m = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < m\}} - \varphi h'(u) \delta_i u - h(u) D_i \varphi \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (1.1.31)$$

Поскольку u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), в силу (1.1.19)

$$\int_{\{|u - \varphi_m| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) (\delta_i u - \delta_i \varphi_m) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi_m) dx. \quad (1.1.32)$$

Используя (1.1.31) и (1.1.2), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi_m| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\ & \quad + \int_{\{|u - \varphi_m| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx \\ & \leq \int_{\{|u - \varphi_m| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) (\delta_i u - \delta_i \varphi_m) \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

Левую часть этого неравенства обозначим через I_m . Заметим, что в силу включения $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Учитывая это и исходное неравенство для числа k , получаем

$$\{|u| < m\} \setminus E \subset \{|u - \varphi_m| < k\}. \quad (1.1.34)$$

Ясно также, что $h(s) = 0$ и $h'(s) = 0$, если $|s| \geq m$. Тогда, используя (1.1.34), находим, что

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{\{|u| < m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\ & \quad + \int_{\{|u| < m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.1.30), (1.1.32) и (1.1.33) выводим, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > M$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|u|<m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\
& + \int_{\{|u|<m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx \\
& \leq \int_{\Omega} f T_k(u - T_m(u) + h(u) \varphi) dx.
\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx \leq \int_{\Omega} f h(u) \varphi dx.
\end{aligned}$$

Очевидно, что такое же неравенство верно и для функции $-\varphi$. Поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} h(u) dx \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) \varphi dx = \int_{\Omega} f h(u) \varphi dx.
\end{aligned}$$

Значит, выполняется условие (ii) определения 1.1.5.

Теперь можно заключить, что u – ренормализованное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). $\square$

Замечание 1.1.3. Из доказательства теоремы 1.1.6 следует, что если u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), то для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо равенство (1.1.26). Отсюда легко вывести, что это равенство верно для любых $\varphi \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$. Таким образом, получаем другое, отличное от упомянутого после формулировки теоремы 1.1.1, обоснование того, что для энтропийного решения u задачи (1.1.4), (1.1.5) при любых $\varphi \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо равенство (1.1.26).

1.2. Общие условия предельной суммируемости решений

Сначала рассмотрим один общий результат о суммируемости функций с определенным поведением соответствующих функций распределения.

Лемма 1.2.1. Пусть v – измеримая функция на Ω , $\alpha > 0$, φ – неотрицательная невозрастающая измеримая функция на $[1, +\infty)$ и $k_0 \geq 1$. Предположим, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds < +\infty, \quad (1.2.1)$$

$$\forall k \geq k_0 \quad \text{meas}\{|v| \geq k\} \leq k^{-\alpha} \varphi(k). \quad (1.2.2)$$

Тогда $v \in L^\alpha(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq \ln k_0$, $N \in \mathbb{N}$, $N > k_1$, и $k \in \mathbb{N}$, $k_1 \leq k \leq N$. Используя неравенство $e^k \geq k_0$ и (1.2.2), получаем

$$\int_{\{e^k \leq |v| < e^{k+1}\}} |v|^\alpha dx \leq e^{(k+1)\alpha} \text{meas}\{|v| \geq e^k\} \leq e^\alpha \varphi(e^k). \quad (1.2.3)$$

Поскольку функция φ невозрастающая, для любого $s \in [e^{k-1}, e^k]$ имеем $\varphi(e^k)/e^k \leq \varphi(s)/s$. Отсюда

$$\varphi(e^k) \leq 2 \int_{e^{k-1}}^{e^k} \frac{\varphi(s)}{s} ds.$$

Из этого неравенства и (1.2.3) вытекает, что

$$\sum_{k=k_1}^N \int_{\{e^k \leq |v| < e^{k+1}\}} |v|^\alpha dx \leq 2e^\alpha \int_1^{e^N} \frac{\varphi(s)}{s} ds.$$

Тогда, учитывая (1.2.1), получаем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{e^k \leq |v| < e^{k+1}\}} |v|^\alpha dx < +\infty.$$

Следовательно, $v \in L^\alpha(\Omega)$. □

Далее, пусть $\tilde{f}$ – функция на $[0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [0, +\infty)$

$$\tilde{f}(s) = \int_{\{|f| \geq s\}} |f| dx.$$

Функция $\tilde{f}$ неотрицательна, невозрастающая и измерима.

В последующих выкладках этого раздела через c_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные константы, зависящие только от n, p , $\text{meas } \Omega$ и c_2 .

Сформулируем основную лемму об оценках энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) с участием функции $\tilde{f}$.

Лемма 1.2.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), $\gamma > 0$ и $k > 0$. Тогда

$$\int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx \leq c_3 [k^{\gamma p/(p-1)} + k\tilde{f}(k^\gamma)], \quad (1.2.4)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_4 k^{-q} [k^{\gamma p/(p-1)-1} + \tilde{f}(k^\gamma)]^{p^*/p}. \quad (1.2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 1.1.4 и неравенства (1.1.2) следует, что

$$c_2 \int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u) dx. \quad (1.2.6)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f T_k(u) dx &= \int_{\{|f| < k^\gamma\}} f T_k(u) dx + \int_{\{|f| \geq k^\gamma\}} f T_k(u) dx \\ &\leq k^\gamma \int_{\Omega} |T_k(u)| dx + k\tilde{f}(k^\gamma). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Поскольку $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, имеем $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу (1.1.13) и предложения 1.1.1

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq c_{n,p} \left(\int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.2.8)$$

Используя неравенство Гельдера, (1.2.8) и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} k^\gamma \int_{\Omega} |T_k(u)| dx &\leq k^\gamma (\text{meas } \Omega)^{(p^*-1)/p^*} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \\ &\leq c_{n,p} k^\gamma (\text{meas } \Omega)^{(p^*-1)/p^*} \left(\int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c_5 k^{\gamma p/(p-1)} + \frac{c_2}{p} \int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.2.6) и (1.2.7) выводим неравенство (1.2.4).

Далее, поскольку $|T_k(u)| = k$ на $\{|u| \geq k\}$, имеем

$$k^{p^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx.$$

Из этого неравенства, (1.2.8) и (1.2.4) следует, что

$$k^{p^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_4 [k^{\gamma p/(p-1)} + k \tilde{f}(k^\gamma)]^{p^*/p}.$$

Отсюда заключаем, что справедливо неравенство (1.2.5). $\square$

Перейдем к основным результатам раздела.

Теорема 1.2.1. Пусть

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{n/(n-p)} ds < +\infty, \quad (1.2.9)$$

и пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in L^q(\Omega)$.

Доказательство. Пусть φ – функция на $[1, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [1, +\infty)$

$$\varphi(s) = c_4 [s^{-p/(p-1)} + \tilde{f}(s)]^{n/(n-p)}.$$

Функция φ положительна, невозрастающая и измерима. Кроме того, вследствие (1.2.9) она удовлетворяет неравенству (1.2.1).

Положим

$$\gamma = \frac{p-1}{2p}. \quad (1.2.10)$$

В силу леммы 1.2.2 для любого $k \geq 1$ имеем

$$\text{meas}\{|u|^\gamma \geq k\} \leq k^{-q/\gamma} \varphi(k).$$

Тогда по лемме 1.2.1 $|u|^\gamma \in L^{q/\gamma}(\Omega)$. Следовательно, $u \in L^q(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.2.2. Пусть $p > 2 - 1/n$ и справедливо неравенство (1.2.9). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $L^q(\Omega)$.

Этот результат является следствием теорем 1.1.1, 1.1.4 и 1.2.1.

Теорема 1.2.3. Пусть

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{n/(n-1)} ds < +\infty, \quad (1.2.11)$$

и пусть u — энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $|\delta u| \in L^r(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число γ определено формулой (1.2.10), и пусть

$$\beta = \frac{(p-1)(n-p)}{p(2n-1)}.$$

Пусть ψ — функция на $[1, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [1, +\infty)$

$$\psi(s) = \int_{s-1}^s \tilde{f}(t) dt.$$

Функция ψ непрерывна на $[1, +\infty)$, и поскольку функция $\tilde{f}$ невозрастающая, для любого $s \geq 1$ имеем

$$\tilde{f}(s) \leq \psi(s) \leq \tilde{f}(s-1). \quad (1.2.12)$$

Пусть теперь ψ_1 — функция на $[1, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [1, +\infty)$

$$\psi_1(s) = s^{p(n-1)/(n-p)} [s^{-1/2} + \psi(s^\gamma)]^{-p/(n-p)}.$$

Ясно, что

$$\psi_1 \in C([1, +\infty)), \quad (1.2.13)$$

$$\psi_1(s) \rightarrow +\infty \text{ при } s \rightarrow +\infty. \quad (1.2.14)$$

Зафиксируем произвольное число $k \geq 1$. Так как $\psi_1(1) \leq k^p$, то вследствие свойств (1.2.13) и (1.2.14) существует $k_1 \geq 1$ такое, что $\psi_1(k_1) = k^p$. Отсюда вытекают равенства

$$k_1 = k^{(n-p)/(n-1)} [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)]^{1/(n-1)}, \quad (1.2.15)$$

$$k^{-p} k_1 [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)] = k_1^{-q} [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)]^{n/(n-p)}. \quad (1.2.16)$$

Далее, положим $G = \{|u| < k_1, |\delta u| \geq k\}$. Очевидно, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } G. \quad (1.2.17)$$

В силу леммы 1.2.2 имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k_1\} \leq c_4 k_1^{-q} [k_1^{-1/2} + \tilde{f}(k_1^\gamma)]^{n/(n-p)}. \quad (1.2.18)$$

Поскольку $k^p \leq |\delta u|^p$ на G , используя лемму 1.2.2, получаем

$$k^p \text{meas } G \leq \int_{\{|u| < k_1\}} |\delta u|^p dx \leq c_3 [k_1^{1/2} + k_1 \tilde{f}(k_1^\gamma)]. \quad (1.2.19)$$

Из (1.2.17)–(1.2.19), (1.2.12) и (1.2.16) следует, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq (c_3 + c_4) k^{-p} k_1 [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)]. \quad (1.2.20)$$

Используя (1.2.15) и (1.2.12), получаем

$$\begin{aligned} k^{-p} k_1 [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)] &= k^{-r} [k_1^{-1/2} + \psi(k_1^\gamma)]^{n/(n-1)} \\ &\leq k^{-r} [k_1^{-1/2} + \tilde{f}(k_1^\gamma - 1)]^{n/(n-1)} \\ &\leq k^{-r} [k^{-\beta p/(p-1)} + \tilde{f}(k^\beta - 1)]^{n/(n-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.2.20) вытекает, что для любого $k \geq 1$

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq (c_3 + c_4) k^{-r} [k^{-\beta p/(p-1)} + \tilde{f}(k^\beta - 1)]^{n/(n-1)}. \quad (1.2.21)$$

Пусть φ – функция на $[1, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [1, +\infty)$

$$\varphi(s) = (c_3 + c_4) [s^{-p/(p-1)} + \tilde{f}(s)]^{n/(n-1)}.$$

Функция φ положительна, невозрастающая и измерима. Кроме того, вследствие (1.2.11) она удовлетворяет неравенству (1.2.1).

Учитывая определение функции φ , из (1.2.21) выводим, что для любого $k \geq 1$

$$\text{meas}\left\{\frac{|\delta u|^\beta}{2} \geq k\right\} \leq k^{-r/\beta} \varphi(k).$$

Тогда по лемме 1.2.1 $|\delta u|^\beta \in L^{r/\beta}(\Omega)$. Следовательно, $|\delta u| \in L^r(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.2.4. Пусть $p \geq 2 - 1/n$ и справедливо неравенство (1.2.11). Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Этот результат является следствием теоремы 1.2.3 и предложения 1.1.2.

Теорема 1.2.5. Пусть $p \geq 2 - 1/n$ и справедливо неравенство (1.2.11). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Это утверждение является следствием теорем 1.1.1, 1.1.2, 1.2.3 и 1.2.4.

В заключение раздела отметим, что все изложенные в нем результаты получены в статье [71].

1.3. Случаи принадлежности правой части уравнения логарифмическим классам

Рассмотрим ряд утверждений, вытекающих из теорем предыдущего раздела. Для вывода первой группы этих утверждений понадобится следующий простой вспомогательный результат.

Лемма 1.3.1. Пусть $\sigma > 0$ и $f[\ln(1 + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда для любого $\lambda > 1/\sigma$ имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^\lambda ds < +\infty. \quad (1.3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda > 1/\sigma$. Положим

$$\Phi = |f|[\ln(1 + |f|)]^\sigma, \quad M = \left(\int_\Omega \Phi dx \right)^\lambda.$$

Пусть $s \geq e$. Предположим, что $\{|f| \geq s\} \neq \emptyset$. Легко видеть, что

$$|f| \leq (\ln s)^{-\sigma} \Phi \quad \text{на} \quad \{|f| \geq s\}.$$

Тогда

$$\int_{\{|f| \geq s\}} |f| dx \leq M^{1/\lambda} (\ln s)^{-\sigma}.$$

Очевидно, что это неравенство верно и в случае $\{|f| \geq s\} = \emptyset$.

Таким образом, учитывая определение функции $\tilde{f}$, для любого $s \geq e$ имеем

$$\tilde{f}(s) \leq M^{1/\lambda} (\ln s)^{-\sigma}.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенство $\sigma\lambda > 1$, получаем, что для любого $N > e$

$$\int_e^N \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^\lambda ds \leq \frac{M}{\sigma\lambda - 1}.$$

Отсюда вытекает, что справедливо неравенство (1.3.1). $\square$

Теорема 1.3.1. Пусть $\sigma > (n-p)/n$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in L^q(\Omega)$.

Теорема 1.3.2. Пусть $p > 2 - 1/n$, $\sigma > (n-p)/n$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5) принадлежащее $L^q(\Omega)$.

Теорема 1.3.1 является следствием леммы 1.3.1 и теоремы 1.2.1, а теорема 1.3.2 вытекает из леммы 1.3.1 и теоремы 1.2.2.

Теорема 1.3.3. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $\sigma > (n-1)/n$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Теорема 1.3.4. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $\sigma > (n-1)/n$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Теорема 1.3.3 есть следствие леммы 1.3.1 и теоремы 1.2.4, а теорема 1.3.4 вытекает из леммы 1.3.1 и теоремы 1.2.5.

Отметим, что по существу, теоремы 1.3.3 и 1.3.4 установлены в работе [65]. Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 ранее не публиковались.

Перейдем к рассмотрению более общих утверждений, вытекающих из теорем раздела 1.2. Для этого понадобятся последовательные суперпозиции логарифмической функции и соответствующий аналог леммы 1.3.1.

Определим последовательность чисел s_j следующим образом:

$$s_1 = 1, \quad s_j = e^{s_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Пусть теперь для любого $j \in \mathbb{N}$ $b_j : [s_j, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – функция такая, что

$$b_j(s) = \underbrace{\ln \dots \ln}_{j} s, \quad s \in [s_j, +\infty).$$

Заметим, что если $j \in \mathbb{N}$ и $s > s_j$, то $b_j(s) > 0$.

Лемма 1.3.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\lambda > 1/\sigma$ и

$$f \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{1/\lambda} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega).$$

Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^\lambda ds < +\infty. \quad (1.3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\Phi = |f| \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{1/\lambda} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma.$$

Ясно, что $\Phi \in L^1(\Omega)$. Через M обозначим интеграл функции Φ по Ω .

Пусть $s \geq s_{m+2}$. Предположим, что $\{|f| \geq s\} \neq \emptyset$. Легко видеть, что

$$|f| \leq \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1/\lambda} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma} \Phi \quad \text{на } \{|f| \geq s\}.$$

Тогда

$$\int_{\{|f| \geq s\}} |f| dx \leq M \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1/\lambda} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma}.$$

Очевидно, что это неравенство верно и в случае $\{|f| \geq s\} = \emptyset$.

Таким образом, учитывая определение функции $\tilde{f}$, для любого $s \geq s_{m+2}$ имеем

$$\tilde{f}(s) \leq M \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1/\lambda} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma}. \quad (1.3.3)$$

Пусть $N > s_{m+2}$. Используя (1.3.3) и неравенство $\sigma\lambda > 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{s_{m+2}}^N \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^\lambda ds &\leq M^\lambda \int_{s_{m+2}}^N \frac{1}{s} \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma\lambda} ds \\ &= \frac{M^\lambda}{1 - \sigma\lambda} [b_{m+1}(s)]^{1-\sigma\lambda} \Big|_{s_{m+2}}^N \leq \frac{M^\lambda}{\sigma\lambda - 1} [b_{m+1}(s_{m+2})]^{1-\sigma\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что справедливо неравенство (1.3.2). $\square$

Теорема 1.3.5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-p)/n$ и

$$f \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{(n-p)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega). \quad (1.3.4)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in L^q(\Omega)$.

Теорема 1.3.6. Пусть $p > 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-p)/n$ и справедливо включение (1.3.4). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $L^q(\Omega)$.

Теорема 1.3.5 является следствием леммы 1.3.2 и теоремы 1.2.1, а теорема 1.3.6 вытекает из леммы 1.3.2 и теоремы 1.2.2.

Теорема 1.3.7. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$ и

$$f \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega). \quad (1.3.5)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Теорема 1.3.8. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$ и справедливо включение (1.3.5). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Теорема 1.3.7 есть следствие леммы 1.3.2 и теоремы 1.2.4, а теорема 1.3.8 вытекает из леммы 1.3.2 и теоремы 1.2.5.

Отметим, что условие (1.3.5) носит лишь достаточный характер. Здесь ограничимся обоснованием этого утверждения только в отношении слабых решений и на примере оператора Лапласа (это соответствует случаю $p = 2$) покажем, что слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$, может существовать и при более слабом требовании на правую часть уравнения по сравнению с условием (1.3.5).

Пример 1.3.1. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_1 – функция класса $C^2((0, +\infty))$ такая, что $g_1 = 0$ на $[1/2, +\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-e})$

$$g_1(s) = \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-(n-1)/n} \left(\ln \ln \frac{1}{s} \right)^{-(2n-1)/n}.$$

Пусть еще u_1 и f_1 – функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_1(x) = |x|^{2-n} g_1(|x|),$$

$$f_1(x) = (n-3)|x|^{1-n}g_1'(|x|) - |x|^{2-n}g_1''(|x|).$$

Нетрудно проверить, что функция u_1 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_1 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

при этом $u_1 \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$, для любого $\sigma \in (0, (n-1)/n)$

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n}[\ln \ln(e + |f_1|)]^\sigma \in L^1(\Omega),$$

но

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n}[\ln \ln(e + |f_1|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$$

и следовательно, функция f_1 не удовлетворяет включению (1.3.5) ни при каких $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$.

В заключение раздела приведем пример, когда правая часть уравнения имеет определенную "логарифмическую" суммируемость, но слабое решение соответствующей задачи Дирихле не принадлежит $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Пример 1.3.2. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_2 — функция класса $C^2((0, +\infty))$ такая, что $g_2 = 0$ на $[1/2, +\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-1})$

$$g_2(s) = \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-(n-1)/n}.$$

Пусть еще u_2 и f_2 — функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_2(x) = |x|^{2-n}g_2(|x|),$$

$$f_2(x) = (n-3)|x|^{1-n}g_2'(|x|) - |x|^{2-n}g_2''(|x|).$$

Тогда функция u_2 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_2 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

При этом для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u_2 \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$, но $|\nabla u_2| \notin L^r(\Omega)$ и, следовательно, $u_2 \notin \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$. Кроме того, для любого $\sigma \in (0, (n-1)/n)$ имеем $f_2[\ln(1 + |f_2|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$, но $f_2[\ln(1 + |f_2|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$.

Отметим, что прямое доказательство теоремы 1.3.8 дано в статье [68]. Из этой же работы взяты примеры 1.3.1 и 1.3.2. Теоремы 1.3.5, 1.3.6 и 1.3.7 ранее не публиковались.

1.4. Об интегрально-логарифмических условиях предельной суммируемости решений

Рассмотрим следствия из теорем раздела 1.2, связанные с более общими условиями на f по сравнению с требованиями (1.3.4) и (1.3.5). Эти условия мы называем интегрально-логарифмическими, поскольку, с одной стороны, они содержат интегралы функции f по множествам вида $\{|f| > k\}$, $k > 0$, а с другой стороны, включают выражения, зависящие от последовательных суперпозиций логарифмической функции. По существу, данные условия заключаются в некоторых квалифицированных оценках сверху значений $\tilde{f}(k)$ при достаточно больших k .

Теорема 1.4.1. Пусть $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n - p)/n$, и пусть для любого $k > s_{m+1}$

$$\int_{\{|f|>k\}} |f| dx \leq c \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-p)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \quad (1.4.1)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in L^q(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.4.1) и определения функции $\tilde{f}$ для любого $s > s_{m+1}$ имеем

$$[\tilde{f}(s)]^{n/(n-p)} \leq c^{n/(n-p)} \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma n/(n-p)}.$$

Отсюда вытекает, что справедливо неравенство (1.2.9). Тогда по теореме 1.2.1 $u \in L^q(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.4.2. Пусть $p > 2 - 1/n$. Пусть $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n - p)/n$, и пусть для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство (1.4.1). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $L^q(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду изложенного в доказательстве предыдущей теоремы справедливо неравенство (1.2.9). Тогда из теоремы 1.2.2 вытекает требуемое утверждение. $\square$

Теорема 1.4.3. Пусть $p \geq 2 - 1/n$. Пусть $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n - 1)/n$, и пусть для любого $k > s_{m+1}$

$$\int_{\{|f|>k\}} |f| dx \leq c \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \quad (1.4.2)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in \overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.4.2) и определения функции $\tilde{f}$ для любого $s > s_{m+1}$ имеем

$$[\tilde{f}(s)]^{n/(n-1)} \leq c^{n/(n-1)} \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-1} [b_{m+1}(s)]^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство (1.2.11). Тогда по теореме 1.2.4 $u \in \overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.4.4. Пусть $p \geq 2 - 1/n$. Пусть $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$, и пусть для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство (1.4.2). Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду изложенного в доказательстве теоремы 1.4.3 справедливо неравенство (1.2.11). Тогда из теоремы 1.2.5 вытекает требуемое утверждение. $\square$

Отметим, что прямое доказательство теоремы 1.4.3 дано в работе [69]. Там же установлена теорема 1.4.4. Теоремы 1.4.1 и 1.4.2 ранее не публиковались.

Рассмотрим два предложения о необходимом и достаточном условиях выполнения условия теоремы 1.4.3 относительно функции f .

Предложение 1.4.1. Пусть $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$, и пусть для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство (1.4.2). Тогда для любого $t \in (0, (n-1)/n)$ имеем $f[\ln(1+|f|)]^t \in L^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in (0, (n-1)/n)$. Зафиксируем t_1 такое, что

$$t_1 > \left(\frac{n-1}{n} - t \right)^{-1}, \quad (1.4.3)$$

и $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $k_0 > s_{m+1}^{1/t_1}$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, положим

$$G_k = \{ e^{k^{t_1}} < |f| \leq e^{(k+1)^{t_1}} \}, \quad G'_k = \{ |f| > e^{k^{t_1}} \}.$$

Заметим, что

$$G'_{k_0} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} G_k. \quad (1.4.4)$$

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Поскольку $k^{t_1} > s_{m+1}$, для любого $j \in \{1, \dots, m+1\}$ имеем $b_j(e^{k^{t_1}}) > 1$. Тогда в силу условия

предложения справедливо неравенство

$$\int_{G'_k} |f| dx \leq ck^{-t_1(n-1)/n}. \quad (1.4.5)$$

Кроме того, в силу определения множества G_k имеем

$$[\ln(1 + |f|)]^t \leq 2^{(1+t_1)t} k^{t_1 t} \quad \text{на } G_k. \quad (1.4.6)$$

Из (1.4.5) и (1.4.6) следует, что

$$\int_{G_k} |f| [\ln(1 + |f|)]^t dx \leq 2^{(1+t_1)t} ck^{-t_1[(n-1)/n-t]}.$$

Полученное неравенство и (1.4.3) позволяют заключить, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{G_k} |f| [\ln(1 + |f|)]^t dx < \infty.$$

Отсюда, учитывая (1.4.4) и то, что множества G_k попарно не пересекаются, делаем вывод, что функция $f[\ln(1 + |f|)]^t$ суммируема на G'_{k_0} и, следовательно, эта функция суммируема на Ω . $\square$

Заметим, что утверждение, обратное предложению 1.4.1, не верно. Это видно из рассматриваемого ниже примера 1.4.3.

Предложение 1.4.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$ и справедливо включение (1.3.5). Тогда существует $c > 0$ такое, что для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство (1.4.2).

Доказательство. Положим

$$\Phi = \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma.$$

В силу условия предложения имеем $f\Phi \in L^1(\Omega)$. Положим

$$c = \int_{\Omega} |f| \Phi dx + 1. \quad (1.4.7)$$

Зафиксируем произвольное $k > s_{m+1}$. Нетрудно убедиться в том, что для любого $x \in \{|f| > k\}$

$$\left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^\sigma < \Phi(x).$$

Тогда

$$\int_{\{|f|>k\}} |f| dx \leq \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma} \int_{\Omega} |f| \Phi dx.$$

Отсюда и из (1.4.7) следует неравенство (1.4.2). $\square$

В связи с изложенными предложениями приведем один показательный пример.

Обозначим через B открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

Пример 1.4.1. Пусть $\sigma \in ((n-1)/n, 1)$, и пусть f_1 – функция на B такая, что

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-(2n-1)/n} \left(\ln \ln \frac{1}{|x|} \right)^{-\sigma}, & \text{если } 0 < |x| \leq e^{-e}, \\ 0, & \text{если } |x| = 0 \text{ или } |x| > e^{-e}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция f_1 суммируема на B , причем

$$\int_B f_1 dx \leq 2\kappa_n, \quad (1.4.8)$$

где κ_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что справедливы следующие утверждения:

(i) для любого $k > e$ имеет место неравенство

$$\int_{\{|f_1|>k\}} |f_1| dx \leq 2\kappa_n n^2 e (\ln k)^{-(n-1)/n} (\ln \ln k)^{-\sigma};$$

(ii) функция $f_1 [\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n}$ не принадлежит $L^1(B)$.

Действительно, зафиксируем произвольное $k > e$. Предположим сначала, что $k \leq e^{ne}$. Тогда $1 \leq ne (\ln k)^{-(n-1)/n}$, $1 \leq n (\ln \ln k)^{-\sigma}$ и, следовательно, учитывая (1.4.8), получаем

$$\int_{\{|f_1|>k\}} |f_1| dx \leq 2\kappa_n n^2 e (\ln k)^{-(n-1)/n} (\ln \ln k)^{-\sigma}.$$

Пусть теперь $k > e^{ne}$. Положим $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k^{-1/n}\}$, и пусть для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq k^{1/n}$, $B_k^{(i)} = \{x \in \mathbb{R}^n : i^{-1} \leq |x| \leq k^{-1/n}\}$. Зафиксируем

$i \in \mathbb{N}$, $i \geq k^{1/n}$. Для произвольного $x \in B_k^{(i)}$ имеем $\ln \ln k \leq n \ln \ln(1/|x|)$ и, следовательно,

$$|f_1(x)| \leq n(\ln \ln k)^{-\sigma} \frac{1}{|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-(2n-1)/n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{B_k^{(i)}} |f_1| dx &\leq \varkappa_n n (\ln \ln k)^{-\sigma} \int_{1/i}^{1/k^{1/n}} \frac{1}{\rho} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{-(2n-1)/n} d\rho \\ &\leq 2\varkappa_n n^2 (\ln k)^{-(n-1)/n} (\ln \ln k)^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{B_k} |f_1| dx \leq 2\varkappa_n n^2 (\ln k)^{-(n-1)/n} (\ln \ln k)^{-\sigma}.$$

Из этого неравенства, учитывая включение $\{|f_1| > k\} \subset B_k$, получаем соответствующую оценку для интеграла функции $|f_1|$ по множеству $\{|f_1| > k\}$.

Таким образом, заключаем, что утверждение (i) справедливо.

Далее, положим

$$\alpha = \min \left\{ \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^4, e^{-e} \right\},$$

и пусть для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1/\alpha$, $G_i = \{x \in \mathbb{R}^n : i^{-1} \leq |x| \leq \alpha\}$. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1/\alpha$, и возьмем $x \in G_i$. Ясно, что

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1}{|x|} + \ln \frac{n-1}{n+1} \geq 0. \quad (1.4.9)$$

Кроме того, имеем

$$\ln \ln \frac{1}{|x|} < \ln \frac{1}{|x|} < \frac{n+1}{n-1} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{(n-1)/(n+1)}. \quad (1.4.10)$$

Используя (1.4.10), находим, что

$$|f_1(x)| > \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда и из (1.4.9) вытекает, что

$$\ln(1 + |f_1(x)|) > \frac{1}{4} \ln \frac{1}{|x|}$$

и, следовательно,

$$|f_1(x)| [\ln(1 + |f_1(x)|)]^{(n-1)/n} > \frac{1}{4|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1} \left(\ln \ln \frac{1}{|x|} \right)^{-\sigma}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{G_i} |f_1| [\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} dx &> \frac{\varkappa_n}{4} \int_{1/i}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{-1} \left(\ln \ln \frac{1}{\rho} \right)^{-\sigma} d\rho \\ &= \frac{\varkappa_n}{4(1-\sigma)} \left[(\ln \ln i)^{1-\sigma} - \left(\ln \ln \frac{1}{\alpha} \right)^{1-\sigma} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что

$$\int_{G_i} |f_1| [\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} dx \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty.$$

Следовательно, функция $f_1 [\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n}$ не принадлежит $L^1(B)$. Значит, утверждение (ii) справедливо.

Замечание 1.4.1. В силу предложения 1.4.2 выполнение условия теоремы 1.3.7 относительно функции f влечет выполнение условия теоремы 1.4.3 относительно f . Обратное, как следует из утверждений (i) и (ii) примера 1.4.1, не верно. Кроме того, эти утверждения показывают, что показатель $t = (n-1)/n$ в заключительном включении предложения 1.4.1, вообще говоря, не достигается.

Рассмотрим еще одно предложение. Оно полезно для выяснения свойств энтропийных и слабых решений в модельных ситуациях. В частности, с использованием этого предложения устанавливается определенная точность условия теоремы 1.4.3 относительно функции f (см. пример 1.4.3 ниже).

Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ определим функцию $A_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$A_i(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{p-2} \xi_i, & \text{если } \xi \neq 0, \\ 0, & \text{если } \xi = 0. \end{cases}$$

Предложение 1.4.3. Пусть $p > 2 - 1/n$. Пусть $h \in C^2((0, +\infty))$, $\alpha \in (0, 1)$, и пусть выполняются условия:

- 1) $h > 0$ на $(0, \alpha)$ и $h = 0$ на $[\alpha, +\infty)$;
- 2) $h(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$;
- 3) для любого $s \in (0, \alpha)$ имеем $\frac{n-p}{p-1} h(s) - sh'(s) > 0$;
- 4) существуют $M > 0$, $\gamma \in (0, (n-p)/(p-1))$ и $\beta \in (0, \alpha)$ такие, что для любого $s \in (0, \beta)$ имеем $h(s) \geq Ms^\gamma$;
- 5) существуют $M_1 \in (0, 1)$ и $\beta_1 \in (0, \alpha)$ такие, что для любого $s \in (0, \beta_1)$ имеем $s|h'(s)| \leq \frac{n-p}{p-1} M_1 h(s)$;

$$6) \int_0^\alpha \left[\frac{n-p}{p-1} h(s) - sh'(s) \right]^{p-2} [|h'(s)| + s|h''(s)|] ds < +\infty.$$

Пусть u – функция на B такая, что для любого $x \in B \setminus \{0\}$

$$u(x) = |x|^{-(n-p)/(p-1)} h(|x|).$$

Пусть F – функция на B такая, что для любого $x \in B$, $0 < |x| < \alpha$,

$$F(x) = |x|^{1-n} \left[\frac{n-p}{p-1} h(|x|) - |x|h'(|x|) \right]^{p-2} \times [(n-2p+1)h'(|x|) - (p-1)|x|h''(|x|)],$$

а для любого $x \in B$, $|x| \geq \alpha$, $F(x) = 0$.

Тогда $F \in L^1(B)$, $u \in \mathring{W}^{1,1}(B)$ и справедливы следующие утверждения:

- (*)₁) для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $|\nabla u| \in L^\lambda(B)$;
- (*)₂) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$

$$\int_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_B F \varphi dx;$$

(*)₃) для любых $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$ имеем $T_k(u - \varphi) \in \mathring{W}^{1,p}(B)$;

(*)₄) для любых $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$ функция $\sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi)$

суммируема на B и

$$\int_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int_B F T_k(u - \varphi) dx;$$

($*_5$) если $\int_0^\alpha \frac{1}{s} h^r(s) ds < +\infty$, то $|\nabla u| \in L^r(B)$;

($*_6$) если $\int_0^\alpha \frac{1}{s} h^r(s) ds = +\infty$, то $|\nabla u| \notin L^r(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $F \in L^1(B)$ справедливо в силу условия 6).

Покажем, что $u \in \mathring{W}^{1,1}(B)$. Прежде всего заметим, что в силу условий 2) и 5) существует положительное число M_2 такое, что для любого $s \in (0, \alpha)$

$$\frac{n-p}{p-1} h(s) + s|h'(s)| \leq M_2. \quad (1.4.11)$$

Пусть w – функция на B такая, что для любого $x \in B \setminus \{0\}$

$$w(x) = |x|^{-(n-1)/(p-1)}.$$

Поскольку $p > 2 - 1/n$, имеем

$$\frac{n-1}{p-1} < n \quad (1.4.12)$$

и, следовательно, функция w суммируема на B . Тогда, учитывая, что в силу условия 1) и (1.4.11)

$$|u| \leq \frac{p-1}{n-p} M_2 w \quad \text{на } B \setminus \{0\},$$

получаем, что $u \in L^1(B)$.

Пусть F_0 – функция на B такая, что любого $x \in B \setminus \{0\}$

$$F_0(x) = \frac{n-p}{p-1} h(|x|) - |x|h'(|x|).$$

Из условий 1) и 3) вытекает, что для любого $x \in B \setminus \{0\}$ $F_0(x) \geq 0$.

Обозначим через v сужение функции u на $B \setminus \{0\}$. Имеем $v \in C^1(B \setminus \{0\})$, причем для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $x \in B \setminus \{0\}$

$$D_i v(x) = -x_i |x|^{-1} w(x) F_0(x). \quad (1.4.13)$$

Положим для любого $j \in \mathbb{N}$

$$K_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{1+j} < |x| < 1 \right\}, \quad S_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = \frac{1}{1+j} \right\}.$$

Теперь зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и обозначим через w_i какое-либо продолжение $D_i v$ на B . В силу условия 1), (1.4.11) и (1.4.13) имеем $|w_i| \leq M_2 w$ на $B \setminus \{0\}$ и, следовательно, $w_i \in L^1(B)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $j \in \mathbb{N}$. Учитывая гладкость функции v и используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{K_j} u D_i \varphi dx = - \int_{K_j} w_i \varphi dx + \int_{S_j} u \varphi \cos(\nu, e_i) dS_j, \quad (1.4.14)$$

где ν – единичный вектор внутренней нормали к S_j , e_i – орт i -й оси. В силу определения функции u имеем

$$\left| \int_{S_j} u \varphi \cos(\nu, e_i) dS_j \right| \leq \kappa_n \left(\frac{1}{1+j} \right)^{n-(n-1)/(p-1)} h \left(\frac{1}{1+j} \right) \max_{x \in B} |\varphi(x)|.$$

Отсюда, принимая во внимание условие 2) и неравенство (1.4.12), заключаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S_j} u \varphi \cos(\nu, e_i) dS_j = 0.$$

Тогда, учитывая суммируемость функций u и w_i на B и переходя в (1.4.14) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_B u D_i \varphi dx = - \int_B w_i \varphi dx.$$

Следовательно, существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = w_i$ п. в. на B . Тогда в силу (1.4.13) для почти всех $x \in B \setminus \{0\}$

$$D_i u(x) = -x_i |x|^{-1} w(x) F_0(x). \quad (1.4.15)$$

Теперь можно сделать вывод, что $u \in W^{1,1}(B)$. А так как в силу условия 1) $\text{supp } u \subset B$, то $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(B)$.

Заметим, что вследствие (1.4.15)

$$|\nabla u| = w F_0 \quad \text{п. в. на } B. \quad (1.4.16)$$

Докажем справедливость утверждения $(*_1)$. Пусть $\lambda \in [1, r)$. Благодаря (1.4.16), (1.4.11) и условию 1) имеем $|\nabla u|^\lambda \leq M_2^\lambda |w|^\lambda$ п. в. на B . Отсюда, учитывая, что $\lambda(n-1)/(p-1) < n$ и, следовательно, $w \in L^\lambda(B)$, выводим, что $|\nabla u| \in L^\lambda(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_1)$ установлена.

Далее, пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ v_i – функция на B такая, что для любого $x \in B \setminus \{0\}$

$$v_i(x) = -x_i |x|^{-n} [F_0(x)]^{p-1}.$$

В силу (1.4.11) и условия 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $v_i \in L^1(B)$. Кроме того, для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$|v_i| \leq M_2^{p-1} (1+j)^{n-1} \quad \text{на } K_j, \quad (1.4.17)$$

$$|v_i| \leq (1+j)^{n-1} \left[\frac{n-p}{p-1} h\left(\frac{1}{1+j}\right) + \frac{1}{1+j} \left| h'\left(\frac{1}{1+j}\right) \right| \right]^{p-1} \quad \text{на } S_j. \quad (1.4.18)$$

Положим $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < \alpha\}$. Благодаря условию 3) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$v_i|_{B_\alpha} \in C^1(B_\alpha). \quad (1.4.19)$$

Кроме того, учитывая условие 3) и определение функции F , получаем, что

$$-\sum_{i=1}^n D_i(v_i|_{B_\alpha}) = F|_{B_\alpha}. \quad (1.4.20)$$

Покажем, что для любой функции $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi \right\} dx = \int_B F \varphi dx. \quad (1.4.21)$$

Действительно, пусть $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$, и пусть $\{\varphi_m\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(B)$ такая, что

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{сильно в } W^{1,p}(B), \quad (1.4.22)$$

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{п. в. на } B, \quad (1.4.23)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad |\varphi_m| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1 \quad \text{на } B. \quad (1.4.24)$$

Положим для любого $j \in \mathbb{N}$

$$q_j = \left[\frac{n-p}{p-1} h\left(\frac{1}{1+j}\right) + \frac{1}{1+j} \left| h'\left(\frac{1}{1+j}\right) \right| \right]^{p-1}.$$

В силу условий 2) и 5) имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = 0. \quad (1.4.25)$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, и пусть $m \in \mathbb{N}$. Используя (1.4.19), формулу интегрирования по частям, (1.4.20) и условие 1), получаем

$$\begin{aligned} \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi_m \right\} dx &= \int_{K_j} F \varphi_m dx \\ &+ \int_{S_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \cos(\nu, e_i) \right\} \varphi_m dS_j. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

В силу (1.4.18) и (1.4.24) имеем

$$\left| \int_{S_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \cos(\nu, e_i) \right\} \varphi_m dS_j \right| \leq (\|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1) n \varkappa_n q_j.$$

Отсюда и из (1.4.26) вытекает, что

$$\left| \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi_m \right\} dx - \int_{K_j} F \varphi_m dx \right| \leq (\|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1) n \varkappa_n q_j. \quad (1.4.27)$$

Используя (1.4.17), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi_m \right\} dx - \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi \right\} dx \right| \\ \leq M_2^{p-1} (1+j)^{n-1} \sum_{i=1}^n \int_B |D_i(\varphi_m - \varphi)| dx. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Кроме того, вследствие (1.4.24) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_j} F \varphi_m dx - \int_B F \varphi dx \right| &\leq \int_B |F| |\varphi_m - \varphi| dx \\ &+ (\|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1) \int_{B \setminus K_j} |F| dx. \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

Из (1.4.27)–(1.4.29) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi \right\} dx - \int_B F \varphi dx \right| \\ & \leq M_2^{p-1} (1+j)^{n-1} \sum_{i=1}^n \int_B |D_i(\varphi_m - \varphi)| dx \\ & + \int_B |F| |\varphi_m - \varphi| dx + (\|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1) \left[n \varkappa_n q_j + \int_{B \setminus K_j} |F| dx \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (1.4.22)–(1.4.25) и то, что $\text{meas}(B \setminus K_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, выводим (1.4.21).

Заметим, что в силу (1.4.15), (1.4.16) и условий 1), 3) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i(\nabla u) = v_i \text{ п. в. на } B. \quad (1.4.30)$$

Отсюда и из (1.4.21) вытекает, что утверждение $(*_2)$ справедливо.

Докажем справедливость утверждения $(*_3)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$. Пусть h_k – функция из $C^1(\mathbb{R})$ со свойствами: $h_k(s) = s$, если $|s| \leq k$; $h_k(s) = \frac{3}{2}k \text{ sign } s$, если $|s| \geq 2k$; $0 \leq h'_k \leq 1$ на $\mathbb{R}$. Определим функцию $u_k : B \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$u_k(x) = \begin{cases} h_k(u(x) - \varphi(x)), & \text{если } x \in B \setminus \{0\}, \\ \frac{3}{2}k, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Вследствие условия 4) имеем $u_k \in C^1(B)$. Кроме того, благодаря условию 1) имеем $\text{supp } u_k \subset \overline{B_\alpha} \cup \text{supp } \varphi$. Таким образом, $u_k \in C_0^1(B)$ и, следовательно, $u_k \in \dot{W}^{1,p}(B)$. Но тогда и $T_k(u_k) \in \dot{W}^{1,p}(B)$. Отсюда, учитывая, что $T_k(u - \varphi) = T_k(u_k)$ на $B \setminus \{0\}$, заключаем, что $T_k(u - \varphi) \in \dot{W}^{1,p}(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_3)$ установлена.

Докажем справедливость утверждения $(*_4)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$. Положим

$$\gamma_1 = \left(\frac{n-p}{p-1} - \gamma \right)^{-1}, \quad k_1 = \min \left\{ \beta, \left(\frac{M}{k + \max_{x \in B} |\varphi(x)|} \right)^{\gamma_1} \right\}$$

и обозначим через B' открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом k_1 . В силу условия 4) имеем $B' \setminus \{0\} \subset \{|u - \varphi| > k\}$. Используя это

включение и утверждение $(*_3)$, получаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i(\nabla u)D_i T_k(u - \varphi) = 0 \quad \text{п. в. на } B'. \quad (1.4.31)$$

Кроме того, в силу (1.4.11), (1.4.30) и условия 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$|A_i(\nabla u)D_i T_k(u - \varphi)| \leq M_2^{p-1} k_1^{1-n} |D_i T_k(u - \varphi)| \quad \text{п. в. на } B \setminus B'. \quad (1.4.32)$$

Из (1.4.31) и (1.4.32) вытекает, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $A_i(\nabla u)D_i T_k(u - \varphi)$ суммируема на B . Используя этот факт, а также утверждение $(*_3)$ и (1.4.21), (1.4.30), получаем

$$\int_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u)D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int_B F T_k(u - \varphi) dx.$$

Следовательно, утверждение $(*_4)$ справедливо.

Докажем справедливость утверждения $(*_5)$. Пусть

$$\int_0^\alpha \frac{1}{s} h^r(s) ds < +\infty. \quad (1.4.33)$$

Положим $G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \beta_1\}$, и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$G^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\beta_1}{1+j} \leq |x| \leq \beta_1 \right\}.$$

В силу (1.4.16) и условия 5) для почти всех $x \in G \setminus \{0\}$ имеем $|\nabla u|^r(x) \leq (2n)^r |x|^{-n} h^r(|x|)$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int_{G^{(j)}} |\nabla u|^r dx \leq (2n)^r \kappa_n \int_0^\alpha \frac{1}{s} h^r(s) ds.$$

Отсюда и из (1.4.33) вытекает, что функция $|\nabla u|^r$ суммируема на G . Заметим еще, что в силу (1.4.16), (1.4.11) и условия 1) $|\nabla u| < M_2 \beta_1^{-n}$ п. в. на $B \setminus G$ и, следовательно, функция $|\nabla u|^r$ суммируема на $B \setminus G$. Теперь можно заключить, что $|\nabla u| \in L^r(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_5)$ установлена.

Наконец, докажем справедливость утверждения $(*_6)$. Пусть

$$\int_0^\alpha \frac{1}{s} h^r(s) ds = +\infty. \quad (1.4.34)$$

Пусть G и $G^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, — множества, определенные при доказательстве справедливости утверждения $(*_5)$. В силу условия 5) для любого $x \in G \setminus \{0\}$ имеем

$$F_0(x) \geq (1 - M_1) \frac{n - p}{p - 1} h(|x|).$$

Отсюда и из (1.4.16) следует, что для почти всех $x \in G \setminus \{0\}$

$$|\nabla u|^r(x) \geq (1 - M_1)^r \left(\frac{n - p}{p - 1} \right)^r |x|^{-n} h^r(|x|).$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{G^{(j)}} |\nabla u|^r dx \geq \kappa_n (1 - M_1)^r \left(\frac{n - p}{p - 1} \right)^r \int_{\beta_1/(1+j)}^{\beta_1} \frac{1}{s} h^r(s) ds.$$

Отсюда и из (1.4.34) вытекает, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{G^{(j)}} |\nabla u|^r dx = \infty.$$

Следовательно, $|\nabla u| \notin L^r(B)$, и тем самым справедливость утверждения $(*_6)$ установлена. $\square$

Используя предложение 1.4.3, сначала приведем один сравнительно простой пример, хотя и не имеющий непосредственного отношения к рассматриваемым в данном разделе интегрально-логарифмическим условиям, но интересный в общем контексте изучения вопросов предельной суммируемости решений. В этом примере правая часть уравнения (1.1.4) имеет определенную "логарифмическую" суммируемость, но энтропийное (и вместе с тем слабое) решение задачи (1.1.4), (1.1.5) не принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$ и может не принадлежать пространству $L^q(\Omega)$.

Пример 1.4.2. Пусть $p > 2 - 1/n$, $\sigma_1 \in (0, 1/r)$. Положим $\alpha_1 = e^{-2\sigma_1(p-1)/(n-p)}$, и пусть ψ_1 — функция из $C^2((0, +\infty))$ такая, что $\psi_1 = 0$ на $(0, \alpha_1/3]$, $\psi_1 = 1$ на $[2\alpha_1/3, +\infty)$, ψ_1 не убывает на $(\alpha_1/3, 2\alpha_1/3)$. Пусть h_1 — функция на $(0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (0, \alpha_1)$

$$h_1(s) = \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\sigma_1} [1 - \psi_1(s) + \psi_1(s)(\alpha_1 - s)^3],$$

а для любого $s \geq \alpha_1$ $h_1(s) = 0$.

Имеем $h_1 \in C^2((0, +\infty))$, $\alpha_1 \in (0, 1)$ и относительно функции h_1 и числа α_1 выполняются условия 1)–6) предложения 1.4.3. Кроме того, в силу неравенства $\sigma_1 < 1/r$ имеем

$$\int_0^{\alpha_1} \frac{1}{s} h_1^r(s) ds = +\infty. \quad (1.4.35)$$

Пусть теперь F_1 – функция на B такая, что для любого $x \in B$, $0 < |x| < \alpha_1$,

$$F_1(x) = |x|^{1-n} \left[\frac{n-p}{p-1} h_1(|x|) - |x| h_1'(|x|) \right]^{p-2} \times [(n-2p+1)h_1'(|x|) - (p-1)|x|h_1''(|x|)],$$

а для любого $x \in B$, $|x| \geq \alpha_1$, $F_1(x) = 0$.

Пусть, наконец, u – функция на B такая, что для любого $x \in B \setminus \{0\}$

$$u(x) = |x|^{-(n-p)/(p-1)} h_1(|x|).$$

Тогда в силу предложения 1.4.3 и (1.4.35) имеем $F_1 \in L^1(B)$, $u \in \mathring{W}^{1,1}(B)$ и справедливы следующие утверждения:

- (i) для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $|\nabla u| \in L^\lambda(B)$;
- (ii) $|\nabla u| \notin L^r(B)$;
- (iii) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$

$$\int_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_B F_1 \varphi dx;$$

(iv) для любых $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$ имеем $T_k(u - \varphi) \in \mathring{W}^{1,p}(B)$, функция $\sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi)$ суммируема на B и

$$\int_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int_B F_1 T_k(u - \varphi) dx.$$

Пусть теперь $\Omega = B$, и пусть коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, n$, и правая часть f в уравнении (1.1.4) такие, что:

- 1) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ имеем $a_i(x, \xi) = A_i(\xi)$;
- 2) $f = F_1$.

Тогда в силу утверждений (i) и (iii) функция u есть слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), а в силу утверждения (iv) и (1.1.6) эта же функция является энтропийным решением задачи (1.1.4), (1.1.5). Вместе с тем ввиду утверждения (ii) функция u не принадлежит пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Заметим еще, что для любого t , $0 < t < \sigma_1 \min\{1, p-1\}$, справедливо включение $f[\ln(1 + |f|)]^t \in L^1(\Omega)$. При этом в силу предположения, что $\sigma_1 < 1/r$, верно неравенство $\sigma_1 \min\{1, p-1\} < (n-1)/n$.

Наконец, легко видеть, что если $\sigma_1 < 1/q$, то $u \notin L^q(\Omega)$.

Прежде чем перейти к примеру, заканчивающему данный раздел, введем некоторые функции, используемые в этом примере.

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ g_m — функция на $(0, 1/s_{m+1})$ такая, что для любого $s \in (0, 1/s_{m+1})$

$$g_m(s) = \prod_{j=1}^m b_j \left(\frac{1}{s} \right).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $g_m \in C^2((0, 1/s_{m+1}))$ и $g_m > 1$ на $(0, 1/s_{m+1})$.

Зафиксируем последовательность чисел α_m такую, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$0 < \alpha_m < \min\{1/s_{m+1}, e^{-mn^2/(n-p)}\}.$$

Далее, пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ ψ_m — функция из $C^2((0, +\infty))$ такая, что $\psi_m = 0$ на $(0, \alpha_m/3]$, $\psi_m = 1$ на $[2\alpha_m/3, +\infty)$, ψ_m не убывает на $[\alpha_m/3, 2\alpha_m/3]$.

Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\tau_m = 1 + \max_{s \in (0, +\infty)} \psi'_m(s) + \max_{s \in (0, +\infty)} |\psi''_m(s)|.$$

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ h_m — функция на $(0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (0, \alpha_m)$

$$h_m(s) = [g_m(s)]^{-1/r} [1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3],$$

а для любого $s \geq \alpha_m$ $h_m(s) = 0$.

Имеем $\{h_m\} \subset C^2((0, +\infty))$. Кроме того, если $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0, \alpha_m)$, то

$$\frac{n-p}{p-1} h_m(s) - s h'_m(s) > 0. \quad (1.4.36)$$

Сформулируем несколько полезных лемм относительно свойств функций h_m . Подробные доказательства этих вспомогательных результатов изложены в [69].

Лемма 1.4.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0, \alpha_m/3]$. Тогда

$$h_m(s) \geq \left(\frac{n-p}{m}\right)^{m/r} s^{(n-p)/r}, \quad s|h'_m(s)| \leq \frac{n-p}{2(p-1)} h_m(s).$$

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ Φ_m – функция на $(0, \alpha_m)$ такая, что для любого $s \in (0, \alpha_m)$

$$\Phi_m(s) = \left[\frac{n-p}{p-1} h_m(s) - s h'_m(s) \right]^{p-2} [|h'_m(s)| + s|h''_m(s)|].$$

Лемма 1.4.2. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0, \alpha_m/3]$. Тогда

$$\Phi_m(s) \leq \frac{3m}{rs} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-2} [g_m(s)]^{-(n-1)/n} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-1}.$$

Лемма 1.4.3. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$ и $s \in [\alpha_m/3, \alpha_m)$. Тогда

$$\Phi_m(s) \leq (3/\alpha_m)^{p+2} \tau_m^p.$$

Лемма 1.4.4. Пусть $p \geq 2 - 1/n$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^{\alpha_m} \Phi_m(s) ds \leq (3/\alpha_m)^{p+2} \tau_m^p.$$

Лемма 1.4.5. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^{\alpha_m} \frac{1}{s} h_m^r(s) ds = +\infty.$$

Пример 1.4.3. Пусть $p > 2 - 1/n$, $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Зафиксируем положительное число μ такое, что

$$\mu^{p-1} \leq \frac{c}{\varkappa_n} \alpha_{m+1}^{p+1}, \quad (1.4.37)$$

$$\mu^{p-1} \leq \frac{s_{m+1}}{n\tau_{m+1}^p} \left(\frac{\alpha_{m+1}}{3}\right)^{n+p+1}. \quad (1.4.38)$$

Пусть $\Omega = B$, и пусть F – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$, $0 < |x| < \alpha_{m+1}$,

$$F(x) = \mu^{p-1}|x|^{1-n} \left[\frac{n-p}{p-1} h_{m+1}(|x|) - |x| h'_{m+1}(|x|) \right]^{p-2} \\ \times [(n-2p+1)h'_{m+1}(|x|) - (p-1)|x|h''_{m+1}(|x|)],$$

а для любого $x \in \Omega$, $|x| \geq \alpha_{m+1}$, $F(x) = 0$.

В силу определения функции Φ_{m+1} для любого $x \in \Omega$, $0 < |x| < \alpha_{m+1}$, имеем

$$|F(x)| \leq n\mu^{p-1}|x|^{1-n}\Phi_{m+1}(|x|). \quad (1.4.39)$$

Отсюда и из леммы 1.4.4 вытекает, что $F \in L^1(\Omega)$.

Пусть коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, n$, и правая часть f уравнения (1.1.4) такие, что:

- 1) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ имеем $a_i(x, \xi) = A_i(\xi)$;
- 2) $f = F$.

Пусть u – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u(x) = \mu|x|^{-(n-p)/(p-1)}h_{m+1}(|x|).$$

Покажем, что справедливы следующие предложения:

- (i) функция u есть слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5);
- (ii) функция u есть энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5);
- (iii) функция u не принадлежит пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$;
- (iv) для любого $k > s_{m+1}$

$$\int_{\{|f|>k\}} |f| dx \leq c \left[\prod_{j=1}^{m+1} b_j(k) \right]^{-(n-1)/n}.$$

Действительно, в силу определения функции h_{m+1} , (1.4.36) и лемм 1.4.1 и 1.4.4 относительно функции μh_{m+1} и числа α_{m+1} выполняются условия 1)–6) предложения 1.4.3. Тогда ввиду предложения 1.4.3, леммы 1.4.5 и предположений 1) и 2) рассматриваемого примера имеем $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

- (i') для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $|\nabla u| \in L^\lambda(\Omega)$;
- (ii') для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx;$$

(iii') для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ имеем $T_k(u - \varphi) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$;

(iv') для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ функция $\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i T_k(u - \varphi)$ суммируема на Ω и

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx;$$

(v') функция u не принадлежит пространству $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Из утверждений (i') и (ii') вытекает, что функция u есть слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Значит, предложение (i) справедливо.

Далее, в силу утверждения (iii') имеем $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$. Таким образом, $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$ и, следовательно, $\nabla u = \delta u$ п. в. на Ω . Учитывая это и используя (1.1.6), получаем, что если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i T_k(u - \varphi) = (\delta_i u - \delta_i \varphi) \cdot 1_{\{|u - \varphi| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Теперь из утверждения (iv') вытекает, что функция u есть энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Значит, предложение (ii) справедливо.

Предложение (iii) справедливо, поскольку оно совпадает с утверждением (v').

Перейдем к доказательству справедливости предложения (iv). Пусть $k > s_{m+1}$. Положим

$$\tilde{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha_{m+1}/3\}, \quad \tilde{B}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k^{-1/2n}\},$$

и пусть H – функция на $\tilde{B}_k$ такая, что для любого $x \in \tilde{B}_k \setminus \{0\}$

$$H(x) = \frac{1}{|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-2+1/n}.$$

Легко видеть, что функция H суммируема на $\tilde{B}_k$ и

$$\int_{\tilde{B}_k} H dx \leq 3n\kappa_n (\ln k)^{-(n-1)/n}. \quad (1.4.40)$$

Оценим интеграл функции $|f|$ по множеству $\tilde{B} \cap \tilde{B}_k$. Пусть $x \in (\tilde{B} \cap \tilde{B}_k) \setminus \{0\}$. Следовательно, $0 < |x| \leq \alpha_{m+1}/3$. Тогда в силу (1.4.39) и

предположения 2) имеем $|f(x)| \leq n\mu^{p-1}|x|^{1-n} \Phi_{m+1}(|x|)$, а в силу леммы 1.4.2

$$\Phi_{m+1}(|x|) \leq \frac{3(m+1)}{r|x|} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-2} [g_{m+1}(|x|)]^{-(n-1)/n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1}.$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$|f(x)| \leq 3n(m+1)\mu^{p-1}(n-p)^{p-2} \times |x|^{-n} [g_{m+1}(|x|)]^{-(n-1)/n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1}. \quad (1.4.41)$$

Получим подходящую оценку для $g_{m+1}(|x|)$. Поскольку $x \in \tilde{B}_k$, имеем $\ln \ln(1/|x|) \geq \ln \ln k - \ln(2n)$. Кроме того, $\ln(1/\alpha_{m+1}) > 2n$. Отсюда и из предыдущего неравенства, учитывая, что $|x| < \alpha_{m+1}$, получаем $b_2(1/|x|) \geq b_2(k)/2$. Используя это неравенство и исходную оценку для α_{m+1} , индукцией по j устанавливаем, что для любого $j \in \{2, \dots, m+1\}$ $b_j(1/|x|) \geq b_j(k)/2$. Тогда

$$g_{m+1}(|x|) \geq 2^{-m} \left[\prod_{j=2}^{m+1} b_j(k) \right] \ln \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда и из (1.4.41) следует, что

$$|f(x)| \leq 3n(m+1)2^m \mu^{p-1} (n-p)^{p-2} \left[\prod_{j=2}^{m+1} b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} H(x).$$

Полученный результат и неравенство (1.4.40) позволяют заключить, что

$$\int_{\tilde{B} \cap \tilde{B}_k} |f| dx \leq 9n^2 \varkappa_n(m+1) 2^m \mu^{p-1} (n-p)^{p-2} \left[\prod_{j=1}^{m+1} b_j(k) \right]^{-(n-1)/n}. \quad (1.4.42)$$

Покажем, что

$$\{|f| > k\} \subset \tilde{B} \cap \tilde{B}_k. \quad (1.4.43)$$

Действительно, пусть $x \in \{|f| > k\}$. Значит,

$$k < |f(x)|. \quad (1.4.44)$$

Если $x = 0$, то очевидно, что $x \in \tilde{B} \cap \tilde{B}_k$. Пусть $x \neq 0$. Ясно, что $|x| < \alpha_{m+1}$. Предположим, что $|x| > \alpha_{m+1}/3$. Тогда в силу леммы 1.4.3 имеем $\Phi_{m+1}(|x|) \leq (3/\alpha_{m+1})^{p+2} \tau_{m+1}^p$. Отсюда и из (1.4.39) вытекает, что

$|f(x)| \leq n\mu^{p-1}(3/\alpha_{m+1})^{n+p+1}\tau_{m+1}^p$. Из этого неравенства, учитывая (1.4.38) и неравенство $s_{m+1} < k$, получаем, что $|f(x)| < k$. Тем самым имеем противоречие с (1.4.44). Следовательно, $|x| \leq \alpha_{m+1}/3$. Значит, $x \in \tilde{B}$. Кроме того, в силу леммы 1.4.2 и неравенства $g_{m+1}(|x|) > 1$ имеем

$$\Phi_{m+1}(|x|) \leq 3(m+1)(n-p)^{p-2}|x|^{-1} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1}.$$

Отсюда и из (1.4.39) вытекает, что

$$|f(x)| \leq 3n(m+1)\mu^{p-1}(n-p)^{p-2}|x|^{-n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1}. \quad (1.4.45)$$

Заметим, что в силу исходной оценки для α_{m+1} имеем $\ln(1/|x|) > n^2(m+1)/(n-p)$. Учитывая это, из (1.4.44) и (1.4.45) выводим, что

$$k < 3\mu^{p-1}n^{p-2}|x|^{-n}. \quad (1.4.46)$$

Кроме того, поскольку $\alpha_{m+1} < \min\{1/n, 1/s_{m+1}\}$, используя (1.4.38), получаем $4(\mu n)^{2(p-1)} < s_{m+1} < k$. Отсюда и из (1.4.46) вытекает, что $|x|^n < k^{-1/2}$. Следовательно, $x \in \tilde{B}_k$, и окончательно получаем, что $x \in \tilde{B} \cap \tilde{B}_k$. Тем самым включение (1.4.43) установлено.

Заметим, что

$$9n^2\kappa_n(m+1)2^m\mu^{p-1}(n-p)^{p-2} < c. \quad (1.4.47)$$

Это верно ввиду исходной оценки для α_{m+1} , (1.4.37) и неравенства $p > 3/2$.

Из (1.4.42), (1.4.43) и (1.4.47) выводим оценку сверху для интеграла функции $|f|$ по множеству $\{|f| > k\}$, которая позволяет заключить, что предложение (iv) справедливо.

Наконец, не останавливаясь на этом подробно, отметим, что справедливо следующее предложение:

(v) для любого $t \in (0, (n-1)/n)$ имеем $f[\ln(1+|f|)]^t \in L^1(\Omega)$.

Замечание 1.4.2. Из предложений (ii)–(iv) примера 1.4.3 следует, что условие теоремы 1.4.3 относительно функции f , вообще говоря, нельзя ослабить, не нарушая свойство принадлежности энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) пространству $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$. Минимальное ослабление условия теоремы 1.4.3 относительно функции f (т.е. допущение $\sigma = (n-1)/n$) приводит, как показывает пример 1.4.3, к ситуациям, в которых энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5) (единственное в силу теоремы 1.1.1) не принадлежит $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$, и существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), также не принадлежащее $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$.

Замечание 1.4.3. В силу предложения 1.4.1 выполнение условия теоремы 1.4.3 относительно функции f влечет справедливость свойства: для любого $t \in (0, (n-1)/n)$ функция $f[\ln(1+|f|)]^t$ принадлежит $L^1(\Omega)$. Обратное, как следует из предложений (ii), (iii) и (v) примера 1.4.3 и теоремы 1.4.3, вообще говоря, не верно.

В заключение раздела отметим, что предложения 1.4.1–1.4.3 и примеры 1.4.1–1.4.3 опубликованы в статье [69].

1.5. Случай принадлежности правой части уравнения пространствам Лебега, близким к $L^1(\Omega)$

Рассмотрим сначала ряд вспомогательных результатов, полезных для основных целей данного раздела.

Лемма 1.5.1. Пусть v – измеримая функция на Ω , $\alpha > 0$ и $M > 0$. Пусть для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$\text{meas}\{|v| \geq k\} \leq Mk^{-\alpha}. \quad (1.5.1)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \alpha)$ имеем $v \in L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\lambda \in (0, \alpha)$, и пусть φ – функция на $[1, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [1, +\infty)$ $\varphi(s) = Ms^{\lambda-\alpha}$. Ясно, что функция φ неотрицательна, невозрастающая и измеримая. Кроме того, она удовлетворяет неравенству (1.2.1). Наконец, в силу (1.5.1) для любого $k \geq 1$ имеем $\text{meas}\{|v| \geq k\} \leq k^{-\lambda}\varphi(k)$. Теперь, применяя лемму 1.2.1, получаем, что $v \in L^\lambda(\Omega)$. $\square$

Лемма 1.5.2. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $k > 0$. Тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx = \int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx.$$

Этот результат является простым следствием предложения 1.1.1.

Лемма 1.5.3. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$ и $c > 0$. Пусть для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} |\nabla T_l(u)|^\lambda dx \leq c. \quad (1.5.2)$$

Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. В силу предложения 1.1.1 $|\nabla T_l(u)| \rightarrow |\delta u|$ п. в. на Ω . Тогда, учитывая (1.5.2) и применяя лемму Фату, получаем, что $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$. Теперь из предложения 1.1.2 вытекает, что $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. $\square$

Далее, для любых $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $k > 0$ положим

$$I(u, k) = \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx.$$

Лемма 1.5.4. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $k > 0$. Тогда

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_{n,p}^{p^*} k^{-p^*} [I(u, k)]^{p^*/p}. \quad (1.5.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая определение функции T_k , а именно то, что $|T_k(s)| = k$, если $|s| \geq k$, получаем неравенство

$$k^{p^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx. \quad (1.5.4)$$

Поскольку $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, в силу (1.1.13) имеем

$$\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \leq c_{n,p}^{p^*} [I(u, k)]^{p^*/p}.$$

Отсюда и из (1.5.4) выводим (1.5.3). $\square$

Лемма 1.5.5. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $k, k_1 > 0$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_{n,p}^{p^*} k_1^{-p^*} [I(u, k_1)]^{p^*/p} + k^{-p} I(u, k_1). \quad (1.5.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $G = \{|u| < k_1, |\delta u| \geq k\}$. Ясно, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } G, \quad (1.5.6)$$

причем в силу леммы 1.5.4

$$\text{meas}\{|u| \geq k_1\} \leq c_{n,p}^{p^*} k_1^{-p^*} [I(u, k_1)]^{p^*/p}. \quad (1.5.7)$$

Оценим меру множества G . Предположим, что $\text{meas } G > 0$. Ввиду предложения 1.1.1 имеем $|\nabla T_{k_1}(u)| = |\delta u|$ п. в. на $\{|u| < k_1\}$. Тогда $k \leq |\nabla T_{k_1}(u)|$ п. в. на G и, следовательно,

$$\text{meas } G \leq k^{-p} I(u, k_1). \quad (1.5.8)$$

Очевидно, что это неравенство справедливо и в случае $\text{meas } G = 0$. Из (1.5.6)–(1.5.8) выводим (1.5.5). $\square$

Лемма 1.5.6. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда для любого $k > 0$ имеем

$$c_2 I(u, k) \leq \int_{\Omega} f T_k(u) dx.$$

Этот результат есть простое следствие определения 1.1.4, неравенства (1.1.2) и леммы 1.5.2.

Замечание 1.5.1. Если u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5), то в силу лемм 1.5.4–1.5.6 для любого $k > 0$ имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_{n,p}^{p^*} (\|f\|_{L^1(\Omega)}/c_2)^{p^*/p} k^{-q}, \quad (1.5.9)$$

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq [c_{n,p}^{p^*} (\|f\|_{L^1(\Omega)}/c_2)^{p^*/p} + \|f\|_{L^1(\Omega)}/c_2] k^{-r}. \quad (1.5.10)$$

Эти оценки установлены в [13]. Из них и леммы 1.5.1 вытекает теорема 1.1.3.

Как мы увидим ниже, при дополнительной информации относительно суммируемости функции f для энтропийного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) справедливы более сильные оценки по сравнению с (1.5.9) и (1.5.10), вследствие чего это решение имеет лучшие свойства суммируемости в сравнении с описанными в теореме 1.1.3. Существенную роль в обосновании и уточнении сказанного играют следующие две леммы.

Лемма 1.5.7. Пусть $1 < m < p^*/(p^* - 1)$ и $\psi \in L^m(\Omega)$, $\psi \geq 0$ на Ω . Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, и пусть для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq \int_{\Omega} \psi |T_k(u)| dx. \quad (1.5.11)$$

Тогда существуют положительные числа M_1 и M_2 , зависящие только от n, p, m и $\|\psi\|_{L^m(\Omega)}$, такие, что для любого $k > 0$ имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq M_1 k^{-nm(p-1)/(n-mp)}, \quad (1.5.12)$$

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq M_2 k^{-m^*(p-1)}. \quad (1.5.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что в силу неравенства $m < p^*/(p^* - 1)$ имеем $mp < n$ и $p^*(m - 1) < m$.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{m-1}{m} p^*, \quad m_2 = \frac{p^*(m-1)}{mp}, \quad m_3 = \frac{n-mp}{n-m}, \quad \theta = \frac{nm(p-1)}{n-mp}.$$

Ясно, что $0 < m_1 < 1$ и $0 < m_2 < 1$. Кроме того, имеем

$$p^* \left[1 - \frac{m_1}{p(1-m_2)} \right] = \theta, \quad \theta m_3 = p - \frac{m_1 m_3}{1-m_2}. \quad (1.5.14)$$

Через c'_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, m и $\|\psi\|_{L^m(\Omega)}$.

Зафиксируем $k > 0$. Используя (1.5.11), неравенство Гельдера и (1.1.13), получаем

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq k^{m_1} \int_{\Omega} \psi |T_k(u)|^{1-m_1} dx \\ &\leq k^{m_1} \|\psi\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{(m-1)/m} \leq c'_1 k^{m_1} [I(u, k)]^{m_2}. \end{aligned}$$

Теперь можно заключить, что

$$I(u, k) \leq c'_2 k^{m_1/(1-m_2)}. \quad (1.5.15)$$

Отсюда и из леммы 1.5.4, учитывая первое из равенств (1.5.14), выводим, что

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c'_3 k^{-\theta}. \quad (1.5.16)$$

Далее, положим $k_1 = k^{m_3}$. Аналогично (1.5.15) имеем $I(u, k_1) \leq c'_2 k_1^{m_1/(1-m_2)}$. Следовательно, $I(u, k_1) \leq c'_2 k^{m_1 m_3/(1-m_2)}$. Отсюда и из леммы 1.5.5, учитывая равенства (1.5.14), выводим, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c'_4 k^{-\theta m_3}. \quad (1.5.17)$$

Неравенства (1.5.16) и (1.5.17) приводят к заключению леммы. $\square$

Лемма 1.5.8. Пусть $b', b'' > 0$, $1 < m < p^*/(p^* - 1)$, $\psi \in L^m(\Omega)$, $\psi \geq 0$ на Ω , и $m^*(p-1) \geq 1$. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, и пусть для любого $k > 0$ справедливы неравенства

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq b' k^{-nm(p-1)/(n-mp)}, \quad (1.5.18)$$

$$\int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq b'' \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi dx. \quad (1.5.19)$$

Тогда $u \in \mathring{W}^{1,m^*(p-1)}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\lambda = m^*(p-1)$. В силу условий леммы относительно m имеем $\lambda \in [1, p)$. Заметим еще, что

$$\lambda^* = \frac{nm(p-1)}{n-mp}, \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{mp}\right) = \frac{1}{p}. \quad (1.5.20)$$

Положим $\lambda_1 = \lambda^*(p-\lambda)/\lambda$. Имеем $\lambda_1 \in (0, 1)$ и

$$(1-\lambda_1) \frac{m}{m-1} = \lambda^*. \quad (1.5.21)$$

Через c'_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, b', b'', m, \|\psi\|_{L^m(\Omega)}$ и $\text{meas } \Omega$.

Зафиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$. Используя неравенство Гельдера, (1.5.18), первое из равенств (1.5.20) и (1.5.21), получаем

$$\begin{aligned} N^{1-\lambda_1} \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx &\leq N^{1-\lambda_1} (\text{meas } \{|u| \geq N\})^{(m-1)/m} \|\psi\|_{L^m(\Omega)} \\ &\leq (b' + 1) N^{1-\lambda_1-\lambda^*(m-1)/m} \|\psi\|_{L^m(\Omega)} = c'_1. \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

Далее, положим

$$I_N = \int_{\Omega} |\nabla T_N(u)|^\lambda \, dx, \quad J_N = \int_{\Omega} \frac{|\nabla T_N(u)|^p}{(1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1}} \, dx.$$

В силу неравенства Гельдера и определения λ_1 имеем

$$\begin{aligned} I_N &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla T_N(u)|^\lambda}{(1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1 \lambda/p}} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1 \lambda/p} \, dx \\ &\leq J_N^{\lambda/p} \left[\int_{\Omega} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda^*} \, dx \right]^{(p-\lambda)/p}. \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

Оценим J_N . Используя предложение 1.1.1 и (1.5.19), получаем

$$\begin{aligned} J_N &\leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p \, dx \\ &\leq b'' \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi \, dx. \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

Учитывая (1.5.21) и (1.5.22), сумму в правой части неравенства (1.5.24) оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi \, dx \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \sum_{l=k}^N \int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx + \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \right) \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx \right) \sum_{k=1}^l \frac{1}{k^{\lambda_1}} + \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \right) \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
&\leq \frac{2}{1-\lambda_1} \sum_{l=1}^N l^{1-\lambda_1} \int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx + \frac{2}{1-\lambda_1} N^{1-\lambda_1} \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
&\leq \frac{2}{1-\lambda_1} \int_{\Omega} \psi (1 + |T_N(u)|)^{1-\lambda_1} dx + \frac{2c'_1}{1-\lambda_1} \\
&\leq c'_2 \left[\int_{\Omega} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda^*} dx \right]^{(m-1)/m} + c'_3.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.5.23) и (1.5.24) вытекает, что

$$I_N \leq c'_4 \left(\int_{\Omega} |T_N(u)|^{\lambda^*} dx \right)^{1-\lambda/mp} + c'_4. \quad (1.5.25)$$

В свою очередь, в силу (1.1.13) имеем

$$\int_{\Omega} |T_N(u)|^{\lambda^*} dx \leq c_{n,\lambda}^{\lambda^*} I_N^{\lambda^*/\lambda}. \quad (1.5.26)$$

Из (1.5.25) и (1.5.26), используя второе из равенств (1.5.20) и неравенство Юнга, выводим, что

$$I_N \leq c'_4 (c_{n,\lambda} + 1) I_N^{1/p} + c'_4 \leq \frac{1}{p} I_N + \frac{p-1}{p} c'_5$$

и, следовательно, $I_N \leq c'_5$.

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla T_N(u)|^{\lambda} dx \leq c'_5.$$

Отсюда и из леммы 1.5.3 вытекает, что $u \in \mathring{W}^{1,m^*(p-1)}(\Omega)$. $\square$

Перейдем к основным результатам раздела.

Теорема 1.5.1. Пусть $1 < m < p^*/(p^* - 1)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда существуют положительные постоянные C_1 и C_2 , зависящие только от n, p, c_2, m и $\|f\|_{L^m(\Omega)}$, такие, что для любого $k > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|u| \geq k\} &\leq C_1 k^{-nm(p-1)/(n-mp)}, \\ \text{meas}\{|\delta u| \geq k\} &\leq C_2 k^{-m^*(p-1)}. \end{aligned}$$

Этот результат есть следствие лемм 1.5.6 и 1.5.7.

Теорема 1.5.2. Пусть $1 < m < p^*/(p^* - 1)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда справедливы утверждения:

- 1) для любого $\lambda \in (0, nm(p-1)/(n-mp))$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любого $\lambda \in (0, m^*(p-1))$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$.

Этот результат есть следствие теоремы 1.5.1 и леммы 1.5.1.

Теорема 1.5.3. Пусть $1 < m < p^*/(p^* - 1)$, $m^*(p-1) \geq 1$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда $u \in \mathring{W}^{1,m^*(p-1)}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1.5.1 существует $b' > 0$ такое, что для любого $k > 0$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq b' k^{-nm(p-1)/(n-mp)}. \quad (1.5.27)$$

Кроме того, в силу изложенного в доказательстве теоремы 1.1.6 для любых $k, l > 0$ имеем

$$c_2 \int_{\{k \leq |u| < k+l\}} |\delta u|^p dx \leq l \int_{\{|u| > k\}} |f| dx.$$

Отсюда, учитывая предложение 1.1.1 и лемму 1.5.6, получаем, что для любого $k > 0$

$$\int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq \frac{1}{c_2} \int_{\{|u| \geq k-1\}} |f| dx. \quad (1.5.28)$$

Теперь, принимая во внимание оценки (1.5.27) и (1.5.28), из леммы 1.5.8 выводим, что $u \in \mathring{W}^{1,m^*(p-1)}(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.5.4. Пусть $1 < t < p^*/(p^* - 1)$, $t^*(p - 1) \geq 1$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\dot{W}^{1,t^*(p-1)}(\Omega)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.1.1 существует энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Обозначим это решение через u . По теореме 1.5.3 имеем $u \in \dot{W}^{1,t^*(p-1)}(\Omega)$. Следовательно, $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Отсюда и из теоремы 1.1.2 вытекает, что u – слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5). $\square$

Заметим, что если $p \geq 2 - 1/n$ и $t \in [1, n)$, то $t^*(p - 1) \geq 1$. Учитывая это, из теоремы 1.5.4 выводим следующий результат.

Теорема 1.5.5. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, $1 < t < p^*/(p^* - 1)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\dot{W}^{1,t^*(p-1)}(\Omega)$.

Такой же результат получен в [24] (теорема 3) с той лишь разницей, что вместо условия $p \geq 2 - 1/n$ там предполагалось выполнение неравенства $p > 2 - 1/n$.

Кроме теоремы 1.5.5, несколько усиливающей упомянутый результат статьи [24], из теоремы 1.5.4 можно вывести некоторое утверждение о существовании слабого решения задачи (1.1.4), (1.1.5) и в случае $p < 2 - 1/n$.

В связи с этим прежде всего заметим, что $n/(np - n + 1) < p^*/(p^* - 1)$ и справедливо следующее утверждение: если $p < 2 - 1/n$, то $1 < n/(np - n + 1)$.

Теорема 1.5.6. Пусть $p < 2 - 1/n$, $n/(np - n + 1) \leq t < p^*/(p^* - 1)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5), принадлежащее $\dot{W}^{1,t^*(p-1)}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что $1 < t < p^*/(p^* - 1)$. Кроме того, ввиду неравенства $n/(np - n + 1) \leq t$ имеем $t^*(p - 1) \geq 1$. Теперь, применяя теорему 1.5.4, получаем требуемое утверждение. $\square$

Отметим, что леммы 1.5.7 и 1.5.8 доказаны в работе [65], причем при установлении леммы 1.5.8 несколько модифицирован прием, предложенный в доказательстве теоремы 3 из [24]. Теоремы 1.5.2 и 1.5.3 и, по существу, теорема 1.5.6 также установлены в [65].

Отметим еще, что с использованием другой техники аналогии теорем 1.5.1 и 1.5.3 относительно энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью получены в [4].

В заключение раздела рассмотрим случай принадлежности правой части уравнения (1.1.4) пространству Лебега с показателем $p^*/(p^* - 1)$. Как мы увидим, в этом случае энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5) принадлежит пространству $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$. Это свойство сильнее свойства того же решения при условиях теоремы 1.5.3, поскольку из неравенства $1 < t < p^*/(p^* - 1)$ вытекает, что $t^*(p - 1) < p$.

Теорема 1.5.7. Пусть $f \in L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$;
- 2) u есть слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5);
- 3) u есть обобщенное решение задачи (1.1.4), (1.1.5).

Доказательство. Обозначим через b норму функции f в $L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$. Пусть $k > 0$. Используя лемму 1.5.6, неравенство Гельдера и (1.1.13), получаем

$$c_2 I(u, k) \leq \int_{\Omega} f T_k(u) dx \leq b \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq b c_{n,p} [I(u, k)]^{1/p}.$$

Следовательно, $I(u, k) \leq (b c_{n,p}/c_2)^{p/(p-1)}$.

Полученный результат и лемма 1.5.3 приводят к заключению, что $u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Поэтому в силу теоремы 1.1.2 u – слабое решение задачи (1.1.4), (1.1.5). Следовательно,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (1.5.29)$$

Заметим, что ввиду (1.1.1) и включения $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u) \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$. Учитывая это, из (1.5.29) выводим, что для любой функции $\varphi \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Значит, u – обобщенное решение задачи (1.1.4), (1.1.5). $\square$

Наконец, заметим, что в случае $f \in L^m(\Omega)$ с $m > p^*/(p^* - 1)$ повышение суммируемости обобщенного решения задачи (1.1.4), (1.1.5) устанавливается методом Стампаккья. По этому поводу см., например, [29, 60, 126].

1.6. О сходимости функций из $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих специальным интегральным неравенствам

Рассмотрим ряд результатов, которые будут существенно использованы в разделах 1.7 и 1.8.

Лемма 1.6.1. Пусть u — измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\gamma > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\gamma}. \quad (1.6.1)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |u|^\lambda dx \leq 2^{\gamma+(\gamma+\lambda)/(\gamma-\lambda)} M + \text{meas } \Omega. \quad (1.6.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\lambda \in (0, \gamma)$ и положим $\lambda_1 = 2/(\gamma - \lambda)$. В силу (1.6.1) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{k^{\lambda_1} \leq |u| < (k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda dx \leq 2^{\gamma+\lambda_1\lambda} Mk^{-2}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$ и верна оценка (1.6.2). $\square$

По существу, лемма 1.6.1 есть уточнение леммы 1.5.1, связанное с оценкой интегралов рассматриваемых функций.

Лемма 1.6.2. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $M \geq 1$ и $0 < \theta < p$. Пусть для любого $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u| < k\}} |\delta u|^p dx \leq Mk^\theta. \quad (1.6.3)$$

Тогда для любого $k \geq 1$ имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_{n,p}^* M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)}, \quad (1.6.4)$$

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq (c_{n,p}^* + 1) M^{n/(n-\theta)} k^{-n(p-\theta)/(n-\theta)}. \quad (1.6.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k \geq 1$. В силу (1.6.3) и леммы 1.5.2 имеем $I(u, k) \leq Mk^\theta$. Отсюда и из леммы 1.5.4 выводим неравенство (1.6.4).

Далее, положим $k_1 = M^{1/(n-\theta)} k^{(n-p)/(n-\theta)}$. В силу (1.6.3) и леммы 1.5.2 имеем $I(u, k_1) \leq M k_1^\theta$. Отсюда и из леммы 1.5.5 выводим неравенство (1.6.5). $\square$

Из лемм 1.6.1 и 1.6.2 вытекает такой результат.

Лемма 1.6.3. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $M \geq 1$ и $0 < \theta < p$. Пусть для любого $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p dx \leq M k^\theta.$$

Пусть $0 < \lambda < n(p - \theta)/(n - \theta)$. Тогда

$$\int_{\Omega} |u|^{\lambda(n-\theta)/(n-p)} dx \leq C_1 M^{n/(n-p)}, \quad \int_{\Omega} |\delta u|^\lambda dx \leq C_2 M^{n/(n-\theta)},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие только от n , p , $\text{meas } \Omega$, θ и λ .

Первый из основных результатов данного раздела состоит в следующем.

Теорема 1.6.1. Пусть $M \geq 1$, $0 < \theta < p$ и $\{u_j\} \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Пусть для любых $k \geq 1$ и $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u_j|<k\}} |\nabla u_j|^p dx \leq M k^\theta. \quad (1.6.6)$$

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_{j_l} \rightarrow u \text{ н. в. на } \Omega, \quad (1.6.7)$$

$$\forall k > 0 \quad T_k(u_{j_l}) \rightarrow T_k(u) \text{ слабо в } \mathring{W}^{1,p}(\Omega). \quad (1.6.8)$$

Доказательство. Пусть $k > 0$ и $j \in \mathbb{N}$. Имеем $T_k(u_j) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда, используя (1.6.6), получаем

$$\|T_k(u_j)\|_{\mathring{W}^{1,p}(\Omega)}^p \leq k^p \text{meas } \Omega + n \int_{\{|u_j|<k\}} |\nabla u_j|^p dx \leq (nM + \text{meas } \Omega) (k+1)^p.$$

Следовательно, для любого $k > 0$ последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда существуют возрастающая последовательность

$\{j'_m\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_k\} \subset \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u_{j'_m}) \rightarrow w_k$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$. Отсюда вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u_{j'_m}) \rightarrow w_k \text{ сильно в } L^1(\Omega). \quad (1.6.9)$$

Далее, в силу (1.6.6) и леммы 1.6.2 для любых $k \geq 1$ и $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\text{meas}\{|u_j| \geq k\} \leq c_{n,p}^{p^*} M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)}. \quad (1.6.10)$$

Зафиксируем теперь $t > 0$ и $\varepsilon > 0$, и пусть $k \in \mathbb{N}$, причем

$$c_{n,p}^{p^*} M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)} \leq \varepsilon/4. \quad (1.6.11)$$

В силу (1.6.9) существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$, имеем

$$\int_{\Omega} |T_k(u_{j'_m}) - w_k| dx \leq \varepsilon t/4. \quad (1.6.12)$$

Зафиксируем $m, l \in \mathbb{N}$, $m, l \geq m_0$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|u_{j'_m} - u_{j'_l}| \geq t\} &\leq \text{meas}\{|u_{j'_m}| \geq k\} + \text{meas}\{|u_{j'_l}| \geq k\} \\ &\quad + \text{meas}\{|T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})| \geq t\}. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

В силу (1.6.10) и (1.6.11) имеем

$$\text{meas}\{|u_{j'_m}| \geq k\} + \text{meas}\{|u_{j'_l}| \geq k\} \leq \varepsilon/2. \quad (1.6.14)$$

Кроме того, используя (1.6.12), получаем

$$\text{meas}\{|T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_{\Omega} |T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})| dx \leq \varepsilon/2.$$

Отсюда и из (1.6.13) и (1.6.14) выводим, что $\text{meas}\{|u_{j'_m} - u_{j'_l}| \geq t\} \leq \varepsilon$.

Значит, последовательность $\{u_{j'_m}\}$ фундаментальна по мере, а тогда в силу теоремы Ф. Рисса существует измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $u_{j'_m} \rightarrow u$ по мере. Следовательно, существует возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$, для которой справедливо утверждение (1.6.7).

Далее, пусть $k > 0$. Так как последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ и в силу (1.6.7) $T_k(u_{j_l}) \rightarrow T_k(u)$ сильно в $L^p(\Omega)$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ и $T_k(u_{j_l}) \rightarrow T_k(u)$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \overset{\circ}{T}^{1,p}(\Omega)$ и справедливо утверждение (1.6.8). $\square$

Отметим, что основные идеи доказательства теоремы 1.6.1 содержатся в [13, теорема 6.1].

Прежде чем перейти ко второму из основных результатов раздела, приведем одно простое вспомогательное утверждение.

Лемма 1.6.4. Пусть $\mu \in L^1(\Omega)$, $\mu > 0$ п. в. на Ω . Пусть для любого $j \in \mathbb{N}$ E_j – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $E_j \subset \Omega$. Пусть

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} \mu dx = 0. \quad (1.6.15)$$

Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{meas } E_j = 0. \quad (1.6.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $t > 0$ положим $G_t = \{\mu \leq t\}$. Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{meas } G_t = 0. \quad (1.6.17)$$

Действительно, предположим, что семейство $\text{meas } G_t$, $t > 0$, не сходится к нулю при $t \rightarrow 0$. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и убывающая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow 0$, такие, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \text{meas } G_{t_i} \geq \varepsilon_0. \quad (1.6.18)$$

Положим $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{t_i}$. Так как для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $G_{t_{i+1}} \subset G_{t_i}$, то $\text{meas } G_{t_i} \rightarrow \text{meas } G$. Отсюда и из (1.6.18) следует, что $\text{meas } G > 0$. Поскольку $\mu > 0$ п. в. на Ω , существует измеримое множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем $\mu(x) > 0$. Пусть $x \in G \setminus E$. Тогда $\mu(x) > 0$. С другой стороны, в силу определения множеств G и G_{t_i} для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $\mu(x) \leq t_i$. Отсюда, учитывая, что $t_i \rightarrow 0$, приходим к неравенству $\mu(x) \leq 0$. Полученное противоречие доказывает, что (1.6.17) верно.

Далее, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (1.6.17) существует $t > 0$ такое, что

$$\text{meas } G_t \leq \varepsilon/2. \quad (1.6.19)$$

В силу (1.6.15) существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, имеем

$$\int_{E_j} \mu dx \leq \varepsilon t/2. \quad (1.6.20)$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{meas } E_j &= \text{meas}(E_j \cap \{\mu \leq t\}) + \text{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}) \\ &\leq \text{meas } G_t + \text{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}). \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

Учитывая, что $\mu > 0$ п. в. на Ω , получаем

$$\int_{E_j} \mu dx \geq \int_{E_j \cap \{\mu > t\}} \mu dx \geq t \operatorname{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}).$$

Отсюда и из (1.6.19)–(1.6.21) следует, что $\operatorname{meas} E_j \leq \varepsilon$. Теперь можно заключить, что (1.6.16) верно. $\square$

Теорема 1.6.2. Пусть Φ – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и выполняются условия:

(i) для любого $k > 0$ существуют $\tilde{c}_k > 0$ и $\tilde{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\tilde{g}_k \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k$, и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ имеем $0 \leq \Phi(x, s, \xi, \xi') \leq \tilde{c}_k(|\xi|^p + |\xi'|^p) + \tilde{g}_k(x)$;

(ii) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi(x, s, \xi, \xi') > 0$.

Пусть, далее, $\{u_j\} \subset \dot{W}^{1,p}(\Omega)$, $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$, $u_j \rightarrow u$ по мере,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{meas}\{|u_j| \geq m\} = 0, \quad (1.6.22)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{meas}\{|\nabla u_j| \geq m\} = 0. \quad (1.6.23)$$

Пусть, наконец, существуют функции $\nu_1, \nu_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такие, что $\nu_2(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ и для любых $m \geq 1$ и $k \in (0, \nu_1(m)]$ имеем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\{|u_j| < m, |u| < m, |u_j - u| < k\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx \leq \nu_2(k). \quad (1.6.24)$$

Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u_j \rightarrow \delta_i u$ по мере.

Доказательство. Пусть для любого $x \in \Omega$ Φ_x – функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(s, \xi, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеем $\Phi_x(s, \xi, \xi') = \Phi(x, s, \xi, \xi')$. Поскольку Φ – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и выполняется условие (ii), существует измеримое множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что: для любого $x \in \Omega \setminus E$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; для любых $x \in \Omega \setminus E$, $s \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi_x(s, \xi, \xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$ и $m > t$

$$G_{t,m} = \{(s, \xi, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |s| \leq m, |\xi| \leq m, |\xi'| \leq m, |\xi - \xi'| \geq t\}.$$

Очевидно, что для любых $t > 0$ и $m > t$ множество $G_{t,m}$ непусто, замкнуто и ограничено.

Пусть для произвольных $t > 0$ и $m > t$ $\mu_{t,m}$ – функция на Ω такая, что

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min_{G_{t,m}} \Phi_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E. \end{cases}$$

Зафиксируем $t > 0$ и $m > t$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mu_{t,m} > 0 \quad \text{на } \Omega \setminus E. \quad (1.6.25)$$

Кроме того, в силу условия (i) имеем

$$\mu_{t,m} \leq 2\tilde{c}_m m^p + \tilde{g}_m \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (1.6.26)$$

Докажем, что функция $\mu_{t,m}$ измерима. Пусть $\mathcal{R}$ – множество всех $(s, \xi, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ таких, что s рационально и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ ξ_i и ξ'_i рациональны. Положим $G_{t,m}^{(0)} = G_{t,m} \cap \mathcal{R}$. Имеем $G_{t,m}^{(0)} \neq \emptyset$ и $G_{t,m}^{(0)}$ плотно в $G_{t,m}$. Действительно, пусть $(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}$, и пусть $\varepsilon > 0$. Предположим, что $|\xi - \xi'| > t$. Тогда, взяв λ такое, что

$$\max \left(1 - \frac{\varepsilon}{2m}, \frac{t}{|\xi - \xi'|} \right) < \lambda < 1,$$

и положив $s' = \lambda s$, $\eta = \lambda \xi$ и $\eta' = \lambda \xi'$, получим неравенства

$$|s'| < m, \quad |\eta| < m, \quad |\eta'| < m, \quad |\eta - \eta'| > t, \quad (1.6.27)$$

$$|s' - s|^2 + |\eta - \xi|^2 + |\eta' - \xi'|^2 < \varepsilon^2. \quad (1.6.28)$$

Предположим теперь, что $|\xi| < m$ и $|\xi'| < m$. Тогда, взяв λ_1 и λ такие, что

$$\max(|\xi|, |\xi'|) < \lambda_1 < m, \quad 1 < \lambda < \min \left(2, \frac{m}{\lambda_1}, 1 + \frac{\varepsilon}{2m} \right),$$

и положив $s' = (2 - \lambda)s$, $\eta = \lambda \xi$ и $\eta' = \lambda \xi'$, снова получим неравенства (1.6.27) и (1.6.28). Остается рассмотреть следующий случай: $|\xi - \xi'| = t$ и верно хотя бы одно из равенств $|\xi| = m$ и $|\xi'| = m$. Пусть для определенности $|\xi| = m$. Тогда имеем $m^2 - t^2 = |\xi|^2 - |\xi - \xi'|^2 = 2(\xi, \xi') - |\xi'|^2$. Отсюда, учитывая, что $m > t$, получаем $(\xi, \xi') > 0$. Это же неравенство имеем, если $|\xi'| = m$. Следовательно, существует $j \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\xi_j \xi'_j > 0$. Возьмем λ такое, что

$$0 < \lambda < \min \left(1, \frac{|\xi_j|}{2}, \frac{|\xi'_j|}{2}, \frac{\varepsilon}{2m}, \frac{\varepsilon}{4} \right),$$

и пусть $s' = (1 - \lambda)s$ и $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$, причем

$$\eta_j = \xi_j - \lambda[2^{(1-\text{sign } \xi_j)/2} \text{sign } \xi_j - \min(0, \text{sign}(\xi_j - \xi'_j))],$$

$$\eta'_j = \xi'_j - \lambda[2^{(1+\text{sign } \xi'_j)/2} \text{sign } \xi'_j + \min(0, \text{sign}(\xi_j - \xi'_j))],$$

а для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, имеем $\eta_i = \xi_i$ и $\eta'_i = \xi'_i$. Тогда имеют место неравенства (1.6.27) и (1.6.28). Итак, в любом случае существует тройка $(s', \eta, \eta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ такая, что имеют место неравенства (1.6.27) и (1.6.28). Пусть теперь $\bar{s}$ — рациональное число такое, что $|\bar{s} - s'| < \min(m - |s'|, \varepsilon/2)$, и пусть $\bar{\xi}, \bar{\xi}' \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $\bar{\xi}_i, \bar{\xi}'_i$ — рациональные числа и

$$|\bar{\xi}_i - \eta_i| < \frac{1}{2n} \min(m - |\eta|, |\eta - \eta'| - t, \varepsilon),$$

$$|\bar{\xi}'_i - \eta'_i| < \frac{1}{2n} \min(m - |\eta'|, |\eta - \eta'| - t, \varepsilon).$$

Тогда $(\bar{s}, \bar{\xi}, \bar{\xi}') \in G_{t,m}^{(0)}$ и, используя (1.6.28), получаем, что $|\bar{s} - s|^2 + |\bar{\xi} - \xi|^2 + |\bar{\xi}' - \xi'|^2 < 4\varepsilon^2$. Таким образом, можно заключить, что множество $G_{t,m}^{(0)}$ плотно в $G_{t,m}$.

Далее, зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \setminus E : \mu_{t,m}(x) < \lambda\} \\ = \bigcup_{(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}^{(0)}} \{x \in \Omega \setminus E : \Phi(x, s, \xi, \xi') < \lambda\}. \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Действительно, пусть y принадлежит левой части равенства (1.6.29). Имеем $y \in \Omega \setminus E$ и $\mu_{t,m}(y) < \lambda$. Тогда в силу определения функции $\mu_{t,m}$ существует тройка $(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}$ такая, что $\Phi_y(s, \xi, \xi') < \lambda$. Следовательно, ввиду непрерывности функции Φ_y на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой тройки $(\tilde{s}, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей неравенству $|\tilde{s} - s|^2 + |\tilde{\xi} - \xi|^2 + |\tilde{\xi}' - \xi'|^2 < \varepsilon^2$, справедливо неравенство $\Phi_y(\tilde{s}, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}') < \lambda$. Тогда в силу плотности множества $G_{t,m}^{(0)}$ в $G_{t,m}$ найдется тройка $(s', \eta, \eta') \in G_{t,m}^{(0)}$, для которой $\Phi_y(s', \eta, \eta') < \lambda$. Последнее неравенство ввиду определения функции Φ_y означает, что $\Phi(y, s', \eta, \eta') < \lambda$. Следовательно, точка y принадлежит правой части равенства (1.6.29). Обратно, пусть y принадлежит правой части равенства (1.6.29). Следовательно, существует тройка $(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}$ такая, что $y \in \Omega \setminus E$ и $\Phi(y, s, \xi, \xi') < \lambda$. Тогда в силу определения функции $\mu_{t,m}$

имеем $\mu_{t,m}(y) \leq \Phi(y, s, \xi, \xi') < \lambda$. Отсюда вытекает, что y принадлежит левой части равенства (1.6.29). Проведенные рассуждения доказывают, что равенство (1.6.29) справедливо.

Поскольку Φ – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, для любой тройки $(s, \xi, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ множество $\{\Phi(\cdot, s, \xi, \xi') < \lambda\}$ измеримо. Отсюда следует, что для любой тройки $(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}^{(0)}$ множество $\{x \in \Omega \setminus E : \Phi(x, s, \xi, \xi') < \lambda\}$ измеримо. Тогда, учитывая, что множество $G_{t,m}^{(0)}$ счетно, из равенства (1.6.29) выводим, что множество $\{\mu_{t,m} < \lambda\}$ измеримо и, значит, функция $\mu_{t,m}$ измерима.

Теперь, учитывая (1.6.25) и (1.6.26), заключаем, что для любых $t > 0$ и $m > t$ функция $\mu_{t,m}$ суммируема на Ω .

Далее, заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{meas}\{|u| \geq m\} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{meas}\{|\delta u| \geq m\} = 0. \quad (1.6.30)$$

Действительно, объединение всех множеств $\{|u| < m\}$, $m \in \mathbb{N}$, есть Ω , и кроме того, $\{|u| < m\} \subset \{|u| < m+1\}$, если $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\text{meas}\{|u| < m\} \rightarrow \text{meas}\Omega$. Отсюда вытекает первое из равенств (1.6.30). Аналогично обосновывается справедливость второго из этих равенств.

Перейдем к непосредственному доказательству заключения теоремы.

Зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. В силу (1.6.22), (1.6.23) и (1.6.30) существует $m > \max(1, t)$ такое, что

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \text{meas}\{|u_j| \geq m\} \leq \varepsilon, \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} \text{meas}\{|\nabla u_j| \geq m\} \leq \varepsilon, \quad (1.6.31)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq m\} \leq \varepsilon, \quad \text{meas}\{|\delta u| \geq m\} \leq \varepsilon. \quad (1.6.32)$$

Для любых $k, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E(k, j) = \{|u_j| \leq m, |u| \leq m, |\nabla u_j| \leq m, |\delta u| \leq m, \\ |u_j - u| < 1/k, |\nabla u_j - \delta u| \geq t\}.$$

Пусть $k, j \in \mathbb{N}$, и пусть $x \in E(k, j) \setminus E$. Имеем

$$|u_j(x)| \leq m, \quad |\nabla u_j(x)| \leq m, \quad |\delta u(x)| \leq m, \quad |\nabla u_j(x) - \delta u(x)| \geq t$$

и, следовательно, $(u_j(x), \nabla u_j(x), \delta u(x)) \in G_{t,m}$. Тогда в силу определения функций $\mu_{t,m}$ и Φ_x имеем $\mu_{t,m}(x) \leq \Phi(x, u_j(x), \nabla u_j(x), \delta u(x))$.

Теперь можно заключить, что для любых $k, j \in \mathbb{N}$

$$\int_{E(k,j)} \mu_{t,m} dx \leq \int_{E(k,j)} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx. \quad (1.6.33)$$

Заметим, что согласно условию (i) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\Phi(x, s, \xi, \xi') \geq 0$. Тогда в силу условия (1.6.24) существует последовательность $\{j_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1/\nu_1(m)$, и $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_k$, имеем

$$\int_{E(k,j)} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx \leq 2\nu_2(1/k). \quad (1.6.34)$$

Из (1.6.33) и (1.6.34) следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1/\nu_1(m)$, и $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_k$,

$$\int_{E(k,j)} \mu_{t,m} dx \leq 2\nu_2(1/k). \quad (1.6.35)$$

Покажем, что

$$\sup_{j \geq j_k} \text{meas } E(k, j) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.6.36)$$

Действительно, предположим, что утверждение (1.6.36) не верно. Тогда существуют $\tau > 0$ и возрастающая последовательность $\{k_l\} \subset \mathbb{N} \cap [1/\nu_1(m), +\infty)$ такие, что для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{j \geq j_{k_l}} \text{meas } E(k_l, j) \geq \tau.$$

Отсюда следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$ найдется $t_l \in \mathbb{N}$, $t_l \geq j_{k_l}$, такое, что

$$\text{meas } E(k_l, t_l) \geq \tau/2. \quad (1.6.37)$$

В силу (1.6.35) для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{E(k_l, t_l)} \mu_{t,m} dx \leq 2\nu_2(1/k_l),$$

и следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{E(k_l, t_l)} \mu_{t,m} dx = 0.$$

Тогда, учитывая, что $\mu_{t,m} \in L^1(\Omega)$ и $\mu_{t,m} > 0$ п.в. на Ω , и используя лемму 1.6.4, получаем $\text{meas } E(k_l, t_l) \rightarrow 0$, что противоречит (1.6.37). Полученное противоречие доказывает, что утверждение (1.6.36) справедливо.

Из этого утверждения следует, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{j \geq j_k} \text{meas } E(k, j) \leq \varepsilon. \quad (1.6.38)$$

В силу сходимости $\{u_j\}$ к u по мере найдется $j'_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j'_k$,

$$\text{meas}\{|u_j - u| \geq 1/k\} \leq \varepsilon. \quad (1.6.39)$$

Зафиксируем теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geq \max(j_k, j'_k)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|\nabla u_j - \delta u| \geq t\} &\leq \text{meas}\{|u_j| > m\} + \text{meas}\{|u| > m\} \\ &\quad + \text{meas}\{|\nabla u_j| > m\} + \text{meas}\{|\delta u| > m\} \\ &\quad + \text{meas}\{|u_j - u| \geq 1/k\} + \text{meas } E(k, j). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (1.6.31), (1.6.32), (1.6.38) и (1.6.39) выводим, что $\text{meas}\{|\nabla u_j - \delta u| \geq t\} \leq 6\varepsilon$. Следовательно, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u_j \rightarrow \delta_i u$ по мере. $\square$

Отметим, что в доказательстве теоремы 1.6.2 использованы некоторые идеи работ [13] и [64].

Следствие 1.6.1. Пусть $0 < \tilde{p} < p^*$, $\tilde{c} > 0$, $\tilde{g} \in L^1(\Omega)$, $\tilde{g} \geq 0$ на Ω , и пусть Φ — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Пусть выполняются следующие условия:

- (i) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ имеем $0 \leq \Phi(x, s, \xi, \xi') \leq \tilde{c}(|s|^{\tilde{p}} + |\xi|^p + |\xi'|^p) + \tilde{g}(x)$;
- (ii) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi(x, s, \xi, \xi') > 0$.

Пусть, далее, $\{u_j\} \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, $u_j \rightarrow u$ слабо в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, и пусть существует $k_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{|u_j - u| < k_0\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \nabla u) dx = 0. \quad (1.6.40)$$

Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u_j \rightarrow D_i u$ по мере.

Доказательство. Очевидно, что функция Φ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1.6.2. Ввиду слабой сходимости $\{u_j\}$ к u в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ имеем $u_j \rightarrow u$ сильно в $L^1(\Omega)$ и, следовательно, $u_j \rightarrow u$ по мере.

Покажем, что последовательность $\{u_j\}$ и функция u удовлетворяют условиям (1.6.22)–(1.6.24).

Поскольку $u_j \rightarrow u$ слабо в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда существует $M > 0$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$

имеем

$$\int_{\Omega} |u_j| dx \leq M, \quad \int_{\Omega} |\nabla u_j| dx \leq M. \quad (1.6.41)$$

В силу неравенства Чебышева для любых $m > 0$ и $j \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u_j| \geq m\} \leq \frac{1}{m} \int_{\Omega} |u_j| dx.$$

Отсюда, учитывая первое из неравенств (1.6.41), получаем (1.6.22). Аналогично, используя неравенство Чебышева для функций $|\nabla u_j|$ и второе из неравенств (1.6.41), устанавливаем (1.6.23).

Далее, пусть $\nu_1, \nu_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – функции такие, что для любого $s \in (0, +\infty)$ $\nu_1(s) = k_0$, $\nu_2(s) = s$. Тогда, учитывая, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ имеем $\Phi(x, s, \xi, \xi') \geq 0$, из (1.6.40) выводим, что для любых $m \geq 1$ и $k \in (0, \nu_1(m))$

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\{|u_j| < m, |u| < m, |u_j - u| < k\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \nabla u) dx \leq \nu_2(k).$$

Значит, условие (1.6.24) выполняется.

Теперь в силу теоремы 1.6.2 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u_j \rightarrow D_i u$ по мере. $\square$

Отметим, что теоремы 1.6.1, 1.6.2 и следствие 1.6.1 установлены в статье [72], и в целом содержание данного раздела опубликовано в той же статье.

1.7. О существовании энтропийных решений уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными

Дадим приложение результатов, представленных в предыдущем разделе, к доказательству существования энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения с вырождающейся коэрцитивностью, нулевым младшим коэффициентом и L^1 -правой частью.

Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для любого $k > 0$ существуют $\bar{c}_k > 0$ и $\bar{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\bar{g}_k \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k$, и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}_k |\xi|^p + \bar{g}_k(x). \quad (1.7.1)$$

Кроме того, будем считать, что существуют $p_1 \in [0, p-1)$ и $c_1 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi) \xi_i \geq \frac{c_1 |\xi|^p}{(1 + |s|)^{p_1}}. \quad (1.7.2)$$

Наконец, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi')](\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (1.7.3)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Будем рассматривать следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1.7.4)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.7.5)$$

Заметим, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, то функция $a_i(x, u, \delta u)(\delta_i u - \delta_i v)$ суммируема на множестве $\{|u - v| < k\}$. Это следует из предложения 1.1.1 и неравенства (1.7.1).

Определение 1.7.1. Энтропийным решением задачи (1.7.4), (1.7.5) будем называть функцию $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ такую, что для любых $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u-v|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u)(\delta_i u - \delta_i v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

Теорема 1.7.1. Существует энтропийное решение задачи (1.7.4), (1.7.5).

Доказательство. Используя неравенства (1.7.1)–(1.7.3), следствие 1.6.1, теорему 2.7 из [89, гл. 2] и лемму В.1 из [60, гл. 2], устанавливаем: если $j \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_j \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} T_j(f) \varphi dx. \quad (1.7.6)$$

Пусть $k \geq 1$ и $j \in \mathbb{N}$. Полагая в (1.7.6) $\varphi = T_k(u_j)$ и используя (1.1.6) и (1.7.2), получаем

$$\int_{\{|u_j| < k\}} |\nabla u_j|^p dx \leq \left\{ \frac{2^{p_1}}{c_1} \|f\|_{L^1(\Omega)} \right\} k^{1+p_1}. \quad (1.7.7)$$

Отсюда и из теоремы 1.6.1 выводим, что существуют возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_{j_l} \rightarrow u \text{ п. в. на } \Omega. \quad (1.7.8)$$

Покажем, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad D_i u_{j_l} \rightarrow \delta_i u \text{ по мере.} \quad (1.7.9)$$

Для этого воспользуемся теоремой 1.6.2. В силу (1.7.8) имеем $u_{j_l} \rightarrow u$ по мере, а в силу (1.7.7) и леммы 1.6.2 справедливы равенства (1.6.22) и (1.6.23). Пусть Φ – функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой четверки $(x, s, \xi, \xi') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x, s, \xi, \xi') = \sum_{i=1}^n [a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi')](\xi_i - \xi'_i).$$

Очевидно, что Φ – функция Каратеодори. Кроме того, из (1.7.1) и (1.7.3) вытекает, что выполняются условия (i) и (ii) теоремы 1.6.2.

Далее, пусть $z \in C^1(\mathbb{R})$, причем $0 \leq z \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $z = 1$ на $[-1, 1]$ и $z = 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$. Положим $c = \max_{\mathbb{R}} |z'|$.

Зафиксируем $m \geq 1$ и $k > 0$. Пусть z_m – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $z_m(s) = z(s/m)$. Имеем $z_m \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leq z_m \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $z_m = 1$ на $[-m, m]$, $z_m = 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-2m, 2m)$ и $|z'_m| \leq c/m$ на $\mathbb{R}$.

Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим $w_j = T_{2m}(u_j) - T_{2m}(u)$.

Пусть теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2m$. Положим $\varphi_j = z_m(u_j)z_m(u)T_k(w_j)$. Имеем $\varphi_j \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} D_i \varphi_j &= z_m(u_j)z_m(u)D_i T_k(w_j) + z'_m(u_j)z_m(u)T_k(w_j)D_i u_j \\ &\quad + z_m(u_j)z'_m(u)T_k(w_j)D_i T_{2m}(u) \text{ п. в. на } \Omega. \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

В силу (1.7.6)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i \varphi_j \right\} dx = \int_{\Omega} T_j(f) \varphi_j dx.$$

Используя это равенство, (1.7.10), свойства функции z_m и (1.7.1), (1.7.7) и (1.7.8), получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i T_k(w_j) \right\} z_m(u_j) z_m(u) dx \leq \sigma(m)k,$$

где $\sigma(m)$ – положительная постоянная, зависящая только от $n, p, c_1, c, \|f\|_{L^1(\Omega)}$ и m .

Отсюда, используя предложение 1.1.1, неравенство (1.7.3), свойства функции z_m и определение функции Φ , выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2m$,

$$\begin{aligned} & \int_{\{ |u_j| < m, |u| < m, |u_j - u| < k \}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx \\ & \leq \sigma(m)k - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u_j, \nabla T_{2m}(u)) D_i T_k(w_j) \right\} z_m(u_j) z_m(u) dx. \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Заметим, что в силу (1.7.1), (1.7.8) и свойств функции z_m

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u_{j_l}, \nabla T_{2m}(u)) D_i T_k(w_{j_l}) \right\} z_m(u_{j_l}) z_m(u) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Учитывая это, из (1.7.11) выводим, что

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \int_{\{ |u_{j_l}| < m, |u| < m, |u_{j_l} - u| < k \}} \Phi(x, u_{j_l}, \nabla u_{j_l}, \delta u) dx \leq \sigma(m)k. \quad (1.7.12)$$

Итак, если $m \geq 1$ и $k > 0$, то справедливо неравенство (1.7.12).

Пусть теперь $\nu_1 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, причем $\nu_1(s) = [\sigma(s)]^{-2}$ для любого $s \geq 1$, и пусть $\nu_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\nu_2(s) = s^{1/2}$ для любого $s \in (0, +\infty)$. Тогда ввиду (1.7.12) для любых $m \geq 1$ и $k \in (0, \nu_1(m)]$ левая часть неравенства (1.7.12) не превосходит $\nu_2(k)$.

Таким образом, функция Φ и последовательность $\{u_{j_l}\}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1.6.2, из которой выводим, что утверждение (1.7.9) справедливо.

Далее, зафиксируем произвольные $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$. Пусть τ – неубывающая функция из $C^1(\mathbb{R})$ такая, что $\tau(s) = s$, если $s \leq -1$, и $\tau(s) = 0$, если $s \geq 0$. Пусть еще для любого $m \in \mathbb{N}$ τ_m – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_m(s) = \left[\frac{1}{m} \tau(m(|s| - k)) + k \right] \text{sign } s.$$

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$, $m > 1/k$, и возьмем $j \in \mathbb{N}$. Имеем $\tau_m(u_j - \varphi) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу (1.7.6)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i(u_j - \varphi) \right\} \tau'_m(u_j - \varphi) dx = \int_{\Omega} T_j(f) \tau_m(u_j - \varphi) dx.$$

Из этого равенства, используя (1.7.1), (1.7.2), (1.7.7)–(1.7.9) и лемму Фату, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} \tau'_m(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i \varphi \right\} \tau'_m(u - \varphi) dx + \int_{\Omega} f \tau_m(u - \varphi) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx.$$

Это позволяет заключить, что u – энтропийное решение задачи (1.7.4), (1.7.5). $\square$

Замечание 1.7.1. Теорема 1.7.1 установлена в [72]. При этом соотношение использовать неравенство (1.7.1), допускающее произвольный рост коэффициентов уравнения (1.7.4) по u , инспирировано работой [21], где рассматривалось аналогичное неравенство для коэффициентов параболического уравнения с L^1 -данными. В случае, когда коэффициенты уравнения (1.7.4) могут иметь рост не выше порядка $p-1$ по u , имеют рост порядка $p-1$ по ∇u и удовлетворяют неравенствам (1.7.2) и (1.7.3), существование энтропийного решения задачи (1.7.4), (1.7.5) установлено в [4].

Замечание 1.7.2. Из определения 1.7.1, неравенства (1.7.2) и леммы 1.6.3 вытекает, что если u – энтропийное решение задачи (1.7.4), (1.7.5), то справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого λ , $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-p)$, функция $|u|^\lambda$ суммируема на Ω ;
- 2) для любого λ , $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)$, функция $|\delta u|^\lambda$ суммируема на Ω .

Такие же свойства суммируемости имеют энтропийные решения в случае, рассмотренном в [4].

1.8. Априорные свойства энтропийных решений уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными

В этом разделе рассматривается задача Дирихле для более общего уравнения по сравнению с уравнением (1.7.4) и излагаются результаты статьи [73] об априорных свойствах энтропийных решений этой задачи.

Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для любого $k > 0$ существуют $\bar{c}_k > 0$ и $\bar{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\bar{g}_k \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k$, и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}_k |\xi|^p + \bar{g}_k(x). \quad (1.8.1)$$

Кроме того, будем считать, что существуют $p_1 \in [0, p-1)$, $p_2 \in [0, p-p_1)$, $c_1, c_2 > 0$ и $g_1 \in L^1(\Omega)$, $g_1 \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi) \xi_i \geq \frac{c_1 |\xi|^p}{(1 + |s|)^{p_1}} - c_2 p_2 (1 + |s|)^{p_2} - g_1(x). \quad (1.8.2)$$

Наконец, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (1.8.3)$$

Пусть a_0 – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $f \in L^1(\Omega)$.

Будем рассматривать следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1.8.4)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.8.5)$$

Дадим определения нескольким типам решений этой задачи и опишем связи между ними.

Определение 1.8.1. Слабым решением задачи (1.8.4), (1.8.5) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) $a_0(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;

3) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) D_i v + a_0(x, u, \nabla u) v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Определение 1.8.2. $\mathcal{T}$ -решением задачи (1.8.4), (1.8.5) будем называть функцию $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) $a_0(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$;
- 3) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v + a_0(x, u, \delta u) v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Предложение 1.8.1. Пусть u – $\mathcal{T}$ -решение задачи (1.8.4), (1.8.5), и пусть $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Тогда u – слабое решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Доказательство. Поскольку $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $|\delta u| \in L^1(\Omega)$, в силу предложения 1.1.2 $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u = \delta_i u$ п.в. на Ω . Отсюда и из определения 1.8.2 вытекает, что выполняются условия 1)–3) определения 1.8.1. Значит, u – слабое решение задачи (1.8.4), (1.8.5). $\square$

Далее, заметим, что если $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, то функция $a_i(x, u, \delta u)(\delta_i u - \delta_i v)$ суммируема на множестве $\{|u - v| < k\}$. Это следует из предложения 1.1.1 и (1.8.1).

Определение 1.8.3. Энтропийным решением задачи (1.8.4), (1.8.5) будем называть функцию $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $a_0(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любых $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-v|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u)(\delta_i u - \delta_i v) \right\} dx \\ + \int_{\Omega} a_0(x, u, \delta u) T_k(u - v) dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \end{aligned}$$

Лемма 1.8.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда для любых $v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо неравенство из условия 2) определения 1.8.3.

Доказательство леммы основывается на приближении функции из $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ последовательностью гладких равномерно ограниченных в Ω функций, использовании для этих аппроксимирующих функций неравенства из условия 2) определения 1.8.3 и соответствующем предельном переходе с привлечением неравенства (1.8.1) и предложений 1.1.1 и 1.1.3.

Предложение 1.8.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого λ , $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-p)$, функция $|u|^\lambda$ суммируема на Ω ;
- 2) для любого λ , $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)$, функция $|\delta u|^\lambda$ суммируема на Ω .

Доказательство этого предложения основано на использовании неравенств $0 \leq p_2 < p-p_1$, (1.8.2) и (1.1.13), предложения 1.1.1 и леммы 1.6.3. Однако по сравнению с аналогичным результатом для энтропийного решения задачи (1.7.4), (1.7.5), приведенным в замечании 1.7.2, доказательство предложения 1.8.2 существенно сложнее. Это связано с большей сложностью структуры условия (1.8.2) по сравнению со структурой условия (1.7.2). Подробности по этому поводу см. в [73].

Предложение 1.8.3. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть функция $(1+|u|)^{p_2}$ суммируема на Ω и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$. Тогда u – $\mathcal{T}$ -решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Доказательство. В силу условий предложения имеем $u \in \overset{\circ}{T}^{1,p}(\Omega)$ и выполняются условия 1) и 2) определения 1.8.2.

Покажем, что выполняется условие 3) определения 1.8.2. Пусть $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Зафиксируем $k > \max_{\Omega} |v|$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ положим $E_m = \{|u - T_m(u) + v| < k\}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $T_m(u) - v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу леммы 1.8.1 имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - D_i T_m(u) + D_i v) \right\} dx \\ \leq \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - T_m(u) + v) dx. \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Используя предложение 1.1.1 и неравенство (1.8.2), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - D_i T_m(u) + D_i v) \right\} dx \\
&= \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx + \int_{E_m \cap \{|u| \geq m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} dx \\
&\geq \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx - c_2 p_2 \int_{\{|u| \geq m\}} (1 + |u|)^{p_2} dx - \int_{\{|u| \geq m\}} g_1 dx.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.8.6) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx \\
&\leq \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - T_m(u) + v) dx \\
&\quad + c_2 p_2 \int_{\{|u| \geq m\}} (1 + |u|)^{p_2} dx + \int_{\{|u| \geq m\}} g_1 dx. \quad (1.8.7)
\end{aligned}$$

Ясно, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \Omega$. Кроме того, для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $E_m \subset E_{m+1}$. Поэтому $\text{meas}(\Omega \setminus E_m) \rightarrow 0$. Тогда, учитывая, что по условию предложения функции $a_i(x, u, \delta u)$ суммируемы на Ω , получаем

$$\int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx \rightarrow \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx. \quad (1.8.8)$$

Далее, поскольку $\text{meas}\{|u| \geq m\} \rightarrow 0$, из суммируемости функций $(1 + |u|)^{p_2}$ и g_1 выводим, что

$$\int_{\{|u| \geq m\}} (1 + |u|)^{p_2} dx \rightarrow 0, \quad \int_{\{|u| \geq m\}} g_1 dx \rightarrow 0. \quad (1.8.9)$$

Наконец, имеем

$$\int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - T_m(u) + v) dx \rightarrow \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] v dx. \quad (1.8.10)$$

Это следует из того, что $T_k(u - T_m(u) + v) \rightarrow v$ на Ω и функции f и $a_0(x, u, \delta u)$ суммируемы на Ω .

Из (1.8.7)–(1.8.10) выводим, что для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx \leq \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] v dx.$$

Следовательно, для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i v \right\} dx = \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] v dx.$$

Значит, выполняется условие 3) определения 1.8.2 и можно заключить, что u – $\mathcal{T}$ -решение задачи (1.8.4), (1.8.5). $\square$

Следствие 1.8.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть функции $(1 + |u|)^{p_2}$ и $|\delta u|$ суммируемы на Ω и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$. Тогда u – слабое решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Этот результат вытекает из предложений 1.8.3 и 1.8.1.

В связи с последующим результатом дадим одно полезное замечание.

Замечание 1.8.1. Если $p_1 < (p - 1)/(n - p + 1)$, то

$$1 < \frac{n(p - 1 - p_1)}{(n - 1 - p_1)(p - 1)}. \quad (1.8.11)$$

Предложение 1.8.4. Пусть

$$p_1 < (p - 1)/(n - p + 1), \quad p_2 < n(p - 1 - p_1)/(n - p), \quad (1.8.12)$$

$0 < \bar{p} < p^*(p - 1 - p_1)/(p - 1)$, $\bar{c} > 0$ и $\bar{g} \in L^1(\Omega)$, $\bar{g} \geq 0$ на Ω . Пусть для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}(|s|^{\bar{p}} + |\xi|^p) + \bar{g}(x). \quad (1.8.13)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) для любого числа λ , удовлетворяющего неравенству

$$1 \leq \lambda < \min \left\{ \frac{p^*(p - 1 - p_1)}{\bar{p}(p - 1)}, \frac{n(p - 1 - p_1)}{(n - 1 - p_1)(p - 1)} \right\}, \quad (1.8.14)$$

и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, u, \delta u) \in L^\lambda(\Omega)$;

(ii) u – $\mathcal{T}$ -решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу первого из неравенств (1.8.12) и замечания 1.8.1 справедливо неравенство (1.8.11). Из этого неравенства и условия предложения относительно $\bar{p}$ вытекает, что множество чисел λ , удовлетворяющих неравенству (1.8.14), непусто.

Пусть число λ удовлетворяет неравенству (1.8.14) и $i \in \{1, \dots, n\}$. В силу (1.8.13) и неравенства $\lambda(p-1) < p$ имеем

$$|a_i(x, u, \delta u)|^\lambda \leq (\bar{c}+1) \left[|u|^{\lambda(p-1)\bar{p}/p} + |\delta u|^{\lambda(p-1)} \right] + \bar{g} + 1 \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (1.8.15)$$

Из (1.8.14) следует, что

$$\lambda(p-1)\bar{p}/p < n(p-1-p_1)/(n-p), \quad \lambda(p-1) < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1).$$

Тогда в силу предложения 1.8.2 функции $|u|^{\lambda(p-1)\bar{p}/p}$ и $|\delta u|^{\lambda(p-1)}$ суммируемы на Ω . Отсюда и из (1.8.15) выводим, что $a_i(x, u, \delta u) \in L^\lambda(\Omega)$, и тем самым справедливость утверждения (i) установлена. Вследствие этого утверждения для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу второго из неравенств (1.8.12) и предложения 1.8.2 функция $(1 + |u|)^{p_2}$ суммируема на Ω .

Таким образом, выполняются все условия предложения 1.8.3, из которого вытекает, что утверждение (ii) справедливо. $\square$

Следствие 1.8.2. Пусть $p > 2 - 1/n$,

$$p_1 < \min \left\{ \frac{n}{n-1} \left(p - 2 + \frac{1}{n} \right), \frac{p-1}{n-p+1} \right\}, \quad (1.8.16)$$

$p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$, $0 < \bar{p} < p^*(p-1-p_1)/(p-1)$, $\bar{c} > 0$ и $\bar{g} \in L^1(\Omega)$, $\bar{g} \geq 0$ на Ω . Пусть для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}(|s|^{\bar{p}} + |\xi|^p) + \bar{g}(x).$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда u – слабое решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Доказательство. Поскольку выполняются все условия предложения 1.8.4, из этого предложения выводим, что u – $\mathcal{T}$ -решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Ввиду (1.8.16) имеем $p_1 < n(p-2+1/n)/(n-1)$. Тогда $1 < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)$. Отсюда и из утверждения 2)

предложения 1.8.2 вытекает, что $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Теперь из предложения 1.8.1 получаем, что u – слабое решение задачи (1.8.4), (1.8.5). $\square$

Далее сосредоточимся на результатах, касающихся свойств суммируемости энтропийных решений задачи (1.8.4), (1.8.5). Некоторые из таких свойств уже описаны в предложении 1.8.2. Уточнение свойств суммируемости энтропийных решений, данных в утверждениях 1) и 2) этого предложения, при дополнительном условии на p_2 будет одним из итогов последующих рассмотрений раздела.

Приведем сначала один вспомогательный результат.

Лемма 1.8.2. Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$ и $h(0) = 0$. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда $h(u) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i h(u) = h'(u) D_i u$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции h на $\mathbb{R}$ и включения $u \in L^\infty(\Omega)$ имеем $h(u) \in L^\infty(\Omega)$.

Далее, положим $m = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$, и пусть $\{u_j\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$u_j \rightarrow u \quad \text{сильно в } W^{1,p}(\Omega), \quad (1.8.17)$$

$$u_j \rightarrow u \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad (1.8.18)$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad |u_j| \leq m \quad \text{на } \Omega. \quad (1.8.19)$$

Поскольку $h \in C^1(\mathbb{R})$ и $h(0) = 0$, имеем

$$\{h(u_j)\} \subset C_0^1(\Omega). \quad (1.8.20)$$

Из (1.8.18), (1.8.19) и включения $h(u) \in L^\infty(\Omega)$ выводим, что

$$h(u_j) \rightarrow h(u) \quad \text{сильно в } L^p(\Omega). \quad (1.8.21)$$

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку $u \in L^\infty(\Omega)$, $D_i u \in L^p(\Omega)$ и функция h' непрерывна на $\mathbb{R}$, имеем $h'(u) D_i u \in L^p(\Omega)$. Учитывая (1.8.19), для любого $j \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D_i h(u_j) - h'(u) D_i u|^p dx &\leq 2^p \int_{\Omega} |h'(u_j) - h'(u)|^p |D_i u|^p dx \\ &\quad + \left(2 \max_{[-m, m]} |h'| \right)^p \int_{\Omega} |D_i u_j - D_i u|^p dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.8.17)–(1.8.19) следует, что

$$D_i h(u_j) \rightarrow h'(u) D_i u \quad \text{сильно в } L^p(\Omega). \quad (1.8.22)$$

Из (1.8.20)–(1.8.22) вытекает, что существует обобщенная производная $D_i h(u)$, $D_i h(u) = h'(u) D_i u$ п. в. на Ω .

Теперь можно заключить, что $h(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Кроме того, в силу (1.8.21) и (1.8.22) имеем $h(u_j) \rightarrow h(u)$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из (1.8.20) выводим, что $h(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Предложение 1.8.5. Пусть $p_2 = 0$ и $g_1 = 0$ на Ω . Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, h ограничена на $\mathbb{R}$ и $h' \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда функция $|\delta u|^p h'(u)/(1 + |u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx \leq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] h(u) dx. \quad (1.8.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $k > \sup_{\mathbb{R}} |h|$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$v_m = T_m(u) - h(T_m(u)), \quad (1.8.24)$$

$$E_m = \{ |u - T_m(u) + h(T_m(u))| < k \}. \quad (1.8.25)$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, имеем $T_m(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу леммы 1.8.2 $h(T_m(u)) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i h(T_m(u)) = h'(T_m(u)) D_i T_m(u) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (1.8.26)$$

Ясно, что $v_m \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда согласно лемме 1.8.1

$$\begin{aligned} \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - \delta_i v_m) \right\} dx \\ \leq \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - v_m) dx. \end{aligned} \quad (1.8.27)$$

Используя предложение 1.1.1, (1.8.2), (1.8.26), включение $\{|u| < m\} \subset E_m$ и неотрицательность функции h' на $\mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - \delta_i v_m) \right\} dx \\
&= \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - D_i T_m(u)) \right\} dx \\
&\quad + \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i h(T_m(u)) \right\} dx \\
&\geq \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i h(T_m(u)) \right\} dx \\
&= \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_m(u) \right\} h'(T_m(u)) dx \\
&= \int_{\{|u| < m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) dx \\
&\geq c_1 \int_{\{|u| < m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.8.27) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx \leq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - v_m) dx. \quad (1.8.28)$$

Учитывая, что $T_k(u - v_m) \rightarrow h(u)$ на Ω , и используя лемму Фату, из (1.8.28) выводим, что функция $|\delta u|^p h'(u) / (1 + |u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство (1.8.23). $\square$

Следствие 1.8.3. Пусть $p_2 = 0$ и $g_1 = 0$ на Ω . Пусть u — энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|)^{p_1} h(t) dt < +\infty$, то функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω ;

(ii) если $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|)^{p_1} |h'(t)|^p dt < +\infty$, то $h(u) \in L^{p^*}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|)^{p_1} h(t) dt < +\infty.$$

Пусть h_1 – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h_1(s) = \int_0^s (1 + |t|)^{p_1} h(t) dt.$$

Тогда $h_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $h_1(0) = 0$, h_1 ограничена на $\mathbb{R}$ и для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем $h'_1(s) = (1 + |s|)^{p_1} h(s)$. Отсюда и из предложения 1.8.5 вытекает, что функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω . Следовательно, утверждение (i) справедливо.

Пусть теперь $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|)^{p_1} |h'(t)|^p dt < +\infty$.

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 1.8.2 имеем $h(T_k(u)) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ и $|\nabla h(T_k(u))| = |h'(T_k(u))| |\nabla T_k(u)|$ п.в. на Ω . Тогда, используя (1.1.13) и предложение 1.1.1, получаем

$$\int_{\Omega} |h(T_k(u))|^{p^*} dx \leq c_{n,p}^* \left(\int_{\{|u| < k\}} |h'(u)|^p |\delta u|^p dx \right)^{p^*/p}. \quad (1.8.29)$$

Ввиду условий относительно функции h и утверждения (i) функция $|h'(u)|^p |\delta u|^p$ суммируема на Ω . Тогда, используя лемму Фату, из (1.8.29) выводим, что $h(u) \in L^{p^*}(\Omega)$. Следовательно, утверждение (ii) справедливо. $\square$

Предложение 1.8.6. Пусть $p_2 < n(p - 1 - p_1)/(n - p)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, функции h и h' ограничены на $\mathbb{R}$ и $h' \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда функция $|\delta u|^p h'(u)/(1 + |u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx &\leq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] h(u) dx \\ &+ \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} [c_2 p_2 (1 + |u|)^{p_2} + g_1] h'(u) dx. \end{aligned} \quad (1.8.30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $k > \sup_{\mathbb{R}} |h|$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию v_m и множество E_m по формулам (1.8.24) и (1.8.25).

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Аналогично изложенному в доказательстве предложения 1.8.5 имеем $h(T_m(u)) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, $v_m \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и справедливы соотношения (1.8.26) и (1.8.27).

Из условия предложения относительно числа p_2 и предложения 1.8.2 следует, что функция $(1 + |u|)^{p_2}$ суммируема на Ω . Учитывая это и используя предложение 1.1.1, (1.8.2), (1.8.26), включение $\{|u| < m\} \subset E_m$ и неотрицательность и ограниченность функции h' на $\mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) (\delta_i u - \delta_i v_m) \right\} dx \\ &= \int_{\{|u| < m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} h'(u) dx \\ &+ \int_{E_m \cap \{|u| \geq m\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} dx \geq c_1 \int_{\{|u| < m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx \\ &- \int_{\{|u| < m\}} [c_2 p_2 (1 + |u|)^{p_2} + g_1] h'(u) dx - \int_{\{|u| \geq m\}} [c_2 p_2 (1 + |u|)^{p_2} + g_1] dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.8.27) вытекает, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u| < m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1 + |u|)^{p_1}} h'(u) dx \leq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} [f - a_0(x, u, \delta u)] T_k(u - v_m) dx \\ &+ \frac{1}{c_1} \int_{\{|u| < m\}} [c_2 p_2 (1 + |u|)^{p_2} + g_1] h'(u) dx \\ &+ \frac{1}{c_1} \int_{\{|u| \geq m\}} [c_2 p_2 (1 + |u|)^{p_2} + g_1] dx. \quad (1.8.31) \end{aligned}$$

Учитывая, что $T_k(u - v_m) \rightarrow h(u)$ на Ω и $\text{meas}\{|u| \geq m\} \rightarrow 0$ и используя лемму Фату, из (1.8.31) выводим, что функция $|\delta u|^p h'(u) / (1 + |u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство (1.8.30). $\square$

Следствие 1.8.4. Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geq 0$ на $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} h(t) dt < +\infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^{p_1} h(t) < +\infty, \quad (1.8.32)$$

то функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω ;

(ii) если $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} |h'(t)|^p dt < +\infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^{p_1} |h'(t)|^p < +\infty, \quad (1.8.33)$$

то $h(u) \in L^p(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и имеют место неравенства (1.8.32). Определим функцию h_1 таким же образом, как и в доказательстве следствия 1.8.3. Имеем $h_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $h_1(0) = 0$, функции h_1 и h'_1 ограничены на $\mathbb{R}$ и $h'_1 \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда в силу предложения 1.8.6 функция $|\delta u|^p h'_1(u)/(1+|u|)^{p_1}$ суммируема на Ω . Отсюда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $h'_1(s) = (1+|s|)^{p_1} h(s)$, получаем, что функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω . Следовательно, утверждение (i) справедливо.

Пусть теперь $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ и имеют место неравенства (1.8.33). Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ верно (1.8.29), причем ввиду утверждения (i) функция $|h'(u)|^p |\delta u|^p$ суммируема на Ω . Отсюда и из леммы Фату вытекает, что $h(u) \in L^p(\Omega)$. Следовательно, утверждение (ii) справедливо. $\square$

Следствие 1.8.5. Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть $\beta > 1$. Тогда функция

$$\frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1+1} [\ln(2+|u|)] [\ln \ln(3+|u|)]^\beta}$$

суммируема на Ω .

Доказательство. Пусть h – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h(s) = \frac{1}{(1+|s|)^{p_1+1} [\ln(2+|s|)] [\ln \ln(3+|s|)]^\beta}.$$

Имеем $h \in C(\mathbb{R})$, $h > 0$ на $\mathbb{R}$ и справедливы неравенства (1.8.32). Тогда в силу утверждения (i) следствия 1.8.4 функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω . Значит, требуемое утверждение верно. $\square$

Следствие 1.8.6. Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5). Пусть $h \in C(\mathbb{R})$ и выполняются условия: функция h четна, $h \geq 0$ на $\mathbb{R}$, функция h невозрастающая на $[0, +\infty)$ и

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} [h(t)]^{(n-p)/n} dt < +\infty. \quad (1.8.34)$$

Тогда функции

$$|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(u), \quad |\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)} [h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)}$$

суммируемы на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h_1 – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h_1(s) = \int_0^s \frac{[h(t)]^{1/p^*}}{(1+|t|)^{(p_1+1)/p}} dt.$$

Имеем

$$h_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad h_1(0) = 0, \quad (1.8.35)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (1+|t|)^{p_1} |h_1'(t)|^p = \frac{[h(t)]^{(n-p)/n}}{1+|t|}. \quad (1.8.36)$$

Из (1.8.34) и (1.8.36) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} |h_1'(t)|^p dt < +\infty. \quad (1.8.37)$$

Поскольку функция h четна и невозрастающая на $[0, +\infty)$, имеем

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) \leq h(0). \quad (1.8.38)$$

Отсюда и из (1.8.36) вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^{p_1} |h_1'(t)|^p < +\infty. \quad (1.8.39)$$

Учитывая (1.8.35), (1.8.37) и (1.8.39), из утверждения (ii) следствия 1.8.4 выводим, что

$$h_1(u) \in L^{p^*}(\Omega). \quad (1.8.40)$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$. В силу того, что функция h четна и невозрастающая на $[0, +\infty)$, имеем

$$|h_1(s)| \geq \frac{[h(s)]^{1/p^*} |s|}{(1 + |s|)^{(p_1+1)/p}}. \quad (1.8.41)$$

Если $|s| \geq 1$, то, используя (1.8.41), получаем

$$|s|^{1-(p_1+1)/p} [h(s)]^{1/p^*} \leq 2|h_1(s)|. \quad (1.8.42)$$

Если же $|s| < 1$, то, учитывая (1.8.38), находим, что

$$|s|^{1-(p_1+1)/p} [h(s)]^{1/p^*} \leq [h(0)]^{1/p^*}. \quad (1.8.43)$$

Из (1.8.42) и (1.8.43) следует, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$|s|^{1-(p_1+1)/p} [h(s)]^{1/p^*} \leq 2|h_1(s)| + [h(0)]^{1/p^*}.$$

Тогда

$$|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(u) \leq 4^{p^*} |h_1(u)|^{p^*} + 2^{p^*} h(0) \quad \text{на } \Omega.$$

Отсюда и из (1.8.40) выводим, что функция $|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(u)$ суммируема на Ω .

Далее, положим

$$\lambda_1 = \frac{n(p-1-p_1)}{n-1-p_1}, \quad \lambda = \frac{n-p}{n-1-p_1}.$$

Заметим, что $\lambda_1 < p$,

$$\frac{\lambda_1(1+p_1)}{p-\lambda_1} = \frac{n(p-1-p_1)}{n-p}, \quad (\lambda-1)\frac{p}{\lambda_1} + 1 = \frac{n-p}{n}. \quad (1.8.44)$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Используя неравенство Юнга с показателями p/λ_1 и $p/(p-\lambda_1)$ и соотношения (1.8.44), получаем

$$\begin{aligned} |\xi|^{\lambda_1} [h(s)]^\lambda &= \frac{|\xi|^{\lambda_1} [h(s)]^{\lambda-1+\lambda_1/p}}{(1+|s|)^{(p_1+1)\lambda_1/p}} \times (1+|s|)^{(p_1+1)\lambda_1/p} [h(s)]^{(p-\lambda_1)/p} \\ &\leq \frac{|\xi|^p [h(s)]^{(n-p)/n}}{(1+|s|)^{p_1+1}} + (1+|s|)^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(s). \end{aligned}$$

Тогда

$$|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)} [h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)} \leq \frac{|\delta u|^p [h(u)]^{(n-p)/n}}{(1+|u|)^{p_1+1}} + (1+|u|)^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(u) \quad \text{на } \Omega. \quad (1.8.45)$$

В силу свойств функции h и утверждения (i) следствия 1.8.4 функция $|\delta u|^p [h(u)]^{(n-p)/n} / (1+|u|)^{p_1+1}$ суммируема на Ω . Отсюда, а также из доказанной выше суммируемости функции $|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)} h(u)$ и (1.8.38) и (1.8.45) выводим, что функция $|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)} [h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)}$ суммируема на Ω . $\square$

Следствие 1.8.7. Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$, u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5) и $\beta > n/(n-p)$. Тогда функции

$$\frac{|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)}}{[\ln(2+|u|)]^{n/(n-p)} [\ln \ln(3+|u|)]^\beta},$$

$$\frac{|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}}{[\ln(2+|u|)]^{n/(n-1-p_1)} [\ln \ln(3+|u|)]^{\beta(n-p)/(n-1-p_1)}}$$

суммируемы на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h(s) = \frac{1}{[\ln(2+|s|)]^{n/(n-p)} [\ln \ln(3+|s|)]^\beta}.$$

Функция h удовлетворяет условиям следствия 1.8.6, из которого и вытекает требуемое утверждение. $\square$

Из следствия 1.8.7 выводим такой результат.

Следствие 1.8.8. Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$, u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5) и $\beta > 1/(p-1-p_1)$. Тогда

$$\frac{|u|}{[\ln(2+|u|)]^{1/(p-1-p_1)} [\ln \ln(3+|u|)]^\beta} \in L^{n(p-1-p_1)/(n-p)}(\Omega),$$

$$\frac{|\delta u|}{[\ln(2+|u|)]^{1/(p-1-p_1)} [\ln \ln(3+|u|)]^\beta} \in L^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}(\Omega).$$

Очевидно, что в случае $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$ следствие 1.8.8 дает более точную информацию о свойствах суммируемости энтропийного решения задачи (1.8.4), (1.8.5) по сравнению с тем, что описано в предложении 1.8.2. При этом заметим, проследив цепочку результатов, приводящих к следствию 1.8.8, что среди этих результатов находится и предложение 1.8.2.

Сформулируем одну из теорем существования энтропийного решения задачи (1.8.4), (1.8.5).

Теорема 1.8.1. Пусть $p_2 = 0$ и $g_1 = 0$ на Ω . Пусть $c \geq 0$, $0 < \sigma < p-1-p_1$, $g \in L^1(\Omega)$, $g \geq 0$ на Ω , $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} \varphi(t) dt < +\infty.$$

Пусть для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|a_0(x, s, \xi)| \leq c(|s|^\sigma + |\xi|^\sigma) + |\xi|^p \varphi(s) + g(x). \quad (1.8.46)$$

Тогда существует энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Такой же результат сформулирован в работе [73] с той лишь разницей, что там дополнительно предполагалось выполненным условие $p_1 < (p-1)/(n-p+1)$. Оказывается, это условие является излишним.

Доказательство теоремы 1.8.1 сходно с доказательством теоремы 1.7.1, но сложнее последнего из-за наличия в уравнении (1.8.4) младшего коэффициента a_0 . Не останавливаясь на технических подробностях, ограничимся описанием основных этапов доказательства теоремы 1.8.1. Они заключаются в следующем.

Прежде всего рассматривается последовательность обобщенных решений $u_j \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ аппроксимирующих задач

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i^{(j)}(x, u, \nabla u) + A_0^{(j)}(x, u, \nabla u) = f_j \quad \text{в } \Omega, \quad (1.8.47)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.8.48)$$

где $f_j = T_j(f)$, а $A_i^{(j)}$, $A_0^{(j)}$ – функции на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такие, что для любой тройки $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$A_i^{(j)}(x, s, \xi) = a_i(x, T_j(s), \xi), \quad A_0^{(j)}(x, s, \xi) = T_j(a_0(x, s, \xi)).$$

Подстановка в интегральное тождество, соответствующее аппроксимирующей задаче с правой частью f_j , функции $h(u_j)$ с произвольной ограниченной функцией $h \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условиям $h(0) = 0$ и $h' \geq 0$ на $\mathbb{R}$, приводит (с использованием леммы 1.8.2 и неравенств (1.8.2) и (1.8.46)) к интегральному неравенству, из которого выводится ряд равномерных интегральных оценок для функций u_j .

Это позволяет, в частности, доказать существование возрастающей последовательности $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ и функции $u \in \overset{\circ}{T}^{1,p}(\Omega)$ таких, что

$$u_{j_l} \rightarrow u \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad (1.8.49)$$

$$\forall k > 0 \quad T_k(u_{j_l}) \rightarrow T_k(u) \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega). \quad (1.8.50)$$

Затем с использованием интегральных тождеств, соответствующих аппроксимирующим задачам (1.8.47), (1.8.48), неравенств (1.8.1)–(1.8.3) и свойств (1.8.49) и (1.8.50) устанавливается, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad D_i u_{j_l} \rightarrow \delta_i u \quad \text{по мере}, \quad (1.8.51)$$

$$\forall k > 0 \quad T_k(u_{j_l}) \rightarrow T_k(u) \quad \text{сильно в } W^{1,p}(\Omega). \quad (1.8.52)$$

Из вышеупомянутых равномерных интегральных оценок для функций u_j (одна из них – это равномерная оценка интегралов функций $|\nabla u_j|^p \varphi(u_j)$ по Ω), неравенства (1.8.46) и свойств (1.8.49) и (1.8.51) выводится включение $a_0(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$.

С помощью тех же равномерных интегральных оценок для функций u_j и свойств (1.8.49), (1.8.51) и (1.8.52) осуществляется предельный переход в интегральных тождествах, соответствующих аппроксимирующим задачам (1.8.47), (1.8.48). Это приводит к заключению, что u – энтропийное решение задачи (1.8.4), (1.8.5).

Заметим, что результат, аналогичный теореме 1.8.1, имеет место и в случае $p_2 \neq 0$. В этом случае от функции φ нужно дополнительно потребовать выполнения условия $\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^{p_1} \varphi(t) < +\infty$.

В заключение раздела приведем примеры выполнения неравенств (1.8.1)–(1.8.3) и (1.8.46).

Пример 1.8.1. Пусть $p > 2$, $p_1 \in [0, p - 1)$, $\gamma \in (0, p - 1 - p_1)$, $p_2 = (\gamma p + p_1)/(p - 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, ψ – неотрицательная непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и $g_0 \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$, $g_0 \geq 0$ на Ω . Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$a_i(x, s, \xi) = \frac{|\xi|^{p-2} \xi_i}{(1 + |s|)^{p_1}} + \beta |s|^\gamma + g_0(x) \psi(s) \xi_i.$$

Тогда имеют место неравенства (1.8.1)–(1.8.3), причем $\bar{c}_k = 6^{p/(p-1)}n$,

$$\bar{g}_k = (3|\beta|k^\gamma)^{p/(p-1)}n + 3^{p/(p-1)}n \left[\max_{t \in [-k, k]} \psi(t) \right]^{p/(p-2)} g_0^{p/(p-2)},$$

$c_1 = (p-1)/p$, $c_2 > 0$ и c_2 зависит только от n, p, p_1, γ и β , $g_1 = 0$ на Ω .

Пример 1.8.2. Пусть $\beta > 1$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma < p-1-p_1$, $g \in L^1(\Omega)$, $g \geq 0$ на Ω , и φ – функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \frac{1}{(1 + |s|)^{p_1+1} [\ln(2 + |s|)]^\beta}.$$

Пусть a_0 – функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$a_0(x, s, \xi) = \beta_1 |s|^\sigma + \beta_2 |\xi|^\sigma + |\xi|^p \varphi(s) + g(x).$$

Тогда функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1.8.1, а для функции a_0 имеет место неравенство (1.8.46).

Наконец, относительно отдельных результатов раздела отметим следующее.

Предложения 1.8.3 и 1.8.4 и следствие 1.8.2 обобщают результаты, полученные в [13] в случае $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$. Даже в этом случае следствие 1.8.8 дает более сильные результаты по сравнению с теми, которые получены в [25] для слабых решений.

Оценки (1.8.23) и (1.8.30) играют важную роль в изучении свойств суммируемости энтропийных решений при ограничениях на функцию a_0 вида (1.8.46) и улучшении суммируемости функции f . В целом это довольно обширный вопрос, являющийся предметом отдельного исследования.

В случае, когда старшие коэффициенты уравнения (1.8.4) не зависят от u , имеют рост порядка $p-1$ по ∇u и удовлетворяют стандартному условию коэрцитивности ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$), а младший коэффициент a_0 не зависит от ∇u , имеет произвольный рост по u и является неубывающей функцией по u , существование энтропийного решения задачи (1.8.4), (1.8.5) доказано в [13].

В случае, когда старшие коэффициенты уравнения (1.8.4) могут иметь рост не выше порядка $p-1$ по u , имеют рост порядка $p-1$ по ∇u и удовлетворяют стандартному условию коэрцитивности ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$), младший коэффициент a_0 удовлетворяет неравенству (1.8.46) с $c = 0$ и $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, а правая часть уравнения есть ограниченная мера Радона на Ω , существование $\mathcal{T}$ -решения соответствующей задачи Дирихле

установлено в статье [105]. Эта работа содержит интересные и в определенном отношении близкие к нашим приемы получения интегральных оценок решений аппроксимирующих задач, а также использованные при доказательстве теоремы 1.8.1 соображения, связанные с выводом сильной сходимости в $W^{1,p}(\Omega)$ срезок этих решений.

В случае, когда старшие коэффициенты уравнения (1.8.4) удовлетворяют тем же условиям, что и в статье [105], младший коэффициент тоже характеризуется аналогичным [105] поведением по ∇u , а правая часть уравнения принадлежит $L^1(\Omega)$, существование энтропийного решения соответствующей задачи Дирихле доказано в работе [111].

ГЛАВА 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСИЛЕННОЙ КОЭРЦИТИВНОСТЬЮ И L^1 -ДАННЫМИ

2.1. Введение

Как отмечалось в предыдущей главе, эффективный подход к разрешимости нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями был предложен в [13]. Что касается эллиптических уравнений высшего порядка с L^1 -данными, оказалось, что подход, аналогичный предложенному в [13], можно реализовать при условии усиленной коэрцитивности относительно коэффициентов уравнений. Впервые это было показано для нелинейных уравнений четвертого порядка в работах [63, 64]. Позже идеи этих работ развивались в [66, 74–77, 80] при исследовании разрешимости нелинейных эллиптических уравнений четвертого и произвольного четного порядка с усиленной коэрцитивностью и L^1 -данными. В том числе рассматривались уравнения, вырождающиеся по пространственным переменным, и уравнения с анизотропией.

В настоящей главе излагаются результаты работ [63, 64, 67, 74] о существовании и свойствах решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью и L^1 -правыми частями.

Сформулируем исходные предположения главы и используемые обозначения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Через Λ обозначим множество всех n -мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$. Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$; если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, причем

$$1 < p < n/2, \quad (2.1.1)$$

$$2p < q < n. \quad (2.1.2)$$

Пусть, далее, $c_1, c_2 > 0$, g_1, g_2 – неотрицательные функции на Ω , $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \xi)|^{p/(p-1)} \leq c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \quad (2.1.3)$$

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_2(x). \quad (2.1.4)$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0. \quad (2.1.5)$$

Пусть еще $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = F(x, u) \quad \text{в } \Omega, \quad (2.1.6)$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.1.7)$$

Точные определения решений этой задачи будут даны в основном содержании главы. В теоремах существования и единственности решений потребуются дополнительные условия на функцию F . Они допускают произвольный рост $F(x, u)$ по второй переменной и при фиксированном значении этой переменной предполагают принадлежность соответствующей функции классу $L^1(\Omega)$.

Отметим, что реализация идей подхода, предложенного в [13] для уравнений второго порядка, в случае уравнений высшего порядка с L^1 -данными имеет ряд отличительных особенностей. Во-первых, в этом случае для получения необходимых оценок решений аппроксимирующих задач с регулярными данными нельзя использовать таким же образом, как в [13], стандартные срезающие функции T_k . Во-вторых, использование в соответствующих интегральных тождествах вместо стандартных срезов других (гладких) функций приводит к необходимости довольно деликатного обращения со слагаемыми, связанными с производными высокого порядка подходящих пробных функций. В конечном счете, эти обстоятельства диктуют, каковы должны быть структура уравнений высокого

порядка с L^1 -данными и энергетическое пространство для аппроксимирующих задач, чтобы идеи обсуждаемого здесь подхода могли быть реализованными. Так, например, в случае задачи (2.1.6), (2.1.7) и выполнения для функции F вышеупомянутых дополнительных условий подходящими являются именно условие усиленной коэрцитивности (2.1.4) и соответствующее соболевское пространство $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, относительно которого см. раздел 2.2.

Отметим, что уравнения высокого порядка с условиями на коэффициенты типа (2.1.3), (2.1.4), но с достаточно регулярными данными введены в работе [123], причем предполагаемая там регулярность данных допускает, в отличие от случая L^1 -данных, изучение разрешимости уравнений в обычных рамках теории монотонных операторов [89].

Структура настоящей главы такова. В разделе 2.2 вводится пространство $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, в дальнейшем играющее роль энергетического пространства для задач, аппроксимирующих задачу (2.1.6), (2.1.7). Затем с помощью специальной последовательности функций $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ вводится множество функций $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, более широкое, чем пространство $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, и содержащее даже несуммируемые функции. Для функций $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ определяются "производные" $\delta^\alpha u$ первого и второго порядков, совпадающие с обычными обобщенными производными в случае $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

В разделе 2.3 дается понятие энтропийного решения задачи (2.1.6), (2.1.7) и устанавливаются некоторые важные свойства таких решений. Само энтропийное решение является по определению элементом множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Заметим, что данное определение энтропийного решения также, как и определение множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, связано с использованием последовательности функций h_k . Эта последовательность играет роль, аналогичную роли стандартных срезов T_k в случае уравнений второго порядка с L^1 -данными, а множество $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – аналог множества $\mathring{T}^{1,q}(\Omega)$, регулярно используемого в том случае. Отметим еще, что специфика определения энтропийного решения рассматриваемой задачи состоит, аналогично соответствующему определению из [13] в случае уравнений второго порядка, в требовании выполнения для функции, называемой энтропийным решением, некоторого семейства интегральных неравенств, связанных с уравнением (2.1.6) и зависящих от произвольных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ (см. определение 2.3.1). Это семейство неравенств является основой для изучения свойств энтропийных решений.

Заметим, что одно из отличий данного определения энтропийного решения от соответствующего определения из [13] заключается в присутствии в правой части требуемых интегральных неравенств дополнительного слагаемого, зависящего от нормы функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ в некотором соболевском пространстве и степени числа $k \in \mathbb{N}$ с отрицательным показателем. Коротко говоря, наличие такого добавочного члена связано с вопросами существования и единственности решений и является отражением существенных особенностей уравнений высших порядков по сравнению с уравнениями второго порядка.

Раздел 2.4 посвящен получению одной априорной интегральной оценки для "производных" энтропийного решения, играющей важную роль в доказательстве его единственности. В разделе 2.5 вводится понятие H -решения задачи (2.1.6), (2.1.7) и устанавливается, что энтропийное решение этой задачи является и H -решением. Теорема единственности энтропийного решения доказывается в разделе 2.6, а теоремы существования H -решения и энтропийного решения устанавливаются в разделе 2.7. Вопросы о принадлежности энтропийного решения соболевским пространствам и существовании так называемых W -решений задачи (2.1.6), (2.1.7) исследуются в разделе 2.8. Отметим, что H -решение и W -решение – это решения в смысле интегрального тождества, соответствующего задаче (2.1.6), (2.1.7).

В разделе 2.9 устанавливаются некоторые свойства интегрируемости для функций из множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, подчиненных специальным интегральным неравенствам. При этом используются приемы, аналогичные изложенным в разделах 1.2 и 1.5. В разделе 2.10 показывается, что энтропийные решения задачи (2.1.6), (2.1.7) удовлетворяют интегральным неравенствам, рассмотренным в предыдущем разделе. Этот факт вместе с надлежащими условиями на правую часть уравнения (2.1.6) и результатами раздела 2.9 позволяет получить более сильные свойства суммируемости энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7) по сравнению со свойствами, описанными в разделах 2.3 и 2.8.

В дальнейших разделах главы излагаются результаты, связанные с изучением некоторой модификации понятия энтропийного решения рассматриваемой задачи. Эту модификацию мы называем правильным энтропийным решением (см. определение 2.13.1). Изложенные результаты показывают, что определение правильного энтропийного решения более естественно, чем определение энтропийного решения. К тому же, вид интегральных неравенств в определении правильного энтропийного решения согласуется с одной из эквивалентных формулировок энтропийного условия в случае уравнений второго порядка с L^1 -данными (относительно этой формулировки см. лемму 3.2 в [13]).

В разделе 2.11 рассматриваются некоторые полезные характеристики множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. В частности, устанавливается, что в действительности это множество не зависит от последовательности $\{h_k\}$, а определяется достаточно широким классом $\mathcal{H} \subset C^2(\mathbb{R})$, содержащим эту последовательность.

В разделе 2.12 вводится подмножество функций из $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, "производные" первого и второго порядков которых удовлетворяют определенным равномерным интегральным оценкам. Это подмножество, обозначаемое через $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, играет важную роль в дальнейших рассмотрениях. В разделе доказываются некоторые оценки мер множеств, связанных с функциями из $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, и описываются свойства суммируемости этих функций и их "производных".

В разделе 2.13 дается определение правильного энтропийного решения задачи (2.1.6), (2.1.7) и устанавливаются две априорные оценки для таких решений. Заметим, что правильное энтропийное решение определяется как функция из $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, причем в отличие от определения энтропийного решения, основное условие для функции быть правильным энтропийным решением связано со всем множеством функций из $\mathcal{H}$, имеющих неотрицательные производные первого порядка, а не с одной последовательностью $\{h_k\}$, принадлежащей этому множеству.

В разделе 2.14 доказывается теорема существования правильного энтропийного решения. Заметим, что формулировка этого результата (теорема 2.14.1) не содержит условия $q > p_1 := (3n - 2)p/(n + p - 1)$, которое требуется в формулировке теоремы существования энтропийного решения (см. теорему 2.7.2). В разделе 2.15 устанавливается, что при условии $q > p_1$ правильное энтропийное решение есть энтропийное решение. Кроме того, результаты раздела показывают, что при том же ограничении на q и требованиях относительно функции F , которые суть условия теоремы 2.14.1, понятия правильного энтропийного решения и энтропийного решения эквивалентны. Здесь же дается теорема единственности правильного энтропийного решения (теорема 2.15.3). Заметим, что в отличие от формулировки результата о единственности энтропийного решения (теорема 2.6.1) формулировка теоремы 2.15.3 содержит условие $q > p_1$. Вопрос о том, справедлива ли теорема единственности правильного энтропийного решения без этого условия, пока остается открытым.

В разделе 2.16 доказывается, что правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7) есть H -решение и, при условии $q > p_2 := np/(np - n + 1)$, W -решение этой задачи.

В разделе 2.17 изучаются свойства суммируемости правильных энтропийных решений. Основные результаты раздела сосредоточены в предложении 2.17.3, где описаны функциональные множители, вместе с ко-

торыми правильные энтропийные решения и их "производные" принадлежат некоторым предельным пространствам Лебега.

В разделе 2.18 дается стандартное определение обобщенного решения задачи (2.1.6), (2.1.7) в случае достаточной регулярности правой части уравнения в этой задаче. Легко видеть, что обобщенное решение есть также правильное энтропийное решение. В разделе среди других результатов устанавливаются условия на функцию F , при которых справедливо обратное утверждение.

Наконец, в разделе 2.19 рассматриваются примеры выполнения неравенств (2.1.3)–(2.1.5) и условий относительно функции F изложенных в главе теорем существования и единственности решений задачи (2.1.6), (2.1.7).

Отметим, что материал разделов 2.1–2.8 включает результаты работ [63, 64], в разделах 2.9 и 2.10 отражены результаты статьи [67], а содержание разделов 2.11–2.18 составляют результаты работы [74].

Заканчивая вводный раздел, напомним, что в главе предполагается выполненным неравенство $1 < p < n/2$ (см. (2.1.1)). В случае $p > n/2$ разрешимость задачи вида (2.1.6), (2.1.7) с L^1 -данными при стандартных условиях роста и коэрцитивности относительно коэффициентов A_α может быть установлена в пространстве $\mathring{W}^{2,p}(\Omega)$ на основе известных результатов теории монотонных операторов [89]. Это вытекает из ограниченности вложения $\mathring{W}^{2,p}(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$ при $n < 2p$. Случай $p = n/2$ требует отдельного изучения.

2.2. Множество функций $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

Через $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций из $W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Будем использовать еще такие обозначения: если $t \in [1, +\infty]$, то $|\cdot|_t$ – норма в $L^t(\Omega)$; если $t \in [1, n)$, то $t^* = \frac{nt}{n-t}$.

Как известно (см., например, [48, гл.7]), $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$ и существует зависящая только от n и q положительная постоянная c' такая, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$

$$|u|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|_q. \quad (2.2.1)$$

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ ψ_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\psi_k(s) = s - s^{k+2} + \frac{k+1}{k+3} s^{k+3}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ \left[\psi_k \left(\frac{|s| - k}{k} \right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geq 2k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$|h_k| \leq 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

$$0 \leq h'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.2.3)$$

$$|h''_k| \leq 3 \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.2.4)$$

Лемма 2.2.1. Пусть $k, j \in \mathbb{N}$, причем $j \geq 2k$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h_k(h_j(s)) = h_k(s). \quad (2.2.5)$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Если $|s| \leq j$, то в силу определения функции h_j имеем $h_j(s) = s$ и, следовательно, равенство (2.2.5) справедливо. Если же $|s| > j$, то в силу свойств функции h_j имеем $|h_j(s)| > 2k$ и, следовательно, согласно определению функции h_k справедливо равенство $h_k(h_j(s)) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} h_j(s)$, которое вместе с равенствами $h_k(s) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s$ и $\operatorname{sign} h_j(s) = \operatorname{sign} s$ приводит к (2.2.5). $\square$

Лемма 2.2.2. Пусть $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

1) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) D^\alpha u \quad \text{н. в. на } \Omega;$$

2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(u) D^\alpha u| \leq |h''_k(u)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \quad \text{н. в. на } \Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для α с $|\alpha| = 1$

$$w_\alpha = h'_k(u)D^\alpha u, \quad (2.2.6)$$

а для α с $|\alpha| = 2$

$$w_\alpha = h'_k(u)D^\alpha u + h''_k(u)D^{\alpha'}uD^{\alpha''}u, \quad (2.2.7)$$

где $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Ясно, что

$$w_\alpha \in L^q(\Omega), \quad |\alpha| = 1; \quad w_\alpha \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| = 2. \quad (2.2.8)$$

Возьмем последовательность $\{u_i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $u_i \rightarrow u$ сильно в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $u_i \rightarrow u$ п. в. на Ω . Так как $\{h_k(u_i)\} \subset C_0^2(\Omega)$, для α с $|\alpha| = 1$

$$D^\alpha h_k(u_i) = h'_k(u_i)D^\alpha u_i$$

и для α с $|\alpha| = 2$

$$D^\alpha h_k(u_i) = h'_k(u_i)D^\alpha u_i + h''_k(u_i)D^{\alpha'}u_iD^{\alpha''}u_i,$$

то учитывая свойства функций h_k , получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |h_k(u_i) - h_k(u)|_q = 0, \quad (2.2.9)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha h_k(u_i) - w_\alpha|_q = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha h_k(u_i) - w_\alpha|_p = 0. \quad (2.2.10)$$

Используя эти предельные соотношения, обычным образом устанавливаем, что для любого $\alpha \in \Lambda$ существует обобщенная производная $D^\alpha h_k(u)$, $D^\alpha h_k(u) = w_\alpha$ п. в. на Ω . Тогда в силу (2.2.8)–(2.2.10) имеем $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, а в силу (2.2.6), (2.2.7) справедливы предложения 1) и 2). $\square$

Через $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию: $\forall k \in \mathbb{N} \quad h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Любая функция u из множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ измерима, что следует из измеримости функций $h_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и поточечной сходимости $\{h_k(u)\}$ к u .

Имеют место такие свойства:

$$\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad (2.2.11)$$

$$\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (2.2.12)$$

Свойство (2.2.11) вытекает непосредственно из леммы 2.2.2. Свойство (2.2.12) следует из (2.2.11) и того, что если $u \in L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq |u|_\infty$, то $h_k(u) = u$ п. в. на Ω .

Однако заметим, что среди элементов множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ имеются функции, не обладающие даже свойством локальной суммируемости. Действительно, если B – замкнутый шар, $B \subset \Omega$, x_0 – центр шара B , φ – функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ на B , и v – функция на Ω такая, что $\forall x \in \Omega \setminus \{x_0\} \quad v(x) = |x - x_0|^{-n} \varphi$, то $v \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \setminus L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Лемма 2.2.3. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любых $k, j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2k$, и $\alpha \in \Lambda$

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_j(u) \quad \text{п. в. на } \{|u| \leq k\}, \quad (2.2.13)$$

$$D^\alpha h_k(u) = 0 \quad \text{п. в. на } \{|u| \geq j\}. \quad (2.2.14)$$

Доказательство. Пусть $k, j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2k$, и $\alpha \in \Lambda$. Согласно лемме 2.2.1 имеем

$$h_k(u) = h_k(h_j(u)). \quad (2.2.15)$$

Предположим, что $|\alpha| = 1$. Тогда из (2.2.15) и предложения 1) леммы 2.2.2 выводим, что

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(h_j(u)) D^\alpha h_j(u) \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая, что

$$h'_k(h_j(u)) = 1 \quad \text{на } \{|u| \leq k\}, \quad (2.2.16)$$

$$h'_k(h_j(u)) = 0 \quad \text{на } \{|u| \geq j\}, \quad (2.2.17)$$

получаем (2.2.13) и (2.2.14).

Пусть теперь $|\alpha| = 2$. В силу (2.2.15) и предложения 2) леммы 2.2.2 имеем

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(h_j(u)) D^\alpha h_j(u)| \leq |h''_k(h_j(u))| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta h_j(u)|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя (2.2.16), (2.2.17) и то, что

$$h''_k(h_j(u)) = 0 \quad \text{на } \{|u| \leq k\} \cup \{|u| \geq j\},$$

снова получаем (2.2.13) и (2.2.14). $\square$

Определение 2.2.1. Если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u$ — функция на Ω такая, что

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_1(u) \quad \text{на} \quad \{|u| \leq 1\}$$

и $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_{2^k}(u) \quad \text{на} \quad \{2^{k-1} < |u| \leq 2^k\}.$$

Лемма 2.2.4. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любых $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_k(u) \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq k\}. \quad (2.2.18)$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{j-1} \geq k$, и покажем, что

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq 2^j\}. \quad (2.2.19)$$

Действительно, в силу леммы 2.2.3 для любого $l \in \{0, 1, \dots, j\}$ имеем

$$D^\alpha h_{2^l}(u) = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq 2^l\}.$$

Отсюда, учитывая определение $\delta^\alpha u$ и тот факт, что

$$\{|u| \leq 2^j\} = \{|u| \leq 1\} \cup \bigcup_{l=1}^j \{2^{l-1} < |u| \leq 2^l\},$$

получаем (2.2.19).

Так как $2^{j-1} \geq k$, то по лемме 2.2.3

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq k\}. \quad (2.2.20)$$

Из (2.2.19) и (2.2.20) выводим (2.2.18). $\square$

Из леммы 2.2.4 следует, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, то существуют конечные интегралы функций $|\delta^\alpha u|^q, |\alpha| = 1$, и $|\delta^\alpha u|^p, |\alpha| = 2$, по множеству $\{|u| \leq k\}$.

Кроме того, из лемм 2.2.4 и 2.2.2 вытекает, что если $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u = D^\alpha u$ п. в. на Ω .

Положим

$$r = \frac{n(q-1)}{n-1}, \quad c'' = 2^{q^*/q}(c'n)^{q^*} + 2n^q.$$

Лемма 2.2.5. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $M \geq 1$ и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u| < k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq Mk. \quad (2.2.21)$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c'' M^{n/(n-q)} k^{-r^*}, \quad (2.2.22)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-r}, \quad (2.2.23)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-pr/q}, \quad (2.2.24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Согласно (2.2.1) имеем

$$|h_k(u)|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha h_k(u)|_q. \quad (2.2.25)$$

Используя леммы 2.2.1–2.2.4 и (2.2.3), (2.2.21), для любого α с $|\alpha| = 1$ получаем

$$\begin{aligned} |D^\alpha h_k(u)|_q^q &= \int_{\{|u| < 2k\}} |D^\alpha h_k(u)|^q dx \\ &\leq \int_{\{|u| < 2k\}} |D^\alpha h_{2k}(u)|^q dx = \int_{\{|u| < 2k\}} |\delta^\alpha u|^q dx \leq 2Mk. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Из (2.2.25) и (2.2.26) выводим, что

$$|h_k(u)|_{q^*} \leq c' n (2Mk)^{1/q}. \quad (2.2.27)$$

С другой стороны, поскольку $|h_k(u)| \geq k$ на $\{|u| \geq k\}$, верно неравенство

$$k^{q^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq |h_k(u)|_{q^*}^{q^*}.$$

Отсюда и из (2.2.27) получаем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq (c'' - 2n^q) M^{n/(n-q)} k^{-r^*}. \quad (2.2.28)$$

Следовательно, неравенство (2.2.22) справедливо.

Далее, пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, причем

$$M^{q/(n-q)} k^q \leq k_1^{1+r^*} \leq 2^{1+r^*} M^{q/(n-q)} k^q, \quad (2.2.29)$$

$$M^{q/(n-q)} k^p \leq k_2^{1+r^*} \leq 2^{1+r^*} M^{q/(n-q)} k^p. \quad (2.2.30)$$

Аналогично (2.2.28) имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k_i\} \leq (c'' - 2n^q) M^{n/(n-q)} k_i^{-r^*}, \quad i = 1, 2. \quad (2.2.31)$$

Положим

$$B_1 = \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \geq \frac{k^q}{n^q}, \quad |u| < k_1 \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \geq \frac{k^p}{n^{2p}}, \quad |u| < k_2 \right\}.$$

В силу (2.2.21)

$$\frac{k^q}{n^q} \text{meas } B_1 \leq \int_{\{|u| < k_1\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \right\} dx \leq M k_1, \quad (2.2.32)$$

$$\frac{k^p}{n^{2p}} \text{meas } B_2 \leq \int_{\{|u| < k_2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq M k_2. \quad (2.2.33)$$

Теперь, используя (2.2.31), (2.2.32) и (2.2.29), получаем

$$\begin{aligned} \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} &\leq \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \geq \frac{k^q}{n^q} \right\} \\ &\leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } B_1 \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-r}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя (2.2.31), (2.2.33) и (2.2.30), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} &\leq \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \geq \frac{k^p}{n^{2p}} \right\} \\ &\leq \text{meas}\{|u| \geq k_2\} + \text{meas } B_2 \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-pr/q}. \end{aligned}$$

Значит, неравенства (2.2.23) и (2.2.24) верны. $\square$

Лемма 2.2.6. Пусть u – измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\gamma > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ $\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\gamma}$. Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и $|u|_\lambda \leq 4^{1/(\gamma-\lambda)}[\text{meas } \Omega + 2^\gamma M]^{1/\lambda}$.

По существу, этот результат совпадает с леммой 1.6.1. Здесь он приведен в таком виде, в каком первоначально был сформулирован в статье [64].

Из лемм 2.2.5 и 2.2.6 вытекают определенные свойства суммируемости функций из множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющих для любого $k \in \mathbb{N}$ неравенству (2.2.21).

2.3. Определение и некоторые свойства энтропийных решений

Введем обозначение: если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, то $\delta_2 u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ $(\delta_2 u(x))_\alpha = \delta^\alpha u(x)$.

Заметим, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Lambda$, то в силу (2.1.3) и леммы 2.2.4 существуют конечные интегралы функций $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u$ и $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi$ по множеству $\{|u - \varphi| < 2k\}$.

Определение 2.3.1. Энтропийным решением задачи (2.1.6), (2.1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi|<2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Далее через c_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, q, c_1, c_2, |g_1|_1, |g_2|_1$ и $\text{meas } \Omega$.

Лемма 2.3.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq c_3 [F(x, u)|_1 + c + 1] k. \quad (2.3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения 2.3.1 существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u) dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u) dx + c. \quad (2.3.2)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Используя (2.1.4), (2.2.3) и то, что $h'_k(u) = 1$ на $\{|u| \leq k\}$, получаем

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\{|u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ \leq \int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u) dx + |g_2|_1. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3.2), учитывая (2.2.2), выводим (2.3.1). $\square$

Лемма 2.3.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда

- 1) для любого $\lambda \in (0, r^*)$ $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любых α , $|\alpha| = 1$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 3) для любых α , $|\alpha| = 2$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 4) для любых α , $|\alpha| = 1$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$;
- 5) для любых α , $|\alpha| = 2$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$;
- 6) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1)–3) следуют из лемм 2.3.1, 2.2.5 и 2.2.6.

Далее, для α с $|\alpha| = 1$ и $\lambda \in (0, \frac{r}{q-1})$ в силу (2.1.3) имеем

$$\begin{aligned} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^\lambda &\leq (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^{\lambda(q-1)} \\ &+ (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^{\lambda p(q-1)/q} + g_1 + 1 \text{ п. в. на } \Omega. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Из (2.3.3), учитывая, что $\lambda(q-1) < r$, $\lambda p \frac{q-1}{q} < \frac{p}{q} r$, и используя утверждения 2), 3), выводим, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 4) справедливо.

Аналогично, для α с $|\alpha| = 2$ и $\lambda \in (0, \frac{pr}{q(p-1)})$ в силу (2.1.3) имеем

$$\begin{aligned} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^\lambda &\leq (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^{\lambda q(p-1)/p} \\ &\quad + (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^{\lambda(p-1)} + g_1 + 1 \text{ п. в. на } \Omega. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Из (2.3.4), учитывая, что $\lambda q \frac{p-1}{p} < r$, $\lambda(p-1) < \frac{p}{q}r$, и используя утверждения 2), 3), выводим, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 5) справедливо.

Наконец, замечая, что $\frac{r}{q-1} > 1$ и $\frac{pr}{q(p-1)} > 1$, из утверждений 4) и 5) выводим утверждение 6). $\square$

Предложение 2.3.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\{|u-\varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx \right. \\ \left. - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Доказательство. В силу определения 2.3.1 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и положим

$$\nu_1 = \max_{\alpha \in \Lambda} \sum_{\Omega} |D^\alpha \varphi|, \quad \nu_2 = c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b.$$

Положим еще для любого $k \in \mathbb{N}$ $E_k = \{k \leq |u - \varphi| < 2k\}$. Так как для $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2\|\varphi\|_\infty$, имеем $E_k \subset \{|u| \geq k/2\}$, то из лемм 2.3.1 и 2.2.5 получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{meas } E_k = 0. \quad (2.3.7)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Из (2.3.6), используя (2.2.3) и тот факт, что

$$h'_k(u - \varphi) = 1 \quad \text{на} \quad \{|u - \varphi| < k\},$$

выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx \\ & - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + I_k \\ & \leq \nu_1 \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} dx + \nu_2 k^{-\gamma}, \quad (2.3.8) \end{aligned}$$

где

$$I_k = \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u - \varphi) dx.$$

В силу (2.1.4) и (2.2.3) имеем

$$I_k \geq - \int_{E_k} g_2 dx.$$

Из этого неравенства и (2.3.8) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \nu_1 \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} dx + \int_{E_k} g_2 dx + \nu_2 k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.3.7) и утверждение 6) леммы 2.3.2, получаем (2.3.5). $\square$

Лемма 2.3.3. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

Доказательство. Положим для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(\varphi) = \int_{\{|u-\varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx,$$

$$J_k(\varphi) = \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx.$$

В силу определения 2.3.1 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(\varphi) \leq J_k(\varphi) + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \quad (2.3.10)$$

Зафиксируем теперь произвольные $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно убедиться в том, что существует последовательность $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами:

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \text{ сильно в } W_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad (2.3.11)$$

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \text{ п. в. на } \Omega, \quad (2.3.12)$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad |\varphi_j| \leq |\varphi|_\infty + 1 \quad \text{на } \Omega. \quad (2.3.13)$$

В силу (2.3.10) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$I_k(\varphi_j) \leq J_k(\varphi_j) + c [1 + \|\varphi_j\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \quad (2.3.14)$$

Свойства (2.3.11), (2.3.12) позволяют заключить, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J_k(\varphi_j) = J_k(\varphi), \quad (2.3.15)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{W^{1,b}(\Omega)} = \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}. \quad (2.3.16)$$

Покажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_k(\varphi_j) = I_k(\varphi). \quad (2.3.17)$$

Положим

$$E_k = \{|u| \leq 2k + |\varphi|_\infty + 1\}, \quad \Phi = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi),$$

и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\Phi_j = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha \varphi - \delta^\alpha \varphi_j).$$

В силу (2.1.3) и леммы 2.2.4 функции Φ , Φ_j интегрируемы на множестве E_k , причем из (2.3.11) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_k} |\Phi_j| dx = 0. \quad (2.3.18)$$

Используя (2.3.13) и свойства функции h_k , получаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$|I_k(\varphi_j) - I_k(\varphi)| \leq \int_{E_k} |\Phi| |h'_k(u - \varphi_j) - h'_k(u - \varphi)| dx + \int_{E_k} |\Phi_j| dx.$$

Отсюда, учитывая (2.3.12) и (2.3.18), выводим (2.3.17). В свою очередь, из (2.3.14)–(2.3.17) выводим, что

$$I_k(\varphi) \leq J_k(\varphi) + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}.$$

Значит, неравенство (2.3.9) имеет место. $\square$

2.4. Одна априорная оценка для энтропийных решений

Лемма 2.4.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, 1]$. Тогда

- 1) для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k(1 + \tau)$, имеем $|h''_k(s)| \leq 6k\tau^k$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq k(1 + \tau)$, имеем $|h''_k(s)| \leq 3\tau^{-1}(1 - h'_k(s))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения функции ψ_k для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем $\psi''_k(s) = (k+1)(k+2)(s-1)s^k$. Следовательно, для любого $s \in [0, \tau]$

$$|\psi''_k(s)| \leq 6k^2\tau^k.$$

Отсюда и из определения функции h_k вытекает справедливость утверждения 1).

Далее, в силу определения функции ψ_k для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |\psi''_k(s)| - 3\tau^{-1}(1 - \psi'_k(s)) \\ \leq 3(k+1)|s-1||s|^k - 3\tau^{-1}s^{k+1}[(k+1)(1-s) + 1]. \end{aligned}$$

Тогда для любого $s \in [\tau, 1]$

$$\frac{1}{k} |\psi_k''(s)| \leq 3\tau^{-1}(1 - \psi_k'(s)).$$

Отсюда и из определения функции h_k вытекает справедливость утверждения 2). $\square$

Лемма 2.4.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда существуют $c > 0, b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, и $m \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & c_4 \int_{\{k \leq |u| \leq k+m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ & \leq m \int_{\{|u| \geq k/4\}} \{ |F(x, u)| + g_1 + g_2 \} dx + [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1} \\ & \quad + c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Доказательство. В силу леммы 2.3.3 существуют $c > 0, b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\varphi| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_m(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_\Omega F(x, u) h_m(u - \varphi) dx + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}, m \geq 4$. Положим $\psi = h_k(u)$. Ясно, что

$$\psi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (2.4.3)$$

Учитывая (2.2.2) и то, что $\psi = u$ на $\{|u| \leq k\}$, получаем

$$\int_\Omega F(x, u) h_m(u - \psi) dx \leq 2m \int_{\{|u| > k\}} |F(x, u)| dx. \quad (2.4.4)$$

Кроме того, в силу (2.2.3) и лемм 2.2.1–2.2.4 имеем

$$\|\psi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \leq |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b. \quad (2.4.5)$$

Используя (2.4.3)–(2.4.5), из (2.4.2) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\ & \leq 2m \int_{\{|u|>k\}} |F(x, u)| dx + c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Заметим еще, что в силу (2.4.2), (2.1.4), (2.2.2), (2.2.3) и леммы 2.2.5 справедливы неравенства

$$\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq c_5 [|F(x, u)|_1 + c + 1] k, \quad (2.4.7)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_6 [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*}. \quad (2.4.8)$$

Положим

$$\sigma = (r^* - 1) \frac{q - 2p}{qp}, \quad \theta_1 = h'_k(u), \quad \theta_2 = |h''_k(u)|.$$

Очевидно, что

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{на} \quad \{|u| \leq k\}. \quad (2.4.9)$$

Из леммы 2.4.1 вытекает, что

$$\theta_2 \leq 6k^{1-\sigma k} \quad \text{на} \quad \{k < |u| < k(1 + k^{-\sigma})\}, \quad (2.4.10)$$

$$\theta_2 \leq 3k^\sigma (1 - \theta_1) \quad \text{на} \quad \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\}. \quad (2.4.11)$$

Кроме того, в силу (2.2.2) и лемм 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4 для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем

$$|\delta^\alpha \psi - \theta_1 \delta^\alpha u| \leq (|\alpha| - 1) \theta_2 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п. в. на} \quad \{|u - \psi| < 2m\}. \quad (2.4.12)$$

Обозначим через $I_{k,m}$ левую часть неравенства (2.4.6) и положим

$$E'_{k,m} = \{|u - \psi| < 2m\} \cap \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\},$$

$$E''_{k,m} = \{|u - \psi| < 2m\} \cap \{|u| > k\},$$

$$I'_{k,m} = \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx,$$

$$I''_{k,m} = \int_{E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx.$$

Используя (2.1.4), (2.2.3), (2.4.9) и (2.4.12), получаем

$$\begin{aligned}
I_{k,m} &= \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad + \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\theta_1 \delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\
&\geq c_2 \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad - \int_{\{|u-\psi|<2m\}} g_2 (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad - \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx \\
&\geq c_2 I'_{k,m} - I''_{k,m} - \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_2 I'_{k,m} \leq I_{k,m} + I''_{k,m} + \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx. \quad (2.4.13)$$

Оценим $I''_{k,m}$. В силу (2.4.10) и (2.4.11) имеем

$$\begin{aligned}
I''_{k,m} &\leq \int_{\{k < |u| < k(1+k^{-\sigma})\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 dx \\
&\quad + \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx \\
&\leq 6k^{1-\sigma k} \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \\
&\quad + 3k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx.
\end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Используя равенство

$$\frac{p-1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{q-2p}{qp} = 1, \quad (2.4.15)$$

неравенство Гельдера, (2.1.3) и (2.4.7), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \\ & \leq n^3 (1 + \text{meas } \Omega) \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} \right]^{(p-1)/p} \\ & \quad \times \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \right\} dx \right]^{2/q} \\ & \leq c_7 \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx + 1 \right] \\ & \leq c_8 [F(x, u)|_1 + c + 1] k. \quad (2.4.16) \end{aligned}$$

Далее положим

$$c_9 = \frac{c_2}{6} [c_1 n^{2p/(p-1)} + n^{q/2}]^{-1}.$$

Используя (2.4.15) и неравенство Юнга, находим, что на Ω

$$\begin{aligned} & k^\sigma \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \\ & \leq c_9 \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\}^{p/(p-1)} + c_9 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\}^{q/2} + c_9 (k^\sigma / c_9)^{qp/(q-2p)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.1.3) выводим, что п. в. на Ω

$$\begin{aligned} & k^\sigma \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \\ & \leq \frac{c_2}{6} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} + (c_2/c_1) g_1 + c_{10} k^{\sigma qp/(q-2p)}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (2.4.8), получаем

$$\begin{aligned}
& k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
& \leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + (c_2/c_1) \int_{E'_{k,m}} g_1 dx + c_{10} k^{\sigma qp/(q-2p)} \text{meas } E'_{k,m} \\
& \leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + (c_2/c_1) \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx \\
& \quad + c_6 c_{10} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}. \quad (2.4.17)
\end{aligned}$$

Из (2.4.14), (2.4.16) и (2.4.17) вытекает, что

$$\begin{aligned}
I''_{k,m} & \leq \frac{c_2}{2} I'_{k,m} + 3(c_2/c_1) \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx \\
& \quad + c_{11} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} (k^{2-\sigma k} + k^{-1}).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.4.13), учитывая, что $k^{2-\sigma k} \leq (27/\sigma^3 + 1)k^{-1}$, выводим неравенство

$$\begin{aligned}
c_2 I'_{k,m} & \leq 2I_{k,m} + c_{12} \int_{\{|u|>k\}} (g_1 + g_2) dx \\
& \quad + c_{13} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}. \quad (2.4.18)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\} \subset \{|u - \psi| < m\}. \quad (2.4.19)$$

Это легко показать, принимая во внимание, что $m \geq 4$ и согласно определению функции h_k для $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq 2k$, $h_k(s) = 2k \frac{k+2}{k+3} \text{sign } s$.

Из (2.4.19) следует, что

$$\{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\} \subset E'_{k,m}$$

и

$$(1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) = 1 \quad \text{на} \quad \{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\}.$$

Тогда

$$I'_{k,m} \geq \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m/2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx. \quad (2.4.20)$$

Из (2.4.20), (2.4.18) и (2.4.6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m/2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ \leq (c_{12} + 4)m \int_{\{|u| > k\}} \{|F(x, u)| + g_1 + g_2\} dx \\ + c_{13} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1} + 2c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Поскольку это неравенство имеет место для любых $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, легко установить, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, и $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (2.4.1). $\square$

2.5. Понятие H -решения

Определение 2.5.1. H -решением задачи (2.1.6), (2.1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$;
- 3) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Теорема 2.5.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u является H -решением этой задачи.

Доказательство. Согласно определению 2.3.1 имеем $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $F(x, u) \in L^1(\Omega)$, а согласно утверждению 6) леммы 2.3.2 для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу леммы 2.3.3 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\psi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \psi) dx + c[1 + \|\psi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \|\varphi\|_\infty$ и положим для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k = h_k(u) - \varphi.$$

Теперь, зафиксировав $k \in \mathbb{N}$, в силу (2.5.1) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi_k) \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx \\ & \quad + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Заметим еще, что в силу (2.5.1), (2.1.4), (2.2.2), (2.2.3) и леммы 2.2.5 справедливы неравенства (2.4.7) и (2.4.8).

Определим функции θ_1 и θ_2 также, как и в доказательстве леммы 2.4.2. Тогда имеют место свойства (2.4.9)–(2.4.11) и, аналогично (2.4.12), для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} & |\delta^\alpha h_k(u) - \theta_1 \delta^\alpha u| \\ & \leq (|\alpha| - 1) \theta_2 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п. в. на} \quad \{|u - \varphi_k| < 2m\}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Обозначим через $I_{k,m}$ левую часть неравенства (2.5.2) и положим

$$E'_{k,m} = \{|u - \varphi_k| < 2m\} \cap \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\},$$

$$E''_{k,m} = \{|u - \varphi_k| < 2m\} \cap \{|u| > k\},$$

$$J_{k,m} = \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx,$$

$$I'_{k,m} = \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx,$$

$$I''_{k,m} = \int_{E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \varphi_k) dx.$$

Используя (2.1.4), (2.2.3), (2.4.9) и (2.5.3), получаем

$$I_{k,m} = J_{k,m} + \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx$$

$$+ \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\theta_1 \delta^\alpha u - \delta^\alpha h_k(u)) \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx$$

$$\geq J_{k,m} + c_2 I'_{k,m} - I''_{k,m} - \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx.$$

Следовательно,

$$J_{k,m} + c_2 I'_{k,m} \leq I_{k,m} + I''_{k,m} + \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx. \quad (2.5.4)$$

Оценим $I''_{k,m}$. В силу (2.4.10), (2.4.11) имеем

$$I''_{k,m} \leq 6k^{1-\sigma k} \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx$$

$$+ 3k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx. \quad (2.5.5)$$

Используя (2.4.15), неравенство Гельдера и (2.1.3), (2.4.7), находим, что

$$\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx$$

$$\leq c_8 [|F(x, u)|_1 + c + 1] k. \quad (2.5.6)$$

Аналогично (2.4.17) устанавливаем, что

$$\begin{aligned} k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx \\ \leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + (c_2/c_1) \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx + c_6 c_{10} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Из (2.5.5)–(2.5.7) вытекает, что

$$I''_{k,m} \leq \frac{c_2}{2} I'_{k,m} + 3(c_2/c_1) \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx + c_{14} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}.$$

Отсюда и из (2.5.4), (2.5.2) следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx + c_{15} \int_{\{|u|>k\}} (g_1 + g_2) dx \\ + C(u) k^{-1} + C(u, \varphi) m^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

где

$$C(u) = c_{14} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)},$$

$$C(u, \varphi) = c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b.$$

В свою очередь, из (2.5.8) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx \\ + \int_{\{|u-\varphi_k| \geq 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx \\ + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha \varphi| \right\} \{1 - h'_m(u - \varphi_k)\} dx \\ + c_{15} \int_{\{|u|>k\}} (g_1 + g_2) dx + C(u) k^{-1} + C(u, \varphi) m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Итак, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (2.5.9). Рассмотрим поведение отдельных слагаемых в правой части этого неравенства при $k \rightarrow \infty$. Так как $m \geq |\varphi|_\infty$ и $u - \varphi_k \rightarrow \varphi$ на Ω , то $h_m(u - \varphi_k) \rightarrow \varphi$, $h'_m(u - \varphi_k) \rightarrow 1$ на Ω . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx, \quad (2.5.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha \varphi| \right\} \{1 - h'_m(u - \varphi_k)\} dx = 0. \quad (2.5.11)$$

Кроме того, в силу (2.4.8)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u| > k\}} (g_1 + g_2) dx = 0. \quad (2.5.12)$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{meas}\{|u - \varphi_k| \geq 2m\} = 0. \quad (2.5.13)$$

Действительно, поскольку $|\varphi|_\infty \leq m$, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{|u - \varphi_k| \geq 2m\} \subset \{|u| > k\}. \quad (2.5.14)$$

Ясно, что $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (2.5.14) выводим (2.5.13). Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u - \varphi_k| \geq 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = 0. \quad (2.5.15)$$

Теперь, используя (2.5.10)–(2.5.12), (2.5.15) и переходя в неравенстве (2.5.9) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx + C(u, \varphi) m^{-\gamma}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, выводим, что

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

А так как в этом неравенстве φ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, то для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Таким образом, функция u обладает всеми свойствами, позволяющими утверждать, что она является H -решением задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

2.6. О единственности энтропийного решения

Доказательству теоремы единственности энтропийного решения задачи (2.1.6), (2.1.7) предположим ряд вспомогательных результатов.

Лемма 2.6.1. Пусть u, v – энтропийные решения задачи (2.1.6), (2.1.7), причем для любого $\alpha, |\alpha| = 1$, $\delta^\alpha u = \delta^\alpha v$ п. в. на Ω . Тогда $u = v$ п. в. на Ω .

Доказательство. Положим

$$\Phi = |F(x, u)| + |F(x, v)| + g_1 + g_2,$$

$$C_0 = |F(x, u)|_1 + |F(x, v)|_1 + 1.$$

В силу леммы 2.4.2 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & c_4 \int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \right\} dx + c_4 \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha v|^q \right\} dx \\ & \leq m \int_{\{|u| \geq k/5\}} \Phi dx + m \int_{\{|v| \geq k/5\}} \Phi dx + 3[C_0 + c]^{n/(n-q)} k^{-1} \\ & + 2c(1 + \text{meas } \Omega)^b \left[1 + |u|_b + |v|_b + \sum_{|\alpha|=1} (|\delta^\alpha u|_b + |\delta^\alpha v|_b) \right]^b m^{-\gamma}. \quad (2.6.1) \end{aligned}$$

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Поскольку $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$. Тогда, учитывая, что для $k \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{R}$ $T_k(s) = T_k(h_k(s))$, получаем

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega).$$

Аналогичное верно и относительно функции v .

Зафиксируем теперь $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$. Поскольку $T_k(u) = h_k(u)$ на $\{|u| \leq k\}$, то в силу леммы 2.2.4 для любого α , $|\alpha| = 1$, имеем

$$D^\alpha T_k(u) = \delta^\alpha u \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq k\} \quad (2.6.2)$$

и аналогично

$$D^\alpha T_k(v) = \delta^\alpha v \quad \text{п. в. на} \quad \{|v| \leq k\}. \quad (2.6.3)$$

Ясно также, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha T_k(u) = 0 \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| > k\}, \quad (2.6.4)$$

$$D^\alpha T_k(v) = 0 \quad \text{п. в. на} \quad \{|v| > k\}. \quad (2.6.5)$$

Положим

$$w = T_m(T_k(u) - T_k(v)).$$

Поскольку $w \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$, в силу (2.2.1) имеем

$$\int_{\Omega} |w|^{q^*} dx \leq (c'n)^{q^*} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha w|^q dx \right\}^{q^*/q}. \quad (2.6.6)$$

Будем оценивать левую часть этого неравенства снизу, а его правую часть сверху. Для этого введем множества

$$E_{m,k}^{(1)} = \{|u - v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\},$$

$$E_{m,k}^{(2)} = \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| > k, |v| > k\},$$

$$E_{m,k}^{(3)} = \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| \leq k, |v| > k\},$$

$$E_{m,k}^{(4)} = \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| > k, |v| \leq k\}.$$

Очевидно, что

$$\{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m\} = \bigcup_{i=1}^4 E_{m,k}^{(i)}$$

и

$$\int_{E_{m,k}^{(1)}} |u - v|^{q^*} dx \leq \int_{\Omega} |w|^{q^*} dx. \quad (2.6.7)$$

Заметим еще, что

$$E_{m,k}^{(3)} \subset \{k - m \leq |u| \leq k\}, \quad (2.6.8)$$

$$E_{m,k}^{(4)} \subset \{k - m \leq |v| \leq k\}. \quad (2.6.9)$$

Далее, зафиксировав α , $|\alpha| = 1$, получаем

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} w|^q dx = \sum_{i=1}^4 \int_{E_{m,k}^{(i)}} |D^{\alpha} T_k(u) - D^{\alpha} T_k(v)|^q dx.$$

Отсюда, используя условие леммы, (2.6.2)–(2.6.5) и (2.6.8), (2.6.9), выводим, что

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} w|^q dx \leq \int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} |\delta^{\alpha} u|^q dx + \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} |\delta^{\alpha} v|^q dx.$$

Это неравенство вместе с неравенствами (2.6.6) и (2.6.7) приводит к заключению, что

$$\begin{aligned} \int_{E_{m,k}^{(1)}} |u - v|^{q^*} dx &\leq (c'n)^{q^*} \left[\int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} u|^q \right\} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} v|^q \right\} dx \right]^{q^*/q}. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Теперь, положив

$$C_1 = 3[C_0 + c]^{n/(n-q)} + 2c(1 + \text{meas } \Omega)^b \left[1 + |u|_b + |v|_b + \sum_{|\alpha|=1} (|\delta^{\alpha} u|_b + |\delta^{\alpha} v|_b) \right]^b,$$

из (2.6.10), (2.6.1) получаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\}} |u - v|^{q^*} dx \\ &\leq c_{16} \left[m \int_{\{|u| \geq k/5\}} \Phi dx + m \int_{\{|v| \geq k/5\}} \Phi dx + C_1(k^{-1} + m^{-\gamma}) \right]^{q^*/q}. \end{aligned}$$

А поскольку это неравенство справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$, то переходя в нем к пределу при $k \rightarrow \infty$, устанавливаем, что

$$\int_{\{|u-v| \leq m\}} |u - v|^{q^*} dx \leq c_{16} [C_1 m^{-\gamma}]^{q^*/q}. \quad (2.6.11)$$

При осуществлении этого предельного перехода мы воспользовались тем фактом, что для энтропийных решений u и v в силу лемм 2.3.1 и 2.2.5 $\text{meas}\{|u| \geq k\} \rightarrow 0$ и $\text{meas}\{|v| \geq k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Наконец, переходя в неравенстве (2.6.11) к пределу при $m \rightarrow \infty$, заключаем, что $u = v$ п. в. на Ω . $\square$

Далее понадобятся некоторые элементарные неравенства, связанные с функциями h_k и другими вспомогательными функциями.

Лемма 2.6.2. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, причем $k \geq 4m$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| > k + 2m$, справедливо неравенство

$$|h_k(s)| > k + m. \quad (2.6.12)$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $|s| > k + 2m$. Если $|s| \geq 2k$, то в силу определения функции h_k и неравенства $k \geq 4m$ имеем

$$|h_k(s)| = 2k \frac{k+2}{k+3} > k + m.$$

Пусть теперь $|s| < 2k$. Положив $s_1 = (|s| - k)/k$, из определения функции h_k получаем

$$|h_k(s)| = k\psi_k(s_1) + k \geq k\psi_k\left(\frac{2m}{k}\right) + k. \quad (2.6.13)$$

Но в силу определения функции ψ_k и неравенства $k \geq 4m$ имеем

$$\psi_k\left(\frac{2m}{k}\right) > \frac{2m}{k} - \left(\frac{2m}{k}\right)^{k+2} > \frac{m}{k}.$$

Отсюда и из (2.6.13) выводим (2.6.12). $\square$

Пусть a – неубывающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $a(s) = s$ для $s \leq -1$, $a(s) = 0$ для $s \geq 0$, и пусть c_0 – положительная постоянная такая, что $a' \leq c_0$, $|a''| \leq c_0$ на $\mathbb{R}$.

Определим теперь для любых $k, m \in \mathbb{N}$ функцию $a_{k,m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$a_{k,m}(s) = \left[ma\left(\frac{|s| - k - m}{m}\right) + k + m \right] \text{sign } s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Лемма 2.6.3. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда $a_{k,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$ и имеют место следующие свойства:

$$\text{если } |s| \leq k, \quad \text{то } a_{k,m}(s) = s, \quad (2.6.14)$$

$$\text{если } |s| \geq k + m, \quad \text{то } a_{k,m}(s) = (k + m)\text{sign } s, \quad (2.6.15)$$

$$\text{если } k \leq |s| \leq k + m, \text{ то } |s| \leq \frac{k+m}{k} |a_{k,m}(s)|, \quad (2.6.16)$$

$$|a_{k,m}| \leq k + m \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.6.17)$$

$$0 \leq a'_{k,m} \leq c_0 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.6.18)$$

$$|a''_{k,m}| \leq \frac{c_0}{m} \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.6.19)$$

Все перечисленные в лемме свойства являются простыми следствиями определения функций $a_{k,m}$.

Лемма 2.6.4. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, причем $k \geq 5m$. Пусть $s, t \in \mathbb{R}$ и имеют место неравенства

$$|t| \geq k, \quad |h_k(t)| \leq k + m, \quad (2.6.20)$$

$$|s - a_{k,m}(h_k(t))| \leq 2m. \quad (2.6.21)$$

Тогда

$$|t| \leq k + 2m, \quad (2.6.22)$$

$$k - 4m \leq |s| \leq k + 3m. \quad (2.6.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2.6.22) следует из леммы 2.6.2 и второго неравенства в (2.6.20). Далее, в силу (2.6.21) и (2.6.17) имеем

$$|s| \leq |s - a_{k,m}(h_k(t))| + |a_{k,m}(h_k(t))| \leq k + 3m. \quad (2.6.24)$$

Наконец, используя (2.6.20), (2.6.16), (2.6.21), (2.6.24) и неравенство $k \geq 5m$, получаем

$$\begin{aligned} k \leq |h_k(t)| &\leq \frac{k+m}{k} |a_{k,m}(h_k(t))| \leq \frac{k+m}{k} (2m + |s|) \\ &\leq |s| + \frac{m}{k} |s| + 2m \frac{k+m}{k} \leq |s| + 3m + 5m \frac{m}{k} \leq |s| + 4m. \end{aligned}$$

Следовательно, $|s| \geq k - 4m$. Отсюда и из (2.6.24) получаем (2.6.23). $\square$

Теорема 2.6.1. Пусть для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$. Пусть u, v — энтропийные решения задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда $u = v$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для любых $k, m \in \mathbb{N}$

$$f_{k,m} = a_{k,m}(h_k(u)), \quad g_{k,m} = a_{k,m}(h_k(v)),$$

$$\begin{aligned}
I_{k,m} = & \int_{\{k-4m \leq |u| \leq k+3m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\
& + \int_{\{k-4m \leq |v| \leq k+3m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha v|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha v|^p \right\} dx.
\end{aligned}$$

В силу лемм 2.3.3 и 2.4.2 существуют $c > 0$, $\gamma > 0$ и последовательность $\{\sigma_k\}$ положительных чисел, сходящаяся к нулю, такие, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k > 5m$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|u-g_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha g_{k,m}) \right\} h'_m(u - g_{k,m}) dx \\
& \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - g_{k,m}) dx + cm^{-\gamma}, \quad (2.6.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|v-f_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v)(\delta^\alpha v - \delta^\alpha f_{k,m}) \right\} h'_m(v - f_{k,m}) dx \\
& \leq \int_{\Omega} F(x, v) h_m(v - f_{k,m}) dx + cm^{-\gamma}, \quad (2.6.26)
\end{aligned}$$

$$I_{k,m} \leq m\sigma_k + cm^{-\gamma}. \quad (2.6.27)$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k > 5m$. Из (2.6.25) и (2.6.26) следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|u-g_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha g_{k,m}) \right\} h'_m(u - g_{k,m}) dx \\
& + \int_{\{|v-f_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v)(\delta^\alpha v - \delta^\alpha f_{k,m}) \right\} h'_m(v - f_{k,m}) dx \\
& \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - g_{k,m}) dx \\
& + \int_{\Omega} F(x, v) h_m(v - f_{k,m}) dx + 2cm^{-\gamma}. \quad (2.6.28)
\end{aligned}$$

Обозначим через $I'_{k,m}$ и $I''_{k,m}$ соответственно первый и второй интегралы в левой части неравенства (2.6.28), а через $I'''_{k,m}$ обозначим правую часть неравенства (2.6.28). Тогда неравенство (2.6.28) принимает вид:

$$I'_{k,m} + I''_{k,m} \leq I'''_{k,m}. \quad (2.6.29)$$

В силу (2.2.2) и (2.6.14) имеем

$$\begin{aligned} I'''_{k,m} &\leq \int_{\{|u| \leq k, |v| \leq k\}} [F(x, u) - F(x, v)] h_m(u - v) dx \\ &\quad + 2m \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)|] dx + 2cm^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

Заметим, что поскольку по условию теоремы для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$, то имеем

$$[F(x, u) - F(x, v)] h_m(u - v) \leq 0 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда и из (2.6.30) получаем, что

$$I'''_{k,m} \leq 2m \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)|] dx + 2cm^{-\gamma}. \quad (2.6.31)$$

Далее, положим

$$E_{k,m} = \{|u - v| < 2m, |u| \leq k, |v| \leq k\},$$

$$E'_{k,m} = \{|u - g_{k,m}| < 2m, |v| > k\},$$

$$E''_{k,m} = \{|u - g_{k,m}| < 2m, |v| \leq k, |u| > k\}.$$

Используя (2.1.4), (2.2.3) и то, что $g_{k,m} = v$ на $E_{k,m}$, $\forall \alpha \in \Lambda$ $\delta^\alpha g_{k,m} = \delta^\alpha v$ п. в. на $E_{k,m}$, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} I'_{k,m} &\geq \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} h'_m(u - v) dx \\ &\quad - \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx - \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

Оценим второй интеграл в правой части этого неравенства. Положим

$$E'''_{k,m} = E'_{k,m} \cap \{|h_k(v)| \leq k + m\},$$

$$B'_{k,m} = \{k - 4m \leq |u| \leq k + 3m\}, \quad B''_{k,m} = \{k - 4m \leq |v| \leq k + 3m\}.$$

В силу леммы 2.6.4 имеем $E'''_{k,m} \subset B'_{k,m} \cap B''_{k,m}$. Используя (2.6.14), находим также, что $E''_{k,m} \subset B'_{k,m} \cap B''_{k,m}$. Заметим еще, что для любого $\alpha \in \Lambda$ $\delta^\alpha g_{k,m} = 0$ п. в. на $\{|h_k(v)| > k + m\}$. Учитывая эти свойства и используя числовое и интегральное неравенства Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ &= \int_{E'''_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ & \quad + \int_{E'''_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ & \leq \left[\int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{q/(q-1)} \right\} dx \right]^{(q-1)/q} \\ & \quad \times \left[\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha g_{k,m}|^q \right\} dx \right]^{1/q} \\ & \quad + \left[\int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} dx \right]^{(p-1)/p} \\ & \quad \times \left[\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha g_{k,m}|^p \right\} dx \right]^{1/p}. \quad (2.6.33) \end{aligned}$$

В силу (2.1.3) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} dx \\ & \leq c_1 I_{k,m} + \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx. \quad (2.6.34) \end{aligned}$$

Используя (2.2.3), (2.2.4), (2.6.18), (2.6.19) и леммы 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4, устанавливаем, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$|\delta^\alpha g_{k,m}| \leq c_0 |\delta^\alpha v| \quad \text{п. в. на} \quad \{|v| \leq 2k\};$$

для любого α , $|\alpha| = 2$,

$$|\delta^\alpha g_{k,m}| \leq c_0 |\delta^\alpha v| + 4c_0 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta v|^2 \quad \text{п. в. на} \quad \{|v| \leq 2k\}.$$

Тогда

$$\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha g_{k,m}|^q \right\} dx \leq c_0^q I_{k,m}, \quad (2.6.35)$$

$$\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha g_{k,m}|^p \right\} dx \leq (2c_0)^p I_{k,m} + c_{17} c_0^p I_{k,m}^{2p/q}. \quad (2.6.36)$$

Из (2.6.33)–(2.6.36) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ \leq c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] + 2 \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6.32) получаем

$$\begin{aligned} \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} h'_m(u - v) dx \\ \leq I'_{k,m} + c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] \\ + 2 \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx + \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \quad (2.6.37) \end{aligned}$$

Поскольку функции u, v равноправны, аналогично (2.6.37) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v) (\delta^\alpha v - \delta^\alpha u) \right\} h'_m(v - u) dx \\ \leq I''_{k,m} + c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] \\ + 2 \int_{\{|v| \geq k/5\}} g_1 dx + \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \quad (2.6.38) \end{aligned}$$

Складывая неравенства (2.6.37), (2.6.38), учитывая нечетность функции h_m и используя (2.1.5), (2.6.27), (2.6.29), (2.6.31), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \delta_2 u) - A_\alpha(x, \delta_2 v)] (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} dx \\ & \leq 4m \int_{\{|u| \geq k/5\} \cup \{|v| \geq k/5\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)| + g_1 + g_2] dx \\ & \quad + 2c_{18}c_0^q [m\sigma_k + ct^{-\gamma} + (m\sigma_k + ct^{-\gamma})^{2p/q}] + 2ct^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве сначала к пределу при $k \rightarrow \infty$, а затем к пределу при $t \rightarrow \infty$ и учитывая (2.1.5), устанавливаем, что

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \delta_2 u) - A_\alpha(x, \delta_2 v)] (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) = 0 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда и из (2.1.5) вытекает, что $\delta_2 u = \delta_2 v$ п. в. на Ω . Тогда в силу леммы 2.6.1 $u = v$ п. в. на Ω . $\square$

2.7. Теоремы существования

В этом разделе доказываются следующие основные результаты.

Теорема 2.7.1. Пусть выполняются условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.

Тогда существует H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Положим

$$p_1 = \frac{3n-2}{n+p-1}p.$$

В силу (2.1.1) имеем $p_1 \in (2p, n)$.

Теорема 2.7.2. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 2.7.1 и пусть $q > p_1$. Тогда существует энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Общая часть доказательства теорем 2.7.1 и 2.7.2, с которой мы и начнем, связана с получением оценок для решений задач, аппроксимирующих задачу (2.1.6), (2.1.7). С этой целью введем некоторую специальную последовательность функций.

Положим

$$a_1 = 4 - \frac{14}{3}e^{-1/2}, \quad a_2 = 4 - 5e^{-1/2}, \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{61}{48}e^{-1/2}$$

и определим функцию $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\chi(s) = \begin{cases} s - a_1 s^3 + a_2 s^4, & \text{если } s \leq 1/2, \\ a_3 - e^{-s}, & \text{если } s > 1/2. \end{cases}$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $\chi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\chi_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ \left[\chi\left(\frac{|s| - k}{k}\right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем: $\chi_k \in C^2(\mathbb{R})$,

$$|\chi_k| \leq 3k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.7.1)$$

$$0 < \chi'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.7.2)$$

$$|\chi''_k| \leq \frac{8}{k} \chi'_k \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.7.3)$$

Использование функций χ_k будет эффективным как в данном, так и некоторых последующих разделах.

Итак, будем считать, что условия 1) и 2) теоремы 2.7.1 выполнены.

Положим $f = F(\cdot, 0)$ и определим для любого $l \in \mathbb{N}$ функцию $F_l : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$F_l(x, s) = h_l(f(x) - F(x, s)), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

В силу условия 1) теоремы 2.7.1 имеем: если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ функция } F_l(x, \cdot) \text{ неубывающая на } \mathbb{R}. \quad (2.7.4)$$

Далее, в силу условия 2) теоремы 2.7.1 $f \in L^1(\Omega)$ и, следовательно, существует $\{f_l\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f\|_1 = 0, \quad (2.7.5)$$

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \|f_l\|_1 \leq \|f\|_1 + 1. \quad (2.7.6)$$

Из (2.1.3)–(2.1.5), (2.7.4) и результатов [89] о разрешимости уравнений с монотонными операторами получаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такая, что $\forall v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} v + F_l(x, u_l) v \right\} dx = \int_{\Omega} f_l v dx. \quad (2.7.7)$$

Лемма 2.7.1. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\int_{\{|u_l| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} dx \leq c_{19} [|f|_1 + 1] k, \quad (2.7.8)$$

$$\int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq c_{20} [|f|_1 + 1]. \quad (2.7.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные $k, l \in \mathbb{N}$. Имеем $\chi_k(u_l) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п. в. на Ω

$$D^{\alpha} \chi_k(u_l) = \chi'_k(u_l) D^{\alpha} u_l, \quad (2.7.10)$$

а для α с $|\alpha| = 2$ п. в. на Ω

$$|D^{\alpha} \chi_k(u_l) - \chi'_k(u_l) D^{\alpha} u_l| \leq |\chi''_k(u_l)| \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta} u_l|^2. \quad (2.7.11)$$

Подставляя в (2.7.7) вместо v функцию $\chi_k(u_l)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} \chi_k(u_l) \right\} dx \\ + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) dx = \int_{\Omega} f_l \chi_k(u_l) dx. \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Обозначим через $I_{k,l}$ первый интеграл в левой части неравенства (2.7.12) и положим

$$J_{k,l} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx.$$

Используя (2.1.4), (2.7.10) и (2.7.11), находим, что

$$I_{k,l} \geq c_2 J_{k,l} - \int_{\Omega} g_2 \chi'_k(u_l) dx - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^2 \right\} |\chi''_k(u_l)| dx. \quad (2.7.13)$$

Получим подходящую оценку для последнего интеграла в правой части неравенства (2.7.13). Обозначим этот интеграл через $J'_{k,l}$ и положим

$$c_{21} = \frac{c_2}{16} [c_1 n^{2p/(p-1)} + n^{q/2}]^{-1}.$$

Используя (2.4.15), неравенство Юнга и (2.1.3), устанавливаем, что п. в. на Ω

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^2 \right\} \\ & \leq \frac{c_2}{16} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} + \frac{c_2}{16c_1} g_1 + c_{22}. \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание (2.7.2), (2.7.3), получаем

$$J'_{k,l} \leq \frac{c_2}{2} J_{k,l} + \frac{c_2}{2c_1} |g_1|_1 + c_{22} \text{meas } \Omega. \quad (2.7.14)$$

Из (2.7.13), (2.7.14) следует, что

$$I_{k,l} \geq \frac{c_2}{2} J_{k,l} - c_{23}.$$

Отсюда и из (2.7.12), учитывая (2.7.1), выводим неравенство

$$\frac{c_2}{2} J_{k,l} + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) dx \leq 3k |f_l|_1 + c_{23}. \quad (2.7.15)$$

В силу (2.7.4) и свойств функции χ_k имеем

$$\begin{aligned} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) & \geq 0 \quad \text{п. в. на } \Omega, \\ F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) & \geq k |F_l(x, u_l)| \quad \text{п. в. на } \{|u_l| \geq k\}. \end{aligned}$$

Принимая это во внимание и используя (2.7.6), из (2.7.15) получаем

$$\frac{c_2}{2} J_{k,l} + k \int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}.$$

Тогда

$$\frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}, \quad (2.7.16)$$

$$k \int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}. \quad (2.7.17)$$

Из (2.7.16), учитывая, что $\chi'_k = 1$ на $[-k, k]$, выводим неравенство (2.7.8). Из (2.7.17) выводим неравенство (2.7.9). $\square$

Из лемм 2.7.1 и 2.2.5 вытекает следующий результат.

Лемма 2.7.2. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq c_{24}[|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*}, \quad (2.7.18)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l| \geq k \right\} \leq c_{25}[|f|_1 + 1]^{n/(n-1)} k^{-r}, \quad (2.7.19)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l| \geq k \right\} \leq c_{25}[|f|_1 + 1]^{n/(n-1)} k^{-pr/q}. \quad (2.7.20)$$

Лемма 2.7.3. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$c_{26} \int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + [|f|_1 + 1] k^{-1} + |f_l - f|_1. \quad (2.7.21)$$

Доказательство. Пусть z — функция класса $C^2(\mathbb{R})$ такая, что $0 \leq z \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $z = 0$ на $[-1, 1]$, $z = 1$ на $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ и $z'(s) \text{sign } s \geq 0$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Положим

$$\tilde{c} = \max \left\{ \max_{\mathbb{R}} |z'|, \max_{\mathbb{R}} |z''| \right\}.$$

Зафиксируем теперь произвольные $k, l \in \mathbb{N}$. Определим функцию $z_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$z_k(s) = h_1\left(\frac{s}{k}\right) z\left(\frac{s}{k}\right).$$

Ясно, что $z_k \in C^2(\mathbb{R})$. В силу (2.2.2)–(2.2.4) и свойств функции z для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$|z_k(s)| \leq 2, \quad (2.7.22)$$

$$0 \leq z'_k(s) \leq (1 + 2\tilde{c})k^{-1}, \quad (2.7.23)$$

$$|z''_k(s)| \leq (3 + 4\tilde{c})k^{-2}. \quad (2.7.24)$$

Кроме того,

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \quad z_k(s) = 0; \quad (2.7.25)$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq 2k, \quad |z_k(s)| \geq 1; \quad (2.7.26)$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq 2k, \quad z''_k(s) = 0. \quad (2.7.27)$$

В силу свойств функции z_k имеем $z_k(u_l) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п. в. на Ω

$$D^\alpha z_k(u_l) = z'_k(u_l) D^\alpha u_l, \quad (2.7.28)$$

для α с $|\alpha| = 2$ п. в. на Ω

$$|D^\alpha z_k(u_l) - z'_k(u_l) D^\alpha u_l| \leq |z''_k(u_l)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_l|^2. \quad (2.7.29)$$

Подставляя в (2.7.7) вместо v функцию $z_k(u_l)$ и используя (2.7.22), (2.7.25), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha z_k(u_l) \right\} dx + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \\ \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + 2|f_l - f|_1. \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

Обозначим через $I'_{k,l}$ первый интеграл в левой части неравенства (2.7.30) и положим

$$I''_{k,l} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^2 \right\} |z''_k(u_l)| dx.$$

Используя (2.1.4), (2.7.23), (2.7.25), (2.7.28) и (2.7.29), устанавливаем, что

$$I'_{k,l} \geq -I''_{k,l} - (1 + 2\tilde{c})|g_2|_1 k^{-1}.$$

Отсюда и из (2.7.30) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \\ & \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + (1 + 2\tilde{c}) |g_2|_1 k^{-1} + 2|f_l - f|_1 + I''_{k,l}. \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

Заметим, что в силу (2.7.4) и определения функции z_k имеем

$$F_l(x, u_l) z_k(u_l) \geq 0 \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

причем в силу (2.7.26)

$$F_l(x, u_l) z_k(u_l) \geq |F_l(x, u_l)| \quad \text{п. в. на } \{|u_l| \geq 2k\}.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \geq \int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx.$$

Из этого неравенства и (2.7.31) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx \\ & \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + (1 + 2\tilde{c}) |g_2|_1 k^{-1} + 2|f_l - f|_1 + I''_{k,l}. \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

Остается оценить интеграл $I''_{k,l}$. В силу (2.7.27) и (2.7.24) имеем

$$I''_{k,l} \leq (3 + 4\tilde{c}) k^{-2} \int_{\{|u_l| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^2 \right\} dx. \quad (2.7.33)$$

Обозначим через $I'''_{k,l}$ интеграл в правой части неравенства (2.7.33). Используя (2.4.15), неравенство Юнга и (2.1.3), находим, что

$$I'''_{k,l} \leq c_{27} \int_{\{|u_l| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} dx + c_{28}.$$

Отсюда и из леммы 2.7.1 получаем $I'''_{k,l} \leq c_{29} [|f|_1 + 1] k$. Это неравенство и (2.7.33) приводят к заключению, что $I''_{k,l} \leq c_{30} [|f|_1 + 1] k^{-1}$. Учитывая эту оценку, из (2.7.32) получаем (2.7.21). $\square$

Положим для любых $t > 0$ и $i, j \in \mathbb{N}$

$$M_t(i, j) = \text{meas}\{|u_i - u_j| \geq t\},$$

$$N_t(i, j) = \text{meas}\left\{\sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t\right\}.$$

Установим некоторые оценки для введенных величин. Они будут играть важную роль в доказательстве существования решения задачи (2.1.6), (2.1.7). Нужная оценка для $M_t(i, j)$ устанавливается просто. Она дается в следующей лемме.

Лемма 2.7.4. Пусть $t > 0$, $i, j, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M_t(i, j) \leq 2c_{24}[|f|_1 + 1]^{n/(n-q)}k^{-r^*} + t^{-q} \int_{\Omega} |h_k(u_i) - h_k(u_j)|^q dx. \quad (2.7.34)$$

Доказательство. Положим $B = \{|h_k(u_i) - h_k(u_j)| \geq t\}$. Поскольку $\{|u_i - u_j| \geq t\} \subset \{|u_i| \geq k\} \cup \{|u_j| \geq k\} \cup B$, имеем

$$M_t(i, j) \leq \text{meas}\{|u_i| \geq k\} + \text{meas}\{|u_j| \geq k\} + \text{meas } B.$$

Отсюда, учитывая (2.7.18) и то, что

$$\text{meas } B \leq t^{-q} \int_{\Omega} |h_k(u_i) - h_k(u_j)|^q dx,$$

выводим (2.7.34). $\square$

Займемся теперь получением подходящей оценки для $N_t(i, j)$. Положим для любых $t > 0$ и $m, k, i, j \in \mathbb{N}$

$$E_{t,m,k}(i, j) = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t, \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| \leq m, \right.$$

$$\left. \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| \leq m, |u_i| \leq k, |u_j| \leq k, |u_i - u_j| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Лемма 2.7.5. Пусть $t > 0$ и $m, k, i, j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$N_t(i, j) \leq c_{31}[|f|_1 + 1]^{n/(n-q)}(m^{-pr/q} + k^{-r^*})$$

$$+ M_{1/k}(i, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(i, j). \quad (2.7.35)$$

Доказательство. Имеем

$$\left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t \right\} \subset \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| > m \right\} \cup \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| > m \right\} \\ \cup \{|u_i| > k\} \cup \{|u_j| > k\} \cup \{|u_i - u_j| > 1/k\} \cup E_{t,m,k}(i, j).$$

Следовательно,

$$N_t(i, j) \leq \text{meas} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| > m \right\} + \text{meas} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| > m \right\} \\ + \text{meas}\{|u_i| > k\} + \text{meas}\{|u_j| > k\} + M_{1/k}(i, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(i, j).$$

Отсюда, используя (2.7.18)–(2.7.20), получаем неравенство (2.7.35). $\square$

Для эффективного использования оценки (2.7.35) получим еще одну оценку для некоторых интегралов, связанных с множествами $E_{t,m,k}(i, j)$. В связи с этим введем ряд вспомогательных функций и множеств.

Определение 2.7.1. Пусть $x \in \Omega$. Тогда $\mathcal{A}_x$ – функция на $\mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$ такая, что для любой пары $(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$

$$\mathcal{A}_x(\xi, \xi') = \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha).$$

Поскольку A_α , $\alpha \in \Lambda$, – функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (2.1.5), существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

- (i) для любого $x \in \Omega \setminus E$ функция $\mathcal{A}_x$ непрерывна на $\mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$;
- (ii) для любых $x \in \Omega \setminus E$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство $\mathcal{A}_x(\xi, \xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$,

$$G_{t,m} = \left\{ (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2} : \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi_\alpha - \xi'_\alpha| \geq t, \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi_\alpha| \leq m, \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi'_\alpha| \leq m \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любых $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, множество $G_{t,m}$ непустое.

Определение 2.7.2. Пусть $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$. Тогда $\mu_{t,m}$ – функция на Ω такая, что

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min_{G_{t,m}} \mathcal{A}_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E. \end{cases}$$

Используя предложения (i), (ii), (2.1.3) и тот факт, что A_α , $\alpha \in \Lambda$, — функции Каратеодори, устанавливаем: если $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, то

$$\mu_{t,m} \geq 0 \text{ на } \Omega, \quad \mu_{t,m} > 0 \text{ п. в. на } \Omega, \quad (2.7.36)$$

$$\mu_{t,m} \in L^1(\Omega). \quad (2.7.37)$$

Положим для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$\rho(i, j) = |f_i - f_j|_1 + |F_i(x, u_i) - F_j(x, u_j)|_1.$$

Лемма 2.7.6. Пусть $t > 0$, $m, k, i, j \in \mathbb{N}$, причем $m > t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx &\leq 2\rho(i, j)k^{-1} + c_{32}[|f|_1 + 1]k^{-(q-2p)/qp} \\ &\quad + c_{32}[|f|_1 + 1][M_{1/k}(i, j)]^{(q-2p)/qp}k^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть z — функция и $\tilde{c}$ — число, введенные в доказательстве леммы 2.7.3. Определим функцию $\tau_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_k(s) = 1 - z\left(\frac{s}{k}\right).$$

Определим еще функцию $\sigma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{k} h_1(ks).$$

Положим теперь

$$w_k = \sigma_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j).$$

В силу свойств функций z и h_1 и того, что $u_i, u_j \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, имеем: $w_k \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

- а) если $\alpha \in \Lambda$, то $D^\alpha w_k = 0$ п. в. на $\{|u_i| \geq 2k\} \cup \{|u_j| \geq 2k\}$;
- б) если $|\alpha| = 1$, то п. в. на Ω

$$|D^\alpha w_k - \sigma'_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j)D^\alpha(u_i - u_j)| \leq 2\tilde{c}k^{-2}(|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_j|);$$

- с) если $|\alpha| = 2$, то п. в. на Ω

$$\begin{aligned} |D^\alpha w_k - \sigma'_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j)D^\alpha(u_i - u_j)| &\leq 2\tilde{c}k^{-2}(|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_j|) \\ &\quad + 2(4\tilde{c}^2k^{-1} + |\sigma''_k(u_i - u_j)|)\left(\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_j|^2\right). \end{aligned}$$

В силу (2.7.7)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i) D^{\alpha} w_k + F_i(x, u_i) w_k \right\} dx = \int_{\Omega} f_i w_k dx,$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j) D^{\alpha} w_k + F_j(x, u_j) w_k \right\} dx = \int_{\Omega} f_j w_k dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i) - A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j)] D^{\alpha} w_k \right\} dx \leq \frac{2}{k} \rho(i, j). \quad (2.7.38)$$

Используя предложения а)–с), свойства функций z и h_1 , (2.1.5) и (2.7.38), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i) - A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j)] D^{\alpha} (u_i - u_j) \right\} dx \leq \frac{2}{k} \rho(i, j) \\ & + 2\tilde{c}k^{-2} \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} (|A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i)| + |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j)|) \right. \\ & \quad \left. \times (|D^{\alpha} u_i| + |D^{\alpha} u_j|) \right\} dx \\ & + 8\tilde{c}^2 k^{-1} \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} (|A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i)| + |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j)|) \right\} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta} u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta} u_j|^2 \right\} dx \\ & + 6k \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\} \cap \{|u_i - u_j| > 1/k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} (|A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_i)| + |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_j)|) \right\} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta} u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta} u_j|^2 \right\} dx. \quad (2.7.39) \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx \\ & \leq \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \nabla_2 u_i) - A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)] D^\alpha (u_i - u_j) \right\} dx. \end{aligned}$$

Тогда, обозначив первый, второй и третий интегралы в правой части неравенства (2.7.39) соответственно через I' , I'' и I''' , из (2.7.39) выводим, что

$$\int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx \leq 2k^{-1} \rho(i, j) + 2\tilde{c}k^{-2} I' + 8\tilde{c}^2 k^{-1} I'' + 6k I'''. \quad (2.7.40)$$

Используя (2.1.3), находим, что

$$\begin{aligned} I' & \leq c_{33} \int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \\ & + c_{33} \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + c_{33} |g_1|_1, \end{aligned} \quad (2.7.41)$$

$$\begin{aligned} I'' & \leq c_{34} \left[\int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \right. \\ & \left. + \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + |g_1|_1 \right]^{1-(q-2p)/qp}, \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

$$\begin{aligned} I''' & \leq c_{35} \left[\int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \right. \\ & \left. + \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + |g_1|_1 \right]^{1-(q-2p)/qp} \\ & \times [M_{1/k}(i, j)]^{(q-2p)/qp}. \end{aligned} \quad (2.7.43)$$

Из неравенств (2.7.41)–(2.7.43), учитывая (2.7.8), получаем

$$\begin{aligned} I' &\leq c_{36} [|f|_1 + 1] k, \\ I'' &\leq c_{37} [|f|_1 + 1] k^{1-(q-2p)/qp}, \\ I''' &\leq c_{38} [|f|_1 + 1] [M_{1/k}(i, j)]^{(q-2p)/qp} k. \end{aligned}$$

Из этих оценок и (2.7.40) выводим требуемое неравенство для интеграла функции $\mu_{t,m}$ по множеству $E_{t,m,k}(i, j)$. $\square$

Далее, используя лемму 2.2.2, (2.2.3), (2.2.4) и (2.7.8), устанавливаем, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$ $h_k(u_l) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$,

$$\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u_l)|^q dx \leq 2c_{19} [|f|_1 + 1] k, \quad (2.7.44)$$

$$\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u_l)|^p dx \leq c_{39} [|f|_1 + 1] k. \quad (2.7.45)$$

Тогда, принимая во внимание (2.2.1), получаем, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$

$$\|h_k(u_l)\| \leq c_{40} [|f|_1 + 1] k.$$

Следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{v_k\} \subset \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$h_k(u_{l_i}) \rightarrow v_k \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega). \quad (2.7.46)$$

Отсюда и из леммы 2.7.4 получаем, что

$$\text{последовательность } \{u_{l_i}\} \text{ фундаментальна по мере.} \quad (2.7.47)$$

Лемма 2.7.7. Для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^{\alpha} u_{l_i}\}$ фундаментальна по мере.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$c(F) = |F(\cdot, -1)|_1 + |F(\cdot, 1)|_1 + 1.$$

Используя (2.7.9) и условия 1), 2) теоремы 2.7.1, находим, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$\rho(l_i, l_j) \leq 2(c_{20} + 3)c(F). \quad (2.7.48)$$

В силу (2.7.47) существует возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$,

$$M_{1/k}(l_i, l_j) \leq k^{-1-2qp/(q-2p)}. \quad (2.7.49)$$

Зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Выберем число $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, так, что

$$c_{31}[|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} m^{-pr/q} \leq \varepsilon/2. \quad (2.7.50)$$

Теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$b_k = \sup_{i,j \geq n_k} N_t(l_i, l_j), \quad d_k = \sup_{i,j \geq n_k} \text{meas } E_{t,m,k}(l_i, l_j).$$

В силу леммы 2.7.5 и (2.7.49), (2.7.50) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$b_k \leq \varepsilon/2 + c_{31}[|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*} + k^{-1} + d_k. \quad (2.7.51)$$

Кроме того, в силу леммы 2.7.6 и (2.7.48), (2.7.49) для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$,

$$\int_{E_{t,m,k}(l_i, l_j)} \mu_{t,m} dx \leq 4(c_{20} + 3)c(F)k^{-1} + 2c_{32}[|f|_1 + 1]k^{-(q-2p)/qp}. \quad (2.7.52)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0. \quad (2.7.53)$$

Действительно, предположим, что последовательность $\{d_k\}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\tau > 0$, возрастающая последовательность $\{k_s\} \subset \mathbb{N}$ и последовательности $\{i_s\} \subset \mathbb{N}$, $\{j_s\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$i_s \geq n_{k_s}, \quad j_s \geq n_{k_s}, \quad (2.7.54)$$

$$\text{meas } E_{t,m,k_s}(l_{i_s}, l_{j_s}) \geq \tau. \quad (2.7.55)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$G_s = E_{t,m,k_s}(l_{i_s}, l_{j_s}).$$

В силу (2.7.52) и (2.7.54)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{G_s} \mu_{t,m} dx = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.7.36) и (2.7.37), получаем, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{meas } G_s = 0.$$

Но это противоречит (2.7.55). Полученное противоречие доказывает, что (2.7.53) имеет место.

Из (2.7.51) и (2.7.53) выводим, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $b_k \leq \varepsilon$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$ имеем $N_t(l_i, l_j) \leq \varepsilon$. Полученный результат позволяет заключить, что для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^\alpha u_{l_i}\}$ фундаментальна по мере. $\square$

В силу (2.7.47), леммы 2.7.7 и теоремы Ф.Рисса существуют измеримые функции $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $v^{(\alpha)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$, такие, что последовательность $\{u_{l_i}\}$ сходится к u по мере и для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^\alpha u_{l_i}\}$ сходится к $v^{(\alpha)}$ по мере. Тогда, как известно, из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду на Ω . Без ограничения общности можно считать, что

$$u_{l_i} \rightarrow u \text{ п. в. на } \Omega, \quad (2.7.56)$$

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow v^{(\alpha)} \text{ п. в. на } \Omega. \quad (2.7.57)$$

Используя (2.7.46) и (2.7.56), устанавливаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и

$$h_k(u_{l_i}) \rightarrow h_k(u) \text{ слабо в } \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega). \quad (2.7.58)$$

Таким образом, имеем $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Лемма 2.7.8. Для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п. в. на Ω .

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Lambda$. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2.2.2 для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$D^\alpha h_k(u_{l_i}) = D^\alpha u_{l_i} \text{ п. в. на } \{|u_{l_i}| \leq k\}.$$

Отсюда и из (2.7.56), (2.7.57) выводим, что

$$D^\alpha h_k(u_{l_i}) \rightarrow v^{(\alpha)} \text{ п. в. на } \{|u| < k\}.$$

Тогда, учитывая (2.7.44) и (2.7.45), получаем, что функция $v^{(\alpha)}$ интегрируема на множестве $\{|u| < k\}$ и для любой функции $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\{|u| < k\}} [D^\alpha h_k(u_{l_i}) - v^{(\alpha)}] \varphi dx = 0. \quad (2.7.59)$$

Но в силу (2.7.58) для любой функции $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [D^\alpha h_k(u_{l_i}) - D^\alpha h_k(u)] \varphi dx = 0. \quad (2.7.60)$$

Из (2.7.59) и (2.7.60) следует, что $D^\alpha h_k(u) = v^{(\alpha)}$ п. в. на $\{|u| < k\}$. Тогда в силу леммы 2.2.4 $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п. в. на $\{|u| < k\}$. Отсюда в силу произвольности k получаем, что $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п. в. на Ω . $\square$

В силу (2.7.57) и леммы 2.7.8 имеем

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow \delta^\alpha u \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.7.61)$$

Лемма 2.7.9. *Справедливы предложения:*

$$F(x, u) \in L^1(\Omega), \quad (2.7.62)$$

$$F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u) \quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \quad (2.7.63)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.7.56) имеем

$$F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.7.64)$$

Кроме того, используя (2.7.9) и условия 1), 2) теоремы 2.7.1, устанавливаем, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} |F_l(x, u_l)| dx \leq (c_{20} + 2) [|F(\cdot, -1)|_1 + |F(\cdot, 1)|_1] + c_{20}.$$

Отсюда, учитывая (2.7.64) и используя лемму Фату, получаем включение (2.7.62).

Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Ясно, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G (|f| + |F(x, u)|) dx \leq \varepsilon.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства

$$[|f|_1 + 1] k^{-1} \leq \varepsilon, \quad (2.7.65)$$

$$c_{24} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*} \leq \varepsilon_1. \quad (2.7.66)$$

Согласно условию 2) теоремы 2.7.1 функции $F(\cdot, -2k)$ и $F(\cdot, 2k)$ принадлежат $L^1(\Omega)$. Следовательно, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого

измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_2$, имеем

$$\int_G (|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|) dx \leq \varepsilon.$$

В силу (2.7.64) существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas } (\Omega \setminus \Omega_1) \leq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (2.7.67)$$

и $F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u)$ равномерно на Ω_1 . Тогда найдется $i_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$,

$$\int_{\Omega_1} |F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))| dx \leq \varepsilon. \quad (2.7.68)$$

Кроме того, в силу (2.7.5) существует $i_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_2$,

$$|f_{l_i} - f|_1 \leq \varepsilon. \quad (2.7.69)$$

Зафиксируем теперь $i \in \mathbb{N}$, $i \geq \max(i_1, i_2)$. Используя (2.7.67) и (2.7.68), получаем

$$\begin{aligned} & |F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 \\ & \leq \int_{\{|u_{l_i}| \geq 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx + \int_{(\Omega \setminus \Omega_1) \cap \{|u_{l_i}| < 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.7.70)$$

В силу (2.7.18) и (2.7.66) имеем $\text{meas}\{|u_{l_i}| \geq k\} \leq \varepsilon_1$. Тогда

$$\int_{\{|u_{l_i}| \geq k\}} |f| dx \leq \varepsilon. \quad (2.7.71)$$

Из (2.7.21), (2.7.65), (2.7.69) и (2.7.71) выводим, что

$$\int_{\{|u_{l_i}| \geq 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx \leq 3c_{26}^{-1} \varepsilon. \quad (2.7.72)$$

Заметим, что ввиду условия 1) теоремы 2.7.1 $|F_{l_i}(x, u_{l_i})| \leq 2(|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|)$ п.в. на $\{|u_{l_i}| < 2k\}$. Отсюда и из того, что в силу (2.7.67)

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_1} (|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|) dx \leq \varepsilon,$$

получаем

$$\int_{(\Omega \setminus \Omega_1) \cap \{|u_{l_i}| < 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx \leq 2\varepsilon. \quad (2.7.73)$$

Из (2.7.70), (2.7.72) и (2.7.73) следует, что

$$|F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 \leq (3c_{26}^{-1} + 4)\varepsilon.$$

Теперь можно заключить, что $|F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 \rightarrow 0$ и, значит, предложение (2.7.63) справедливо. $\square$

Отметим, что в силу (2.1.3) для любых $\alpha \in \Lambda$ и $l \in \mathbb{N}$ имеем $A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) \in L^1(\Omega)$.

Лемма 2.7.10. Для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$ и

$$A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u) \text{ сильно в } L^1(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Lambda$. В силу (2.7.61)

$$A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u) \text{ п.в. на } \Omega. \quad (2.7.74)$$

Далее, зафиксируем $\lambda \in (1, \frac{n}{n-1})$ и положим

$$\lambda_1 = (q-1)\lambda, \quad \lambda_2 = \frac{q-1}{q}p\lambda.$$

Зафиксируем еще $l \in \mathbb{N}$. Используя (2.7.19), (2.7.20) и лемму 2.2.6, устанавливаем:

а) если $|\beta| = 1$, то $D^\beta u_l \in L^{\lambda_1}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |D^\beta u_l|^{\lambda_1} dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{41} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)};$$

б) если $|\beta| = 2$, то $D^\beta u_l \in L^{\lambda_2}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |D^\beta u_l|^{\lambda_2} dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{41} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)}.$$

Кроме того, в силу (2.1.3) п.в. на Ω

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|^\lambda \leq (c_1 + 1) \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_l|^{\lambda_1} + \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_l|^{\lambda_2} \right\} + g_1 + 2n^2(c_1 + 1).$$

Используя это и предложения а) и б), получаем, что для любого $l \in \mathbb{N}$ $A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|^\lambda dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{42} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)}. \quad (2.7.75)$$

Из (2.7.74), (2.7.75) и леммы Фату следует, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$.

Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Ясно, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G |A_\alpha(x, \delta_2 u)| dx \leq \varepsilon/4.$$

В силу (2.7.74) существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1) \leq \min\{\varepsilon_1, (4^{-r/(r-\lambda_1)} \varepsilon c_{42}^{-1} [|f|_1 + 1]^{-n/(n-1)})^{\lambda/(\lambda-1)}\}$$

и $A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u)$ равномерно на Ω_1 . Тогда найдется $i_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$,

$$\int_{\Omega_1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) - A_\alpha(x, \delta_2 u)| dx \leq \varepsilon/2. \quad (2.7.76)$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$. Используя неравенство для $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1)$ и (2.7.75), (2.7.76), получаем

$$\begin{aligned} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) - A_\alpha(x, \delta_2 u)|_1 &\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i})| dx + 3\varepsilon/4 \\ &\leq [\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1)]^{(\lambda-1)/\lambda} \left\{ \int_{\Omega} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i})|^\lambda dx \right\}^{1/\lambda} + 3\varepsilon/4 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u)$ сильно в $L^1(\Omega)$. $\square$

Из (2.7.7), (2.7.5) и лемм 2.7.9, 2.7.10 вытекает, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Установленные свойства функции u позволяют заключить, что u — H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Лемма 2.7.11. Пусть $q > p_1$. Тогда существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi|<2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c [1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $q > p_1$, имеем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < 1.$$

Зафиксируем число σ такое, что

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < \sigma < 1, \quad (2.7.77)$$

и положим

$$c = 4^{r^*+3+1/(1-\sigma)} n^4 (c_1 + 1) (1 + c_{24} + c_{25} + |g_1|_1 + \text{meas } \Omega) [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)},$$

$$b = r\sigma, \quad \gamma = r\sigma - \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right), \quad r_1 = \frac{pr\sigma}{q(p-1)}.$$

В силу (2.7.77) имеем $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$. Очевидно, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{2}{b} + \frac{\gamma}{b} = 1. \quad (2.7.78)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим для любого $l \in \mathbb{N}$

$$I_l^{(1)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx,$$

$$I_l^{(2)} = \int_{\Omega} \{f_l - F_l(x, u_l)\} h_k(u_l - \varphi) dx,$$

$$I_l = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha}(u_l - \varphi)|^2 \right\} |h''_k(u_l - \varphi)| dx.$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Положим $v_l = h_k(u_l - \varphi)$. В силу леммы 2.2.2 имеем $v_l \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

а) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^{\alpha} v_l = h'_k(u_l - \varphi) D^{\alpha}(u_l - \varphi) \quad \text{п. в. на } \Omega;$$

б) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|D^{\alpha} v_l - h'_k(u_l - \varphi) D^{\alpha}(u_l - \varphi)| \leq |h''_k(u_l - \varphi)| \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta}(u_l - \varphi)|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Кроме того, согласно (2.7.7)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} v_l \right\} dx = I_l^{(2)}.$$

Отсюда, используя предложения а) и б), выводим неравенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} u_l \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx \leq I_l^{(1)} + I_l^{(2)} + I_l. \quad (2.7.79)$$

Оценим интеграл I_l . Для этого положим

$$\Phi_l = \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)|, \quad \Phi_{1,l} = \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l| \right)^2, \quad \Phi = \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} \varphi| \right)^2, \\ E_l = \{|u_l - \varphi| > k\}.$$

В силу (2.2.4) и того, что $h''_k(s) = 0$ для $s \in [-k, k]$, имеем

$$I_l \leq 6 \int_{E_l} \Phi_l \Phi_{1,l} dx + 6 \int_{E_l} \Phi_l \Phi dx. \quad (2.7.80)$$

Используя (2.1.3), (2.7.19), (2.7.20) и лемму 2.2.6, устанавливаем, что

$$\Phi_l \in L^{r_1}(\Omega), \quad |\Phi_l|_{r_1} \leq n^2 \left(\frac{c}{16n^4} \right)^{1/r_1}, \quad (2.7.81)$$

$$\Phi_{1,l} \in L^{b/2}(\Omega), \quad |\Phi_{1,l}|_{b/2} \leq \left(\frac{c}{16n^4} \right)^{2/b}. \quad (2.7.82)$$

Далее, положив

$$E'_l = E_l \cap \{|\varphi| \leq k/2\}, \quad E''_l = E_l \cap \{|\varphi| > k/2\},$$

имеем

$$\text{meas } E_l = \text{meas } E'_l + \text{meas } E''_l. \quad (2.7.83)$$

Легко видеть, что

$$\text{meas } E'_l \leq \text{meas}\{|u_l| \geq k/2\}.$$

Отсюда, используя (2.7.18), получаем, что

$$\text{meas } E'_l \leq \frac{c}{32n^4} k^{-r^*}. \quad (2.7.84)$$

Для любого $x \in E_l''$ имеем $1 < 2k^{-1}|\varphi(x)|$. Тогда

$$\text{meas } E_l'' \leq 2^b k^{-b} \int_{\Omega} |\varphi|^b dx. \quad (2.7.85)$$

Из (2.7.83)–(2.7.85) выводим, что

$$\text{meas } E_l \leq \frac{c}{16n^4} (1 + |\varphi|_b)^b k^{-b}. \quad (2.7.86)$$

Теперь, учитывая (2.7.78) и используя неравенство Гельдера и (2.7.81), (2.7.82), (2.7.86), из (2.7.80) получаем, что

$$\begin{aligned} I_l &\leq 6|\Phi_l|_{r_1} |\Phi_{1,l}|_{b/2} (\text{meas } E_l)^{\gamma/b} + 6|\Phi_l|_{r_1} |\Phi|_{b/2} (\text{meas } E_l)^{\gamma/b} \\ &\leq c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.7.79) следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} u_l \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx \\ \leq I_l^{(1)} + I_l^{(2)} + c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.7.87)$$

Заметим, что в силу (2.2.2), (2.2.3), (2.7.5), (2.7.56) и лемм 2.7.9, 2.7.10

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{l_i}^{(1)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u - \varphi) dx, \quad (2.7.88)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{l_i}^{(2)} = \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx. \quad (2.7.89)$$

Теперь из (2.7.87)–(2.7.89), используя (2.1.4), (2.2.3), (2.7.56), (2.7.61), (2.7.74) и лемму Фату, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} u \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ + \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

□

Итак, используя условия 1), 2) теоремы 2.7.1, мы показали, что u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Благодаря этим же условиям в предположении, что $q > p_1$, из (2.7.62) и леммы 2.7.11 получаем, что u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тем самым теоремы 2.7.1 и 2.7.2 доказаны.

2.8. Принадлежность энтропийных решений соболевским пространствам и существование W -решений

Лемма 2.8.1. Пусть $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Пусть α – n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$, и пусть $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. Тогда существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксировав произвольную функцию $w \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (uD^\alpha w + w\delta^\alpha u) dx \right| &\leq \left[\max_{\Omega} |D^\alpha w| \right] \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx \\ &+ \left[\max_{\Omega} |w| \right] \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx. \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Поскольку $h_k(u) \rightarrow u$ поточечно на Ω и для любого $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|h_k(u) - u| \leq 2|u|$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx = 0. \quad (2.8.2)$$

Далее, для любого $k \in \mathbb{N}$, используя леммы 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4 и (2.2.3), получаем

$$\int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx \leq 2 \int_{\{|u| > k\}} |\delta^\alpha u| dx.$$

Отсюда, учитывая, что в силу включения $u \in L^1(\Omega)$ $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, выводим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx = 0. \quad (2.8.3)$$

Из (2.8.1)–(2.8.3) следует, что

$$\int_{\Omega} u D^\alpha w dx = - \int_{\Omega} w \delta^\alpha u dx.$$

Отсюда в силу произвольности w вытекает, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω . $\square$

Лемма 2.8.2. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Пусть α — n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$, и пусть $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. Предположим еще, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx = 0. \quad (2.8.4)$$

Тогда существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксировав произвольную функцию $w \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u D^\alpha w - w \delta^\alpha u) dx \right| &\leq \left[\max_{\Omega} |D^\alpha w| \right] \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx \\ &\quad + \left[\max_{\Omega} |w| \right] \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

В силу леммы 2.2.4 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx \leq \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx + \int_{\{|u| > k\}} |\delta^\alpha u| dx.$$

Отсюда, используя включения $u \in L^1(\Omega)$, $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$ и условие (2.8.4), получаем, что $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Ясно также, что $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Теперь из (2.8.5) следует равенство

$$\int_{\Omega} u D^\alpha w dx = \int_{\Omega} w \delta^\alpha u dx.$$

Отсюда в силу произвольности w вытекает, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω . $\square$

Теорема 2.8.1. Пусть u — энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда для любого $\lambda \in (1, r)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda \in (1, r)$. В силу лемм 2.3.2 и 2.8.1 имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и для любого α , $|\alpha| = 1$, существует обобщенная производная $D^\alpha u$, $D^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Следовательно, $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$.

Далее, пусть $k \in \mathbb{N}$. Имеем $h_k(u) \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Из лемм 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4 и (2.2.3) вытекает, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |D^\alpha u| \text{ п. в. на } \Omega.$$

Используя это, находим, что $\|h_k(u)\|_{W^{1,\lambda}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,\lambda}(\Omega)}$. Теперь ясно, что существуют возрастающая последовательность $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $v \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ такие, что $h_{k_i}(u) \rightarrow v$ слабо в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда $h_{k_i}(u) \rightarrow v$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. С другой стороны, имеем $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Следовательно, $u = v$ п. в. на Ω . Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. $\square$

Положим

$$p_2 = \frac{np}{n(p-1)+1}.$$

Заметим, что в силу (2.1.1) $p_2 \in (1, n)$. Отметим еще, что неравенство $rp/q > 1$ равносильно неравенству $q > p_2$, а неравенство $p_2 > 2r$ равносильно неравенству $p < 3/2 - 1/n$.

Теорема 2.8.2. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Покажем, что

$$\int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.8.6)$$

Прежде всего в силу лемм 2.3.1 и 2.2.5 имеем: существует $M > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| > k\} \leq Mk^{-r^*}, \quad (2.8.7)$$

$$\int_{\{|u|\leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^q + \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^p \right\} dx \leq Mk. \quad (2.8.8)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$\int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \leq [\text{meas}\{|u| > k\}]^{(p-1)/p} |D^\alpha h_k(u)|_p. \quad (2.8.9)$$

Заметим, что в силу лемм 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4 и (2.2.3), (2.2.4)

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п. в. на} \quad \{|u| \leq 2k\},$$

а в силу леммы 2.2.3 $D^\alpha h_k(u) = 0$ п. в. на $\{|u| > 2k\}$. Используя эти свойства и (2.8.8), устанавливаем, что

$$|D^\alpha h_k(u)|_p \leq 6n(M + n \text{meas } \Omega)^{1/p} k^{1/p}. \quad (2.8.10)$$

Из (2.8.7), (2.8.9) и (2.8.10) выводим, что

$$\int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \leq 6n(M + n \operatorname{meas} \Omega) k^{-r^*(p-1)/p+1/p}.$$

Отсюда, учитывая, что в силу условия $q > p_2$ имеет место неравенство $-r^*(p-1)/p + 1/p < 0$, получаем свойство (2.8.6).

Заметим еще, что из условия $q > p_2$ и леммы 2.3.2 следует включение $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. В силу леммы 2.3.2 имеем также $u \in L^1(\Omega)$.

Теперь, применяя лемму 2.8.2, получаем, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п. в. на Ω . $\square$

Замечание 2.8.1. Из теоремы 2.8.2 и леммы 2.3.2 вытекает, что если $q > p_2$ и u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), то для любых α , $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in [1, rp/q)$ $D^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$.

Теорема 2.8.3. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$.

Доказательство. Из теорем 2.8.1, 2.8.2 и леммы 2.3.2 вытекает, что $u \in W^{2,1}(\Omega)$.

Далее, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $h_k(u) \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Используя леммы 2.2.4, 2.3.2, 2.8.1 и теорему 2.8.2, получаем

$$\begin{aligned} \|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} &\leq |h_k(u) - u|_1 \\ &+ \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx + \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha u| dx. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

В силу изложенного в доказательствах теорем 2.8.1 и 2.8.2 для любого α , $|\alpha| = 1$, имеем $|D^\alpha h_k(u)| \leq |D^\alpha u|$ п. в. на Ω , а для любого α , $|\alpha| = 2$, справедливо свойство (2.8.6). Учитывая это, из (2.8.11) выводим, что $\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. $\square$

Определение 2.8.1. W -решением задачи (2.1.6), (2.1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$;
- 3) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Теорема 2.8.4. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. Согласно теореме 2.8.3 имеем $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. В силу теоремы 2.5.1 u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7) и, значит, $F(x, u) \in L^1(\Omega)$, для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Из этих свойств, учитывая, что в силу лемм 2.3.2, 2.8.1 и теоремы 2.8.2 $\nabla_2 u = \delta_2 u$ п. в. на Ω , выводим, что u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Теорема 2.8.5. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 2.7.1, и пусть $q > p_2$. Тогда существует W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. В силу результатов раздела 2.7 из условий 1), 2) теоремы 2.7.1 следует, что существует функция $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, являющаяся H -решением задачи (2.1.6), (2.1.7) и обладающая свойствами:

- a) $u \in L^1(\Omega)$;
- b) для любого α , $|\alpha| = 1$, $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$;
- c) для любых α , $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, pr/q)$ $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- d) для любого α , $|\alpha| = 2$,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} k^{r^*(p-1)/p-1/p} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx < +\infty.$$

Используя свойства a)–d), леммы 2.8.1, 2.8.2 и условие $q > p_2$, устанавливаем, что $u \in W^{2,1}(\Omega)$ и

$$\nabla_2 u = \delta_2 u \text{ п. в. на } \Omega. \quad (2.8.12)$$

Поскольку $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, имеем $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Используя (2.8.12), леммы 2.2.1–2.2.4 и (2.2.3), для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \leq 2 \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha u| dx + \sum_{|\alpha|=2} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и используя свойство d) и условие $q > p_2$, выводим, что

$$\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Теперь, используя (2.8.12) и тот факт, что u — H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7), получаем, что u — W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Как уже было отмечено, неравенства $p_2 > 2p$ и $p < 3/2 - 1/n$ равносильны. Учитывая этот факт и неравенство $q > 2p$, из теорем 2.8.4 и 2.8.5 получаем следующие результаты.

Теорема 2.8.6. Пусть $p \geq 3/2 - 1/n$, и пусть u — энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u — W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Теорема 2.8.7. Пусть $p \geq 3/2 - 1/n$, и пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 2.7.1. Тогда существует W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

2.9. О суммируемости функций из $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, подчиненных некоторым интегральным неравенствам

Лемма 2.9.1. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

1) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, то

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) \delta^\alpha u \quad \text{п. в. на } \Omega;$$

2) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, то

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Доказательство. Имеем

$$h_k(u) = h_k(h_{2k}(u)). \quad (2.9.1)$$

Пусть α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$. В силу (2.9.1)

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u) \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя свойства функций h_k , h_{2k} и лемму 2.2.4, получаем, что $D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) \delta^\alpha u$ п. в. на Ω , и тем самым утверждение 1) доказано.

Пусть теперь α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$. Используя (2.9.1), получаем

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u)| \leq |h''_k(h_{2k}(u))| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta h_{2k}(u)|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая (2.2.3), (2.2.4) и лемму 2.2.4, выводим, что $|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2$ п. в. на Ω , и тем самым утверждение 2) доказано. $\square$

Предложение 2.9.1. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, q]$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда в силу (1.1.13), леммы 2.9.1 и (2.2.3) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{\lambda^*} dx \right)^{1/\lambda^*} \leq n c_{n,\lambda} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |\delta^\alpha u|^\lambda dx \right)^{1/\lambda}.$$

Отсюда, замечая, что $h_k(u) \rightarrow u$ поточечно в Ω , заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда, учитывая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $|h_k(u)| \leq |u|$, имеем $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 2.2.4, 2.9.1 и (2.2.3) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. $\square$

Предложение 2.9.2. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. В силу изложенного в доказательстве предложения 2.9.1 имеем $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 2.2.4 и 2.9.1 для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. $\square$

Положим для любых $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I(u, k) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} h'_k(u) dx.$$

Лемма 2.9.2. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq (n c_{n,q})^{q^*} k^{-q^*} [I(u, k)]^{q^*/q}. \quad (2.9.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $|h_k(u)| \geq k$ на $\{|u| \geq k\}$, имеем

$$k^{q^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx. \quad (2.9.3)$$

Правую часть этого неравенства оцениваем, используя (1.1.13), лемму 2.9.1 и (2.2.3). Получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx &\leq (nc_{n,q})^{q^*} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u)|^q dx \right)^{q^*/q} \\ &\leq (nc_{n,q})^{q^*} [I(u, k)]^{q^*/q}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.9.3) выводим (2.9.2). $\square$

Лемма 2.9.3. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, и пусть $k, k_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta^{\alpha} u| \geq k\} \leq (nc_{n,q})^{q^*} k_1^{-q^*} [I(u, k_1)]^{q^*/q} + k^{-q} I(u, k_1). \quad (2.9.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $G = \{|u| < k_1, |\delta^{\alpha} u| \geq k\}$. Имеем

$$\text{meas}\{|\delta^{\alpha} u| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } G, \quad (2.9.5)$$

причем в силу леммы 2.9.2

$$\text{meas}\{|u| \geq k_1\} \leq (nc_{n,q})^{q^*} k_1^{-q^*} [I(u, k_1)]^{q^*/q}. \quad (2.9.6)$$

Оценим $\text{meas } G$. Поскольку $k \leq |\delta^{\alpha} u| h'_{k_1}(u)$ на G , имеем

$$k^q \text{meas } G \leq \int_{\Omega} |\delta^{\alpha} u|^q h'_{k_1}(u) dx \leq I(u, k_1)$$

и, следовательно, $\text{meas } G \leq k^{-q} I(u, k_1)$. Отсюда и из (2.9.5) и (2.9.6) выводим (2.9.4). $\square$

Лемма 2.9.4. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и пусть $k, k_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta^{\alpha} u| \geq k\} \leq (nc_{n,q})^{q^*} k_1^{-q^*} [I(u, k_1)]^{q^*/q} + k^{-p} I(u, k_1).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.9.3.

Предложение 2.9.3. Пусть $\mu_1, \mu_2 > 0$, $(n-1)/n < \sigma < 1$, Φ — неотрицательная измеримая функция на Ω такая, что $\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma \in L^1(\Omega)$.

Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq \mu_1 \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)| dx + \mu_2. \quad (2.9.7)$$

Тогда

- 1) $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$;
- 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$;
- 3) если $rp/q \geq 1$, то $u \in \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через μ_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, q, \mu_1, \mu_2, \sigma, \text{meas } \Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции $\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma$.

Положим $q_1 = \frac{q-1}{2q}$ и зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e$. В силу (2.9.7) имеем

$$I(u, k) \leq \mu_1 \int_{\{\Phi \leq k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx + \mu_1 \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx + \mu_2. \quad (2.9.8)$$

Используя неравенство Гельдера, (1.1.13), лемму 2.9.1 и (2.2.3), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\{\Phi \leq k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx &\leq k^{q_1} \int_{\Omega} |h_k(u)| dx \\ &\leq k^{q_1} (\text{meas } \Omega)^{(q^*-1)/q^*} \left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \\ &\leq nc_{n,q} k^{q_1} (\text{meas } \Omega)^{(q^*-1)/q^*} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u)|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \mu_3 k^{q_1} [I(u, k)]^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

Учитывая (2.2.2) и тот факт, что

$$\Phi < q_1^{-\sigma} (\ln k)^{-\sigma} \Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma \quad \text{на } \{\Phi > k^{q_1}\},$$

второй интеграл в правой части (2.9.8) оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx &\leq 2k \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi dx \\ &\leq 2k q_1^{-\sigma} (\ln k)^{-\sigma} \int_{\Omega} \Phi [\ln(1 + \Phi)]^{\sigma} dx \leq \mu_4 k (\ln k)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Из (2.9.8)–(2.9.10), используя неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq \mu_1 \mu_3 k^{q_1} [I(u, k)]^{1/q} + \mu_1 \mu_4 k (\ln k)^{-\sigma} + \mu_2 \\ &\leq \frac{1}{q} I(u, k) + \frac{q-1}{q} \mu_5 [k^{1/2} + k (\ln k)^{-\sigma}]. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > e$, справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq \mu_6 k (\ln k)^{-\sigma}. \quad (2.9.11)$$

Далее, пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e^{(n-1)/(n-q)}$. Ясно, что существует $\eta > e$ такое, что $\eta^{n-1} (\ln \eta)^{\sigma} = k^{n-q}$. Из этого равенства следует, что

$$\eta^{-r^*} (\ln \eta)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-q} \eta (\ln \eta)^{-\sigma} = k^{-r} (\ln \eta)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (2.9.12)$$

$$k^{n-q} \leq \eta^n. \quad (2.9.13)$$

Пусть k_1 – минимальное натуральное число, большее η . Из (2.9.12) и (2.9.13) вытекает, что

$$k_1^{-r^*} (\ln k_1)^{-\sigma n/(n-q)} \leq \mu_7 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (2.9.14)$$

$$k^{-q} k_1 (\ln k_1)^{-\sigma} \leq \mu_8 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \quad (2.9.15)$$

Кроме того, поскольку $k_1 > e$, в силу (2.9.11) имеем

$$I(u, k_1) \leq \mu_6 k_1 (\ln k_1)^{-\sigma}. \quad (2.9.16)$$

Теперь, используя лемму 2.9.3 и неравенства (2.9.14)–(2.9.16), получаем, что

$$\text{meas}\{|\delta^{\alpha} u| \geq k\} \leq \mu_9 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2.1 имеем $\delta^{\alpha} u \in L^r(\Omega)$.

Таким образом, для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^{\alpha} u \in L^r(\Omega)$. Отсюда и из предложения 2.9.1 выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, и тем самым утверждение 1) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e^{q(n-1)/p(n-q)}$. Ясно, что существует $y > e$ такое, что

$$y^{n-1}(\ln y)^\sigma = k^{p(n-q)/q}.$$

Из этого равенства следует, что

$$y^{-r^*}(\ln y)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-p}y(\ln y)^{-\sigma} = k^{-rp/q}(\ln y)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (2.9.17)$$

$$k^{p(n-q)} \leq y^{qn}. \quad (2.9.18)$$

Пусть k_2 – минимальное натуральное число, большее y . Из (2.9.17) и (2.9.18) вытекает, что

$$k_2^{-r^*}(\ln k_2)^{-\sigma n/(n-q)} \leq \mu_{10}k^{-rp/q}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (2.9.19)$$

$$k^{-p}k_2(\ln k_2)^{-\sigma} \leq \mu_{11}k^{-rp/q}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \quad (2.9.20)$$

Кроме того, поскольку $k_2 > e$, в силу (2.9.11) имеем

$$I(u, k_2) \leq \mu_6 k_2(\ln k_2)^{-\sigma}. \quad (2.9.21)$$

Используя лемму 2.9.4 и неравенства (2.9.19)–(2.9.21), устанавливаем, что

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq \mu_{12}k^{-rp/q}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2.1 имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$. Тем самым справедливость утверждения 2) доказана.

Остается установить справедливость утверждения 3). Предположим, что $rp/q \geq 1$. Тогда $rp/q \in [1, p]$. Поскольку $2p < q$, имеем $2rp/q < r$, и тогда в силу установленного выше при доказательстве утверждения 1) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2rp/q}(\Omega)$. Теперь, учитывая утверждение 2) и используя предложение 2.9.2, получаем, что $u \in \mathring{W}^{2, rp/q}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) справедливо. $\square$

Предложение 2.9.4. Пусть $\mu', \mu'' > 0$, $1 \leq t < nq/(nq - n + q)$, $\Phi \in L^m(\Omega)$, $\Phi \geq 0$ на Ω . Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq \mu' \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)| dx + \mu''. \quad (2.9.22)$$

Тогда

- 1) если $\lambda \in [1, (q-1)t^*)$, то $u \in \overset{\circ}{W}^{1,\lambda}(\Omega)$;
 2) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$,
 то $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
 3) если $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$, то $u \in \overset{\circ}{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия предложения относительно числа m имеем $mq < n$, $(m-1)q^* < m$.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{m-1}{m}q^*, \quad m_2 = \frac{(m-1)q^*}{mq}, \quad m_3 = \frac{n-mq}{n-m},$$

$$\theta = \frac{nm(q-1)}{n-mq}.$$

Ясно, что $0 < m_1 \leq 1$, $0 \leq m_2 < 1$. Кроме того, имеем

$$q^* \left[1 - \frac{m_1}{(1-m_2)q} \right] = \theta, \quad (2.9.23)$$

$$m_3\theta = q - \frac{m_1m_3}{1-m_2}. \quad (2.9.24)$$

Далее через μ_i , $i = 13, 14, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n , q , μ' , μ'' , m , $\text{meas } \Omega$ и нормы функции Φ в $L^m(\Omega)$.

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $m > 1$. Тогда $m_1 < 1$ и, используя (2.9.22), (2.2.2) и неравенство Гельдера, получаем

$$I(u, k) \leq \mu'(2k)^{m_1} \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)|^{1-m_1} dx + \mu''$$

$$\leq \mu'(2k)^{m_1} \|\Phi\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \right)^{(m-1)/m} + \mu''.$$

Отсюда и из (1.1.13), (2.2.3) и леммы 2.9.1 вытекает, что

$$I(u, k) \leq \mu_{13} k^{m_1} [I(u, k)]^{m_2} + \mu''.$$

Следовательно,

$$I(u, k) \leq \mu_{14} k^{m_1/(1-m_2)}. \quad (2.9.25)$$

Легко проверить, что это же неравенство верно и в случае $m = 1$.

Таким образом, доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство (2.9.25).

Далее, пусть $\lambda \in [1, (q-1)m^*]$, и пусть α — n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{m_3} < k_1 \leq 2k^{m_3}. \quad (2.9.26)$$

В силу (2.9.25) и (2.9.26) имеем

$$I(u, k_1) \leq \mu_{15} k^{m_1 m_3 / (1-m_2)}.$$

Используя это неравенство, лемму 2.9.3 и (2.9.26), (2.9.23), (2.9.24), находим, что

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq \mu_{16} k^{-m_3 \theta}.$$

Тогда в силу леммы 2.2.6 $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Отсюда, учитывая неравенство $(q-1)m^* < q$ и применяя предложение 2.9.1, выводим, что $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тем самым утверждение 1) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{pm_3/q} < k_2 \leq 2k^{pm_3/q}. \quad (2.9.27)$$

В силу (2.9.25) и (2.9.27) имеем

$$I(u, k_2) \leq \mu_{17} k^{pm_1 m_3 / q(1-m_2)}.$$

Используя это неравенство, лемму 2.9.4 и (2.9.27), (2.9.23), (2.9.24), получаем, что

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq \mu_{18} k^{-pm_3 \theta / q}.$$

Теперь, учитывая лемму 2.2.6, заключаем, что $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$, и тем самым утверждение 2) доказано.

Остается установить справедливость утверждения 3). Пусть $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$. Имеем $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$. Кроме того, $2\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, и тогда в силу установленного при доказательстве утверждения 1) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Наконец, согласно утверждению 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Обращаясь теперь к предложению 2.9.2, заключаем, что $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) справедливо. $\square$

2.10. Об улучшении свойств суммируемости решений задачи (2.1.6), (2.1.7)

Предложение 2.10.1. Пусть выполняются условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) $F(\cdot, 0) \in L^1(\Omega)$.

Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$c_2 I(u, k) \leq \int_{\Omega} F(\cdot, 0) h_k(u) dx + |g_2|_1 + c. \quad (2.10.1)$$

Доказательство. В силу определения 2.3.1 $F(x, u) \in L^1(\Omega)$ и существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} h'_k(u) dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u) dx + c. \quad (2.10.2)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Используя (2.1.4) и (2.2.3), устанавливаем, что

$$c_2 I(u, k) \leq \int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} h'_k(u) dx + |g_2|_1. \quad (2.10.3)$$

Заметим, что в силу условия 1) и свойств функции h_k

$$[F(x, u) - F(\cdot, 0)] h_k(u) \leq 0 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя (2.10.2), (2.10.3) и учитывая условие 2), выводим неравенство (2.10.1). $\square$

Теорема 2.10.1. Пусть для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$. Пусть $(n-1)/n < \sigma < 1$ и $F(\cdot, 0)[\ln(1+|F(\cdot, 0)|)]^{\sigma} \in L^1(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда

- 1) $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$;
- 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^{\alpha} u \in L^{rp/q}(\Omega)$;
- 3) если $q \geq p_2$, то $u \in \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из предложений 2.10.1 и 2.9.3.

Следствие 2.10.1. Пусть $p \geq 3/2 - 1/n$, и пусть выполняются условия теоремы 2.10.1. Тогда $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Для доказательства этого результата достаточно воспользоваться теоремой 2.10.1, а затем учесть, что $q > 2p$ и в силу неравенства $p \geq 3/2 - 1/n$ справедливо неравенство $p_2 \leq 2p$.

Теорема 2.10.2. Пусть для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$. Пусть $1 \leq m < nq/(nq - n + q)$ и $F(\cdot, 0) \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда

- 1) если $\lambda \in [1, (q-1)t^*]$, то $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$;
- 2) если α – n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$, то $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 3) если $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$, то $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из предложений 2.10.1 и 2.9.4.

Следствие 2.10.2. Пусть $q > p_2$, и пусть выполняются условия теоремы 2.10.2. Тогда $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$, и для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться теоремой 2.10.2 и тем, что из $q > p_2$ вытекает неравенство $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$.

Замечание 2.10.1. Нетрудно проверить, что если $q \leq p_2$, то $nq/(nq - n + q) \geq 1$. Кроме того, неравенство $nq/(nq - n + q) < m < n$ влечет неравенство $\frac{p}{q}(q-1)\frac{nm}{n-m} > 1$.

Следствие 2.10.3. Пусть $q \leq p_2$ и $nq/(nq - n + q) < m < nq/(nq - n + q)$. Пусть для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$, и пусть $F(\cdot, 0) \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$, и для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из теоремы 2.10.2 и замечания 2.10.1.

Далее приведем несколько утверждений относительно W -решений задачи (2.1.6), (2.1.7). Для этого будут полезны следующие два предложения.

Предложение 2.10.2. Пусть выполняются условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.

Тогда существует функция $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такая, что

- (i) u есть H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7);
(ii) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_2 I(u, k) \leq 12 \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |h_k(u)| dx + 2c_{23}.$$

Доказательство. Пусть $\{F_l\}$, $\{f_l\}$ и $\{u_l\}$ – те же последовательности функций, что и в разделе 2.7. В силу изложенного в разделе 2.7 существуют возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такие, что u есть H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7),

$$u_{l_i} \rightarrow u \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (2.10.4)$$

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow \delta^\alpha u \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (2.10.5)$$

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$. В силу (2.7.12), (2.7.4) и свойств функции χ_k имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha \chi_k(u_l) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f_l \chi_k(u_l) dx. \quad (2.10.6)$$

В силу изложенного в доказательстве леммы 2.7.1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx \\ \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha \chi_k(u_l) \right\} dx + c_{23}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (2.10.6) вытекает, что

$$\frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx \leq \int_{\Omega} f_l \chi_k(u_l) dx + c_{23}.$$

Отсюда, учитывая (2.10.4), (2.10.5), сильную сходимостъ $\{f_l\}$ к $F(\cdot, 0)$ в $L^1(\Omega)$, свойства функций χ_k и используя лемму Фату, выводим, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{2} \int_{\{|u| < k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ \leq \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |\chi_k(u)| dx + c_{23}. \quad (2.10.7) \end{aligned}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $h'_k(s) = 0$, если $|s| \geq 2k$, используя (2.2.3) и (2.10.7), получаем

$$\begin{aligned} c_2 I(u, k) &\leq c_2 \int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |\chi_{2k}(u)| dx + 2c_{23}. \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

Заметим, что в силу свойств функций χ_{2k} и h_k

$$|\chi_{2k}(u)| \leq 6|h_k(u)| \quad \text{на } \Omega.$$

Учитывая это, из (2.10.8) выводим неравенство, которое позволяет заключить, что утверждение (ii) справедливо. $\square$

Предложение 2.10.3. Пусть $q > p_2$, и пусть выполняются условия предложения 2.10.2. Тогда существует функция $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{2,1}(\Omega)$ такая, что

- (i) u есть W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7);
- (ii) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_2 I(u, k) \leq 12 \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |h_k(u)| dx + 2c_{23}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.10.2 существует функция $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такая, что u есть H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7) и для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_2 I(u, k) \leq 12 \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |h_k(u)| dx + 2c_{23}.$$

Отсюда, учитывая свойства функций h_k и используя леммы 2.2.5 и 2.2.6, получаем, что

$$\text{для любых } \alpha, |\alpha| = 1, \text{ и } \lambda \in (0, r) \quad \delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega), \quad (2.10.9)$$

$$\text{для любых } \alpha, |\alpha| = 2, \text{ и } \lambda \in (0, rp/q) \quad \delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega). \quad (2.10.10)$$

Поскольку $q > p_2$, имеем $rp/q > 1$. Тогда из (2.10.9), (2.10.10) и предложения 2.9.2 вытекает, что $u \in \overset{\circ}{W}^{2,1}(\Omega)$. Кроме того, в силу (2.10.9),

(2.10.10) и лемм 2.8.1, 2.8.2 имеем $\nabla_2 u = \delta_2 u$ п. в. на Ω . Поэтому из того, что u есть H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7), получаем, что u есть W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Из предложений 2.9.3, 2.9.4 и 2.10.3 вытекают такие результаты.

Теорема 2.10.3. Пусть $q > p_2$, и пусть выполняются условия предложения 2.10.2. Пусть $(n-1)/n < \sigma < 1$ и $F(\cdot, 0)[\ln(1+|F(\cdot, 0)|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда существует W -решение u задачи (2.1.6), (2.1.7) такое, что $u \in \dot{W}^{1,r}(\Omega) \cap \dot{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Теорема 2.10.4. Пусть $q > p_2$, и пусть выполняются условия предложения 2.10.2. Пусть $1 \leq t < nq/(nq - n + q)$ и $F(\cdot, 0) \in L^m(\Omega)$. Тогда существует W -решение u задачи (2.1.6), (2.1.7) такое, что для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ справедливо включение $u \in \dot{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \dot{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Отметим, что с использованием идей работы [65] аналоги основных результатов, изложенных в данном разделе, получены в [70, 78, 79, 81] для решений невырождающихся и вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений четвертого и высших порядков с усиленной коэрцитивностью.

2.11. Некоторые характеристики множества функций $\dot{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

Начнем со следующего вспомогательного результата.

Лемма 2.11.1. Пусть $h \in C^2(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, и пусть функции h , h' и h'' ограничены на $\mathbb{R}$. Пусть $u \in \dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда $h(u) \in \dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы следующие свойства:

- (i) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h(u) = h'(u) D^\alpha u \text{ п. в. на } \Omega;$$
- (ii) для любых n -мерных мультииндексов β и γ таких, что $|\beta| = |\gamma| = 1$,

$$D^{\beta+\gamma} h(u) = h'(u) D^{\beta+\gamma} u + h''(u) D^\beta u \cdot D^\gamma u \text{ п. в. на } \Omega.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.2.2.

Через $\mathcal{H}$ обозначим множество всех функций $h \in C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям: $h(0) = 0$; существует $\mu > 0$ такое, что для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq \mu$, справедливо равенство $h'(s) = 0$.

Очевидно, что $\{h_k\} \subset \mathcal{H}$.

Предложение 2.11.1. *Предположим, что $\{\varphi_k\} \subset C^2(\mathbb{R})$ и существует последовательность $\{m_k\}$ положительных чисел такая, что $m_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ и для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\varphi_k(s) = s, \quad \text{если } |s| < m_k, \quad (2.11.1)$$

$$|\varphi_k(s)| \geq m_k, \quad \text{если } |s| \geq m_k. \quad (2.11.2)$$

Пусть $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – функция такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда

(i) для любого $h \in \mathcal{H}$ имеем $h(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$;

(ii) $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $h \in \mathcal{H}$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $v_k = h(\varphi_k(u))$. Ввиду свойств функции h , включения $\{\varphi_k(u)\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, леммы 2.11.1, сходимости $\{m_k\}$ к $+\infty$ и (2.11.1) имеем $\{v_k\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $h(u) \in L^q(\Omega)$ и

$$v_k \rightarrow h(u) \quad \text{сильно в } L^q(\Omega). \quad (2.11.3)$$

Поскольку $h \in \mathcal{H}$, существует $\mu > 0$ такое, что для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq \mu$, имеем $h'(s) = 0$. Поэтому

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq \mu, \quad h(s) \in \{h(-\mu), h(\mu)\}. \quad (2.11.4)$$

Ясно, что существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq l, \quad m_k \geq \mu. \quad (2.11.5)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k \geq l$. Из (2.11.1), (2.11.2), (2.11.4) и (2.11.5) следует, что

$$\begin{aligned} \text{если } x \in \{|u| < \mu\}, \text{ то } v_k(x) &= v_l(x), \\ \text{если } x \in \{|u| \geq \mu\}, \text{ то } v_k(x) &\in \{h(-\mu), h(\mu)\}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что для любого $\alpha \in \Lambda$ $|D^\alpha v_k| \leq |D^\alpha v_l|$ п.в. на Ω . Тогда, учитывая ограниченность функции h , получаем, что $\{v_k\}$ ограничена в $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Это вместе с (2.11.3) влечет, что $h(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Таким образом, утверждение (i) предложения справедливо. Из этого утверждения, учитывая, что $\{h_k\} \subset \mathcal{H}$, выводим включение $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. $\square$

Предложение 2.11.2. *Предположим, что все условия предложения 2.11.1 выполняются. Тогда для любых $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$*

$$D^\alpha \varphi_k(u) = \delta^\alpha u \quad \text{п. в. на } \{|u| < m_k\}. \quad (2.11.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$, $l > m_k$. В силу определения функции h_l и (2.11.1) имеем $\varphi_k(u) = h_l(u)$ на $\{|u| < m_k\}$. Тогда, учитывая, что по условию предложения 2.11.1 $\varphi_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, и в силу утверждения (ii) того же предложения $h_l(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, получаем, что $D^\alpha \varphi_k(u) = D^\alpha h_l(u)$ п. в. на $\{|u| < m_k\}$. Этот факт, лемма 2.2.4 и неравенство $l > m_k$ приводят к заключению, что (2.11.6) справедливо. $\square$

Предложение 2.11.3. *Пусть $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ в том и только в том случае, если для любого $h \in \mathcal{H}$ $h(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Положим для любого $k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k = h_k$ и $m_k = k$. Ясно, что все условия предложения 2.11.1 выполняются. Тогда в силу этого предложения для любого $h \in \mathcal{H}$ имеем $h(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Обратно, пусть для любого $h \in \mathcal{H}$ $h(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда, учитывая, что $\{h_k\} \subset \mathcal{H}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. $\square$

Предложение 2.11.4. *Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $h \in \mathcal{H}$. Тогда $h(u - w) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и справедливы следующие свойства:*

(i) *для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,*

$$D^\alpha h(u - w) = h'(u - w)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha w) \quad \text{п. в. на } \Omega;$$

(ii) *для любых n -мерных мультииндексов β и γ таких, что $|\beta| = |\gamma| = 1$,*

$$\begin{aligned} D^{\beta+\gamma} h(u - w) &= h'(u - w)(\delta^{\beta+\gamma} u - \delta^{\beta+\gamma} w) \\ &\quad + h''(u - w)(\delta^\beta u - \delta^\beta w)(\delta^\gamma u - \delta^\gamma w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $h \in \mathcal{H}$, существует $\mu > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq \mu, \quad h'(s) = 0. \quad (2.11.7)$$

Тогда

$$\forall s \leq -\mu \quad h(s) = h(-\mu), \quad (2.11.8)$$

$$\forall s \geq \mu \quad h(s) = h(\mu). \quad (2.11.9)$$

Ясно, что функция h ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, $h(u - w) \in L^\infty(\Omega)$.

Очевидно, что существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E \quad |w(x)| \leq |w|_\infty. \quad (2.11.10)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k \geq \mu + |w|_\infty. \quad (2.11.11)$$

Пусть $x \in \Omega \setminus E$ и $|u(x)| > k$. Используя (2.11.10), (2.11.11) и свойства функции h_k , получаем

$$|u(x) - w(x)| \geq \mu, \quad |h_k(u(x)) - w(x)| \geq \mu, \quad (2.11.12)$$

$$\text{sign}(u(x) - w(x)) = \text{sign}(h_k(u(x)) - w(x)).$$

Это вместе с (2.11.8) и (2.11.9) влечет, что

$$h(u - w) = h(h_k(u) - w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.11.13)$$

Кроме того, вследствие (2.11.7) и (2.11.12) имеем

если $x \in \Omega \setminus E$ и $|u(x)| > k$, то

$$\begin{aligned} h'(u - w)(x) &= 0, & h'(h_k(u) - w)(x) &= 0, \\ h''(u - w)(x) &= 0, & h''(h_k(u) - w)(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11.14)$$

Очевидно, что $h_k(u) - w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда по лемме 2.11.1 $h(h_k(u) - w) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы следующие свойства:

(i') для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h(h_k(u) - w) = h'(h_k(u) - w) D^\alpha (h_k(u) - w) \quad \text{п. в. на } \Omega;$$

(ii') для любых n -мерных мультииндексов β и γ таких, что $|\beta| = |\gamma| = 1$,

$$\begin{aligned} D^{\beta+\gamma}h(h_k(u) - w) &= h'(h_k(u) - w)D^{\beta+\gamma}(h_k(u) - w) \\ &\quad + h''(h_k(u) - w)D^\beta(h_k(u) - w) \cdot D^\gamma(h_k(u) - w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Эти факты вместе с (2.11.13), (2.11.14) и леммой 2.2.4 приводят к заключению предложения. $\square$

Следствие 2.11.1. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда $u - w \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $h_k \in \mathcal{H}$, в силу предложения 2.11.4 $h_k(u - w) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно, $u - w \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. $\square$

2.12. Множество функций $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

Для любой функции $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ положим

$$\Phi_u = \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p.$$

Из леммы 2.2.4 следует, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, то функция Φ_u суммируема на $\{|u| < k\}$.

Для любой функции $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ положим

$$M_u = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_{\{|u| < k\}} \Phi_u \, dx.$$

Через $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ таких, что $M_u < +\infty$.

Очевидно, что $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Кроме того, если $u \in \widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, то

$$\int_{\{|u| < k\}} \Phi_u \, dx \leq M_u k. \quad (2.12.1)$$

Предложение 2.12.1. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq (c'n)^{q^*} (2M_u)^{q^*/q} k^{-r^*}. \quad (2.12.2)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Если $x \in \{|u| \geq k\}$, то $|h_k(u)|(x) \geq k$. Следовательно,

$$k^{q^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx. \quad (2.12.3)$$

Оценим интеграл в правой части этого неравенства. Поскольку $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$, в силу (2.2.1)

$$|h_k(u)|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} h_k(u)|_q. \quad (2.12.4)$$

Пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$. В силу предложения 2.11.4 имеем $D^{\alpha} h_k(u) = h'_k(u) \delta^{\alpha} u$ п.в. на Ω . Тогда, учитывая, что $h'_k(s) = 0$, если $|s| \geq 2k$, и используя (2.2.3) и (2.12.1), получаем

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u)|^q dx \leq 2M_u k.$$

Отсюда и из (2.12.4) следует, что

$$\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \leq (c'n)^{q^*} (2M_u k)^{q^*/q}.$$

Из последнего неравенства и (2.12.3) выводим (2.12.2). $\square$

Положим

$$\bar{r} = \frac{n(q-1)}{q(n-1)}, \quad \bar{c} = 2^{q^*/q} (c'n)^{q^*} + 1.$$

Предложение 2.12.2. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{\Phi_u \geq k\} \leq 3\bar{c} (M_u + 1)^{n/(n-1)} k^{-\bar{r}}. \quad (2.12.5)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$k_1 = (M_u + 1)^{1/(n-1)} (\bar{c}k)^{1/(1+r^*)},$$

и пусть $l \in \mathbb{N}$,

$$k_1 \leq l < k_1 + 1. \quad (2.12.6)$$

Ясно, что

$$\text{meas}\{\Phi_u \geq k\} \leq \text{meas}\{\Phi_u \geq k, |u| < l\} + \text{meas}\{|u| \geq l\} \quad (2.12.7)$$

и

$$k \text{meas}\{\Phi_u \geq k, |u| < l\} \leq \int_{\{|u| < l\}} \Phi_u dx.$$

Из последнего неравенства и (2.12.1) следует, что

$$\text{meas}\{\Phi_u \geq k, |u| < l\} \leq M_u l k^{-1}. \quad (2.12.8)$$

Кроме того, в силу предложения 2.12.1

$$\text{meas}\{|u| \geq l\} \leq \bar{c} M_u^{q^*/q} l^{-r^*}. \quad (2.12.9)$$

Из (2.12.6)–(2.12.9), учитывая определение числа k_1 , выводим (2.12.5). $\square$

Из предложений 2.12.1 и 2.12.2 и леммы 2.2.6 выводим следующий результат.

Следствие 2.12.1. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда

- (i) для любого $\lambda \in (0, r^*)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (ii) для любого $\lambda \in (0, \bar{r})$ имеем $\Phi_u \in L^\lambda(\Omega)$.

В свою очередь, используя утверждение (ii) следствия 2.12.1, получаем такой результат.

Следствие 2.12.2. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда

- (i) для любого $\lambda \in (0, r)$ и любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (ii) для любого $\lambda \in (0, rp/q)$ и любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$.

Из следствия 2.12.2 и предложений 2.9.1 и 2.9.2 выводим следующие результаты.

Следствие 2.12.3. Для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $\hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Следствие 2.12.4. Пусть $q > p_2$. Тогда для любого $\lambda \in [1, rp/q)$ имеем $\hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

К вышеприведенным следствиям добавим такой результат.

Следствие 2.12.5. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\Phi = c_1\Phi_u + g_1 + 1$. Поскольку $(q-1)/q \in (0, \bar{r})$, в силу утверждения (ii) следствия 2.12.1 имеем $\Phi_u \in L^{(q-1)/q}(\Omega)$. Это вместе с включением $g_1 \in L^1(\Omega)$ влечет, что

$$\Phi \in L^{(q-1)/q}(\Omega). \quad (2.12.10)$$

Пусть $\alpha \in \Lambda$. Вследствие (2.1.3) имеем $|A_\alpha(x, \delta_2 u)| \leq \Phi^{(q-1)/q}$ п. в. на Ω . Отсюда, учитывая (2.12.10), выводим, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$. $\square$

Далее, для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функцию $\bar{h}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\bar{h}_k(s) = kh_1(s/k), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $\bar{h}_k \in C^2(\mathbb{R})$ и

$$\bar{h}_k(s) = s, \quad \text{если } |s| \leq k, \quad (2.12.11)$$

$$\bar{h}'_k(s) = 0, \quad \text{если } |s| \geq 2k, \quad (2.12.12)$$

Кроме того, из (2.2.2)–(2.2.4) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|\bar{h}_k| \leq 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.12.13)$$

$$0 \leq \bar{h}'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.12.14)$$

$$|\bar{h}''_k| \leq \frac{3}{k} \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.12.15)$$

Заметим, что вследствие (2.12.11) и (2.12.12) $\{\bar{h}_k\} \subset \mathcal{H}$.

Замечание 2.12.1. Если $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, то следующие утверждения эквивалентны:

$$(i) \quad u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega);$$

$$(ii) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N} \text{ имеем } \bar{h}_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega).$$

Этот результат вытекает из предложений 2.11.1 и 2.11.3.

Функции $\bar{h}_k$ будут существенно использованы в дальнейших разделах главы, а данный раздел закончим следующим вспомогательным результатом, связанным с этими функциями.

Лемма 2.12.1. Пусть $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \right\} |\bar{h}''_k(u)| dx \\ & \leq 6n^3(c_1 + 1)(1 + |g_1|_1 + \text{meas } \Omega)(M_u + 1)k^{2/q-1/p}. \end{aligned} \quad (2.12.16)$$

Доказательство. Положим

$$\Phi = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \right\}.$$

В силу (2.1.3) имеем

$$\Phi \leq (c_1 + 1)n^3(\Phi_u + g_1)^{1+2/q-1/p} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.12.17)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Используя (2.12.12), (2.12.15), (2.12.17) и неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi |\bar{h}_k''(u)| dx &\leq 3(c_1 + 1)n^3 k^{-1} \int_{\{|u| < 2k\}} (\Phi_u + g_1)^{1+2/q-1/p} dx \\ &\leq 3(c_1 + 1)n^3 k^{-1} \left\{ \int_{\{|u| < 2k\}} \Phi_u dx + \int_{\Omega} g_1 dx \right\}^{1+2/q-1/p} (\text{meas } \Omega)^{1/p-2/q}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.12.1) следует (2.12.16). $\square$

2.13. Определение и априорные оценки правильных энтропийных решений

Через $\mathcal{H}_+$ обозначим множество всех функций $h \in \mathcal{H}$ таких, что $h' \geq 0$ на $\mathbb{R}$.

Ясно, что $\{h_k\} \subset \mathcal{H}_+$ и $\{\bar{h}_k\} \subset \mathcal{H}_+$.

Заметим, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in \Lambda$, то функция $A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha h(u - w)$ суммируема на Ω . Этот факт вытекает из неравенства (2.1.3), леммы 2.2.4 и предложения 2.11.4.

Определение 2.13.1. Правильным энтропийным решением задачи (2.1.6), (2.1.7) будем называть функцию $u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- (i) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii) для любых $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $h \in \mathcal{H}_+$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha h(u - w) \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h(u - w) dx.$$

Предложение 2.13.1. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Пусть $h \in C^2(\mathbb{R})$, $M > 0$, и пусть выполняются следующие условия: $h(0) = 0$, функции h и h' ограничены на $\mathbb{R}$, $h' \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$|h''| \leq Mh' \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.13.1)$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \Phi_u h'(u) dx \leq \frac{2}{c_2} \int_{\Omega} F(x, u) h(u) dx + C \int_{\Omega} (g_1 + g_2 + 1) h'(u) dx, \quad (2.13.2)$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от n, p, q, c_1, c_2 и M .

Доказательство. Положим

$$M_0 = \sup_{s \in \mathbb{R}} (|h(s)| + h'(s)), \quad M_1 = [M(c_1 + 1)(2/c_2 + 1)n^3]^{qp/(q-2p)},$$

$$\Phi = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^{\beta} u|^2 \right\}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $\varphi_k = h \circ \bar{h}_k$. Ясно, что $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{H}_+$,

$$\varphi_k(u) \rightarrow h(u), \quad \varphi'_k(u) \rightarrow h'(u) \quad \text{на } \Omega, \quad (2.13.3)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\varphi_k(u)| + \varphi'_k(u) \leq M_0 \quad \text{на } \Omega. \quad (2.13.4)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. В силу определения 2.13.1

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi_k(u) \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi_k(u) dx. \quad (2.13.5)$$

Кроме того, согласно предложению 2.11.4 справедливы следующие свойства: для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, $D^{\alpha} \varphi_k(u) = \varphi'_k(u) \times \delta^{\alpha} u$ п. в. на Ω ; для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|D^{\alpha} \varphi_k(u) - \varphi'_k(u) \delta^{\alpha} u| \leq |\varphi''_k(u)| \sum_{|\beta|=1} |\delta^{\beta} u|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Используя эти свойства, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} \varphi'_k(u) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi_k(u) \right\} dx + \int_{\Omega} \Phi |\varphi''_k(u)| dx, \end{aligned} \quad (2.13.6)$$

а используя (2.1.4), получаем неравенство

$$c_2 \int_{\Omega} \Phi_u \varphi'_k(u) dx \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} \varphi'_k(u) dx + \int_{\Omega} g_2 \varphi'_k(u) dx.$$

Это неравенство вместе с (2.13.5) и (2.13.6) влечет, что

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\Omega} \Phi_u \varphi'_k(u) dx &\leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi_k(u) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} g_2 \varphi'_k(u) dx + \int_{\Omega} \Phi |\varphi''_k(u)| dx. \end{aligned} \quad (2.13.7)$$

Оценим последний интеграл в правой части (2.13.7). Прежде всего заметим, что вследствие (2.12.14) и (2.13.1) $|\varphi''_k| \leq M \varphi'_k + M_0 |\bar{h}''_k|$ на $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\int_{\Omega} \Phi |\varphi''_k(u)| dx \leq M \int_{\Omega} \Phi \varphi'_k(u) dx + M_0 \int_{\Omega} \Phi |\bar{h}''_k(u)| dx. \quad (2.13.8)$$

Используя (2.12.17) и неравенство Юнга, получаем, что

$$M \Phi \leq \frac{c_2}{2} (\Phi_u + g_1) + M_1 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Следовательно,

$$M \int_{\Omega} \Phi \varphi'_k(u) dx \leq \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \Phi_u \varphi'_k(u) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{c_2}{2} g_1 + M_1 \right) \varphi'_k(u) dx.$$

Из этого неравенства, (2.13.7) и (2.13.8) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_u \varphi'_k(u) dx &\leq \frac{2}{c_2} \int_{\Omega} F(x, u) \varphi_k(u) dx \\ &\quad + \left(\frac{2}{c_2} + \frac{2M_1}{c_2} + 1 \right) \int_{\Omega} (g_1 + g_2 + 1) \varphi'_k(u) dx + \frac{2M_0}{c_2} \int_{\Omega} \Phi |\bar{h}''_k(u)| dx. \end{aligned} \quad (2.13.9)$$

Заметим теперь, что вследствие (2.13.3) и (2.13.4)

$$\int_{\Omega} F(x, u) \varphi_k(u) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) h(u) dx, \quad (2.13.10)$$

$$\int_{\Omega} (g_1 + g_2 + 1) \varphi'_k(u) dx \rightarrow \int_{\Omega} (g_1 + g_2 + 1) h'(u) dx. \quad (2.13.11)$$

Кроме того, в силу леммы 2.12.1 имеем

$$\int_{\Omega} \Phi |\bar{h}_k''(u)| dx \rightarrow 0. \quad (2.13.12)$$

Используя (2.13.3), (2.13.10)–(2.13.12) и лемму Фату, из (2.13.9) выводим неравенство (2.13.2) с $C = 2(1 + M_1)/c_2 + 1$. $\square$

Предложение 2.13.2. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда существует $C_1 > 0$ такое, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2m$,

$$C_1 \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u dx \leq m \int_{\{|u| \geq k\}} |F(x, u)| dx + \int_{\{|u| \geq k\}} (g_1 + g_2) dx + k^{2/q-1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через c'_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, q, c_1, c_2, \text{meas } \Omega, |g_1|_1$ и M_u .

Положим

$$\Phi = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \right\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2m$. Положим

$$w = h_k(u), \quad h = \chi_{2m} \circ \bar{h}_k.$$

Ясно, что $w \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $h \in \mathcal{H}_+$. Тогда согласно определению 2.13.1

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha h(u - w) \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h(u - w) dx. \quad (2.13.13)$$

Используя предложение 2.11.4 и (2.2.3), находим, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} (1 - h'_k(u)) h'(u - w) \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha h(u - w) \\ & + \Phi (1 - h'_k(u)) |h''(u - w)| + \Phi |h''_k(u)| h'(u - w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned} \quad (2.13.14)$$

Кроме того, в силу (2.1.4)

$$c_2 \Phi_u \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u + g_2 \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.13.15)$$

Из (2.13.13)–(2.13.15) выводим, что

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\Omega} \Phi_u(1 - h'_k(u))h'(u - w)dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u)h(u - w)dx + \int_{\Omega} g_2(1 - h'_k(u))h'(u - w)dx \\ + \int_{\Omega} \Phi(1 - h'_k(u))|h''(u - w)|dx + \int_{\Omega} \Phi|h''_k(u)|h'(u - w)dx. \end{aligned} \quad (2.13.16)$$

Оценим интегралы в правой части этого неравенства.

Вследствие (2.7.1), равенства $h(0) = 0$ и того, что $h_k(s) = s$, если $|s| \leq k$, имеем

$$\int_{\Omega} F(x, u)h(u - w)dx \leq 6m \int_{\{|u| \geq k\}} |F(x, u)|dx. \quad (2.13.17)$$

Используя (2.2.3), (2.12.14), (2.7.2) и то, что $h'_k(s) = 1$, если $|s| \leq k$, получаем

$$\int_{\Omega} g_2(1 - h'_k(u))h'(u - w)dx \leq \int_{\{|u| \geq k\}} g_2 dx. \quad (2.13.18)$$

Далее, заметим, что вследствие (2.12.14), (2.7.2) и (2.7.3)

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad |h''(s)| \leq 2h'(s) + |\bar{h}''_k(s)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(1 - h'_k(u))|h''(u - w)|dx \leq 2 \int_{\Omega} \Phi(1 - h'_k(u))h'(u - w)dx \\ + \int_{\Omega} \Phi(1 - h'_k(u))|\bar{h}''_k(u - w)|dx, \end{aligned} \quad (2.13.19)$$

причем используя (2.12.12), (2.12.15), (2.2.3) и (2.2.2), получаем

$$\int_{\Omega} \Phi(1 - h'_k(u))|\bar{h}''_k(u - w)|dx \leq \frac{3}{k} \int_{\{|u| < 4k\}} \Phi dx. \quad (2.13.20)$$

Далее, положим

$$\sigma = (r^* - 1) \frac{q - 2p}{qp},$$

$$G' = \{k \leq |u| \leq k(1 + k^{-\sigma})\}, \quad G'' = \{k(1 + k^{-\sigma}) < |u| < 2k\}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx &= \int_{G'} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx \\ &+ \int_{G''} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx. \end{aligned} \quad (2.13.21)$$

Заметим, что в силу леммы 2.4.1

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k(1 + k^{-\sigma}) \text{ имеем } |h_k''(s)| &\leq 6k^{1-\sigma k}, \\ \forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq k(1 + k^{-\sigma}) \text{ имеем } |h_k''(s)| &\leq 3k^{\sigma}(1 - h'_k(s)). \end{aligned}$$

Используя эти факты, а также (2.12.14), (2.7.2) и (2.2.3), получаем неравенства

$$\int_{G'} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx \leq 6k^{1-\sigma k} \int_{\{|u| < 4k\}} \Phi dx, \quad (2.13.22)$$

$$\int_{G''} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx \leq 3k^{\sigma} \int_{\Omega} \Phi (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx. \quad (2.13.23)$$

Из (2.13.19)–(2.13.23) следует, что

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Phi (1 - h'_k(u)) |h''(u - w)| dx + \int_{\Omega} \Phi |h_k''(u)| h'(u - w) dx \\ &\leq 5k^{\sigma} \int_{\Omega} \Phi (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx + \frac{3(3\sigma^2 + 8)}{k\sigma^2} \int_{\{|u| < 4k\}} \Phi dx. \end{aligned} \quad (2.13.24)$$

Далее, используя (2.12.17) и неравенство Юнга, устанавливаем, что

$$5k^{\sigma} \Phi \leq \frac{c_2}{2} (\Phi_u + g_1) + c'_1 k^{\sigma qp/(q-2p)} \text{ п. в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая (2.12.14), (2.7.2), (2.2.3) и (2.12.2), получаем

$$\begin{aligned} 5k^{\sigma} \int_{\Omega} \Phi (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx &\leq \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \Phi_u (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx \\ &+ \frac{c_2}{2} \int_{\{|u| \geq k\}} g_1 dx + c'_2 k^{-1}. \end{aligned} \quad (2.13.25)$$

Кроме того, используя (2.12.17) вместе с неравенством Гельдера и (2.12.1), получаем

$$\int_{\{|u| < 4k\}} \Phi dx \leq c'_3 k^{1+2/q-1/p}. \quad (2.13.26)$$

Из (2.13.16)–(2.13.18) и (2.13.24)–(2.13.26) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \Phi_u (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx &\leq 6m \int_{\{|u| \geq k\}} |F(x, u)| dx \\ &+ \frac{c_2}{2} \int_{\{|u| \geq k\}} g_1 dx + \int_{\{|u| \geq k\}} g_2 dx + c'_4 k^{2/q-1/p}. \end{aligned} \quad (2.13.27)$$

Оценим снизу интеграл в левой части этого неравенства. Ясно, что

$$\int_{\Omega} \Phi_u (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx \geq \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u h'(u - w) dx. \quad (2.13.28)$$

Пусть $x \in \{2k \leq |u| \leq 2k+m\}$. В силу определения функции h_k имеем $h_k(u(x)) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} u(x)$. Тогда $|u(x) - w(x)| = |u(x)| - 2k \frac{k+2}{k+3} \leq \frac{2k}{k+3} + m$. Отсюда, учитывая, что $m \geq 2$, получаем неравенство $|u(x) - w(x)| < 2m$. Таким образом, заключаем, что

$$\{2k \leq |u| \leq 2k+m\} \subset \{|u - w| < 2m\}. \quad (2.13.29)$$

Кроме того, вследствие неравенства $k \geq 2m$, (2.12.11) и определения функции χ_{2m} имеем $h'(u - w) = 1$ в $\{|u - w| < 2m\}$. Это вместе с (2.13.29) влечет равенство

$$\int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u h'(u - w) dx = \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u dx.$$

Из этого равенства и (2.13.28) получаем

$$\int_{\Omega} \Phi_u (1 - h'_k(u)) h'(u - w) dx \geq \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u dx.$$

Последнее неравенство и (2.13.27) позволяют заключить, что

$$c'_5 \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k+m\}} \Phi_u dx \leq m \int_{\{|u| \geq k\}} |F(x, u)| dx + \int_{\{|u| \geq k\}} (g_1 + g_2) dx + k^{2/q-1/p}.$$

□

Замечание 2.13.1. Априорная оценка, данная в предложении 2.13.1, – основа для получения свойств суммируемости правильных энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7). Некоторые из этих свойств будут рассмотрены в разделах 2.17 и 2.18. Заметим, что обсуждаемая оценка является аналогом априорных оценок, установленных в [73] для энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными. Априорная оценка, данная в предложении 2.13.2, аналогична оценке, полученной в лемме 2.4.2 для энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7), и оценке, установленной в [13] для энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -данными. Оценки такого рода полезны при изучении единственности энтропийных решений и их свойств суммируемости.

2.14. Существование правильных энтропийных решений

Теорема 2.14.1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.

Тогда существует правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. Положим $f = F(\cdot, 0)$ и для любого $l \in \mathbb{N}$ определим функцию $F_l : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F_l(x, s) = h_l(f(x) - F(x, s)), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

В силу условия 1) имеем: если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ функция } F_l(x, \cdot) \text{ неубывающая на } \mathbb{R}. \quad (2.14.1)$$

Кроме того, вследствие условия 2) $f \in L^1(\Omega)$. Следовательно, существует $\{f_l\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |f_l - f|_1 = 0, \quad (2.14.2)$$

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |f_l|_1 \leq |f|_1 + 1.$$

Учитывая (2.1.3)–(2.1.5) и (2.14.1), из результатов [89] о разрешимости уравнений с монотонными операторами получаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такая, что $\forall v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} v + F_l(x, u_l) v \right\} dx = \int_{\Omega} f_l v dx. \quad (2.14.3)$$

В свою очередь, из результатов раздела 2.7 следует, что существуют возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такие, что

$$F(x, u) \in L^1(\Omega), \quad (2.14.4)$$

$$u_{l_i} \rightarrow u \text{ п. в. на } \Omega, \quad (2.14.5)$$

$$F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u) \text{ сильно в } L^1(\Omega), \quad (2.14.6)$$

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow \delta^\alpha u \text{ п. в. на } \Omega. \quad (2.14.7)$$

Кроме того, из доказательства леммы 2.7.1 следует, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx \leq C_2 k, \quad (2.14.8)$$

где C_2 – положительная постоянная, зависящая только от $n, p, q, c_1, c_2, \text{meas } \Omega$ и норм функций g_1, g_2 и f в $L^1(\Omega)$.

Последний результат вместе с (2.7.2), (2.14.5), (2.14.7) и леммой Фату влечет, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \Phi_u \chi'_k(u) dx \leq C_2 k.$$

Отсюда получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < k\}} \Phi_u dx \leq C_2 k.$$

Следовательно,

$$u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega). \quad (2.14.9)$$

Далее, пусть $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $h \in \mathcal{H}_+$. В силу леммы 2.11.1 $\{h(u_l - w)\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда ввиду (2.14.3) для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha h(u_l - w) \right\} dx \\ = \int_{\Omega} [f_l - F_l(x, u_l)] h(u_l - w) dx. \end{aligned} \quad (2.14.10)$$

Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} I_l &= \int_{\Omega} [f_l - F_l(x, u_l)] h(u_l - w) dx, \\ I'_l &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} w \right\} h'(u_l - w) dx, \\ I''_l &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) [D^{\alpha} h(u_l - w) - h'(u_l - w) D^{\alpha}(u_l - w)] \right\} dx. \end{aligned}$$

Из (2.14.10) и леммы 2.11.1 следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} u_l \right\} h'(u_l - w) dx = I_l + I'_l - I''_l. \quad (2.14.11)$$

Используя (2.14.2), (2.14.4)–(2.14.6) и ограниченность функции h на $\mathbb{R}$, получаем

$$I_{l_i} \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) h(u - w) dx. \quad (2.14.12)$$

Покажем сходимость последовательностей $\{I'_{l_i}\}$ и $\{I''_{l_i}\}$ к соответствующим пределам.

Поскольку $h \in \mathcal{H}_+$, имеем $h \in \mathcal{H}$ и $h' \geq 0$ в $\mathbb{R}$. Ясно, что существует $\mu > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq \mu, \quad h'(s) = 0. \quad (2.14.13)$$

Следовательно, существует $\mu_1 > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad h'(s) + |h''(s)| \leq \mu_1. \quad (2.14.14)$$

Положим $\mu_2 = \mu + |w|_{\infty}$.

Пусть теперь $\alpha \in \Lambda$. Положим $v = A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} w \cdot h'(u - w)$. Из леммы 2.2.4, (2.1.3), (2.14.13) и (2.14.14) следует, что функция v суммируема на Ω . Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$v_i = A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_{l_i}) D^{\alpha} w \cdot h'(u_{l_i} - w).$$

Вследствие (2.14.5) и (2.14.7)

$$v_i \rightarrow v \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.14.15)$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (2.14.15) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega \setminus \Omega'} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta w|^q + \sum_{|\beta|=2} |D^\beta w|^p + |v| \right\} dx \leq \varepsilon^q, \quad (2.14.16)$$

$v_i \rightarrow v$ равномерно на Ω' .

Ввиду последнего свойства существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_0$,

$$\int_{\Omega'} |v_i - v| dx \leq \varepsilon. \quad (2.14.17)$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_0$. Из (2.14.16) и (2.14.17) следует, что

$$\int_{\Omega} |v_i - v| dx \leq 2\varepsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega'} |v_i| dx. \quad (2.14.18)$$

Используя (2.14.13), (2.14.14), неравенство Гельдера, (2.1.3), (2.14.16) и (2.14.8), оцениваем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega'} |v_i| dx &\leq \mu_1 \int_{(\Omega \setminus \Omega') \cap \{|u_i| < \mu_2\}} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| |D^\alpha w| dx \\ &\leq \varepsilon \mu_1 c_1 \int_{\{|u_i| < \mu_2\}} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^q + \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_i|^p \right\} dx + \varepsilon \mu_1 \left(\int_{\Omega} g_1 dx + 1 \right) \\ &\leq \varepsilon \mu_1 \left\{ \int_{\Omega} g_1 dx + 1 + C_2 c_1 (\mu_2 + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.14.18) получаем, что

$$\int_{\Omega} |v_i - v| dx \leq 2\varepsilon + \varepsilon \mu_1 \left\{ \int_{\Omega} g_1 dx + 1 + C_2 c_1 (\mu_2 + 1) \right\}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} v_i dx \rightarrow \int_{\Omega} v dx.$$

Этот результат позволяет заключить, что

$$I'_{l_i} \rightarrow \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha w \right\} h'(u - w) dx. \quad (2.14.19)$$

Далее, пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Положим

$$z = A_\alpha(x, \delta_2 u) [D^\alpha h(u - w) - h'(u - w)(\delta^\alpha u - D^\alpha w)]$$

и зафиксируем n -мерные мультииндексы β и γ такие, что $|\beta| = |\gamma| = 1$ и $\beta + \gamma = \alpha$. В силу предложения 2.11.4 имеем

$$z = A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\beta u - D^\beta w) (\delta^\gamma u - D^\gamma w) h''(u - w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.14.20)$$

Отсюда, используя лемму 2.2.4, (2.1.3), (2.14.13) и (2.14.14), получаем, что функция z суммируема на Ω . Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$z_i = A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) [D^\alpha h(u_{l_i} - w) - h'(u_{l_i} - w)(D^\alpha u_{l_i} - D^\alpha w)].$$

Из леммы 2.11.1 следует, что для любого $i \in \mathbb{N}$

$$z_i = A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) (D^\beta u_{l_i} - D^\beta w) (D^\gamma u_{l_i} - D^\gamma w) h''(u_{l_i} - w) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.14.21)$$

Вследствие (2.14.20), (2.14.21), (2.14.5) и (2.14.7)

$$z_i \rightarrow z \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.14.22)$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (2.14.22) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega'' \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega'') \leq \varepsilon^{qp/(q-2p)}, \quad (2.14.23)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega''} (|D^\beta w|^q + |D^\gamma w|^q + |z|) dx \leq \varepsilon, \quad (2.14.24)$$

$$z_i \rightarrow z \quad \text{равномерно на } \Omega''.$$

Ввиду последнего свойства существует $i_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$,

$$\int_{\Omega''} |z_i - z| dx \leq \varepsilon. \quad (2.14.25)$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$. Из (2.14.24) и (2.14.25) следует, что

$$\int_{\Omega} |z_i - z| dx \leq 2\varepsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega''} |z_i| dx. \quad (2.14.26)$$

Используя (2.14.21), (2.14.13), (2.14.14), неравенство Гельдера, (2.1.3), (2.14.23), (2.14.24) и (2.14.8), оцениваем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \setminus \Omega''} |z_i| dx \\
& \leq \mu_1 \int_{(\Omega \setminus \Omega'') \cap \{|u_{l_i}| < \mu_2\}} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i})| |D^\beta u_{l_i} - D^\beta w| |D^\gamma u_{l_i} - D^\gamma w| dx \\
& \leq 4\varepsilon \mu_1 (c_1 + 1) \int_{\{|u_{l_i}| < \mu_2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_{l_i}|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_{l_i}|^p \right\} dx \\
& \quad + 4\varepsilon \mu_1 (c_1 + 1) \left(\int_{\Omega} g_1 dx + 1 \right) \\
& \leq 4\varepsilon \mu_1 (c_1 + 1) \left\{ \int_{\Omega} g_1 dx + 1 + C_2(\mu_2 + 1) \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.14.26) следует, что

$$\int_{\Omega} z_i dx \rightarrow \int_{\Omega} z dx.$$

Поэтому заключаем, что

$$I''_{l_i} \rightarrow \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \delta_2 u) [D^\alpha h(u - w) - h'(u - w)(\delta^\alpha u - D^\alpha w)] \right\} dx. \quad (2.14.27)$$

Теперь используя (2.14.11), (2.14.12), (2.14.19), (2.14.27), предложение 2.11.4, (2.14.5), (2.14.7), (2.1.4) и лемму Фату, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'(u - w) dx \\
& \leq \int_{\Omega} F(x, u) h(u - w) dx + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha w \right\} h'(u - w) dx \\
& \quad - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) [D^\alpha h(u - w) - h'(u - w)(\delta^\alpha u - D^\alpha w)] \right\} dx.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} h(u - w) \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h(u - w) dx.$$

Из этого неравенства, (2.14.4) и (2.14.9) выводим, что u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

2.15. Связь с энтропийными решениями и теорема единственности

Теорема 2.15.1. *Предположим, что $q > p_1$. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).*

Доказательство. Ясно, что

$$u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad F(x, u) \in L^1(\Omega). \quad (2.15.1)$$

Поскольку $q > p_1$, имеем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < 1.$$

Зафиксируем число σ такое, что

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < \sigma < 1 \quad (2.15.2)$$

и положим

$$t = \frac{rp\sigma}{q(p-1)}, \quad b = r\sigma, \quad \gamma = r\sigma - \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right).$$

Из (2.15.2) следует, что $t > 1$, $2 < b < r$ и $0 < \gamma < b$. Кроме того, имеем

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{b} + \frac{\gamma}{b} = 1. \quad (2.15.3)$$

Поскольку $b/q \in (0, \bar{r})$, ввиду следствия 2.12.1 $\Phi_u \in L^{b/q}(\Omega)$. Это вместе с включением $g_1 \in L^1(\Omega)$ влечет, что

$$\Phi_u + g_1 \in L^{b/q}(\Omega). \quad (2.15.4)$$

Положим

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|.$$

Вследствие (2.1.3) имеем $\varphi \leq (c_1 + 1)n^2(\Phi_u + g_1)^{(p-1)/p}$ п. в. на Ω . Отсюда и из (2.15.4) получаем $\varphi \in L^t(\Omega)$.

Поскольку $b \in (0, r)$, ввиду следствия 2.12.2 для любого n -мерного мультииндекса β , $|\beta| = 1$, имеем $\delta^\beta u \in L^b(\Omega)$. Положим

$$\sigma_1 = \sum_{|\beta|=1} \int_{\Omega} |\delta^\beta u|^b dx + 1, \quad \sigma_2 = M_u^{q^*/q} + \text{meas } \Omega + 1,$$

$$c = 4^q n \bar{c} \sigma_1 \sigma_2 |\varphi|_t + 1.$$

Пусть теперь $w \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$v = \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u - \delta^\beta w|^2.$$

Ясно, что $v \in L^{b/2}(\Omega)$ и

$$|v|_{b/2} \leq 4n\sigma_1(1 + \|w\|_{W^{1,b}(\Omega)})^2. \quad (2.15.5)$$

Поскольку u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $h_k \in \mathcal{H}_+$, ввиду определения 2.13.1

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha h_k(u - w) \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - w) dx.$$

Это вместе с предложением 2.11.4 влечет, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha w) \right\} h'_k(u - w) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - w) dx + \int_{\Omega} \varphi v |h''_k(u - w)| dx. \end{aligned} \quad (2.15.6)$$

Учитывая (2.15.3) и используя неравенство Гельдера и свойства функции h_k , получаем

$$\int_{\Omega} \varphi v |h''_k(u - w)| dx \leq 3|\varphi|_t |v|_{b/2} (\text{meas}\{|u - w| \geq k\})^{\gamma/b}. \quad (2.15.7)$$

Оценим меру множества $\{|u - w| \geq k\}$. Для этого положим

$$G_1 = \{|u - w| \geq k\} \cap \{|w| \leq k/2\}, \quad G_2 = \{|u - w| \geq k\} \cap \{|w| > k/2\}.$$

Ясно, что

$$\text{meas}\{|u - w| \geq k\} = \text{meas } G_1 + \text{meas } G_2. \quad (2.15.8)$$

Поскольку $G_1 \subset \{|u| \geq k/2\}$, в силу первого из включений (2.15.1) и предложения 2.12.1 имеем

$$\text{meas } G_1 \leq 4^b k^{-b} \bar{c} \sigma_2, \quad (2.15.9)$$

а поскольку $G_2 \subset \{|w| > k/2\}$, имеем

$$\text{meas } G_2 \leq 2^b k^{-b} \int_{\Omega} |w|^b dx.$$

Это неравенство вместе с (2.15.8) и (2.15.9) влечет, что

$$\text{meas}\{|u - w| \geq k\} \leq 4^b k^{-b} \bar{c} \sigma_2 (1 + \|w\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b. \quad (2.15.10)$$

Из (2.15.7), (2.15.5) и (2.15.10) следует, что

$$\int_{\Omega} \varphi v |h_k''(u - w)| dx \leq c(1 + \|w\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \quad (2.15.11)$$

Учитывая, что $h_k'(s) = 0$, если $|s| \geq 2k$, из (2.15.6) и (2.15.11) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-w| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) (\delta^{\alpha} u - \delta^{\alpha} w) \right\} h_k'(u - w) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - w) dx + c(1 + \|w\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Это вместе с (2.15.1) и определением 2.3.1 позволяет заключить, что u — энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Теорема 2.15.2. *Предположим, что $q > p_1$ и выполняются следующие условия:*

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.

Пусть u — энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u — правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2.14.1 существует правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Обозначим это решение через v . Из теоремы 2.15.1 следует, что v – энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда в силу теоремы 2.6.1 $u = v$ п.в. на Ω . Следовательно, поскольку v – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), получаем, что u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Из теорем 2.15.1 и 2.6.1 выводим следующий результат.

Теорема 2.15.3. *Предположим, что $q > p_1$ и для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$. Пусть u и v – правильные энтропийные решения задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда $u = v$ п.в. на Ω .*

Заметим, что вопрос о том, справедлив ли результат о единственности правильного энтропийного решения задачи (2.1.6), (2.1.7) без предположения $q > p_1$, пока остается открытым.

2.16. Связь с H -решениями и W -решениями

Теорема 2.16.1. *Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что

$$u \in \hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad F(x, u) \in L^1(\Omega). \quad (2.16.1)$$

Первое из этих включений вместе со следствием 2.12.5 влечет, что

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega). \quad (2.16.2)$$

Положим

$$c''' = [2(c_1 + 1)(c_2 + 2)n^3/c_2]^{qp/(q-2p)},$$

$$\Phi = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \right\}.$$

Используя (2.12.17) и неравенство Юнга, устанавливаем, что

$$2\Phi \leq \frac{c_2}{2}(\Phi_u + g_1) + c''' \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (2.16.3)$$

Кроме того, используя (2.12.17), неравенство Гельдера и (2.12.1), получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{\{|u| < k\}} \Phi \, dx = 0. \quad (2.16.4)$$

Далее, пусть $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Положим

$$\bar{\Phi} = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta w|^2 \right\}.$$

Вследствие (2.16.2) имеем

$$\bar{\Phi} \in L^1(\Omega). \quad (2.16.5)$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m \geq 8 + \max_\Omega |w|$, и для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_k = \chi_m \circ \bar{h}_k, \quad v_k = u - \bar{h}_k(u) + w.$$

Ввиду свойств функции χ_m и функций $\bar{h}_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varphi_k \in \mathcal{H}_+, \quad (2.16.6)$$

$$|\varphi_k| \leq 3m \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.16.7)$$

$$0 \leq \varphi'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.16.8)$$

$$|\varphi''_k| \leq \varphi'_k + |\bar{h}_k''| \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.16.9)$$

Кроме того,

$$\varphi_k(v_k) \rightarrow w, \quad \varphi'_k(v_k) \rightarrow 1, \quad \varphi''_k(v_k) \rightarrow 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (2.16.10)$$

Зафиксируем теперь $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$. Учитывая замечание 2.12.1 и (2.12.13), получаем $\bar{h}_k(u) - w \in \dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу определения 2.13.1 и (2.16.6) имеем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) D^\alpha \varphi_k(v_k) \right\} dx \leq \int_\Omega F(x, u) \varphi_k(v_k) dx. \quad (2.16.11)$$

Используя предложение 2.11.4, (2.12.14), (2.16.8) и (2.16.9), устанавливаем, что для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha \varphi_k(v_k) = (1 - \bar{h}'_k(u)) \varphi'_k(v_k) \delta^\alpha u + \varphi'_k(v_k) D^\alpha w \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

а для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$\begin{aligned} & |D^\alpha \varphi_k(v_k) - (1 - \bar{h}'_k(u)) \varphi'_k(v_k) \delta^\alpha u - \varphi'_k(v_k) D^\alpha w| \\ & \leq 2(1 - \bar{h}'_k(u)) \varphi'_k(v_k) \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 + |\bar{h}''_k(u)| \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \\ & \quad + 2|\bar{h}''_k(v_k)| \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 + 2|\varphi''_k(v_k)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta w|^2 \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} (1 - \bar{h}'_k(u)) \varphi'_k(v_k) + \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} w \right\} \varphi'_k(v_k) \\ & \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi_k(v_k) + 2\Phi(1 - \bar{h}'_k(u)) \varphi'_k(v_k) \\ & \quad + \Phi|\bar{h}''_k(u)| + 2\Phi|\bar{h}''_k(v_k)| + 2\bar{\Phi}|\varphi''_k(v_k)| \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Тогда используя (2.1.4), (2.12.14), (2.16.3) и (2.16.8), получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} w \right\} \varphi'_k(v_k) \\ & \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi_k(v_k) + (c''' + c_2 + 1)(g_1 + g_2 + 1)(1 - \bar{h}'_k(u)) \\ & \quad + \Phi|\bar{h}''_k(u)| + 2\Phi|\bar{h}''_k(v_k)| + 2\bar{\Phi}|\varphi''_k(v_k)| \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.16.11), (2.12.12), (2.12.13), (2.12.15) и неравенство $k \geq m$, выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} w \right\} \varphi'_k(v_k) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi_k(v_k) dx + (c''' + c_2 + 1) \int_{\Omega} (g_1 + g_2 + 1)(1 - \bar{h}'_k(u)) dx \\ & \quad + \frac{9}{k} \int_{\{|u| < 5k\}} \Phi dx + 2 \int_{\Omega} \bar{\Phi} |\varphi''_k(v_k)| dx. \end{aligned}$$

Этот результат вместе со вторым из включений в (2.16.1) и (2.16.2), (2.16.4), (2.16.5), (2.16.7)–(2.16.10), (2.12.11), (2.12.14) и (2.12.15) влечет, что

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} w \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Следовательно, для любой функции $w \in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Отсюда и из (2.16.1) и (2.16.2) выводим, что u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Предложение 2.16.1. Пусть u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Предположим, что для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^2(\Omega)$, а для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. Тогда u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. Согласно определению 2.5.1 $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

- (i) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$;
- (iii) для любой функции $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

В силу предложения 2.9.2 имеем

$$u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega). \quad (2.16.12)$$

Это вместе с включением $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и леммой 2.2.4 влечет, что для любого $\alpha \in \Lambda$ $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п.в. на Ω . Тогда, используя утверждения (ii) и (iii), получаем, что для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$ и для любой функции $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Эти факты, (2.16.12), утверждение (i) и определение 2.8.1 позволяют заключить, что u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Теорема 2.16.2. Предположим, что $q > p_2$. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. В силу теоремы 2.16.1 u – H -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Кроме того, ввиду следствия 2.12.2 и неравенства $q > p_2$ для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^2(\Omega)$, а для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. Тогда в силу предложения 2.16.1 u – W -решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

2.17. Свойства суммируемости правильных энтропийных решений

Поскольку правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7) принадлежит множеству функций $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, из следствий 2.12.1–2.12.4 получаем следующий результат.

Предложение 2.17.1. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда

- (i) для любого $\lambda \in (0, r^*)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (ii) для любого $\lambda \in (0, \bar{r})$ имеем $\Phi_u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (iii) для любого $\lambda \in (0, r)$ и любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (iv) для любого $\lambda \in (0, rp/q)$ и любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- (v) для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u \in \overset{\circ}{W}^{1,\lambda}(\Omega)$;
- (vi) если $q > p_2$, то для любого $\lambda \in [1, rp/q)$ имеем $u \in \overset{\circ}{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Используя предложение 2.13.1, ниже установим более точные свойства суммируемости правильных энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7) по сравнению со свойствами, описанными утверждениями (i)–(iv) предложения 2.17.1.

Предложение 2.17.2. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$, $M > 0$, и пусть выполняются следующие условия:

- (i) функция h неотрицательна и ограничена на $\mathbb{R}$;
- (ii) $|h'| \leq Mh$ на $\mathbb{R}$;
- (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau < +\infty$.

Тогда $\Phi_u h(u) \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. Определим функцию $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(s) = \int_0^s h(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ввиду включения $h \in C^1(\mathbb{R})$ и условий (i)–(iii) имеем $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, функции φ и φ' ограничены на $\mathbb{R}$, $\varphi' \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и $|\varphi''| \leq M\varphi'$ на $\mathbb{R}$. Кроме того, $\varphi(0) = 0$ и для любого $s \in \mathbb{R}$ $\varphi'(s) = h(s)$. Тогда в силу предложения 2.13.1 функция $\Phi_u h(u)$ суммируема на Ω . $\square$

Далее, зафиксируем функцию $\bar{a} \in C^1(\mathbb{R})$ со свойствами: $\bar{a}(0) = 0$, $\bar{a}$ четна, $\bar{a}$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, $\bar{a}$ неубывающая на $[0, +\infty)$,

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq 1, \quad \bar{a}(s) = |s|. \quad (2.17.1)$$

Следствие 2.17.1. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда для любого $\lambda > 1$

$$\Phi_u(1 + |u|)^{-1} [\ln(2 + |u|)]^{-\lambda} \in L^1(\Omega). \quad (2.17.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda > 1$. Положим $M = (1 + \lambda / \ln 2) \max_{[-1,1]} |\bar{a}'|$ и определим функцию $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h(s) = (1 + \bar{a}(s))^{-1} [\ln(2 + \bar{a}(s))]^{-\lambda}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Из свойств функции $\bar{a}$ следует, что $h \in C^1(\mathbb{R})$ и функция h удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 2.17.2. Следовательно, в силу этого предложения $\Phi_u h(u) \in L^1(\Omega)$. Отсюда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $1 + \bar{a}(s) \leq 2(1 + |s|)$, выводим включение (2.17.2). $\square$

Далее, пусть для любого $k > 0$ $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Лемма 2.17.1. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$ и для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $D^\alpha T_k(u) = \delta^\alpha u \cdot 1_{\{|u| < k\}}$ п. в. на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $h_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно,

$$T_k(h_k(u)) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega) \quad (2.17.3)$$

и для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем

$$D^\alpha T_k(h_k(u)) = D^\alpha h_k(u) \cdot 1_{\{|h_k(u)| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.17.4)$$

Заметим, что

$$T_k(h_k(u)) = T_k(u), \quad \{|h_k(u)| < k\} = \{|u| < k\}. \quad (2.17.5)$$

Первое из этих равенств вместе с (2.17.3) влечет, что $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$.

Далее, пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. В силу (2.17.4) и (2.17.5) имеем

$$D^\alpha T_k(u) = D^\alpha h_k(u) \cdot 1_{\{|u| < k\}} \text{ п. в. на } \Omega. \quad (2.17.6)$$

Кроме того, ввиду предложения 2.11.4 $D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) \delta^\alpha u$ п. в. на Ω . Отсюда и из (2.17.6) выводим, что $D^\alpha T_k(u) = \delta^\alpha u \cdot 1_{\{|u| < k\}}$ п. в. на Ω . $\square$

Предложение 2.17.3. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$, $M > 0$, и пусть выполняются следующие условия:

- (i) функция h четна;
- (ii) функция h положительна на $\mathbb{R}$;
- (iii) функция h невозрастающая на $[0, +\infty)$;
- (iv) $|h'| \leq Mh$ на $\mathbb{R}$;

$$(v) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\tau} [h(\tau)]^{(n-q)/n} d\tau < +\infty.$$

Тогда

- (i') $|u|^{r^*} h(u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii') $\Phi_u^{\bar{r}}[h(u)]^{(n-q)/(n-1)} \in L^1(\Omega)$;
- (iii') для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,
 $|\delta^\alpha u|^r [h(u)]^{(n-q)/(n-1)} \in L^1(\Omega)$;
- (iv') для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,
 $|\delta^\alpha u|^{rp/q} [h(u)]^{(n-q)/(n-1)} \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. Положим $\bar{M} = M + \max_{[-1,1]} |\bar{a}'|$ и определим функцию $\bar{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\bar{h}(s) = \frac{[h(s)]^{(n-q)/n}}{1 + \bar{a}(s)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $\bar{h} \in C^1(\mathbb{R})$. Используя условия (i)–(v) и свойства функции $\bar{a}$, устанавливаем, что функция $\bar{h}$ неотрицательна и ограничена на $\mathbb{R}$, $|\bar{h}'| \leq \bar{M}\bar{h}$ на $\mathbb{R}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\tau) d\tau < +\infty.$$

Тогда в силу предложения 2.17.2 $\Phi_u \bar{h}(u) \in L^1(\Omega)$. Интеграл функции $\Phi_u \bar{h}(u)$ по Ω обозначим через $\tilde{M}$. Таким образом, $0 \leq \tilde{M} < +\infty$.

Далее, определим функцию $\hat{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{h}(s) = \int_0^s [\bar{h}(\tau)]^{1/q} d\tau, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $\hat{h} \in C^1(\mathbb{R})$, $\hat{h}(0) = 0$ и

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \hat{h}'(s) = [\bar{h}(s)]^{1/q}. \quad (2.17.7)$$

Покажем, что

$$\hat{h}(u) \in L^{q^*}(\Omega). \quad (2.17.8)$$

Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2.17.1 $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$ и для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha T_k(u) = \delta^\alpha u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.17.9)$$

Очевидно, что $\hat{h}(T_k(u)) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$ и для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем

$$D^\alpha \hat{h}(T_k(u)) = \hat{h}'(T_k(u)) D^\alpha T_k(u) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.17.10)$$

Из (2.17.9), (2.17.10) и (2.17.7) следует, что для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$\int_\Omega |D^\alpha \hat{h}(T_k(u))|^q dx \leq \tilde{M}. \quad (2.17.11)$$

Кроме того, в силу (2.2.1) имеем

$$|\hat{h}(T_k(u))|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \hat{h}(T_k(u))|_q.$$

Это вместе с (2.17.11) влечет, что

$$\int_\Omega |\hat{h}(T_k(u))|^{q^*} dx \leq (c'n)^{q^*} \tilde{M}^{q^*/q}.$$

Отсюда, используя лемму Фату, выводим включение (2.17.8).

Далее, используя условия (i) и (iii) и учитывая, что функция $\bar{a}$ неубывающая на $[0, +\infty)$ и четная, получаем

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad [\bar{h}(s)]^{1/q} |s| \leq |\hat{h}(s)|.$$

Отсюда и из (2.17.1) и условий (i) и (iii) выводим, что

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad |s|^{r^*} h(s) \leq 2^{q^*} |\hat{h}(s)|^{q^*} + h(0).$$

Поэтому, учитывая (2.17.8), получаем включение $|u|^{r^*} h(u) \in L^1(\Omega)$. Таким образом, утверждение (i') справедливо.

Далее, используя неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_u^{\bar{r}}[h(u)]^{(n-q)/(n-1)} &= \frac{\Phi_u^{\bar{r}}[h(u)]^{\bar{r}(n-q)/n}}{[1 + \bar{a}(u)]^{\bar{r}}} \cdot [1 + \bar{a}(u)]^{\bar{r}} [h(u)]^{1-\bar{r}} \\ &\leq \Phi_u \bar{h}(u) + 2^{r^*} (1 + |u|)^{r^*} h(u) \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что функции $\Phi_u \bar{h}(u)$, $|u|^{r^*} h(u)$ и $h(u)$ принадлежат $L^1(\Omega)$, выводим, что $\Phi_u^{\bar{r}}[h(u)]^{(n-q)/(n-1)} \in L^1(\Omega)$. Таким образом, утверждение (ii') справедливо. Это утверждение влечет, что утверждения (iii') и (iv') также справедливы. $\square$

Следствие 2.17.2. Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Пусть $\lambda > 1$. Тогда

$$|u|^{r^*} [\ln(2 + |u|)]^{-n/(n-q)} [\ln \ln(3 + |u|)]^{-\lambda n/(n-q)} \in L^1(\Omega);$$

$$\Phi_u^{\bar{r}} [\ln(2 + |u|)]^{-n/(n-1)} [\ln \ln(3 + |u|)]^{-\lambda n/(n-1)} \in L^1(\Omega);$$

для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$|\delta^\alpha u|^r [\ln(2 + |u|)]^{-n/(n-1)} [\ln \ln(3 + |u|)]^{-\lambda n/(n-1)} \in L^1(\Omega);$$

для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|\delta^\alpha u|^{rp/q} [\ln(2 + |u|)]^{-n/(n-1)} [\ln \ln(3 + |u|)]^{-\lambda n/(n-1)} \in L^1(\Omega).$$

Доказательство. Положим

$$M = \frac{n}{n-q} \left(1 + \frac{\lambda}{\ln \ln 3} \right) \max_{[-1,1]} |\bar{a}'|$$

и определим функцию $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h(s) = [\ln(3 + \bar{a}(s))]^{-n/(n-q)} [\ln \ln(3 + \bar{a}(s))]^{-\lambda n/(n-q)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Имеем $h \in C^1(\mathbb{R})$, $M > 0$, и ввиду свойств функции $\bar{a}$ выполняются условия (i)–(v) предложения 2.17.3. Из этого предложения получаем заключение следствия. $\square$

Замечание 2.17.1. Свойства суммируемости правильных энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7), описанные в предложении 2.17.1, – такие же, что и свойства энтропийных решений рассматриваемой задачи, установленные в лемме 2.3.2. Другие результаты раздела – аналоги результатов, полученных в [73] для энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными. Кроме того, они аналогичны результатам [82] для W -решений задачи Дирихле для одного класса вырождающихся нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной монотонностью и L^1 -данными. Заметим, что предложение 2.17.3 и следствие 2.17.2 описывают более точные свойства суммируемости по сравнению со свойствами, установленными в [25] для слабых решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с мерами в качестве данных.

Замечание 2.17.2. Используя априорную оценку, данную в предложении 2.13.1, некоторую модификацию априорной оценки, данной в предложении 2.13.2, и приемы, аналогичные тем, которые развиты в [65, 67, 71], можно получить результаты об улучшении суммируемости правильных энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7) при дополнительных условиях на функцию F и, в частности, в предположениях, что функция $F(\cdot, 0)$ принадлежит некоторым логарифмическим классам или $L^t(\Omega)$ с $t > 1$. Большей частью изложение этих результатов мы оставляем за рамками данной главы. Только в следующем разделе дадим несколько предложений, относящихся к случаю, когда функция $F(\cdot, 0)$ принадлежит $L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$. В связи с вышеизложенным в этом замечании напомним, что для энтропийных решений задачи (2.1.6), (2.1.7) некоторые результаты об улучшении свойств суммируемости получены в разделе 2.10.

2.18. Связь с обобщенными решениями

Заметим, что ввиду (2.1.3) для любых $u, v \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$ функция $A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v$ суммируема на Ω . Кроме того, поскольку $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$, для любых $g \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$ и $w \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ функция gw суммируема на Ω .

Определение 2.18.1. Обобщенным решением задачи (2.1.6), (2.1.7) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- (i) $F(x, u) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$;

(ii) для любой функции $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Ясно, что если u – обобщенное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), то u – правильное энтропийное решение, H -решение и W -решение той же задачи. Кроме того, если u – обобщенное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), то имеем $F(x, u)u \in L^1(\Omega)$.

Ниже дадим условия, при которых правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7) есть обобщенное решение той же задачи.

Предложение 2.18.1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) $F(\cdot, 0) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$.

Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $F(x, u)u \in L^1(\Omega)$ и для любой функции $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через c'_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, q, c_1, c_2, \text{meas } \Omega, |g_1|_1, |g_2|_1$ и $|F(\cdot, 0)|_{q^*/(q^*-1)}$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Учитывая свойства функций χ_k , из предложения 2.13.1 выводим, что

$$\int_{\Omega} \Phi_u \chi'_k(u) dx \leq \frac{2}{c_2} \int_{\Omega} F(x, u) \chi_k(u) dx + c'_1. \quad (2.18.1)$$

Кроме того, поскольку $\chi'_k > 0$ на $\mathbb{R}$ и $\chi'_k(s) = 1$, если $|s| \leq k$, имеем

$$\int_{\{|u| < k\}} \Phi_u dx \leq \int_{\Omega} \Phi_u \chi'_k(u) dx. \quad (2.18.2)$$

Условие 1) вместе с положительностью χ'_k влечет, что

$$[F(\cdot, 0) - F(x, u)] \chi_k(u) \geq 0 \text{ п. в. на } \Omega. \quad (2.18.3)$$

Наконец, учитывая (2.7.1), устанавливаем, что $|\chi_k(u)| \leq 3|T_k(u)|$ на Ω . Отсюда и из (2.18.1)–(2.18.3) выводим, что

$$\int_{\{|u| < k\}} \Phi_u dx \leq \frac{6}{c_2} \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |T_k(u)| dx + c'_1. \quad (2.18.4)$$

В силу условия 2) и неравенства Гельдера

$$\int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |T_k(u)| dx \leq |F(\cdot, 0)|_{q^*/(q^*-1)} |T_k(u)|_{q^*},$$

а ввиду леммы 2.17.1 и (2.2.1)

$$|T_k(u)|_{q^*} \leq c'n \left(\int_{\{|u|<k\}} \Phi_u dx \right)^{1/q}.$$

Из последних двух оценок и неравенства Юнга вытекает, что

$$\frac{6}{c_2} \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)| |T_k(u)| dx \leq \frac{1}{q} \int_{\{|u|<k\}} \Phi_u dx + c'_2.$$

Из этого неравенства и (2.18.4) получаем, что

$$\int_{\{|u|<k\}} \Phi_u dx \leq c'_3.$$

Отсюда, используя лемму Фату, заключаем, что функция Φ_u суммируема на Ω . Этот факт вместе с предложениями 2.9.1 и 2.9.2 влечет, что $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Кроме того, очевидно, $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Из этих включений, леммы 2.2.4, предложения 2.11.4 и свойств функций h_k вытекает, что $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Поэтому $u \in L^{q^*}(\Omega)$. Тогда, учитывая условие 2), получаем

$$F(\cdot, 0)u \in L^1(\Omega). \quad (2.18.5)$$

Далее, используя (2.18.1) и свойства функций χ_k , получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} [F(\cdot, 0) - F(x, u)] \chi_k(u) dx \leq 3 \int_{\Omega} |F(\cdot, 0)u| dx + c_2 c'_1.$$

Отсюда, учитывая (2.18.3) и сходимость $\chi_k(u) \rightarrow u$ на Ω и применяя лемму Фату, выводим, что $[F(\cdot, 0) - F(x, u)]u \in L^1(\Omega)$. Это вместе с (2.18.5) влечет, что

$$F(x, u)u \in L^1(\Omega). \quad (2.18.6)$$

Наконец, пусть $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $w_k = h_k(u - h_k(u) + w)$. Ввиду свойств функций h_k имеем $w_k \rightarrow w$ на

Ω и $\forall k \in \mathbb{N}$ $|w_k| \leq 6(|u| + |w|)$ на Ω . Отсюда, учитывая (2.18.6) и включения $F(x, u) \in L^1(\Omega)$ и $w \in L^\infty(\Omega)$, получаем

$$\int_{\Omega} F(x, u) w_k dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) w dx. \quad (2.18.7)$$

Кроме того, используя лемму 2.11.1 и свойства функций h_k , устанавливаем, что $\{w_k\} \subset \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $w_k \rightarrow w$ сильно в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Это вместе с (2.1.3) влечет, что для любого $\alpha \in \Lambda$

$$\int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w_k dx \rightarrow \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w dx. \quad (2.18.8)$$

Поскольку u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7), в силу определения 2.13.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w_k \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) w_k dx.$$

Отсюда и из (2.18.7) и (2.18.8) выводим, что

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

□

Предложение 2.18.2. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) существуют $\nu > 0$ и $g \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$, $g \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $s \in \mathbb{R}$

$$|F(x, s)| \leq \nu |s|^{q^*-1} + g(x).$$

Пусть u – правильное энтропийное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). Тогда u – обобщенное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

Доказательство. Вследствие условия 2) $F(\cdot, 0) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$. Тогда ввиду предложения 2.18.1 $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Следовательно, $u \in L^{q^*}(\Omega)$. Это вместе с условием 2) влечет, что

$$F(x, u) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \quad (2.18.9)$$

Далее, пусть $w \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Используя лемму 2.11.1 и свойства функций h_k , устанавливаем, что

$$\{h_k(w)\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad (2.18.10)$$

$$h_k(w) \rightarrow w \text{ сильно в } W_{2,p}^{1,q}(\Omega). \quad (2.18.11)$$

В силу (2.18.10) и предложения 2.18.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} h_k(w) \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) h_k(w) dx. \quad (2.18.12)$$

Используя (2.18.9) и то, что $h_k(w) \rightarrow w$ на Ω и для любого $k \in \mathbb{N}$ $|h_k(w)| \leq 2|w|$ на Ω , получаем

$$\int_{\Omega} F(x, u) h_k(w) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) w dx. \quad (2.18.13)$$

Кроме того, вследствие (2.1.3) и (2.18.11) для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем

$$\int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} h_k(w) dx \rightarrow \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w dx. \quad (2.18.14)$$

Из (2.18.12)–(2.18.14) выводим, что

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} w \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) w dx.$$

Таким образом, заключаем, что u – обобщенное решение задачи (2.1.6), (2.1.7). $\square$

Из теоремы 2.14.1 и предложения 2.18.2 получаем следующий результат.

Теорема 2.18.1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
- 2) существуют $\nu > 0$ и $g \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$, $g \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $s \in \mathbb{R}$

$$|F(x, s)| \leq \nu |s|^{q^*-1} + g(x).$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (2.1.6), (2.1.7).

2.19. Примеры относительно коэффициентов и правой части уравнения (2.1.6)

Рассмотрим примеры выполнения неравенств (2.1.3)–(2.1.5).

Пример 2.19.1. Пусть $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g_1 = 0$ на Ω и $g_2 = 0$ на Ω . Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ следующим образом:

$$A_\alpha(x, \xi) = |\xi_\alpha|^{q-1} \operatorname{sign} \xi_\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n,2}.$$

Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ следующим образом:

$$A_\alpha(x, \xi) = |\xi_\alpha|^{p-1} \operatorname{sign} \xi_\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n,2}.$$

Очевидно, что для любого $\alpha \in \Lambda$ функция A_α удовлетворяет условиям Каратеодори. Кроме того, легко видеть, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства (2.1.3) и (2.1.4). Наконец, заметим, что если $\lambda > 1$ и $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$, то $(|s_1|^{\lambda-1} \operatorname{sign} s_1 - |s_2|^{\lambda-1} \operatorname{sign} s_2)(s_1 - s_2) > 0$. Отсюда вытекает, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (2.1.5).

Пример 2.19.2. Предположим, что $p > 2$, и пусть $c_1 = n^q$, $c_2 = 1$, $g_1 = 0$ на Ω и $g_2 = 0$ на Ω . Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ следующим образом:

$$A_\alpha(x, \xi) = \left(\sum_{|\beta|=1} |\xi_\beta|^2 \right)^{(q-2)/2} \xi_\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n,2}.$$

Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ следующим образом:

$$A_\alpha(x, \xi) = \left(\sum_{|\beta|=2} |\xi_\beta|^2 \right)^{(p-2)/2} \xi_\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n,2}.$$

Очевидно, что для любого $\alpha \in \Lambda$ функция A_α удовлетворяет условиям Каратеодори. Кроме того, легко проверить, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства (2.1.3) и (2.1.4).

Покажем, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (2.1.5).

Действительно, пусть $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$. Положим

$$S_i = \sum_{|\alpha|=i} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha), \quad i = 1, 2,$$

$$\eta_i = \left(\sum_{|\beta|=i} |\xi_\beta|^2 \right)^{1/2}, \quad \mu_i = \left(\sum_{|\beta|=i} |\xi'_\beta|^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{|\alpha|=1} [\eta_1^{q-2} \xi_\alpha - \mu_1^{q-2} \xi'_\alpha] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \\ &= \eta_1^q - (\eta_1^{q-2} + \mu_1^{q-2}) \sum_{|\alpha|=1} \xi_\alpha \xi'_\alpha + \mu_1^q. \end{aligned} \quad (2.19.1)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\sum_{|\alpha|=1} \xi_\alpha \xi'_\alpha \leq \left(\sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha|=1} |\xi'_\alpha|^2 \right)^{1/2} = \eta_1 \mu_1.$$

Отсюда и из (2.19.1) вытекает, что

$$S_1 \geq \eta_1^q - (\eta_1^{q-2} + \mu_1^{q-2}) \eta_1 \mu_1 + \mu_1^q = (\eta_1^{q-1} - \mu_1^{q-1})(\eta_1 - \mu_1). \quad (2.19.2)$$

Аналогично имеем

$$S_2 \geq (\eta_2^{p-1} - \mu_2^{p-1})(\eta_2 - \mu_2). \quad (2.19.3)$$

Ясно, что $S_1 \geq 0$ и $S_2 \geq 0$.

Далее, поскольку $\xi \neq \xi'$, существует n -мерный мультииндекс $\gamma \in \Lambda$ такой, что $\xi_\gamma \neq \xi'_\gamma$. Предположим, что $|\gamma| = 1$. Если $\eta_1 \neq \mu_1$, в силу (2.19.2) имеем $S_1 > 0$. Если же $\eta_1 = \mu_1$, то ввиду первого равенства в (2.19.1)

$$S_1 = \eta_1^{q-2} \sum_{|\alpha|=1} (\xi_\alpha - \xi'_\alpha)^2 \geq \eta_1^{q-2} (\xi_\gamma - \xi'_\gamma)^2 > 0.$$

Таким образом, если $|\gamma| = 1$, то $S_1 > 0$. Аналогично, учитывая (2.19.3), устанавливаем, что если $|\gamma| = 2$, то $S_2 > 0$.

Теперь можно заключить, что в любом случае $S_1 + S_2 > 0$. Значит, справедливо неравенство (2.1.5).

Пример 2.19.3. Предположим, что $p = 2$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\sigma_\alpha > 0$. Пусть

$$c_1 = \max \left\{ n^q, \left(\max_{|\alpha|=2} \sigma_\alpha \right)^2 \right\}, \quad c_2 = \min \left\{ 1, \min_{|\alpha|=2} \sigma_\alpha \right\},$$

$g_1 = 0$ на Ω и $g_2 = 0$ на Ω . Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ таким же образом, как и

в примере 2.19.2. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, функция A_α определена на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,2}$ следующим образом:

$$A_\alpha(x, \xi) = \sigma_\alpha \xi_\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n,2}.$$

Очевидно, что для любого $\alpha \in \Lambda$ функция A_α удовлетворяет условиям Каратеодори. Кроме того, легко видеть, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства (2.1.3) и (2.1.4). Наконец, аналогично изложенному в примере 2.19.2 устанавливаем, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (2.1.5).

В рамках рассматриваемого примера заметим еще, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= 1, \text{ если существует } i \in \{1, \dots, n\} \text{ такое, что } \alpha_i = 2, \\ \sigma_\alpha &= 2, \text{ если не существует } i \in \{1, \dots, n\} \text{ такого, что } \alpha_i = 2, \end{aligned}$$

уравнение (2.1.6) переходит в уравнение

$$-\Delta_q u + \Delta^2 u = F(x, u),$$

где Δ_q – q -лапласиан, а Δ^2 – бигармонический оператор.

В заключение дадим простой пример выполнения условий относительно функции F изложенных в главе теорем существования и единственности решений задачи (2.1.6), (2.1.7).

Пример 2.19.4. Пусть $\mu, \nu \in L^1(\Omega)$, $\nu \geq 0$ на Ω , φ – непрерывная и неубывающая функция на $\mathbb{R}$, и пусть функция F определена на $\Omega \times \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(x, s) = \mu(x) - \nu(x)\varphi(s), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Ясно, что функция F удовлетворяет условиям Каратеодори. Кроме того, для любого $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$, а для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$. Значит, условия относительно функции F теорем 2.7.1 и 2.14.1 выполняются. При этом, очевидно, функция φ может иметь произвольный рост. Например, можно взять φ такую, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $\varphi(s) = |s|^\sigma \text{sign } s$, где $\sigma > 0$, или такую, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $\varphi(s) = e^s$. Наконец, заметим, что если $\mu \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$, $\nu_0 > 0$, $0 < \sigma \leq q^* - 1$, для любого $x \in \Omega$ имеем $\nu(x) \leq \nu_0$ и для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(s) = |s|^\sigma \text{sign } s$, то функция F удовлетворяет условиям теоремы 2.18.1.

ЧАСТЬ II

УСТРАНИМОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ

КВАЗИЛИНЕЙНЫХ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ

УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ГЛАВА 3

УСТРАНИМОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Введение

В данной главе изучается вопрос об устранимости особенностей решений квазилинейных эллиптических уравнений.

Пусть $n \geq 3$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующие модельные эллиптические уравнения

$$-\Delta_p u + gu|u|^{p-2} = f \quad \text{в } \Omega \setminus \{x_0\}, \quad p > 1, \quad (3.1.1)$$

$$-\Delta_p u + u|u|^{q-1} = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{x_0\}, \quad q > p - 1. \quad (3.1.2)$$

Для гармонических функций точное условие устранимости изолированных особенностей хорошо известно. Это условие формулируется в виде

$$u(x) = \begin{cases} o(|x - x_0|^{2-n}) & \text{при } x \rightarrow x_0, \quad n > 2, \\ \left(\ln \frac{1}{|x - x_0|} \right) & \text{при } x \rightarrow x_0, \quad n = 2. \end{cases}$$

Вопрос об устранимости особенностей для общих уравнений вида (3.1.1) был изучен Серриным [112, 113] при $g, f \in L^q(\Omega)$, $q > n/p$. Им было получено следующее достаточное условие устранимости изолированной особенности

$$u(x) = \begin{cases} O\left(|x - x_0|^{-\frac{n-p}{p-1} + \varepsilon}\right), & 1 < p < n, \quad \varepsilon > 0, \\ O\left(\ln^{1-\varepsilon} \frac{1}{|x - x_0|}\right), & p = n, \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Для уравнения $-\Delta u + u^q = 0$, Брезис и Верон [32] доказали, что при $q \geq n/(n-2)$ изолированная особенность всегда устранима.

Многими авторами изучался вопрос об устранимости изолированных особенностей для эллиптических уравнений вида (3.1.1) и (3.1.2), (см., например, [12, 32, 46, 47, 62, 128, 132–134]). Большинство из них рассматривали уравнения специального вида. Обзор этих результатов может быть найден в монографии Верона [134].

В работах [99, 119, 120] были получены точные условия устранимости особенностей для общих уравнений вида (3.1.1) и (3.1.2). Изложение результатов этих работ составляет существенную часть содержания данной главы.

Доказательство основано на новых априорных оценках решений с особенностью. Метод получения подобных оценок был разработан в [123].

Дадим более подробное описание структуры главы. В разделе 3.2 излагаются результаты статьи [99] и доказывается точное условие устранимости изолированной особенности для решений общих квазилинейных эллиптических уравнений вида (3.1.1). В разделе 3.3 представлены результаты работы [119] и доказывается точное условие устранимости особенности на многообразии для решений общих квазилинейных эллиптических уравнений вида (3.1.1). Наконец, в разделе 3.4, изложены результаты работы [120] и доказывается точное условие устранимости особенности для решений общих квазилинейных эллиптических уравнений вида (3.1.2).

3.2. Устранимость изолированных особенностей

3.2.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $1 < p \leq n$. Пусть $x_0 \in \Omega$. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega \setminus \{x_0\}. \quad (3.2.1)$$

Предполагаем, что функции $a_i(x, u, \xi)$, $i = 0, \dots, n$, определены при $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяют условиям Каратеодори и с некоторыми положительными постоянными c_1, c_2 справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_i \geq c_1 |\xi|^p - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \quad (3.2.2)$$

$$|a_i(x, u, \xi)| \leq c_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.3)$$

$$|a_0(x, u, \xi)| \leq h(x) |\xi|^{p-1} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x), \quad (3.2.4)$$

где $h(x)$, $g_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, неотрицательные функции, такие, что

$$h^p(x) \in L^{n/(p-\delta)}(\Omega), \quad f_i(x), g_i(x) \in L^{p_i}(\Omega), \quad (3.2.5)$$

$p_1 = p_3 = n/(p - \delta)$, $p_2 = n/(p - 1)$ при $p < n$; $p_2 = n/(n - 1 - \delta)$ при $p = n$ с $\delta \in (0, 1/2 \min(p - 1, 1))$.

Пусть $\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t) = 0$ при $t \leq 1$, $\psi(t) = 1$ при $t \geq 2$, $-2 \leq d\psi/dt \leq 0$ при $t \in [1, 2]$.

Определим функцию $\psi_r(x) = \psi(|x - x_0|/r)$, $r > 0$. Говорим, что $u(x)$ является решением уравнения (3.2.1) в $\Omega \setminus \{x_0\}$, если $u(x)\psi_r(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ для любого $r > 0$ и справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi \psi_r] dx - \int_{\Omega} a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \psi_r dx = 0 \quad (3.2.6)$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$.

Пусть R_0 произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < R_0 < \min\{\text{dist}(\{x_0\}, \partial\Omega), 1\}$. Обозначим для $0 < r \leq R_0$

$$M(r) = \max\{|u(x)| : r \leq |x - x_0| \leq R_0\}, \quad (3.2.7)$$

отметим, что $M(r) < \infty$ (см., например, [88]).

Определение 3.2.1. Говорим, что решение $u(x)$ имеет устранимую особенность в точке x_0 , если $u(x)$ может быть определено в x_0 так, чтобы полученная функция $\tilde{u}(x)$ являлась решением уравнения (3.2.1) во всей области Ω и $\tilde{u}(x) \in W^{1,p}(\Omega)$.

Основными результатами данного раздела являются следующие теоремы.

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены условия (3.2.2)–(3.2.5) и $u(x)$ – решение уравнения (3.2.1) в $\Omega \setminus \{x_0\}$. Предположим, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) r^{(n-p)/(p-1)} = 0, \quad \text{если } p < n, \quad (3.2.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) |\ln r|^{-1} = 0, \quad \text{если } p = n. \quad (3.2.9)$$

Тогда сингулярность в точке x_0 устранима, причем функция $r^{(n-p)/(p-1)}$ является наилучшей для устранимости особенности в точке x_0 при $1 < p < n$, а функция $|\ln r|^{-1}$ является наилучшей для устранимости особенности в точке x_0 при $p = n$.

Теорема 3.2.1 является следствием результатов Серрина [113] и теоремы 3.2.2.

Теорема 3.2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_1 , a , зависящие лишь от n, p и норм $\|h^p\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)}$, $\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$, $\|g_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$ такие, что справедливы неравенства

$$M(\rho) \leq K_1 \left(M(r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{(n-p)/(p-1)} + \rho^{a-(n-p)/(p-1)} \right), \quad \text{если } p < n, \quad (3.2.10)$$

$$M(\rho) \leq K_1 \left(M(r) \frac{\ln \rho}{\ln r} + \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{1-a} \right), \quad \text{если } p = n, \quad (3.2.11)$$

для любых $0 < r < \rho < R_0$.

3.2.2. Интегральные оценки решений в случае $1 < p < n$. Полагаем в дальнейшем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty, \quad (3.2.12)$$

так как в противном случае, теорема 3.2.1 является следствием результатов Серрина [36].

Через γ в дальнейшем обозначаем всевозможные постоянные, зависящие лишь от n, p и норм $\|h^p\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)}$, $\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$, $\|g_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$.

Зафиксируем число $R_1 \in (0, R_0)$ такое, что $M(R_1) \geq 1$.

Пусть $B(x_0, R) = \{|x - x_0| < R\}$, $u_R(x) = \max\{u(x) - M(R), 0\}$, $E(R) = \{x \in B(x_0, R) \setminus \{x_0\} : u(x) > M(R)\}$.

Лемма 3.2.1. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.1. Тогда

$$\int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \leq \gamma \{M^p(r) r^{n-p} + M^p(R)\}, \quad (3.2.13)$$

при $0 < r < R < R_1$.

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (3.2.6) функцию

$$\varphi(x) = u_R(x) \psi_r^{p-1}(x).$$

Используя неравенства (3.2.2)–(3.2.4), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \\
& \leq \gamma \int_{E(R)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx + \gamma M^p(R) \int_{E(R)} [g_1(x) + g_2(x)] \psi_r^p(x) dx \\
& + \gamma \int_{K(r)} |u(x)|^p \left[\left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x} \right|^p + g_2(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x} \right| \right] dx + \gamma \int_{E(R)} F(x) dx, \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

где $K(r) = \{r < |x - x_0| < 2r\}$, $H(x) = h^p(x) + g_1(x) + g_3(x) + f_3(x)$, $F(x) = f_1(x) + f_2^{p/(p-1)}(x) + f_3(x)$.

Оценим слагаемые правой части (3.2.14). Используя условия (3.2.5), неравенство Гельдера и теорему вложения, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E(R)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx \\
& \leq \int_{E(R) \setminus K(r)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx + \int_{K(r)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx \\
& \leq \gamma \|H\|_{L^{\frac{n}{p-\delta}}(\Omega)} \left[R^\delta \int_{E(R) \setminus K(r)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx + M^p(r) r^{n-p+\delta} \right], \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

$$\int_{K(r)} |u(x)|^p \left[\left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x} \right|^p + g_2(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x} \right| \right] dx \leq \gamma M^p(r) r^{n-p}. \quad (3.2.16)$$

Оценим второе и четвертое слагаемые в правой части (3.2.14), используя (3.2.5) и затем выбирая R_1 из условия

$$\gamma \|H\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} R_1^\delta = 1/2, \quad (3.2.17)$$

из (3.2.14)–(3.2.17) получим (3.2.13). $\square$

Пусть

$$0 < r < \rho < R_1, \quad M(\rho) > \max \left\{ 2M(R), M\left(R/2\right) \right\}, \quad (3.2.18)$$

и определим

$$E(\rho, R) = \{x \in \Omega : 0 < u_R(x) < M(\rho) - M(R)\}. \quad (3.2.19)$$

Лемма 3.1.2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.2.1. Тогда для всех r , ρ , и R , удовлетворяющих (3.2.18), справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx &\leq \gamma [M(\rho) - M(R)] \left\{ M^{p-1}(r) r^{n-p} \right. \\ &\quad \left. + \int_{E(\rho)} \left[h(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_3(x) u^{p-1}(x) \right] \psi_r^p(x) dx \right\} + \gamma M^p(R). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (3.2.6) функцию

$$\varphi(x) = \min\{u_R(x), M(\rho) - M(R)\} \psi_r^{p-1}(x).$$

Используя неравенства (3.2.2)–(3.2.4), получим

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) &\leq \gamma \int_{E(\rho, R)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx \\ &\quad + \gamma [M(\rho) - M(R)] \int_{K(r) \cap E(R)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_2(x) u^{p-1} \right\} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{p-1} dx \\ &\quad + \gamma [M(\rho) - M(R)] \int_{E(\rho)} \left\{ h(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_3(x) u^{p-1} \right\} \psi_r^p(x) dx \\ &\quad + \gamma M^p(R) \int_{E(R)} F_1(x) dx, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

где $F_1(x) = g_1(x) + g_3(x) + f_1(x) + [f_2(x)]^{p/p-1} + f_3(x)$, а $H(x)$ определено в лемме 3.2.1.

Первое слагаемое правой части (3.2.21) оцениваем аналогично (3.2.15). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho, R)} H(x) u_R^p(x) \psi_r^p(x) dx \\ & \leq \gamma \|H\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} \left[R^\delta \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx + (M(\rho) - M(R)) r^{n-p+\delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Из леммы 3.2.1, используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_{K(r) \cap E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{p-1}(x) dx \\ & \leq \gamma \left(M^{p-1}(r) r^{n-p} + r^{(n-p)/p} M^{p-1}(R) \right). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Используя определение $M(r)$ и неравенство Гельдера, имеем

$$\int_{K(r) \cap E(R)} g_2(x) u^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x} \right| dx \leq \gamma M^{p-1}(r) r^{n-p}. \quad (3.2.24)$$

Выбирая теперь R_1 из условия

$$\gamma R_1^\delta \|H\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} = 1/4, \quad (3.2.25)$$

из (3.2.21)–(3.2.25), получим (3.2.20). $\square$

Лемма 3.2.3. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.2.1. Тогда*

$$\int_{E(\rho)} u_R^{-q} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \leq \gamma [M^{p-1}(r) r^{n-p} + \rho^\gamma M^{p-1}(R)], \quad (3.2.26)$$

где $q = 1 + \delta/(n-p)$, $0 < R < R_1$.

Доказательство. Подставив в интегральное тождество (3.2.6) функцию

$$\varphi(x) = \left\{ [M(\rho) - M(R)]^{1-q} - [\max(u_R(x), M(\rho) - M(R))]^{1-q} \right\} \psi_r^{p-1}(x),$$

имеем

$$\begin{aligned}
\int_{E(\rho)} u_R^{-q} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx &\leq \gamma \int_{E(\rho)} u_R^{-q}(x) [g_1(x) u^p + f_1(x)] \psi_r^p(x) dx \\
&+ \int_{K(r) \cap E(\rho)} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_2(x) u^{p-1}(x) + f_2(x) \right] \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{p-1}(x) dx \\
&+ \gamma \int_{E(\rho)} [u^{q(p-1)} h^p(x) + g_3(x) u^{p-1} + f_3(x)] \psi_r^p(x) dx. \quad (3.2.27)
\end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера и теорему вложения, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{E(\rho) \setminus K(r)} u_R^{-q}(x) g_1(x) u^p dx \\
&\leq \gamma \int_{E(\rho) \setminus K(r)} g_1(x) u_R^{-q}(x) [(u(x) - M(\rho))^p + M^p(\rho)] dx \\
&\leq \gamma \|g_1\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} \rho^\delta \left\{ \int_{E(\rho) \setminus K(r)} u_R^{-q}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx + M^{p-q}(\rho) \rho^{n-p} \right\}, \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

$$\int_{K(r)} u_R^{-q}(x) |u(x)|^p g_1(x) dx \leq \gamma \|g_1\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} M^{p-q}(r) r^{n-p+\delta}. \quad (3.2.29)$$

Используя условие (3.2.8), получим

$$\begin{aligned}
\int_{E(\rho)} u^{q(p-1)} h^p(x) \psi_r^p(x) dx &\leq \gamma \|h^p\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} \left(\int_{K(r, \rho) \cap E(\rho)} |u|^{\frac{q(p-1)n}{n-p(1-\delta)}} dx \right)^{\frac{n-p(1-\delta)}{n}} \\
&\leq \gamma \left(\int_r^\rho [M(t)]^{\frac{q(p-1)n}{n-p(1-\delta)}} t^{n-1} dt \right)^{\frac{n-p(1-\delta)}{n}} \\
&\leq \gamma \left(\int_r^\rho t^{n-1-\frac{qn(n-p)}{n-p(1-\delta)}} dt \right)^{\frac{n-p(1-\delta)}{n}} \leq \gamma \rho^{\delta(p-1)}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_{E(\rho)} g_3(x) u^{p-1} \psi_r^p(x) dx \leq \gamma \rho^\delta, \quad (3.2.30)$$

и кроме того, используя (3.2.5), имеем

$$\int_{E(\rho)} [f_1(x) + f_3(x)] dx \leq \gamma \rho^{n-p+\delta}, \quad (3.2.31)$$

$$\int_{K(r)} f_2(x) dx \leq \gamma r^{n-p+1}. \quad (3.2.32)$$

Выбирая R_1 из условия

$$\gamma \|g_1\|_{L^{n/(p-\delta)}(\Omega)} R_1^\delta = 1/4, \quad (3.2.33)$$

из (3.2.27)–(3.2.33) получим (3.2.26). $\square$

Лемма 3.2.4. *Справедлива оценка*

$$\int_{E(\rho, R_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \leq \gamma \{ (M(\rho) - M(R_1)) [M^{p-1}(r) r^{n-p} + \rho^\gamma] + 1 \}. \quad (3.2.34)$$

Неравенство (3.2.34) является следствием лемм 3.2.2 и 3.2.3.

3.2.3. Поточечные оценки решений в случае $1 < p < n$. Определим числовые последовательности $\rho_i^{(1)} = \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-i})$ и $\rho_i^{(2)} = |x_i - x_0|$, $d_i = \frac{\rho}{8 \cdot 2^i}$, если $\rho_i^{(2)} \leq 2\rho$, $d_i = \frac{\rho_i^{(2)}}{4}$, если $\rho_i^{(2)} > 2\rho$, $i = 1, 2, \dots$, где x_i некоторые точки, удовлетворяющие условию

$$\rho_i^{(1)} \leq |x_i - x_0| \leq \frac{R_1}{2}, \quad |u(x_i)| = M(\rho_i^{(1)}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2.35)$$

и множества

$$G_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho_{i+1}^{(1)} \leq |x - x_0| \leq 2\rho_i^{(2)} - \rho_{i+1}^{(1)} \right\}.$$

Используя итерационный метод Мозера (см., например, [123], гл. 8), получим

$$[M(\rho_i^{(1)}) - M(R)]^p \leq \gamma d_i^{-n} \int_{G_i} [u_R(x) + 1]^p dx. \quad (3.2.36)$$

В силу неравенства Пуанкаре имеем

$$\int_{G_i} u_R^p(x) dx \leq \gamma [\rho_i^{(2)}]^p \int_{D_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx, \quad (3.2.37)$$

где $D_i = E(R) \cap \{\rho_{i+1}^{(1)} \leq |x - x_0| \leq R\}$.

Заметим, что

$$u_R(x) \leq M(\rho_{i+1}^{(1)}) - M(R) \quad \text{при } x \in D_i.$$

Поэтому, в силу леммы 3.2.4, получим

$$\int_{D_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx \leq \gamma \left\{ \left[M(\rho_{i+1}^{(1)}) - M(R) \right] [M^{p-1}(r)r^{n-p} + \rho^\gamma] + 1 \right\}. \quad (3.2.38)$$

Из (3.2.36)–(3.2.38) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \left[M(\rho_i^{(1)}) - M(R) \right]^p \\ & \leq \gamma 2^{(n-p)i} \rho^{n-p} \left\{ 1 + \left[M(\rho_{i+1}^{(1)}) - M(R) \right] [M^{p-1}(r)r^{n-p} + \rho^\gamma] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Если для некоторого $i = i_0 \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left[M(\rho_{i_0+1}^{(1)}) - M(R) \right] [M^{p-1}(r)r^{n-p} + \rho^\gamma] \leq 1, \quad (3.2.40)$$

то в силу того, что $M(\rho)$ невозрастающая функция по ρ , получим из (3.2.39) и (3.2.40), что

$$M(\rho) \leq M(\rho^{(1)}) \leq \gamma \rho^{(p-n)/p}. \quad (3.2.41)$$

Если же для всех $i > 1$ выполнено неравенство, обратное к (3.2.40), то из (3.2.39), получим

$$\begin{aligned} & M(\rho_i^{(1)}) - M(R) \\ & \leq \gamma 2^{(n-p)i} \rho^{n-p} \left[M(\rho_{i+1}^{(1)}) - M(R) \right] [M^{p-1}(r)r^{n-p} + \rho^\gamma], \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

итерирруя неравенство (3.2.42), получим

$$M(\rho_1^{(1)}) \leq M(R) + \gamma \left[M(r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{(n-p)/(p-1)} + \rho^{\gamma-(n-p)/(p-1)} \right]. \quad (3.2.43)$$

В обоих случаях мы получим требуемое неравенство (3.2.10).

В случае $p = n$ теорема 3.2.2 доказывается аналогичным образом.

3.3. Устранимость особенностей решений эллиптических уравнений на многообразиях

3.3.1. Формулировка предположений и основных результатов. Пусть Γ -многообразие класса C^1 без границы размерности s , содержащиеся в Ω .

Говорим, что $u(x)$ – решение уравнения (3.2.1) в $\Omega \setminus \Gamma$, если для произвольной функции $\psi(x) \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$, равной нулю вблизи Γ , имеет место включение $u(x)\psi(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ и выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi \psi] dx + \int_{\Omega} a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \psi dx = 0 \quad (3.3.1)$$

для любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$.

Положим $r_0 = \min\{d(\Gamma, \partial\Omega), 1\}$, где $d(\Gamma, \partial\Omega)$ – расстояние между Γ и $\partial\Omega$. Определим для $r \in (0, r_0]$

$$M(r) = \max\{|u(x)| : r \leq d(x, \Gamma) \leq r_0\}. \quad (3.3.2)$$

Определение 3.3.1. Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (3.2.1) имеет устранимую особенность на многообразии Γ , если $u(x)$ можно продолжить на Γ таким образом, чтобы полученное продолжение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ удовлетворяло уравнению (3.2.1) в Ω и $\tilde{u}(x) \in W^{1,p}(\Omega)$.

Основными результатами раздела являются следующие теоремы.

Теорема 3.3.1. Пусть при $1 < p < n - s$ и $1 \leq s \leq n - 2$ выполнены условия (3.2.2)–(3.2.5), и пусть $u(x)$ – решение уравнения (3.2.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим также, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) r^{(n-p-s)/(p-1)} = 0. \quad (3.3.3)$$

Тогда особенность $u(x)$ на Γ устранима, причем функция $r^{(n-p-s)/(p-1)}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ .

Теорема 3.3.2. Пусть при $p = n - s$ и $1 \leq s \leq n - 2$ выполнены условия (3.2.2)–(3.2.5), и пусть $u(x)$ – решение уравнения (3.2.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) |\ln r|^{-1} = 0. \quad (3.3.4)$$

Тогда особенность на многообразии Γ устранима и функция $|\ln r|^{-1}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ .

Теорема 3.3.1 следует из результатов Серрина [113] и следующей поточечной оценки

$$M(\rho) \leq K \rho^{-(n-p-s)/(p-1)} \left\{ [\tilde{\kappa}(r)]^{\lambda/(p+\lambda-1)} [M^{p-1}(r) r^{n-s-p}]^{1/(p+\lambda-1)} + \tilde{\kappa}(r) [\rho^{\tau_1} + (r/\rho)^{\tau_2}] \right\}, \quad (3.3.5)$$

доказанной в дальнейшем для $0 < r < \tilde{\theta}\rho \leq r_0$ с некоторыми положительными постоянными $K, \lambda, \tilde{\theta}, \tau_1, \tau_2$ и функцией

$$\tilde{\kappa}(r) = \max\{M(t)t^{(n-s-p)/(p-1)} : r \leq t \leq r_0\}. \quad (3.3.6)$$

3.3.2. Интегральные оценки градиента решения в случае $1 < p < n - s$. Зафиксируем покрытие многообразия Γ локальными окрестностями $U^{(i)}$, $i = 1, \dots, I$, так, чтобы в локальных координатах $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$, соответствующих окрестности $U^{(i)}$, выполнялось включение

$$\Gamma \cap C^{(i)}(R_0, H_0) \subset \{y_1^{(i)} = \dots = y_{n-s}^{(i)} = 0\},$$

где $C^{(i)}(R_0, H_0) = \{y^{(i)} : |[y^{(i)}]'| \leq R_0, |[y^{(i)}]''| \leq H_0\}$, $[y^{(i)}]' = (y_1^{(i)}, \dots, y_{n-s}^{(i)})$, $[y^{(i)}]'' = (y_{n-s+1}^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$. Можем предполагать, что R_0, H_0 не зависят от i и таковы, что

$$C^{(i)}(R_0, H_0) \subset \Omega, \quad \bigcup_{i=1}^I C^{(i)}(R_0, H_0/2) \supset \Gamma.$$

Для решения $u(x)$ уравнения (3.3.1), записанного в виде $u^{(i)}(y^{(i)})$ в координатах $y^{(i)}$, определим

$$m^{(i)}(r) = \max \left\{ |u^{(i)}(y^{(i)})| : y^{(i)} \in \overline{C^{(i)}(R_0, H_0/2)} \setminus C^{(i)}(r, H_0/2) \right\}$$

и положим

$$m(r) = \max\{m^{(i)}(r), i = 1, \dots, I\}. \quad (3.3.7)$$

Дальнейшие рассмотрения будут вестись в локальных координатах. Для простоты обозначений индекс i будем опускать. Тем самым достаточно ограничиться рассмотрением случая

$$C(R_0, H_0) \cap \Gamma \subset \{x_1 = \dots = x_{n-s} = 0\}, \quad (3.3.8)$$

где $C(R_0, H_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < R_0, |x''| < H_0\}$ и $x' = (x_1, \dots, x_{n-s})$, $x'' = (x_{n-s+1}, \dots, x_n)$. Можем также предполагать, что при $0 < r \leq R_0$ справедливо неравенство

$$\max\{|u(x)| : x \in \overline{C(R_0, H_0)} \setminus C(r, H_0)\} \leq m(C_0 r) \quad (3.3.9)$$

с некоторой фиксированной постоянной C_0 и функцией $m(r)$, определенной равенством (3.3.7)

Положим при $0 < r \leq R_0$

$$E(r) = \{x \in C(R_0, H_0) : u(x) > m(r)\} \quad (3.3.10)$$

и заметим, что (3.3.9) влечет включение $E(r) \subset C(r/C_0, H_0)$. Определим функцию

$$u_r(x) = \max\{u(x) - m(r); 0\}, \quad x \in C(R_0, H_0) \setminus \Gamma. \quad (3.3.11)$$

Зафиксируем некоторую функцию $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 0 \quad \text{при} \quad t \leq 1, \quad \tau(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geq 2, \\ 0 &\leq \frac{d\tau(t)}{dt} \leq 2 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Определим при $r > 0$, $h > 0$ следующие функции

$$\psi_r(x) = \tau(|x'|/r), \quad \chi_h(x) = 1 - \tau(|(x'' - \xi'')/h|), \quad (3.3.12)$$

где $\xi'' = (\xi_{N-s+1}, \dots, \xi_N)$ — некоторая фиксированная точка, такая, что $|\xi''| \leq H/2$. Определим также при $0 < t \leq R_0$ функцию $\kappa(t)$ равенством

$$\kappa^{p-1}(t) = \max [m^{p-1}(r)r^{n-p-s} : t \leq r \leq R_0]. \quad (3.3.13)$$

Ограниченность функции $\kappa(t)$ следует из условия (3.3.3), которое в дальнейшем предполагается выполненным.

Лемма 3.3.1. Пусть выполнены все условия теоремы 3.3.1. Тогда существуют положительные постоянные K_1 , R_1 , зависящие только от известных параметров, такие, что при

$$0 < r < \rho \leq R_1, \quad 0 < h \leq H_0/2, \quad \rho \leq h, \quad (3.3.14)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx &\leq K_1 \left\{ m^p(C_0 r) r^{n-p-s} \right. \\ &\quad \left. + m^p(\rho) [\rho^{n-s} h^s]^{(n-p+1)/n} + \left[\frac{\rho}{h} \right]^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \right\} \quad (3.3.15) \end{aligned}$$

с функциями $\psi_r(x)$, $\chi_h(x)$, определенными равенствами (3.3.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Серрина [113] об устранимости особенности при выполнении условия (3.3.3) нужно доказывать теорему 3.3.1 только в случае, если $m(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому можем подчинить R_1 условиям:

$$R_1 \leq R_0, \quad m(R_1) \geq 1. \quad (3.3.16)$$

Подставим в интегральное тождество (3.3.1) следующие функции:

$$\varphi(x) = u_\rho(x)\psi_r^p(x)\chi_h^p(x), \quad \psi(x) = \psi_{r/2}(x)\chi_{2h}(x),$$

предполагая, что $0 < r < \rho < R_0/2$, $0 < h \leq H_0/2$. Используя условия (3.2.2)–(3.2.5) и неравенство Юнга, получим оценку

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq \gamma \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (3.3.17)$$

где

$$I_1 = \int_{E(\rho)} h_1(x) u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_2 = \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_3 = \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx,$$

$$I_4 = \int_{E(\rho) \cap K'(r)} u^p(x) [f_2(x) + g_2(x)]^{p/(p-1)} \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_5 = m^p(\rho) \int_{E(\rho)} h_2(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx,$$

$$h_1(x) = f_1(x) + g_1(x) + [f_2(x) + g_2(x)]^{p/(p-1)} + f_3(x) + g_3(x) + h^p(x),$$

$$h_2(x) = f_1(x) + g_1(x) + [f_2(x) + g_2(x)]^{p/(p-1)} + f_3(x) + g_3(x),$$

$$K'(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x'| \leq 2r\}.$$

Далее будем оценивать слагаемые в правой части (3.3.17). Используя условия (3.2.2)–(3.2.4), неравенство Гельдера и теорему вложения, получаем

$$I_1 \leq \gamma [\text{mes } E(\rho)]^{\delta/n} \left\{ \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx + m^p(C_0 r) r^{n-p-s} h^s + I_3 \right\}. \quad (3.3.18)$$

Непосредственно из определения $m(r)$ следует оценка

$$I_2 \leq \gamma m^p(C_0 r) r^{n-p-s} h^s. \quad (3.3.19)$$

Интеграл I_3 представим в виде

$$I_3 = \int_{E(\rho) \cap K'(r)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx + \int_{E(\rho) \setminus K'(r)} u_\rho^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx. \quad (3.3.20)$$

Оценивая в первом интеграле в (3.3.21) $u_\rho(x)$ через $m(C_0 r)$ и оценивая второй интеграл по неравенству Пуанкаре (по переменной x'), получаем

$$I_3 \leq \gamma \left\{ m^p(C_0 r) r^{n-s} h^{s-p} + \left(\frac{\rho}{h} \right)^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \right\}. \quad (3.3.21)$$

Интеграл I_4 оценим, мажорируя $u_\rho(x)$ через $m(C_0 r)$ и применяя неравенство Гельдера. В результате имеем следующее неравенство

$$I_4 \leq \gamma m^p(C_0 r) [r^{n-s} h^s]^{(n-p+\delta)/n}. \quad (3.3.22)$$

Наконец, используя неравенства Гельдера имеем

$$I_5 \leq \gamma m^p(\rho) [\rho^{n-s} h^s]^{(n-p+\delta)/n}. \quad (3.3.23)$$

Подчиним, в дополнение к (3.3.16), R_1 условию

$$\gamma [\text{mes } C(R_1/C_0, H_0)]^{\delta/n} < 1/2. \quad (3.3.24)$$

Пользуясь тем, что при $\rho \geq R_1$ имеет место включение $E(\rho) \subset C(R_1/C_0, H_0)$, получаем из (3.3.17)–(3.3.24) оценку (3.3.15), что и заканчивает доказательство леммы 3.3.1. $\square$

Нам понадобится глобальный аналог оценок (3.3.15). Можно построить функцию $\tilde{d} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 такую, что для $x \in \bar{\Omega}$ справедливо неравенство

$$k_1 d(x, \Gamma) \leq \tilde{d}(x) \leq k_2 d(x, \Gamma) \quad (3.3.26)$$

с неотрицательными постоянными k_1, k_2 , которые тоже будем включать в множество известных параметров. При этом можем подчинить функцию $\tilde{d}$ условию $\tilde{d}(x) = |x'|$ при $x \in C(R_0, H_0)$.

Определим

$$\tilde{C}(r) = \{x \in \bar{\Omega} : \tilde{d}(x) < r\},$$

$$\tilde{m}(r) = \max\{|u(x)| : x \in \bar{\Omega} \setminus \tilde{C}(r)\},$$

$$\tilde{u}_r(x) = \max\{u(x) - \tilde{m}(r), 0\}, \quad \tilde{\psi}_r(x) = \tau(\tilde{d}(x)/r), \quad (3.3.27)$$

$$\tilde{E}(r) = \{x \in \bar{\Omega} : u(x) > \tilde{m}(r)\}, \quad (3.3.28)$$

где τ – функция, используемая в равенствах (3.3.12).

Подставляя в (3.3.1) функции

$$\varphi(x) = \tilde{u}_p(x) \tilde{\psi}_r^{p-1}(x), \quad \psi(x) = \tilde{\psi}_r(x)$$

и оценивая возникающие интегралы подобно изложенному в доказательстве леммы 3.3.1, получаем следующий результат.

Лемма 3.3.2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.3.1. Тогда существуют положительные постоянные K_2 и R_2 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при $0 < \tilde{r} < \tilde{\rho} < R_2$ справедливо неравенство*

$$\int_{\tilde{E}(\tilde{\rho})} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \tilde{\psi}_r^p(x) dx \leq K_2 \left\{ \tilde{m}^p(\tilde{r}) \tilde{r}^{n-p-s} + \tilde{m}^p(\tilde{\rho}) \tilde{\rho}^{\frac{(n-s)(n-p+\delta)}{n}} \right\}. \quad (3.3.28)$$

Заметим, что с некоторыми положительными постоянными k_3, k_4 при $0 < r \leq R_0$ справедливо неравенство

$$\tilde{m}(k_3 r) \leq m(r) \leq \tilde{m}(k_4 r). \quad (3.3.29)$$

Лемма 3.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1. Тогда существуют положительные постоянные K_3, R_3 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при*

$$0 < r < \rho \leq R_3, \quad 0 < h \leq H_0/2, \quad \rho \leq \gamma_1 h \quad (3.3.30)$$

справедлива оценка

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p dx \leq K_3 \left\{ m^p(C_0 r) r^{n-p-s} h^s + m^p(\rho) [\rho^{n-s} h^s]^{(n-p+\delta)/n} \right\}. \quad (3.3.31)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (3.3.28) с $\tilde{r} = k_3$, $\tilde{\rho} = k_3 \rho$ и (3.3.29) при $0 < r < \rho \leq R_2/k_3$ следует оценка

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{H_0/2}^p(x) dx \leq \gamma \left\{ m^p(C_0 r) r^{n-p-s} h^s + m^p(\rho) \rho^{\frac{(n-s)(n-p+\delta)}{n}} \right\}. \quad (3.3.32)$$

и, тем самым, неравенство (3.3.31) справедливо при $h = H_0/2$ с постоянной $K_3(H_0)$, зависящей от H_0 .

Далее доказываем (3.3.31) индукцией по j для $h = h_j = H_0/2^j$. Предположим, что неравенство (3.3.31) справедливо при некотором $j \geq 1$ с постоянной $K_3(h_j)$ и установим это неравенство для $j+1$. Из (3.3.15) с $h = h_{j+1}$ и (3.3.31) с $h = h_j$ получаем оценку

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{h_{j+1}}^p(x) dx \leq 2^s K_1 \left(1 + \left[\frac{\rho}{h_{j+1}} \right]^p K_3(h_j) \right) \times \left\{ m^p(C_0 r) r^{n-p-s} h_{j+1}^s + m^p(\rho) [\rho^{n-s} h_{j+1}^s]^{(n-p+\delta)/n} \right\}. \quad (3.3.33)$$

Таким образом, получаем неравенство вида (3.3.31) для $h = h_{j+1}$ с

$$K_3(h_{j+1}) = 2^s K_1 \left(1 + \left[\frac{\rho}{h_{j+1}} \right]^p K_3(h_j) \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.3.34)$$

Для завершения доказательства леммы 3.3.3 достаточно проверить, что выбором числа γ_1 можно обеспечить оценку $K_3(h_j) \leq \gamma$ для $j = 1, 2, \dots, J$, где J определяется условием

$$\gamma_1 \frac{H_0}{2^J} < \rho \leq \gamma_1 \frac{H_0}{2^{J-1}}.$$

Из (3.3.34) немедленно получаем, что требуемая равномерная оценка $K_3(h_j)$ будет выполнена при γ_1 , определяемом из условия

$$2^s K_1 \gamma_1^p = 1/2. \quad (3.3.35)$$

Таким образом, устанавливаем оценку (3.3.31) при полученном значении γ_1 и $R_3 = \min(R_1, R_2/K_3)$. $\square$

Определим при $0 < \rho' < \rho \leq R_0/2$ множество

$$E(\rho', \rho) = \{x \in E(\rho) : u(x) < m(\rho')\} \quad (3.3.36)$$

и при $\rho > 0$ функцию

$$u^{(\rho)}(x) = \min\{u(x), m(\rho)\}, \quad x \in C(R_0, H_0). \quad (3.3.37)$$

Лемма 3.3.4. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.3.1, и пусть $\theta \in (0, 1/2]$ и $\lambda \in (0, 1)$ – некоторые числа, зависящие лишь от известных параметров. Тогда существуют положительные постоянные K_4 и R_4 , зависящие только от известных параметров, такие, что при $\rho \geq R_4$*

$$0 < r < \theta\rho/2 < \rho' \leq \theta\rho, \quad \rho \leq h \quad (3.3.38)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ & \leq K_4 \{J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + R^{(1)}(C_0 r, \rho', h)\}, \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)]^{\frac{p}{p-1}} \\ &\times \int_{E(\rho')} [u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho)]^{-\frac{p}{p-1}} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ J^{(2)} &= \frac{1}{h^p} \int_{E(\rho)} [u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho)]^p [u(x)]^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx, \\ J^{(3)} &= \int_{E(\rho')} [u(x)]^{p+\lambda-1} h_1(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ R^{(1)}(r, \rho, h) &= m^\lambda(\rho) m^{p-1}(r) r^{n-p-s} h^s \\ &+ m^{p+\lambda-1}(\rho) \left\{ [\rho^{n-s} h^s]^{\frac{n-p+\delta}{n}} + \left[r^{\frac{1}{p}} \rho^{\frac{p-1}{p}} \right]^{n-s-p} h^s \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (3.3.1) функции $\psi(x) = \psi_{\frac{r}{2}}(x)\chi_{2h}(x)$ и

$$\varphi(x) = \max \{ [u^{\rho'}(x)]^\lambda - m^\lambda(\rho), 0 \} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) [1 - \psi_p(x)]$$

в предположении, что выполнено условие (3.3.38) и $2\rho \leq \min(R_1, R_2)$.

Используя условия (3.2.2)–(3.2.5) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq \gamma \sum_{i=6}^{11} I_i, \quad (3.3.41)$$

где

$$I_6 = \int_{E(\rho', \rho)} h_1(x) u^{p+\lambda-1}(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_7 = \int_{E(\rho', \rho)} u^{p+\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_8 = \int_{E(\rho', \rho)} [u^{p+\lambda-1}(x) - m^\lambda(\rho)]^p [u(x)]^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx,$$

$$I_9 = [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)] \int_{E(\rho')} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left[\left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right| \chi_h^{p-1}(x) + h(x) \chi_h^p(x) \right] \psi_r^p(x) dx,$$

$$I_{10} = [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)] \int_{E(\rho')} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + (f_2 + g_2) u^{p-1} \right] \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{p-1}(x) \chi_h^p(x) dx,$$

$$I_{11} = [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)] \int_{E(\rho')} u^{p-1}(x) \left[(f_2 + g_2) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right| \chi_h^{p-1}(x) \right.$$

$$\left. + (f_3 + g_3) \chi_h^p(x) \right] \psi_r^p(x) dx.$$

Будем оценивать слагаемые в первой части (3.3.41). Используя усло-

вия (3.2.2)–(3.2.5), неравенство Гельдера и теорему вложения, получаем

$$\begin{aligned} I_6 &\leq \gamma \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) [u_\rho^p + m^p(\rho)] h_1(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ &\leq \gamma [\rho^{n-s} h^s]^{\delta/n} \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ F^{(1)}(u) \psi_r(x) \chi_h(x) \} \right|^p dx \\ &\quad + \gamma [\rho^{n-s} h^s]^{(n-p+\delta)/n} [m(\rho)]^{p+\lambda-1}, \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

где

$$F^{(1)}(u(x)) = [u^{(\rho')}(x)]^{(\lambda-1)/p} [u^{(\rho')}(x) - m(\rho)]_+. \quad (3.2.43)$$

Далее, интеграл в правой части (3.3.42) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ F^{(1)}(u) \psi_r(x) \chi_h(x) \} \right|^p dx \\ &\leq \gamma \left\{ [m(\rho')]^{p+\lambda-1} [\rho^{n-s} h^{s-p} + r^{n-s-p} h^s] \right. \\ &\quad \left. + \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Оценка I_7 получается непосредственно из определения множества $E(\rho', \rho)$:

$$I_7 \leq \gamma [m(\rho')]^{p+\lambda-1} r^{n-s-p} h^s. \quad (3.3.45)$$

Следующая оценка получается применением неравенства Юнга

$$I_8 + I_{11} \leq \gamma (J^{(2)} + J^{(3)}), \quad (3.3.46)$$

где $J^{(2)}$ и $J^{(3)}$ – те же, что и в (3.3.39)

Также применением неравенства Юнга оцениваем I_9 и получаем

$$I_9 \leq \gamma (J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)}). \quad (3.3.47)$$

Наконец, оценим I_{10} , используя условие (3.2.2)–(3.2.5), неравенство

Гельдера и лемму 3.3.3. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
I_{10} &\leq \gamma [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)] \left\{ \left[\int_{E(\rho')} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \right]^{\frac{p-1}{p}} [r^{n-s-p} h^s]^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^{p-1}(C_0 r)}{r} \cdot [r^{n-s} h^s]^{\frac{n-p+1+\delta}{n}} \right\} \leq \gamma [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)] \\
&\quad \times \left\{ m^{p-1}(C_0 r) r^{n-s-p} h^s + m^{p-1}(\rho') r^{\frac{n-s-p}{p}} \rho^{(n-s-p)\frac{p-1}{p}} h^s \right\}. \quad (3.3.48)
\end{aligned}$$

Выбирая R_4 достаточно малым, из неравенств (3.3.41), (3.3.43)–(3.3.48) получим оценку (3.3.39). $\square$

Дальнейшие оценки будем устанавливать в предположении, что для рассматриваемых значений ρ' и ρ выполнено условие

$$m(\rho') - m(\rho) > 0. \quad (3.3.49)$$

Лемма 3.3.5. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.3.4 и справедливо неравенство (3.3.49). Тогда существует положительная постоянная K_5 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
J^{(1)} &\leq K_5 \{ m^\lambda(\rho') [m^{p-1}(C_0 r) r^{n-s-p} h^s \\
&\quad + m^{p-1}(\rho') (r^{1/p} \rho^{(p-1)/p})^{n-s-p} h^s] + J^{(2)} + J^{(3)} \}, \quad (3.3.50)
\end{aligned}$$

где $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$ определены равенствами (3.3.40).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (3.3.1) функции $\psi(x) = \psi_{\frac{r}{2}}(x) \chi_{2h}(x)$,

$$\varphi(x) = \left\{ [m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)]^{-\frac{1}{p-1}} - [(u_{\rho'}(x) + m(\rho'))^\lambda - m^\lambda(\rho)]^{-\frac{1}{p-1}} \right\} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x).$$

Используя условия (3.3.2)–(3.3.5) и неравенства Юнга, получаем оценку

$$J^{(1)} \leq \gamma \{ J^{(2)} + J^{(3)} + I_{10} \}, \quad (3.3.51)$$

Теперь оценка (3.3.50) следует немедленно из неравенств (3.3.39) и (3.3.48). $\square$

Введем обозначение

$$F_\rho(u(x)) = [u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho)]^p [u(x)]^{(1-\lambda)(p-1)} \quad (3.3.52)$$

для $x \in E(\rho)$ и ρ и λ , удовлетворяющих условиям леммы 3.3.4.

Теорема 3.3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1 и предположим, что r, ρ, ρ', h и λ удовлетворяют условиям леммы 3.3.4. Тогда существует положительная постоянная K_6 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq K_6 \left\{ R^{(1)}(C_0 r, \rho', h) \right. \\ \left. + \int_{E(\rho)} F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) [h_1(x) \chi_h^p(x) + \frac{1}{h^p} \chi_{2h}^p(x)] dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Доказательство. Будем считать, что выполнено условие (3.3.49), так как в противном случае неравенство (3.3.53) очевидно. Оценка слагаемого $J^{(1)}$ в правой части неравенства (3.3.39) дана в лемме 3.3.5. Оценку $J^{(3)}$ получаем, используя неравенство

$$u^{p+\lambda-1}(x) \leq \gamma \{ F_\rho(u(x)) + [m(\rho)]^{p+\lambda-1} \} \quad \text{для } x \in E(\rho)$$

и неравенство Юнга. Используя полученную таким образом оценку $J^{(3)}$, из (3.3.39) и (3.3.50) выводим неравенство (3.3.53). $\square$

3.3.3. Интегральные поточечные оценки решения в случае $1 < p < n - s$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I(\rho, h) = \left\{ \int_{E(\rho)} [F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x)]^{\frac{n}{n-p+\delta}} dx \right\}^{(n-p+\delta)/n} \\ \times [\rho^{n-s} h^s]^{(p-\delta)/n}, \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\lambda \frac{n-s-p}{p-1} + p \frac{n-s}{n}, \quad \beta_1 = s + \frac{sp}{n}, \\ \alpha_2 &= -\lambda \frac{n-s-p}{p-1} + p + \delta \frac{n-s}{n}, \quad \beta_2 = s + \delta \frac{s}{n}, \\ \alpha_3 &= -\lambda \frac{n-s-p}{p-1} + \left(p - \frac{\delta}{2} \right) \frac{n-s}{n}, \quad \beta_3 = s + \frac{sp}{n}, \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

где $F_\rho(u(x))$ определено равенством (3.3.52).

Можем считать δ достаточно малым. В частности, можем предполагать выполненным неравенство $\frac{n-s-p}{p} > \frac{\delta(n-s)}{2n}$.

Лемма 3.3.6. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.3.4. Тогда существуют постоянные K_6 и R_4 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что $R_4 \leq R_3$ и при $\rho \leq R_4$ справедлива оценка*

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n}} I(\theta\rho, h) + K_6 \left(\frac{\rho}{h}\right)^{(n-s)\frac{p}{n}} I(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h), \quad (3.3.56)$$

где

$$R^{(2)}(r, \rho, h) = K_6 \left\{ \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} [\kappa(C_0 r)]^\lambda m^{p-1} (C_0 r) r^{n-np-s} + \left[\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} r^{\frac{\delta(n-s)}{2n}} \right] [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} \right\}$$

и функция $\kappa(r)$ определена равенством (3.3.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\chi(E(\theta\rho, \rho))$ и $\chi(E(\theta\rho))$ характеристические функции множеств $E(\theta\rho, \rho)$ и $E(\theta\rho)$ соответственно. Займемся оценкой $I(\rho, h)$. Для этого будем использовать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \{u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho)\}^p &\leq \{u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho)\}^p \chi(E(\theta\rho, \rho)) + \\ &2^{p-1} \{[u^\lambda(x) - m^\lambda(\theta\rho)]^p + [m^\lambda(\theta\rho) - m^\lambda(\rho)]^p\} \chi(E(\theta\rho, \rho)) \leq \end{aligned}$$

$$2^{p-1} [u^\lambda(x) - m^\lambda(\theta\rho)]^p \chi(E(\theta\rho)) + 2^{p-1} \{[u^{(\theta\rho)}(x)]^\lambda - m^\lambda(\rho)\}^p \quad \text{для } x \in E(\rho).$$

Таким образом получаем следующую оценку:

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{(n-s)(p-\delta)/n} I(\theta\rho, h) + 2^{p-1} [p^{n-s} h^s]^{p/n} I_{12}, \quad (3.3.57)$$

где

$$I_{12} = \left\{ \int_{E(\rho)} \left\{ [(u^{(\theta\rho)}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho)]^p [u(x)]^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) \right\}^{\frac{n}{n-p}} dx \right\}^{\frac{n-p}{n}}.$$

Оценивая последний интеграл по теореме вложения, находим, что

$$I_{12} \leq \gamma(I_{13} + I_{14} + I_{15}), \quad (3.3.58)$$

где

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_{E(\theta\rho, \rho)} [u(x)]^{\lambda-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ I_{14} &= m^{\lambda p}(\theta\rho) \int_{E(\rho) \cap K(r)} [u(x)]^{(\lambda-1)(p-1)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \\ I_{15} &= \int_{E(\rho)} [(u^{(\theta\rho)}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho)]^p [u(x)]^{(\lambda-1)(p-1)} \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx. \end{aligned} \quad (3.3.59)$$

Продолжим оценку интегралов в (3.3.58). Интеграл I_{13} оценим по теореме 3.3.3 с последующим применением неравенства Гельдера. Получаем

$$I_{13} \leq \gamma \{ R^{(1)}(C_0 r, \theta\rho, h) + I(\rho, h) [\rho^{n-s} h^s]^{(\delta-p)/n} + \frac{1}{h^p} I(\rho, 2h) \}. \quad (3.3.60)$$

При оценке I_{14} мажорируем $u(x)$ на $E(\rho) \cap K(r)$ через $m(C_0 r)$ с постоянной C_0 , введенной в неравенстве (3.3.9). В результате имеем

$$I_{14} \leq \gamma m^{\lambda p}(\theta\rho) [m(C_0 r)]^{(1-\lambda)(p-1)} r^{n-p-s} h^s. \quad (3.3.61)$$

Интеграл I_{15} оцениваем по неравенству Гельдера и получаем

$$I_{15} \leq \frac{\gamma}{h^p} \int_{E(\rho)} F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \leq \frac{\gamma}{h^p} I(\rho, 2h), \quad (3.3.62)$$

Наконец, используя (3.3.13), оцениваем

$$m^{p-1}(C_0 t) \leq \kappa^{p-1}(C_0 r) (C_0 t)^{-(n-p-s)} \quad (3.3.63)$$

при $r \leq t \leq R_0$ и приходим к следующему неравенству

$$\begin{aligned} R^{(1)}(C_0 r, \theta\rho, h) [\rho^{n-s} h^s]^{\frac{p}{n}} &\leq \gamma \left\{ \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} [\kappa(C_0 r)]^\lambda [m(C_0 r)]^{p-1} r^{n-p-s} \right. \\ &\quad \left. + [\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} r^{\frac{\delta(n-s)}{2n}}] [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

где α_i, β_i определены равенствами (3.3.55).

Теперь оценка (3.3.56) следует из неравенств (3.3.57)–(3.3.64) при достаточно малом ρ . $\square$

Далее, определим числа λ , θ и γ_2 равенствами

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\delta(n-s)}{4n}, \frac{p-1}{n-s-p} \right\}, \quad (3.3.65)$$

$$\ln \frac{1}{\theta} = \frac{4pn}{\delta(n-s)} \ln 2, \quad \gamma_2^{(n-s)p/n} = 2^{-2(n+1)}, \quad (3.3.66)$$

где K_6 – постоянная из неравенства (3.3.56).

Теорема 3.3.4 *Предположим, что выполнены условия леммы 3.3.4, и пусть λ , θ и γ_2 определяются условиями (3.3.65), (3.3.66). Тогда существует постоянная K_7 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при $\rho \leq R_4$, $\rho \leq \gamma_2 h$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} I(\rho, h) \leq K_7 \left\{ \rho^{n-s} h^s \left[m(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{n-s-p}{p-1}} \right]^{p+\lambda-1} + \right. \\ \left. + h^n \rho^{p-\lambda \frac{n-p-s}{p-1}} [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} + R^{(2)}(r, \rho, h) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.67)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем числа r , ρ и h , удовлетворяющие условиям Теоремы, и определим

$$A = 2^{p-1} \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n}}, \quad B = K_6 \gamma_2^{(n-s)\frac{p}{n}} \quad (3.3.68)$$

и числа M_1 , M_2 условиями

$$2r < \rho \theta^{M_1} \leq 2r/\theta, \quad H_0/2 \leq 2^{M_2} h < H_0. \quad (3.3.69)$$

С учетом этих обозначений неравенство (3.3.56) перепишется в виде

$$I(\rho, h) \leq AI(\theta \rho, h) + BI(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h). \quad (3.3.70)$$

Итерируя последнее неравенство и применяя индукцию по числу итераций, получим оценку

$$\begin{aligned} I(\rho, h) \leq \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I(2r, 2^m h) + \sum_{i=0}^{M_1-1} A^i B^{M_2} I(\theta^i \rho, H_0) \\ + \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} A^i B^m R^{(2)}(r, \theta^i \rho, 2^m h). \end{aligned} \quad (3.3.71)$$

Оценим далее значения $I(2r, 2^m h)$ и $I(\theta^i \rho, H_0)$ и первые две суммы в (3.3.71). Используя определение функции $\psi_r(x)$ и неравенство (3.3.9), устанавливаем оценку

$$I(2r, 2^m h) \leq \gamma 2^{ms} [m(C_0 r)]^{p+\lambda-1} r^{n-s} h^s. \quad (3.3.72)$$

Из этой оценки и определения A и B получаем следующую оценку для первого слагаемого в правой части (3.3.71)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I(2r, 2^m h) \leq \\ & \leq \gamma [m(C_0 r)]^{p+\lambda-1} r^{n-s} h^s [\theta^{-M_1}]^{\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} - p \frac{\ln 2}{\ln \theta}} \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{s+1} B]^m \leq \\ & \leq \gamma [m(C_0 r)]^{p+\lambda-1} r^{n-s} h^s \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} - p \frac{\ln 2}{\ln \theta}} \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{s+1} K_6 \gamma_2^{\frac{(n-s)p}{n}}]^m \leq \\ & \leq \gamma \rho^{n-s} h^s \left\{ m(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{n-s-p}{p-1}} \right\}^{p+\lambda-1}. \quad (3.3.73) \end{aligned}$$

Учитывая (3.3.65), имеем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} I(\theta^i \rho, H_0) & \leq \gamma [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} [\theta^i \rho]^{\frac{(n-s)(p-\delta)}{n}} \\ & \times \left\{ \int_r^{\frac{\theta^i \rho}{C_0}} t^{-\frac{n(n-p-s)(p+\lambda-1)}{(p-1)(n-p+\delta)} + n-s-1} dt \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}} \\ & \leq \gamma [\theta^i \rho]^{p-\lambda \frac{n-p-s}{p-1}} [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1}. \quad (3.3.74) \end{aligned}$$

Применяя оценку, полученную в (3.3.74), и учитывая значения λ , θ и γ_2 ,

получаем такую оценку второй суммы в (3.3.71):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{M_1-1} 2^{M_2+i} A^i B^{M_2} I(\theta^i \rho, H_0) &\leq \gamma \left[2K_6 \gamma_2^{(n-s)\frac{p}{n}} \right]^{M_2} \\
&\times \sum_{i=0}^{M_1-1} \left[2^p \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} + p - \lambda \frac{n-p-s}{p-1}} \right]^i \rho^{p-\lambda \frac{n-p-s}{p-1}} [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} \\
&\leq \gamma \rho^{p-\lambda \frac{n-p-s}{p-1}} h^n [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1}. \quad (3.3.75)
\end{aligned}$$

Третью сумму в (3.3.71) оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} A^i B^m R^{(2)}(C_0 r, \theta^i \rho, 2^m h) \\
&\leq \gamma [\kappa(C_0 r)]^\lambda m^{p-1} (C_0 r) r^{h-p-s} \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} \\
&\times \sum_{i=0}^{M_1-1} \left[2^{p-1} \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} + \alpha_1} \right]^i \sum_{m=0}^{M_2-1} \left[2^{\beta_1} K_6 \gamma_2^{(n-s)\frac{p}{n}} \right]^m \\
&+ \gamma [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} \rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \left[2^{p-1} \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} + \alpha_2} \right]^i \\
&\times \sum_{m=0}^{M_2-1} \left[2^{\beta_2} K_6 \gamma_2^{(n-s)\frac{p}{n}} \right]^m + \gamma [\kappa(C_0 r)]^{p+\lambda-1} r^{\frac{\delta(n-s)}{2n}} \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} \\
&\times \sum_{i=0}^{M_1-1} \left[2^{p-1} \theta^{-\frac{(n-s)(p-\delta)}{n} + \alpha_2} \right]^i \sum_{m=0}^{M_2-1} \left[2^{\beta_3} K_6 \gamma_2^{(n-s)\frac{p}{n}} \right]^m \leq \gamma R^{(2)}(r, \rho, h). \quad (3.3.76)
\end{aligned}$$

Собирая оценки (3.3.70)–(3.3.76), получим требуемое неравенство (3.3.67). Таким образом, теорема 3.3.4 доказана. $\square$

Зафиксируем функцию $\omega \in C^\infty(R^1)$, равную единице на интервале $(3/4, 5/4)$, равную нулю вне интервала $(1/2, 3/2)$, $0 \leq \omega(t) \leq 1$, $\left| \frac{d\omega(t)}{dt} \right| \leq \gamma$. Определим функции $\eta(x) = \eta_1(x)\eta_2(x)$, $\eta_1(x) = \omega\left(\frac{|x'|}{\rho}\right)$, $\eta_2(x) = \omega\left(\frac{\gamma|x'' - \xi''|}{\rho}\right)$, пусть $G = \{x : \eta(x) = 1\}$.

Подставим в интегральное тождество (3.3.1) следующие функции:

$$\varphi(x) = u^k(x)u_{2\rho}(x)\eta^{l+1}(x), \quad \psi(x) = \eta^{p-1}(x), \quad (3.3.77)$$

где k, l – произвольные неотрицательные числа. Используя условия (3.3.2)–(3.3.5) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{E(2\rho)} u^k(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta^{l+p}(x) dx &\leq \gamma(k+l+1)^p \int_{E(2\rho)} \{u^{k+p}(x)h_1(x)\eta^{l+p}(x) \\ &\quad + \rho^{-p}u^{k+p}(x)\eta^l(x)\} dx \end{aligned} \quad (3.3.78)$$

с функцией $h_1(x)$, определенной в лемме 3.3.1.

Оценивая интеграл в правой части (3.3.78) с помощью неравенства Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{E(2\rho)} u^{k+p}(x)h_1(x)\eta^{l+p}(x) dx \\ \leq \gamma \left\{ \int_{E(2\rho)} [u^{k+p}(x)\eta^{l+p}(x)]^{\frac{n}{n-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}}, \end{aligned} \quad (3.3.79)$$

$$\begin{aligned} \int_{E(2\rho)} u^{k+p}(x)\eta^l(x) dx \\ \leq \gamma \rho^{p-\delta} \left\{ \int_{E(2\rho)} [u^{k+p}(x)\eta^l(x)]^{\frac{n}{n-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}}. \end{aligned} \quad (3.3.80)$$

Из неравенств (3.3.79) и (3.3.80) следует оценка

$$\begin{aligned} \int_{E(2\rho)} u^k(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta^{l+p}(x) dx \\ \leq \gamma(k+l+1)^p \cdot \rho^{-\delta} \left\{ \int_{E(2\rho)} [u^{k+p}(x)\eta^l(x)]^{\frac{n}{n-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}}. \end{aligned} \quad (3.3.81)$$

Полученное неравенство дает возможность оценить $\max \{u(x) : x \in G\}$, применяя итерационный метод Мозера. Опуская стандартные для этого процесса рассуждения (см., например, гл.8 [123]), придем к оценке

$$\max \{[u(x)]^{p+\lambda-1} : x \in G\} \leq \gamma \rho^{-n} \int_{E(2\rho)} [u(x)]^{p+\lambda-1} \eta^p(x) dx. \quad (3.3.82)$$

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что выполнено неравенство

$$m(2\rho) - m(4\rho) \geq \mu m(2\rho) \quad (3.3.83)$$

с постоянной μ , определенной следующим образом:

$$\mu = 1 - 2^{-(n-p-s)/p}. \quad (3.3.84)$$

В этом случае имеем оценку

$$u(x) \geq \frac{1}{1-\mu} m(4\rho) \quad \text{при } x \in E(2\rho)$$

и поэтому получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{E(2\rho)} [u(x)]^{p+\lambda-1} \eta^p(x) dx \\ & \leq \gamma \int_{E(4\rho)} [u(x) - m(4\rho)]^{p+\lambda-1} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \end{aligned} \quad (3.3.85)$$

с функциями $\psi_r(x)$, $\chi_h(x)$, определенными равенствами (3.3.12) при $h = 4\rho/\gamma_2$.

Применяя неравенства Гельдера и (3.3.66), из (3.3.82) получаем, (3.3.85) следующую оценку:

$$\begin{aligned} [m(\rho)]^{p+\lambda-1} & \leq \gamma \left\{ \left[\frac{\kappa^{p-1}(C_0 r)}{\rho^{n-p-s}} \right]^{\frac{\lambda}{p-1}} m^{p-1}(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{N-s-p} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\kappa^{p-1}(C_0 r)}{\rho^{n-p-s}} \right]^{\frac{p+\lambda-1}{p-1}} \left[\rho^\delta + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{\delta(n-s)}{2n}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.86)$$

которая доказана в предположении, что выполнено неравенство (3.3.83).

Если же (3.3.83) не выполняется, то

$$m(2\rho) \leq \frac{1}{1-\mu} m(4\rho), \quad (3.3.87)$$

и из (3.3.86), (3.3.87) получаем следующую оценку, справедливую независимо от того выполнено или нет неравенство (3.3.83),

$$\begin{aligned} m(2\rho) & \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-s}{p-1}} \left\{ [\kappa(C_0 r) r^{n-s-p}]^{\frac{1}{p+\lambda-1}} \right. \\ & \quad \left. + \kappa(C_0 r) \left[\rho^{\frac{\delta'}{p+\lambda-1}} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{\delta(n-s)}{2n(p+\lambda-1)}} \right] \right\} + \frac{1}{1-\mu} m(4\rho), \end{aligned} \quad (3.3.88)$$

где $\delta' = \min \left[(n - s - p)/2, \delta \right]$.

Определим целое число $I(\rho)$ условием $R_0/2 \leq 2^{I(\rho)\rho} < R_0$. Итерируя неравенство (3.3.88), получаем оценку

$$m(2\rho) \leq \gamma \sum_{i=0}^{I(\rho)} 2^{-\frac{i(n-p-s-\delta')}{p-1}} R^{(3)}(r, \rho) + \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{I(\rho)-1} m(2^{I(\rho)}\rho), \quad (3.3.89)$$

где

$$R^{(3)}(r, \rho) = \rho^{-\frac{n-p-s}{p-1}} \left\{ [\kappa(C_0 r)]^{\frac{\lambda}{p+\lambda-1}} [m^{p-1}(C_0 r) r^{n-s-p}]^{\frac{1}{p+\lambda-1}} + \kappa(C_0 r) \left[\rho^{\frac{\delta'}{p+\lambda-1}} + (r/\rho)^{\frac{\delta(n-s)}{2n(p+\lambda-1)}} \right] \right\}. \quad (3.3.90)$$

В силу выбора числа μ имеем

$$\left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{I(\rho)} = [2^{I(\rho)}]^{-\frac{\ln(1-\mu)}{\ln 2}} = 2^{I(\rho) \cdot \frac{(n-p-s)}{p}} \leq (R_0/\rho)^{\frac{n-p-s}{p}}.$$

Из последнего неравенства и (3.3.89) следует оценка

$$m(2\rho) \leq \gamma \left\{ R^{(3)}(r, \rho) + \rho^{-\frac{n-p-s}{p}} m(R_0/2) \right\}. \quad (3.3.91)$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (3.3.91), получим оценку $m(2\rho) \leq \gamma \rho^{a-\frac{n-p-s}{p-1}}$ с некоторым $a > 0$. Теперь теорема 3.3.1 следует из (3.3.92) и результатов Серрина [113]. При $p = n$, теорема 3.3.2 доказывается аналогично. $\square$

3.4. Устранимость изолированных особенностей решений эллиптических уравнений с абсорбцией

3.4.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Рассмотрим эллиптическое уравнение вида

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, u) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega \setminus \{x_0\}. \quad (3.4.1)$$

Предполагаем, что функции $g(x, u)$, $a_i(x, u, \xi)$, $i = 0, \dots, n$, удовлетворяют условиям Каратеодори, для функций $a_i(x, u, \xi)$, $i = 0, \dots, n$, выполнены неравенства (3.2.2)–(3.2.4), условия (3.2.5) и, кроме того,

$$g(x, u) \operatorname{sign} u \geq c_1 |u|^q - f_4(x), \quad |g(x, u)| \leq c_2 |u|^q + f_4(x), \quad (3.4.2)$$

$$f_4(x) \geq 0, \quad f_4(x) \in L^{n/(p-\delta)}(\Omega), \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2} \min(1, p-1)\right).$$

Определение 3.4.1. Говорим, что $u(x)$ – решение уравнения (3.4.1) в $\Omega \setminus \{x_0\}$ если для произвольных функций $\xi(x) \in C^\infty(\Omega)$, равной нулю в некоторой окрестности $\{x_0\}$, и $\psi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ имеет место включение $u(x)\xi(x) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ и при $\varphi(x) = \xi(x)\psi(x)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi + g(x, u) \varphi \right\} dx = 0. \quad (3.4.2)$$

Определение 3.4.2. Говорим, что решение $u(x)$ уравнения (3.4.1) имеет устранимую особенность в точке $\{x_0\}$, если $u(x) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ и равенство (3.4.2) справедливо для любой функции $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$.

Основными результатами данного раздела являются следующие теоремы.

Теорема 3.4.1. Пусть выполнены неравенства (3.2.2)–(3.2.4) и условия (3.2.5), и пусть $u(x)$ – решение уравнения (3.4.1) в $\Omega \setminus \{x_0\}$. Предположим также, что справедливо неравенство

$$q \geq \frac{n(p-1)}{n-p}. \quad (3.4.3)$$

Тогда особенность $u(x)$ в точке $\{x_0\}$ устранима.

Теорема 3.4.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.4.1. Тогда

$$|u(x)| \leq \gamma |x - x_0|^{-\frac{p}{q-p+1}}, \quad |x - x_0| > 0. \quad (3.4.4)$$

3.4.3. Доказательство теоремы 3.4.2. Предполагаем в дальнейшем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty. \quad (3.4.5)$$

В противном случае теорема 3.4.1 будет следовать из результатов Серрина [113].

Зафиксируем $R_1 > 0$ такое, что

$$M(R_1) \geq 1. \quad (3.4.6)$$

Зафиксируем при $\rho > 0$ и $\sigma \in (0, 1)$ функцию $\varphi_{\rho, \sigma}(x) \in C^\infty(R^n)$, удовлетворяющую условиям: $\varphi_{\rho, \sigma}(x) = 1$ при $\rho \leq |x - x_0| \leq 2\rho$, $\varphi_{\rho, \sigma}(x) = 0$ вне множества $\{(1 - \sigma)\rho < |x - x_0| < (2 + \sigma)\rho\}$, $\left|\frac{\partial \varphi_{\rho, \sigma}(x)}{\partial x}\right| \leq \frac{2}{\sigma\rho}$ и $0 \leq \varphi_{\rho, \sigma}(x) \leq 1$.

Подставим в интегральное тождество (3.4.2) функцию $\varphi = u\varphi_{\rho, \sigma}^p$, используя неравенства Гельдера и Юнга и определение $M(\rho)$, стандартными рассуждениями, получим

Лемма 3.4.1. *Справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + |u|^{q+1} \right) \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx \leq \gamma \sigma^{-p} \rho^{n-p} M^p(\rho - \sigma\rho).$$

Зафиксируем число $R_2 \in (0, R_1/2)$ так, чтобы выполнялось $M(R_2) > M(R_1/2)$ и пусть ρ произвольное число из интервала $(0, R_2)$. Определим числовые последовательности $\{\rho_j\}$, $\{\sigma_j\}$ равенствами

$$\rho_j = \left(\frac{1}{2} + 2^{-j} \right) \rho, \quad \sigma_j = 2^{-(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Выберем точку x_j так, чтобы $M(\rho_j) = |u(x_j)|$, $\rho_j \leq |x_j - x_0| \leq R_2$ и обозначим $\rho'_j = |x_j - x_0|$. Определим $\varphi_j(x) = \varphi_{\rho'_j, \sigma_j}(x)$.

Подставим в интегральное тождество (3.4.2) функцию

$$\varphi(x) = (1 + |u(x)|)^k u(x) \varphi_j^{l+p}(x), \quad k, l > 0.$$

Используя итерационный метод Мозера (см., например, [123], гл.8), получим

$$[M(\rho_j)]^{q+1} = |u(x_j)|^{q+1} \leq \gamma 2^{\frac{jp}{\delta}} \rho^{-n} \int_{\Omega} (1 + |u(x)|)^{q+1} \varphi_j^p(x) dx. \quad (3.4.7)$$

Оценим интеграл в правой части (3.4.7), используя лемму 3.4.1, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} [M(\rho_j)]^{q+1} &\leq \gamma \rho^{-p} 2^{jp(1+\frac{1}{\delta})} [M(\rho'_j - \sigma_j \rho'_j)]^p \\ &= \gamma 2^{jp(1+\frac{1}{\delta})} \rho^{-p} [M(\rho_{j+1})]^p. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Итерируя неравенство (3.4.8), получим (3.4.4), что и завершает доказательство теоремы 3.4.3.

3.4.3. Интегральные оценки градиента решения. Определим при $r \in (0, R_2)$ функцию $\psi_r(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_r(x) = \tilde{\psi}_r(|x|)$, где $\tilde{\psi}_r(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_r(t) &= 0 \quad \text{при } t \leq r, \quad \tilde{\psi}_r(t) = 1 \quad \text{при } t \geq R(r), \\ \tilde{\psi}_r(t) &= \frac{1}{(1-\theta) \ln \ln \frac{1}{r}} \int_r^t \frac{dz}{z \ln \frac{1}{z}}, \quad \text{при } r \leq t \leq R(r), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

θ – определяемое далее число из интервала $(0, 1)$, а $R(r)$ – число, определенное равенством

$$\ln \frac{1}{R(r)} = \left(\ln \frac{1}{r} \right)^\theta. \quad (3.4.11)$$

Определим при $\rho \in (0, R_0)$ функцию $u_\rho(x)$ и множество $E(\rho)$ равенствами

$$u_\rho(x) = [u(x) - \widetilde{M}(\rho)]_+ \quad \text{при } x \in B(\rho) \setminus \{x_0\}, \quad u_\rho(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus B(\rho),$$

$$\widetilde{M}(\rho) = M(\rho) + \ln \frac{1}{\rho}, \quad E(\rho) = \{x \in B(\rho) \setminus \{x_0\} : u(x) > \widetilde{M}(\rho)\}.$$

Определим число $\bar{p}$ и функцию $F_1(r, \rho)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{qp}{q-p+1}, \\ F_1(r, \rho) &= \begin{cases} \rho^{n-\bar{p}}, & \text{если } q > \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{2-\frac{n}{p}}, & \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n < 2p, \\ \ln \ln \frac{1}{r}, & \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n = 2p, \\ \left[\ln \frac{1}{\rho} \right]^{2-\frac{n}{p}}, & \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n > 2p. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Лемма 3.4.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.4.1 и предположим дополнительно, что решение $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u(x)| \leq \gamma |x - x_0|^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}} \quad \text{при } 0 < |x| \leq R_1 \quad (3.4.13)$$

с $\lambda \in [0, n - p)$. Тогда при $r \in (0, R_2)$ и $R(r) < \rho < R_2$ справедлива оценка

$$\int_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-\bar{p}} F_1(r, \rho) + \rho^{\lambda+\delta} \ln \frac{1}{\rho} \right\}, \quad (3.4.14)$$

с $\bar{p}$ и $F_1(r, \rho)$, определенными равенствами (3.4.12) и δ , из неравенств (3.2.2)–(3.2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (3.4.2) функцию

$$\varphi(x) = \left[\ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+ \psi_r^{\bar{p}}(x).$$

Используя неравенства (3.2.2)–(3.2.4), получим

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho)} \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx + \int_{E(\rho)} u^q \ln(u/\widetilde{M}(\rho)) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\ & \leq \gamma \int_{E(\rho)} [u^{p-1} g_1(x) + u^{-1} f_1(x)] \psi_r^{\bar{p}}(x) dx + \frac{\gamma}{\ln \ln(1/r)} \int_{K(r)} \frac{[\ln(u/\widetilde{M}(\rho))]_+}{|x - x_0| \ln \frac{1}{|x - x_0|}} \\ & + \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + u^{p-1} g_2(x) + f_2(x) \right] \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx \\ & + \gamma \int_{E(\rho)} \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \left[h(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_3(x) u^{p-1} + f_3(x) \right] \psi_r^{\bar{p}}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

где $K(r) = \{r < |x - x_0| < R(r)\}$.

В силу (3.4.6) и (3.4.13)

$$\int_{E(\rho)} [u^{p-1} g_1(x) + u^{-1} f_1(x)] \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma [\rho^{\lambda+\delta} + \rho^{n-p+\delta}]. \quad (3.4.16)$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\ln \ln \frac{1}{r}} \int_{K(r)} \left[\ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+ |x - x_0|^{-1} \ln^{-1} \frac{1}{|x - x_0|} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \psi_r^{\bar{p}-1} dx \\
& \leq \frac{1}{4} \int_{E(\rho)} \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}} dx + \frac{1}{4} \int_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}} dx \\
& + \gamma \frac{1}{\left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\bar{p}}} \int_{K(r)} |x - x_0|^{-\bar{p}} \left[\ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+^{\bar{p}(1-\frac{p-1}{qp})} \left[\ln \frac{1}{|x - x_0|} \right]^{-\bar{p}} dx.
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Последнее слагаемое правой части (3.4.17) оценим, используя (3.4.13). Получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\bar{p}}} \int_{K(r)} |x - x_0|^{-\bar{p}} \left[\ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+^{\bar{p}(1-\frac{p-1}{qp})} \left[\ln \frac{1}{|x - x_0|} \right]^{-\bar{p}} dx \\
& \leq \gamma \frac{1}{\left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\bar{p}}} \int_r^\rho \left[\ln \frac{1}{|x - x_0|} \right]^{-\frac{p-1}{q-p+1}} |x - x_0|^{n-1-\bar{p}} d|x - x_0| \\
& \leq \gamma \frac{1}{\left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\bar{p}}} F_1(r, \rho).
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Аналогично, используя (3.4.13), устанавливаем, что

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{\ln \ln \frac{1}{r}} \int_{K(r)} \frac{\ln \frac{u}{\widetilde{M}}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|} \cdot |x - x_0|} (u^{p-1} g_2(x) + f_2(x)) dx \\
& \leq \gamma \frac{1}{\ln \ln \frac{1}{r}} (\rho^{n-p} + \rho^\lambda).
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Кроме того, в силу (3.4.13)

$$\begin{aligned}
& \int_{E(\rho)} \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} [g_3(x) u^{p-1} + f_3(x)] \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\
& \leq \gamma [\rho^{n-p+\delta} + \rho^{\lambda+\delta}] \ln \frac{1}{\rho}.
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho)} h(x) \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \psi_r^{\bar{p}} dx \\ \leq \frac{1}{4} \int_{E(\rho)} \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}} dx + \gamma \rho^{\delta+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Собирая оценки (3.4.15)–(3.4.21), получим требуемое неравенство (3.4.14). $\square$

Определим функцию $u^{(\rho)}(x)$ и множество $E(\rho, 4\rho)$ следующим образом:

$$u^{(\rho)}(x) = \min \{ [u(x) - M(4\rho)]_+, M(\rho) - M(4\rho) \},$$

$$E(\rho, 4\rho) = \{x : M(4\rho) < u(x) < M(\rho)\}.$$

Лемма 3.4.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.4.1 и справедливо неравенство (3.4.13). Тогда при $0 < \rho < R_2$ верна оценка*

$$\int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx \leq \gamma M(\rho) \rho^{\lambda+\delta}. \quad (3.4.22)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (3, 3, 2) функцию

$$\varphi(x) = u^{(\rho)}(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) \quad \text{при } r \in (0, e^{-1}), \quad R(r) < \rho < R_2.$$

Используя неравенства (3.4.2)–(3.4.4), получим

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx + \int_{E(4\rho)} u^q(x) u^{(\rho)}(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\ \leq \gamma M(\rho) \int_{E(4\rho)} u^{p-1}(x) H_1(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\ + \gamma M(\rho) \int_{E(4\rho)} u^{p-1}(x) H_2(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx \\ + \gamma \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

где $H_1(x) = g_1(x) + f_1(x) + h^p(x) + g_3(x) + f_3(x)$ и $H_2(x) = g_2(x) + f_2(x)$.

Используя условия (3.4.5) и неравенство (3.4.13), устанавливаем, что

$$\begin{aligned}
 & M(\rho) \int_{E(4\rho)} u^{p-1}(x) H_1(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\
 & \leq \gamma M(\rho) \left\{ \int_{E(4\rho)} [u^{(p-1)} \psi_r^{\bar{p}}(x)]^{\frac{n}{n-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}} \\
 & \leq M(\rho) \left\{ \int_r^{4\rho} |x - x_0|^{-(n-p-\lambda)\frac{n}{n-p+\delta} + n-1} d|x - x_0| \right\}^{\frac{n-p+\delta}{n}} \\
 & \leq M(\rho) \rho^{\lambda+\delta}. \quad (3.4.24)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 & M(\rho) \int_{E(4\rho)} u^{p-1}(x) H_2(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx \\
 & \leq \gamma M(\rho) \left\{ \int_{E(4\rho)} \left[u^{p-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) \right]^{\frac{n}{n-p+1+\delta}} dx \right\}^{\frac{n-p+1+\delta}{n}} \\
 & \leq \gamma \frac{1}{\ln \ln \frac{1}{r}} M(\rho) \left[\int_r^{R(r)} \left(|x - x_0|^{-(n-p+1-\lambda)} \frac{1}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}} \right)^{\frac{n}{n-p+1+\delta}} \right. \\
 & \quad \left. \times |x - x_0|^{n-1} d|x - x_0| \right]^{\frac{n-p+1+\delta}{n}} \leq \gamma M(\rho) [R(r)]^{\lambda+\delta}, \quad (3.4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx \\
 & \leq \frac{1}{2\gamma} \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) u^q(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \\
 & + \gamma \left\{ \int_{E(4\rho)} \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \left\{ \int_{E(4\rho)} u^\rho(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^{\bar{p}} dx \right\}^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}}. \quad (3.4.26)
 \end{aligned}$$

В силу определения $\psi_r(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^{\bar{p}} dx \\ \leq \gamma M(\rho) \left\{ \int_r^{R(r)} \frac{|x - x_0|^{n-1} d|x - x_0|}{\left(\ln \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{\bar{p}}} |x - x_0|^{\bar{p}} \right\}^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \\ \leq \gamma M(\rho) F_2(r), \quad (3.4.27) \end{aligned}$$

где

$$F_2(r) = \begin{cases} [R(r)]^{(n-\bar{p})\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, & \text{если } q > \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-(n-p)\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, & \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}. \end{cases} \quad (3.4.28)$$

Собирая оценки (3.4.23)–(3.4.27) и используя лемму 3.4.2, получим

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx &\leq \gamma M(\rho) \rho^{\lambda+\delta} + \gamma M(\rho) [R(r)]^{\lambda+\delta} \\ &+ \gamma M(\rho) F_2(r) \left[\left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}} F_1(r, \rho) + \rho^{\lambda+\delta} \ln^p \frac{1}{\rho} \right]^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}}, \\ F_2(r) \left[\left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}} F_1(r, \rho) \right]^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} &\leq \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-(n-1)\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{(2-\frac{n}{p})\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \\ &= \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{-\theta(n-1)(q-p+1) + (2-\frac{n}{p})(p-1)}{qp-p+1}}. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Последнее равенство в (3.4.29) получено в силу определения $R(r)$.

Выберем теперь $\theta \in (0, 1)$ из условий

$$\begin{aligned} -\theta(n-1)(q-p+1) + (2-\frac{n}{p})q(p-1) &< 0, \quad \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \theta &= \frac{1}{2}, \quad \text{если } q > \frac{n(p-1)}{n-p}. \end{aligned}$$

Возможность выбора такого θ следует из того, что при $q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ и $p < n$

$$\begin{aligned} (2 - \frac{n}{p})q(p-1) &< q(p-1) = q = \frac{n(p-1)^2}{n-p} \\ &< q = \frac{(n-1)p(p-1)}{n-p} = (n-1)(q-p+1). \end{aligned}$$

Переходя в (3.4.29) к пределу при $r \rightarrow 0$, получим

$$\int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma M(\rho) \rho^{\lambda+\delta},$$

что и доказывает лемму. $\square$

3.4.4. *Доказательство теоремы 3.4.1.* Аналогично неравенству (3.4.8) доказывается

$$\begin{aligned} \max \{ [u(x) - M(2\rho)]^p, \rho < |x| < 2\rho \} \\ \leq \sigma^{-\frac{np}{\delta}} \rho^{-n} \int_{E(2\rho)} [u(x) - M(2\rho)]^p \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

где $\varphi_{\rho, \sigma}(x)$ определена в подразделе 3.4.3. Полагая $\sigma = 1/2$, из (3.4.30) и леммы 3.4.3 получим

$$\begin{aligned} [M(\rho) - M(2\rho)]^p &\leq \gamma \rho^{-n} \int_{E(2\rho)} [u(x) - M(2\rho)]^p \varphi^p(x) dx \\ &= \gamma \rho^{-n} \int_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} \min^p \{ u(x) - M(2\rho), M(\rho/2) - M(2\rho) \} dx \\ &\leq \gamma \rho^{-n+p} \int_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx \leq \gamma \rho^{-n+p+\lambda+\delta} M(\rho) \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}p+\delta}. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Таким образом, установлены оценки

$$M(\rho) - M(2\rho) \leq \gamma \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{n-p-\lambda}{p-1} - \frac{\delta}{p}}, \quad \text{если } \frac{n-p-\lambda}{p-1} > \frac{\delta}{p}, \quad (3.4.32)$$

$$M(\rho) - M(2\rho) \leq \gamma, \quad \text{если } \frac{n-p-\lambda}{p-1} \leq \frac{\delta}{p}. \quad (3.4.33)$$

Из (3.4.32) следует

$$M(\rho) \leq M\left(\frac{R_2}{2}\right) + \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{n-p-\lambda}{p-1} - \frac{\delta}{p}}, \quad \text{если } \frac{n-p-\lambda}{p-1} > \frac{\delta}{p}, \quad (3.4.34)$$

а из (3.4.33) вытекает

$$M(\rho) \leq M\left(\frac{R_2}{2}\right) + \ln \frac{1}{\rho}, \quad \text{если } \frac{n-p-\lambda}{p-1} \leq \frac{\delta}{p}. \quad (3.4.35)$$

Из теоремы 3.4.2 следует, что справедливо неравенство (3.4.13) с

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, & \text{если } q &= \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \lambda &= \frac{n-p}{p-1} - \frac{p}{q-p+1} > 0, & \text{если } q &> \frac{n(p-1)}{n-p}. \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

Неравенства (3.4.34) и (3.4.35), гарантируют последовательное улучшение оценки (3.4.13) с увеличением на каждом шаге λ на δ/p до тех пор, пока $n-p-\lambda$ остается положительным. Таким образом, стартуя с неравенства (3.4.13) со значением λ , определенным равенствами (3.4.36) после конечного числа шагов, в силу (3.4.34), (3.4.35) получим

$$|u(x)| \leq \gamma \ln \frac{1}{|x-x_0|}, \quad \text{при } 0 < |x-x_0| < R_2/2. \quad (3.4.37)$$

Теперь уравнение (3.4.1) запишем в виде

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tilde{a}_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (3.4.38)$$

где $\tilde{a}_0(x, u, \xi) = a_0(x, u, \xi) + \tilde{g}(x)$, где $\tilde{g}(x) = g(x, u(x))$.

Для коэффициентов уравнения (3.4.38) выполнены условия (3.2.2)–(3.2.5). Таким образом, теорема 3.4.1 следует из теоремы 3.2.1. $\square$

ГЛАВА 4

УСТРАНИМОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Введение

В данной главе изучается вопрос об устранимости изолированной особенности решений квазилинейных параболических уравнений.

Пусть $n \geq 3$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega_T^\circ = \Omega_T \setminus \{(0, 0)\}$. Рассмотрим следующие модельные параболические уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u + g|u|^{p-2} = f \quad \text{в } \Omega_T^\circ, \quad p > 2, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u + u|u|^{q-1} = f \quad \text{в } \Omega_T^\circ, \quad q > p - 1. \quad (4.1.2)$$

Кроме того предполагаем, что

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (4.1.3)$$

Вопрос об устранимости особенностей для решений общих параболических уравнений вида (4.1.1) при $p = 2$, удовлетворяющих начальному условию (4.1.3) был изучен Аронсоном [7, 8], Аронсоном, Серриним [9] при $g, f \in L^{q,r}(\Omega_T)$, $\frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 2$.

Ими было получено достаточное условие устранимости изолированной особенности

$$u(x, t) = o((|x| + t^{1/2})^{-n}).$$

Для уравнения $u_t - \Delta u + u^q = 0$, Брезис и Фридман [30] доказали, что при $q \geq 1 + 2/n$, изолированная особенность всегда устранима. Многими авторами изучался вопрос об устранимости изолированных особенностей для параболических уравнений вида (4.1.1), (4.1.2) (см., например, [31, 51, 55–58, 95, 96]). Большинство из них рассматривали уравнения специального вида. Обзор этих результатов имеется в монографии Верона [134].

В работах [100, 122] были получены точные условия устранимости изолированной особенности для общих уравнений вида (4.1.1), (4.1.2). Изложение результатов этих работ составляет существенную часть содержания данной главы. В разделе 4.2 излагаются результаты статьи [100] и доказывается точное условие устранимости изолированной особенности для решений общих квазилинейных параболических уравнений вида (4.1.1). В разделе 4.3 изложены результаты работы [122] и доказывается точное условие устранимости изолированной особенности для решений общих квазилинейных параболических уравнений вида (4.1.2).

4.2. Устранимость изолированных особенностей

4.2.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_T = \Omega \times [0, T)$, $\{0\} \in \Omega$, $t_0 \in [0, T)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = a_0(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad (4.2.1)$$

$(x, t) \in \Omega_T \setminus \{(0, t_0)\}$.

Будем рассматривать два случая: $t_0 = 0$ или $t_0 > 0$.

В первом случае дополнительно предполагаем, что

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (4.2.2)$$

Предполагаем также, что функции $a_i(x, t, u, \xi)$ $i = 0, 1, \dots, n$, определены при $(x, t, u, \xi) \in \Omega \times (0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяют условию Каратеодори и с некоторыми положительными постоянными c_1, c_2 выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \xi) \xi_i \geq c_1 |\xi|^p - g_1(x, t) |u|^p - f_1(x, t), \quad p \geq 2, \quad (4.2.3)$$

$$|a_i(x, t, u, \xi)| \leq c_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x, t) |u|^{p-1} + f_2(x, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2.4)$$

$$|a_0(x, t, u, \xi)| \leq h(x, t) |\xi|^{p-1} + g_3(x, t) |u|^{p-1} + f_3(x, t), \quad (4.2.5)$$

с неотрицательными функциями $h(x, t)$, $g_i(x, t)$, $f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, такими, что $H(x, t) \in L^{r_0}(0, T; L^{q_0}(\Omega))$,

$$\frac{p + n(p-2)}{r_0} + \frac{n}{q_0} = p(1 - \delta), \quad r_0 \geq 1, \quad q_0 \geq 1,$$

$$\begin{aligned}
H(x, t) = 1 + h^p(x, t) + f_1(x, t) + [f_2(x, t)]^{p/(p-1)} \\
+ f_3(x, t) + g_1(x, t) + [g_2(x, t)]^{p/(p-1)} + g_3(x, t). \quad (4.2.6)
\end{aligned}$$

Под решением задачи (4.2.1), (4.2.2) понимаем функцию $u(x, t)$, такую, что

$$u(x, t)\varphi(x, t) \in V^{2,p}(\Omega_T) = C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$$

и справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned}
I(u, \varphi) \equiv \int_{\Omega} u(x, \tau)\varphi(x, \tau)dx \\
+ \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right. \\
\left. - a_0(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \varphi \right\} dx dt = 0, \quad (4.2.7)
\end{aligned}$$

где $\varphi(x, t) \in V^{2,p}(\Omega_T)$ произвольная функция, такая, что $\partial \varphi / \partial t \in L^2(\Omega_T)$; $\varphi(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in \{(0, 0)\} \cup \{\partial \Omega \times (0, T)\}$, τ – произвольное число, $\tau \in (0, T]$.

В дальнейшем, без ограничения общности считаем, что $\partial u / \partial t \in L^2(\Omega_T)$, так как в противном случае, можно, аналогично [38] рассмотреть стекловское среднее.

Положим

$$D(r) = \left\{ (x, t) : \left(\frac{|x|}{r} \right)^p + \frac{t}{r^{p+n(p-2)}} \leq 1 \right\},$$

пусть R_0 – достаточно малое число такое, что $D(R_0) \subset \Omega_T$, и

$$M(r) = \sup\{|u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}.$$

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 4.2.1. Пусть выполняются условия (4.2.3)–(4.2.6), и предположим, что $u(x, t)$ – решение уравнения (4.2.1), удовлетворяющее начальному условию (4.2.2). Предположим также, что выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r)r^n = 0. \quad (4.2.8)$$

Тогда особенность в точке $\{(0, 0)\}$ устранима.

Теорема 4.2.1 вытекает из следующего результата.

Теорема 4.2.2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.2.1. Тогда справедливо неравенство*

$$M(r) \leq \gamma r^{\alpha-n}, \text{ с некоторым } \alpha > 0. \quad (4.2.9)$$

В случае, если $(0, t_0)$ – внутренняя точка Ω_T , рассмотрим

$$\tilde{D}(r) = \left\{ (x, t) : \left(\frac{|x|}{r} \right)^p + \frac{|t - t_0|}{r^{p+n(p-2)}} \leq 1 \right\},$$

$$\tilde{M}(r) = \sup\{|u(x, t)|, (x, t) \in \tilde{D}(R_0) \setminus \tilde{D}(r)\}.$$

Теорема 4.2.3. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.2.1, и пусть*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{M}(r)r^n = 0. \quad (4.2.10)$$

Тогда особенность в точке $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ устранима.

Отметим, что из теоремы 4.2.2 следует неравенство

$$\sup \left\{ |u(x, t)|, (x, t) \in D\left(\frac{R_0}{2}\right) \right\} \leq \gamma.$$

Используя это неравенство, стандартными рассуждениями (см., например [100]), из теоремы 4.2.2 получим теорему 4.2.1.

4.2.2. Интегральные оценки решения. Пусть $\omega(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\omega(s) = 0$ при $s \leq 1$, $\omega(s) = 1$ при $s \geq 2^p$, $0 \leq d\omega(s)/ds \leq \gamma$ и $0 \leq \omega(s) \leq 1$ для $s \in \mathbb{R}$.

Положим

$$\eta_r(x, t) = \omega\left(\left(\frac{|x|}{r}\right)^p + \frac{t}{r^{p+n(p-2)}}\right).$$

В дальнейшем предполагаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty.$$

Зафиксируем число R_1 из интервала $(0, R_0)$ такое, что $M(R_1) \geq 1$ и положим для $r \in (0, R_1]$

$$M^*(r) = \frac{1}{r^n} \max \{M(\rho)\rho^n : r \leq \rho \leq R_1\} + 1.$$

Определим функцию $u_R(x, t)$ при $R \in (0, R_1)$ и множество $E(R)$ равенствами

$$u_R(x, t) = (u(x, t) - M(R))_+, \quad (x, t) \in D(R),$$

$$u_R(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus D(R),$$

$$E(R) = \{(x, t) \in D(R) : u(t, x) > M(R)\}.$$

Лемма 4.2.1. *Предположим, что выполняются условия теоремы 4.2.1. Тогда*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, t) \eta_r^p(x, t) dx \\ & + \int \int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \leq \gamma M(r) [M^*(r) r^n]^{p-1}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (4.2.7) функцию

$$\varphi(x, t) = u_R(x, t) \eta_r^p(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < r < R < R_1.$$

Используя неравенства (4.2.3)–(4.2.5), получим

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, \tau) \eta_r^p(x, \tau) dx + \int \int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma \int \int_{E(R)} \left\{ u_R^2(x, t) \left| \frac{\partial \eta_r(x, t)}{\partial t} \right| + u^p(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) \right. \\ & \quad \left. + u_R^p(x, t) \left| \frac{\partial \eta_r(x, t)}{\partial x} \right|^p \right\} dx dt, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

где $H(x, t)$ определена в (4.2.6).

Используя условия (4.2.6), получим

$$\int \int_{E(R)} u^p(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt \leq \gamma M(r) [M^*(r) r^n]^{p-1}. \quad (4.2.13)$$

Теперь, оценивая $u(t, x)$ через $M(r)$ в правой части (4.2.13) из (4.2.12) и (4.2.13) получим (4.2.11). $\square$

Предположим в дальнейшем, что r , ρ и R удовлетворяют условиям

$$0 < r < \rho < R \leq R_1/2, \quad M(\rho) > 2M(R),$$

и определим

$$\Phi_{\rho R}(u) = \min \{u_R(x, t), M(\rho) - M(R)\},$$

$$E(\rho, R) = \{(x, t) \in \Omega_T : 0 < u_R(x, t) < M(\rho) - M(R)\}.$$

Лемма 4.2.2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.2.1. Тогда*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho R}^2(u(x, \tau)) \eta_r^p(x, \tau) dx + \int \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma [M(\rho) - M(R)] \left\{ M(r) r^n [M^*(r) r^n]^{p-1} \right\}^{(p-1)/p} \\ & \quad + (M(\rho) - M(R))^{-\lambda_1} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1} \\ & \quad + \int \int_{E(\rho)} h(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \eta_r^p(x, t) dx dt \Big\}, \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = n\delta/2p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (4.2.7) функцию

$$\varphi(x, t) = \Phi_{\rho R}(u(x, t)) \eta_r^p(x, t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(x, t) dx dt \int_{\Omega} G_{\rho R}(u(x, \tau)) \eta_r^p(x, \tau) dx \\ & \quad - p \int_0^\tau \int_{\Omega} G_{\rho R}(u(x, t)) \eta_r^{p-1}(x, t) \frac{\partial \eta_r(x, \tau)}{\partial t} dx dt, \end{aligned}$$

где

$$G_{\rho R}(u) = \frac{1}{2} \min \{u_R^2, [M(\rho) - M(R)]^2\} + (M(\rho) - M(R)) u_\rho.$$

Используя неравенства (4.2.3)–(4.2.5), получим

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho R}^2(u(x, \tau)) \eta_r^p(x, \tau) dx \\ & + \int \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \leq \gamma \left\{ [M(\rho) - M(R)] (M(r) r^n \right. \\ & \left. + \int \int_{E(\rho)} h(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \eta_r^p(x, t) dx dt + I_1 + I_2 \right\} + I_3, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

где

$$I_1 = \int \int_{E(R)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + [H(x, t)]^{\frac{p-1}{p}} u^{p-1}(x, t) \right\} \eta_r^{p-1}(x, t) \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x} \right| dx dt,$$

$$I_2 = \int \int_{E(\rho)} H(x, t) u^{p-1}(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt,$$

$$I_3 = \int \int_{E(\rho R)} H(x, t) u^p(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt.$$

Используя условия (4.2.6) устанавливаем, что

$$\int \int_{D(R_0)} H(x, t) |u(x, t)|^{p-1+\lambda_1} dx dt \leq \gamma [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1}, \quad (4.2.16)$$

$$\int \int_{E(R)} [H(x, t)]^{(p-1)/p} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x} \right| dx dt \leq \gamma r^{(n+\delta)(p-1)+1}. \quad (4.2.17)$$

Тогда получим

$$I_2 \leq \gamma (M(\rho) - M(R))^{-\lambda_1} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1}, \quad (4.2.18)$$

$$I_3 \leq \gamma (M(\rho) - M(R))^{1-\lambda_1} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1}. \quad (4.2.19)$$

Интеграл I_1 оценим, используя неравенство Гельдера, лемму 4.2.1 и (4.2.17). Получим

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \left\{ \int \int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \right\}^{(p-1)/p} \left\{ \int \int_{E(R)} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x} \right|^p dx \right\}^{1/p} \\ & + \gamma M^{p-1}(r) r^{(n+\delta)(p-1)} \leq \gamma \left\{ [M(r) r^n] [M^*(r) r^n]^{p-1} \right\}^{(p-1)/p}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Теперь, собирая неравенства (4.2.15)–(4.2.20), получим требуемое неравенство (4.2.14). $\square$

Лемма 4.2.3. Пусть выполняются все предположения теоремы 4.2.1. Тогда

$$\begin{aligned} & \int \int_{E(R)} u_R^{-q}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \leq \gamma [M(\rho) - M(R)]^{-\lambda} \\ & \times \left\{ (M(r)r^n [M^*(r)r^n]^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} + [M(\rho) - M(R)]^{-\lambda_1} [M^*(r)r^n]^{p-1+\lambda_1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где $q = 1 + \lambda_2$, $\lambda_2 = n\delta/2p^2$, λ_1 определено в лемме 4.2.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (4.2.7) функцию

$$\varphi(x, t) = \left\{ [M(\rho) - M(R)]^{1-q} - \max [u_R(x, t), M(\rho) - M(R)]^{1-q} \right\} \eta_r^p(x, t).$$

Имеем

$$\int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(x, t) dx dt \geq -\gamma M(r) [M(\rho) - M(R)]^{1-q} r^n. \quad (4.2.22)$$

Далее, используя неравенства (4.2.3)–(4.2.5), получим

$$\begin{aligned} & \int \int_{E(R)} u_R^{-q}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \leq \gamma M(r) [M(\rho) - M(R)]^{1-q} r^n \\ & + \gamma \int \int_{E(R)} u^{p-q}(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt \\ & + \gamma (M(\rho) - M(R))^{p-pq} \int \int_{E(R)} u^{q(p-1)}(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt \\ & + \gamma (M(\rho) - M(R))^{1-q} \int \int_{E(R)} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \right. \\ & \left. + [H(x, t)]^{\frac{p-1}{p}} u^{p-1}(x, t) \right] \eta_r^{p-1}(x, t) \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x} \right| dx dt. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Используя неравенства (4.2.16) и (4.2.17), находим, что

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{E(\rho)} u^{q(p-1)}(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt \\
 &= \int \int_{E(\rho)} u^{p+1+\lambda_1-\lambda_2}(x, t) H(x, t) \eta_r^p(x, t) dx dt \\
 &\leq \gamma (M(\rho) - M(R))^{-\lambda_2} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1}. \quad (4.2.24)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваются слагаемые правой части (4.2.24). $\square$

Лемма 4.2.4. *С некоторым $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho R}^2(u(x, \tau)) \eta_r^p(x, \tau) dx + \int \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta_r^p(x, t) dx dt \\
 &\leq \gamma [M(\rho) - M(R)] \left\{ (M(r) r^n [M^*(r) r^n]^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} \right. \\
 &\quad \left. + (M(\rho) - M(R))^{-\lambda} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda} \right\}. \quad (4.2.25)
 \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{E(R)} h(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \eta_r^p(x, t) dx dt \\
 &\leq \int \int_{E(\rho)} \left\{ [M(\rho) - M(R)]^{\lambda_2} u_R^{-q}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \right. \\
 &\quad \left. + [M(\rho) - M(R)]^{\lambda_2-\lambda_1} H(x, t) u_R^{q(p-1)}(x, t) \right\} \eta_r^p(x, t) dx dt \\
 &\leq \gamma \left\{ (M(r) r^n [M^*(r) r^n]^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} \right. \\
 &\quad \left. + (M(\rho) - M(R))^{-\lambda} [M^*(r) r^n]^{p-1+\lambda_1} \right\}. \quad (4.2.26)
 \end{aligned}$$

Теперь требуемый результат следует из (4.2.26) и леммы 4.2.2. $\square$

Замечание 4.2.1. Переходя в (4.2.25) к пределу при $r \rightarrow 0$ и ис-

пользуя условие (4.2.8) и определение $M^*(r)$, из (4.2.25) получим

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho R}^2(u(x, \tau)) \eta_r^p(x, \tau) dx \\ & + \int \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq \gamma [M(\rho) - M(R)]^{1-\lambda}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

4.2.3. *Поточечная оценка решения.* Определим последовательности чисел

$$\rho_i = \rho/2(1 + 2^{-i}), \quad \alpha_i = 2^{-i-1}/(1 + 2^{-i}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

и последовательность функций

$$\varphi_i(x, t) = \omega_i \left(\left(\frac{|x|}{\rho_i} \right)^p + \frac{t}{\rho_i^{p+n(p-2)}} \right) [1 - \eta_R(x, t)], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Фигурирующая здесь функция $\eta_R(x, t)$ определена в предыдущем подразделе, а функции $\omega_i(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяются равенством

$$\omega_i(s) = \alpha_i^{-p} \min \{ [s - (1 - \alpha_i)^p]_+, 1 \}.$$

Так определенные функции $\varphi_i(x, t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_i(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D(\rho),$$

$$\varphi_i(x, t) = 1 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D(R) \setminus D(\rho),$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial x} \right| \leq \gamma \frac{2^{ip}}{\rho}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma \frac{2^{ip}}{\rho^{p+n(p-2)}}.$$

Подставим в интегральное тождество (4.2.7) функцию

$$\varphi(x, t) = \{ [u_R(x, t)]^2 + 1 \}^l u_R(x, t) \varphi_i^{m+p}(x, t), \quad l, m > 0.$$

Используя неравенства (4.2.3)–(4.2.5), получим

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} [u_R^2(x, \tau) + 1]^{l+1} \varphi_i^{m+p}(x, \tau) dx \\
& + \int \int_{\Omega_T} [u_R^2(x, t) + 1]^l \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \varphi_i^{m+p}(x, t) dx dt \\
& \leq \gamma(l+m+1)^{p+1} \int \int_{\Omega_T} \left\{ [u_R^2(x, t) + 1]^{l+1} \left| \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial t} \right| \right. \\
& \left. + [u_R^2(x, t) + 1]^{l+\frac{p}{2}} \left(\left| \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial x} \right|^p + H(x, t) \right) \right\} \varphi_i^m(x, t) dx dt. \quad (4.2.28)
\end{aligned}$$

Используя условия (4.2.6), оценим

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\Omega_T} \left\{ [u_R^2(x, t) + 1]^{l+1} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \right. \\
& \left. + [u_R^2(x, t) + 1]^{l+\frac{p}{2}} \left(\left| \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial x} \right|^p + H(x, t) \right) \right\} \\
& \times \varphi_i^m(x, t) dx dt \leq \gamma 2^{ip^2} \left[M^* \left(\frac{\rho}{2} \right) \right]^{p-2} \rho^{-\delta p} \\
& \times \left\{ \int_0^\tau \left[\int_{\Omega} \left([u_R^2(x, t) + 1]^{l+1} \varphi_i^m(x, t) \right)^{q'_0} dx \right]^{\frac{r'_0}{q'_0}} dt \right\}^{\frac{1}{r'_0}}. \quad (4.2.29)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$I_i(l, m) = \left\{ \int_0^\tau \left[\int_{\Omega} \left([u_R^2(x, t) + 1]^{l+1} \varphi_i^m(x, t) \right)^{q'_0} dx \right]^{\frac{r'_0}{q'_0}} dt \right\}^{\frac{1}{r'_0}}, \quad (4.2.30)$$

$$k_1 = \left(p\delta + \frac{n(p-1)}{r_0} \right) \left[n + p\delta + \frac{n(p-2)}{r_0} \right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{r'_0}{q'_0} - \frac{n-p}{n} \right) \left(\frac{r'_0}{q'_0} + \frac{p}{n} \right)^{-1},$$

$$l_1 = (l+1)k_1 - \frac{p-2}{2r'_0} k_1,$$

$$l_2 = (l+1)(1-k_1) + \frac{p-2}{2r'_0}k_1,$$

$$p_1 = \frac{p_2}{p_2-1}, \quad p_2 = \frac{nr'_0}{q'_0(n-p)}, \quad m_1 = mk_1, \quad m_2 = m(1-k_1).$$

Используя теорему вложения, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} I_i(l, m) &\leq \gamma 2^{\frac{ip^2}{r'_0}} (l+m+1)^{\frac{p}{r'_0}} \\ &\times \sup_{0 < t < T} \left\{ \int_{\Omega} \left([u_R^2(x, t) + 1]^{l_1} \varphi_i^{m_1}(x, t) \right)^{p_1 q'_0} dx \right\}^{\frac{1}{p_1 q'_0}} \\ &\times \left\{ \int \int_{\Omega_T} \left([u_R^2(x, t) + 1]^{l_2 r'_0 - \frac{p}{2}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \varphi_i^{m_2 r'_0}(x, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\rho^p} [u_R^2(x, t) + 1]^{l_2 r'_0} \varphi_i^{m_2 r'_0 - p}(x, t) \right) dx dt \right\}^{\frac{1}{r'_0}}. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Используя (4.2.28), (4.2.29), из (4.2.31) получим

$$I_i(l, m) \leq \gamma^i (l+m+1)^{p_3} \left\{ \left[M^* \left(\frac{\rho}{2} \right) \right]^{p-2} \frac{1}{\rho^{\delta p}} I_i(l_1 p_1 q'_0 - 1, m_1 p_1 q'_0 - p) \right\}^{\frac{1}{p_1 q'_0} + \frac{1}{r'_0}}, \quad (4.2.32)$$

где $p_3 = \frac{p}{r'_0} + (p+1) \left[\frac{1}{p_1 q'_0} + \frac{1}{r'_0} \right]$.

Положим

$$\bar{k} = r'_0(1-k_1) = \frac{n}{n + p\delta + \frac{(p-2)n}{r_0}}$$

и определим последовательности $\{l_j\}$, $\{m_j\}$ равенствами

$$l_j = \left[l_0 + 1 + \frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}} \right] \bar{k}^{-j} - \frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}} - 1,$$

$$l_0 = \frac{p}{2} - 1 + \frac{p\delta}{n} + \frac{p-2}{2r'_0},$$

$$m_j = \left[m_0 + \frac{p}{1-\bar{k}} \right] \bar{k}^{-j} - \frac{p}{1-\bar{k}},$$

$$m_0 = p + \frac{p^2\delta}{n} + \frac{p(p-2)}{r_0}.$$

Тогда неравенство (4.2.32) перепишется в виде

$$I_i(l_j, m_j) \leq \gamma^i \gamma^j (l + m + 1)^{p_3} \left\{ \left[M^* \left(\frac{\rho}{2} \right) \right]^{p-2} \frac{1}{\rho^{\delta p}} I_i(l_{j-1}, m_{j-1}) \right\}^{\bar{k}}. \quad (4.2.33)$$

Итерируя (4.2.33) по j , получим

$$[M(\rho_i) - M(R)]^{2(l_0+1+\frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}})} \leq \gamma \left\{ \left[M^* \left(\frac{\rho}{2} \right) \right]^{p-2} \frac{1}{\rho^{\delta p}} \right\}^{\frac{1}{1-\bar{k}}} I_i(l_0, m_0). \quad (4.2.34)$$

Используя неравенство Гельдера, теорему вложения и замечание 4.2.1, оценим правую часть (4.2.34). Имеем для

$$v_{i+1}(x, t) = \min \{ u_R(x, t), M(\rho_{i+1}) - M(R) \},$$

$$\begin{aligned} I_i(l_0, m_0) &= \left\{ \int_0^T \left[\int_{\Omega} \left((v_{i+1}^2 + 1)^{\frac{p}{2} + \frac{p}{n} \delta + \frac{p-2}{2r'_0}} \varphi_i^{p + \frac{p^2 \delta}{n} + \frac{p(p-2)}{r'_0}} \right)^{q'_0} dx \right]^{\frac{r'_0}{q'_0}} dt \right\}^{\frac{1}{r'_0}} \\ &\leq \sup_{0 < t < T} \left\{ \int_{\Omega} [v_{i+1}^2 + 1] \varphi_i^p(x, t) dx \right\}^{\frac{1}{q'_0} - \frac{n-p}{nr'_0}} \cdot \left\{ \int \int_{\Omega_T} \left(\left| \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} \right|^p \varphi_i^p \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + v_{i+1})^p \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|^p \right) dx dt \right\}^{\frac{1}{r'_0}} \leq \gamma^{\frac{ip^2}{r'_0}} [M(\rho_{i+1}) - M(R)]^{(1-\lambda) \left(\frac{1}{q'_0} + \frac{p}{nr'_0} \right)}. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Из (4.2.34), (4.2.35) и замечания 4.2.1 выводим, что

$$\begin{aligned} [M(\rho_i) - M(R)]^{2(l_0+1+\frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}})} \\ \leq \rho^{-\frac{n(p-2)+\delta p}{1-\bar{k}}} [M(\rho_{i+1}) - M(R)]^{(1-\lambda) \left(\frac{1}{q'_0} + \frac{p}{nr'_0} \right)}. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Перепишем неравенство (4.2.36) в виде

$$M(\rho_i) - M(R) \leq \gamma^i \rho^{-a_1} [M(\rho_{i+1}) - M(R)]^{a_2}, \quad (4.2.37)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{[n(p-2) + \delta p] r'_0}{2(l_0 + 1) r'_0 (1 - \bar{k}) + (p-2) \bar{k}}, \\ a_2 &= \frac{1-\lambda}{2} \left(\frac{1}{q'_0} + \frac{p}{nr'_0} \right) \left(l_0 + 1 + \frac{p-2}{2r'} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$l_0 + 1 + \frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}} = 1 + \frac{p\delta}{n} + \frac{p-2}{r_0} + \frac{p-2}{2r'_0} \cdot \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}},$$

$$\frac{1}{q'_0} + \frac{p}{nr'_0} = 1 + \frac{p\delta}{n} + \frac{p-2}{r_0},$$

то $a_2 < 1$.

Итерируя неравенство (4.2.37), получим

$$M(\rho_1) - M(R) \leq \gamma \rho^{-\frac{a_1}{1-a_2}}. \quad (4.2.38)$$

Обозначим

$$\Delta = \frac{p\delta}{n} + \frac{p-2}{r_0}.$$

Тогда

$$\frac{a_1(1-\lambda)}{1-\lambda-a_2} = \frac{n\left(\Delta + \frac{p-2}{r'_0}\right)(1+\Delta)}{\Delta\left[1+\Delta + \frac{p-2}{r'_0} \cdot \frac{1+\Delta}{\Delta}\right]} = n. \quad (4.2.39)$$

Поэтому

$$\frac{a_1}{1-a_2} \leq n - \gamma. \quad (4.2.40)$$

Это доказывает теорему 4.2.2.

4.3. Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией

4.3.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + g(x, t, u) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (4.3.1)$$

$(x, t) \in \Omega_T \setminus \{(0, 0)\}$.

Предполагаем, что $a_i(x, t, u, \xi)$ $i = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям (4.2.3)–(4.2.6), $g(x, t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и справедливы неравенства

$$g(x, t, u) \operatorname{sign} u \geq c_1 |u|^q - f(x, t), \quad q \geq p - 1 + \frac{p}{n},$$

$$|g(x, t, u)| \leq c_2 |u|^q + f(x, t), \quad (4.3.2)$$

$f(x, t) \in L^{r_0}(0, T; L^{q_0}(\Omega))$, где r_0 и q_0 удовлетворяют условию (4.2.6).

Под решением задачи (4.3.1), (4.2.2) понимаем функцию $u(x, t)$, такую, что

$$u(x, t)\varphi(x, t) \in V^{2,p}(\Omega_T) \cap L^{q+1}(\Omega_T),$$

и справедливо тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, \tau)\varphi(x, \tau)dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right. \\ \left. + g(x, t, u)\varphi - a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \right\} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

где $\varphi(x, t) \in V^{2,p}(\Omega_T)$ произвольная функция, такая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(\Omega_T)$, $\varphi(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in \{(0, 0)\} \cup \partial\Omega \times (0, T)\}$, τ – произвольное число из интервала $(0, T]$.

Основной результат данного раздела – следующая теорема.

Теорема 4.3.1. Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения (4.3.1), удовлетворяющее начальному условию (4.2.2). Предположим также, что выполняются условия (4.2.3)–(4.2.6) и (4.3.2). Тогда особенность $u(x, t)$ в точке $\{(0, 0)\}$ устранима.

При доказательстве теоремы 4.3.1 будем использовать следующий результат.

Теорема 4.3.2. Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.3.1. Тогда справедлива оценка

$$|u(t, x)| \leq \gamma \left[|x|^{p+n(p-2)} + t \right]^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (4.3.4)$$

при $0 < |x|^{p+n(p-2)} + t \leq R_0^{p+n(p-2)}$, где R_0 – достаточно малое число, $(x, t) \in \Omega_T$.

4.3.2. Доказательство теоремы 4.3.2. Пусть

$$R_0 < \frac{1}{2} \min\{1, \text{dist}(0, \partial\Omega), T^{1/\lambda}\}, \quad \lambda = \frac{p(q-1)}{q-p+1},$$

для $0 < r < R_0$ обозначим

$$D(r) = \left\{ (x, t) : \left(\frac{|x|}{r} \right)^p + \frac{t}{r^\lambda} \leq 1 \right\},$$

$$M(r) = \sup \{ |u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r) \}.$$

В дальнейшем предполагаем, что $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty$. Поэтому считаем, что

$$M(R_0) \geq 1.$$

Определим при $0 < \rho < R_0$ и $\sigma \in (0, 1/2)$ функцию

$$\varphi_{\sigma\rho}(x, t) = \omega_\sigma\left(\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^p + \frac{t}{\rho^\lambda}\right),$$

где $\omega_\sigma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\omega_\sigma(s) = 1$ при $1 \leq s \leq 2$, $\omega_\sigma(s) = 0$ вне интервала $1 - \sigma \leq s \leq 2 + \sigma$, $|d\omega_\sigma(s)/ds| \leq \gamma\sigma^{-1}$.

Определим $u_R(x, t) = (u(x, t) - M(R))_+$.

Лемма 4.3.1. *Предположим, что выполняются условия теоремы 4.3.1. Тогда при $0 < \sigma < 1/2$, $0 < \rho < R$ и $0 < R < R_0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, \tau) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, \tau) dx + \int \int_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u_R(x, t)}{\partial x} \right|^p \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & + \int \int_{\Omega_T} u_R^{q+1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma \sigma^{-p} \{ M^2(p - \sigma\rho) \rho^n + M^p(p - \sigma\rho) \rho^{n-p+\lambda} \}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (4.3.3) функцию $\varphi(x, t) = u_R(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t)$. Используя неравенства (4.2.3)–(4.3.3), получим

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, \tau) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, \tau) dx + \int \int_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u_R(x, t)}{\partial x} \right|^p \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & + \int \int_{\Omega_T} u_R^{q+1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \leq \gamma \int \int_{\Omega_T} \left\{ u_R^2(x, t) \left| \frac{\partial \varphi_{\sigma\rho}}{\partial t} \right| \varphi_{\sigma\rho}^{p-1}(x, t) dx dt \right. \\ & \left. + u_R^p(x, t) \left| \frac{\partial \varphi_{\sigma\rho}}{\partial t} \right| + H(x, t) |u(x, t)|^p \varphi_{\sigma\rho}^{p-1}(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Отсюда, используя условия (4.2.6), получим (4.3.5). $\square$

Лемма 4.3.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 4.3.1. Тогда*

$$M(\rho) \leq \gamma \rho^{-p/(q-p+1)} \quad \text{при } 0 < \rho < R_1 < R_0/2. \quad (4.3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в (4.3.3)

$$\varphi(x, t) = [u_R(x, t)]^m \varphi_{\sigma\rho}^s(x), \quad m, s > 0.$$

С помощью рассуждений, аналогичных изложенным в подраделе 4.2.3, используя лемму 4.3.1, получим требуемую оценку. $\square$

Из неравенства (4.3.7) вытекает, что

$$|u(x, t)| \leq \gamma \left(|x| + t^{1/\lambda} \right)^{-p/(q-p+1)} \quad (4.3.8)$$

при $0 < |x| + t^{1/\lambda} < R_1 < R_0/2$.

Оценка (4.3.8) влечет за собой следующее неравенство

$$\sup \{ |u(x, t)| : \rho^{p+n(p-2)} < |x|^{p+n(p-2)} + t < R_1^{p+n(p-2)} \} \leq \gamma \rho^{\frac{p+n(p-2)}{q-1}}. \quad (4.3.9)$$

В самом деле, если

$$|x|^{p+n(p-2)} + t > \rho^{p+n(p-2)}, \quad (4.3.10)$$

то возможны два варианта

$$1) \quad |x|^{p+n(p-2)} > t, \quad 2) \quad |x|^{p+n(p-2)} \leq t.$$

В первом случае в силу из (4.3.10) имеем $2|x|^{p+n(p-2)} > \rho^{p+n(p-2)}$. Тогда из (4.3.8) получаем

$$|u(x, t)| \leq \gamma \rho^{-\frac{p}{q-p+1}} \leq \gamma \rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-p+1}}. \quad (4.3.11)$$

Во втором случае в силу условия (4.3.2) и (4.3.10) имеем $2t > \rho^{p+n(p-2)}$, и неравенство (4.3.8) влечет

$$|u(x, t)| \leq \gamma \rho^{-\frac{p}{q-p+1} \cdot \frac{p+n(p-2)}{\lambda}} = \gamma \rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1}}. \quad (4.3.12)$$

Теперь из неравенства (4.3.9) следует неравенство (4.3.3), что мы доказываем теорему 4.3.2.

4.3.3. *Интегральные оценки решения.* Определим при $r \in (0, R_1)$ функцию

$$\psi_r(x, t) = \tilde{\psi}_r(|x|^{p+n(p-2)} + t), \quad (4.3.13)$$

где $\tilde{\psi}_r(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{\psi}_r(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \leq r^{p+n(p-2)},$$

$$\tilde{\psi}_r(s) = 1 \quad \text{при} \quad s \geq R(r),$$

$$\tilde{\psi}_r(s) = \frac{1}{(1-\theta) \ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}}} \int_{r^{p+n(p-2)}}^s \frac{1}{z \ln \frac{1}{z}} dz, \quad r^{p+n(p-2)} < s < R(r), \quad (4.3.14)$$

θ — выбираемое далее число из интервала $(0, 1)$ и $R(r)$ число, определяемое равенством

$$\ln \frac{1}{[R(r)]^{p+n(p-2)}} = \left[\ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^\theta. \quad (4.3.15)$$

Обозначим для $r > R_0$

$$\tilde{D}(r) = \{(x, t) : |x|^{p+n(p-2)} + t \leq r^{p+n(p-2)}\},$$

$$\tilde{M}(r) = \sup\{|u(x, t)| : (x, t) \in \tilde{D}(R_0) \setminus \tilde{D}(r)\},$$

$$E(r) = \{(x, t) \in \Omega_t \setminus \{(0, 0)\} : u(x, t) \geq \tilde{M}(r)\},$$

$$\tilde{u}_r(x, t) = [u(x, t) - \tilde{M}(r)]_+.$$

Определим число $\bar{p}$ и функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ при $0 < r < R_0$ равенствами

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{pq}{q-p+1}, \\ F_1(r) &= \begin{cases} [R(r)]^{p+n(p-1)-\bar{p}} & \text{при } q > p-1 + \frac{p}{n}, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-\frac{n(p-1)}{p}} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p > n(p-1), \\ \ln \ln \frac{1}{r} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p = n(p-1), \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-\frac{n(p-1)}{p}} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p < n(p-1), \end{cases} \quad (4.3.16) \end{aligned}$$

$$F_2(r) = \begin{cases} [R(r)]^{[p+n(p-1)]-(1-q')+n} & \text{при } q > p-1 + \frac{p}{n}, \quad q' = \frac{q}{q-1}, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{2-q'} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad 2 > q', \\ \ln \ln \frac{1}{r} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad 2 = q', \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-\frac{n(p-1)}{p}} & \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad 2 < q', \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Лемма 4.3.3. *Предположим, что выполняются условия теоремы 4.3.1 и с некоторым $\varepsilon \in [0, n)$ при $(x, t) \in \tilde{D}(R_0) \setminus (0, t_0)$ справедлива оценка*

$$|u(x, t)| \leq \gamma \left(|x| + t^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right)^{\varepsilon-n} \quad (4.3.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + u^q \ln \frac{u}{\tilde{M}(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_1(r) \right. \\ & \quad \left. + \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} F_2(r) + \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в (4.3.3) функцию $\varphi(x, t) = \ln_+ \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t)$, интегрируя по частям и выполняя стандартные рассуждения, получим

$$\iint_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + u^q \ln \frac{u}{\tilde{M}(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \leq \gamma \sum_{i=1}^3 I_i, \quad (4.3.20)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{E(\rho)} \int_{\tilde{M}(\rho)}^{u(x,t)} \ln_+ \frac{z}{\tilde{M}(\rho)} dz \, \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial t} \right| dx \, dt, \\
I_2 &= \iint_{E(\rho)} u^{p-1}(x, t) \ln^p \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}-p}(x, t) dx \, dt, \\
I_3 &= \iint_{E(\rho)} \left\{ f_1(x, t) + q_1(x, t) + [f_2(x, t)]^{\frac{p}{p-1}} + [g_2(x, t)]^{\frac{p}{p-1}} \right. \\
&\quad \left. + f_3(x, t) \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} + h^p(x, t) \ln^p \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \right\} u^{p-1}(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt.
\end{aligned}$$

Оценим интегралы I_i , $i = 1, 2, 3$. Используя неравенство Гельдера и (4.3.18), получаем

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{8} \iint_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt \\
&\quad + \iint_{E(\rho)} \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}-q}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial x} \right|^{q'} dx \, dt \\
&\leq \frac{1}{8} \iint_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt \\
&\quad + \gamma \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} \iint_{\tilde{D}(R(r)) \setminus \tilde{D}(r)} [|x|^{p+n(p-2)} + t]^{-q'} \\
&\quad \times \left(\ln \frac{1}{|x|^{p+n(p-2)} + t} \right)^{1-q'} dx \, dt \\
&\leq \frac{1}{8} \iint_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt + \gamma \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} F_2(r). \quad (4.3.21)
\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем I_2 . Имеем

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \frac{1}{8} \iint_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt \\
 &\quad + \iint_{E(\rho)} \left[\ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \right]^{1 + \frac{p-1}{p} \bar{p}} \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial x} \right|^{\bar{p}} dx \, dt \\
 &\leq \frac{1}{8} \iint_{E(\rho)} u^q \ln \frac{u(x, t)}{\tilde{M}(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx \, dt \\
 &\quad + \gamma \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} F_1(r). \quad (4.3.22)
 \end{aligned}$$

Для I_3 получим

$$I_3 \leq \gamma \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^p \frac{1}{\rho}. \quad (4.3.23)$$

Из неравенств (4.3.20)–(4.3.23) выводим (4.3.19). $\square$

Определим при $z \in \mathbb{R}$ функцию

$$\Phi_\rho(z) = \{[\tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} - [z - \tilde{M}(4\rho)]_+^{1-\kappa}\}_+, \quad (4.3.24)$$

где

$$\kappa = 1 + \frac{p\delta}{4n(p-1)}.$$

Положим при $0 < r < R_0$

$$\begin{aligned}
 F_3(r) &= \begin{cases} (p+n(p-2)(1-q')+n), & \text{если } q > p-1+p/n, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-q'}, & \text{если } q = p-1+p/n, \end{cases} \\
 F_4(r) &= \begin{cases} 1/\varepsilon [R(r)]^{\varepsilon(p-1)}, & \text{если } \varepsilon > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-p}, & \text{если } \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (4.3.25)
 \end{aligned}$$

Лемма 4.3.4. Пусть справедливы все условия теоремы 4.3.1, и пусть верна оценка (4.3.18). Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho)} [u(x, t) - \tilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \varphi_i^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma [\tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} \left\{ F_3(r) + F_4(r) \right. \\ & \left. + \left[\iint_{E(\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \right]^{(p-1)p} [F_4(r)]^{1/p} = \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \right\}. \quad (4.3.26) \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в (4.3.3) функцию $\varphi(x, t) = \Phi_\rho(u(x, t))\psi_r^{\bar{p}}(x, t)$, интегрируя по частям и используя (4.2.3)–(4.2.5), получим

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho)} \left\{ [u(x, t) - \tilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + \Phi_\rho(u(x, t))u^q(x, t) \right\} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq \gamma I_4 + \gamma [\tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} (I_5 + I_6 + I_7), \quad (4.3.27) \end{aligned}$$

где

$$I_4 = \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t))u(x, t)\psi_r^{\bar{p}}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| dx dt,$$

$$I_5 = \iint_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| dx dt,$$

$$I_6 = \iint_{E(\rho)} u^{p-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p dx dt,$$

$$I_7 = \iint_{E(\rho)} H(x, t)u^{p-1}(x, t)\psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq 1/8 \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) u^q(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\
&\quad + \gamma \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) \psi_r^{\bar{p}-q'}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{q'} dx dt \\
&\leq 1/8 \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) u^q(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt + \gamma [\tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} F_3(r),
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

$$I_5 \leq \gamma \left(\iint_{E(\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \right)^{(p-1)/p} (F_4(r))^{1/p}, \tag{4.3.29}$$

$$I_6 \leq \gamma F_4(r), \tag{4.3.30}$$

I_7 оценивается аналогично интегралу I_3 , а именно

$$I_7 \leq \gamma \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta}. \tag{4.3.31}$$

Собирая оценки (4.3.27)–(4.3.31), получим (4.3.26). $\square$

Обозначим

$$u^{(\rho)}(x, t) = \min\{[u(x, t) - \tilde{M}(4\rho)]_+, \tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)\}$$

при $(x, t) \in \Omega_T \setminus \{(0, 0)\}$,

$$E(\rho, 4\rho) = \{(x, t) \in \Omega_T : \tilde{M}(4\rho) < u(x, t) < \tilde{M}(\rho)\}.$$

Лемма 4.3.5. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.3.1 и неравенство (4.3.18). Тогда для $0 < \rho < R_1$ справедлива оценка*

$$\iint_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq \gamma \tilde{M}(\rho) \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta}. \tag{4.3.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в (4.3.3) функцию $\varphi(x, t) = \min\{u(x, t) - \tilde{M}(4\rho)_+, \tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(4\rho)\} \psi_r^{\bar{p}}(x, t)$. Интегрируя по частям, стандартными рассуждениями получим

$$\begin{aligned}
&\iint_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt + \iint_{E(\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\
&\leq \gamma (I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}), \tag{4.3.33}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_8 &= \iint_{E(4\rho)} u(x, t) u^{(\rho)} \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| dx dt, \\
I_9 &= \iint_{E(4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| dx dt, \\
I_{10} &= \iint_{E(4\rho)} h(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} u^{(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt, \\
I_{11} &= \tilde{M}(\rho) \iint_{E(4\rho)} \left[H(x, t) + \psi_r^{\bar{p}}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \right] u^{p-1} \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t).
\end{aligned}$$

При оценке интеграла I_8 воспользуемся неравенством Юнга, в результате получим

$$I_8 \leq \frac{1}{8} \iint_{E(4\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt + \gamma \tilde{M}(\rho) F_3(r). \quad (4.3.34)$$

Аналогичные рассуждения и неравенство Гельдера дают следующую оценку интеграла I_9 :

$$\begin{aligned}
I_9 &\leq \frac{1}{8} \iint_{E(4\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt + \frac{1}{8} \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\
&\quad + \gamma \tilde{M}(\rho) \left[\left\{ \iint_{E(4\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \right. \\
&\quad \left. \times [F_5(r)]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} + \gamma F_4(r) \right], \quad (4.3.35)
\end{aligned}$$

где

$$F_5(r) = \begin{cases} [R(r)]^{p+n(p-1)-\bar{p}} & \text{при } q > p-1+p/n, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-(p-1)(n+1)} & \text{при } q = p-1+p/n. \end{cases} \quad (4.3.36)$$

Далее, используя неравенства Юнга и Гельдера, (4.3.18) и выбор κ , получим

$$\begin{aligned} I_{10} \leq & \frac{1}{8} \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt + \gamma \tilde{M}(\rho) \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \\ & + \gamma \tilde{M}(\rho) \left\{ \iint_{E(\rho, 4\rho)} [u - \tilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \right\}^{(p-1)/p} \\ & \times \rho^{(\varepsilon(p-1)+3/4\delta p)1/p}, \quad (4.3.37) \end{aligned}$$

$$I_{11} \leq \gamma \tilde{M}(\rho) \{ \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} + F_4(r) \}, \quad (4.3.38)$$

Леммы 4.3.3 и 4.3.4 и неравенства Гельдера дают оценку

$$\begin{aligned} \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq & \gamma \tilde{M}(\rho) \left\{ \rho^{\varepsilon(p-1)+(p\delta)/2} + F_3(r) + F_4(r) \right. \\ & + [F_5(r)]^{(q-p+1)/(qp-p+1)} \left\{ \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^\rho 1 / \rho \right\}^{(q(p-1))/(qp-p+1)} \\ & \left. + F_6(r) \rho^{(\varepsilon(p-1)+\delta p)1/p} \right\}, \quad (4.3.39) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_6(r) = & \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_1(r) + \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{q}'} F_2(r) \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \\ & \times [F_5(r)]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} + \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_1(r) \right. \\ & \left. + \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{q}'} F_2(r) \right\}^{\frac{p-1}{p}} [F_4(r)]^{1/p}. \end{aligned}$$

Обоснуем возможность перехода к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (4.3.39). Равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_3(r) = \lim_{r \rightarrow 0} F_4(r) = \lim_{r \rightarrow 0} F_5(r) = 0 \quad (4.3.40)$$

следует непосредственно из определения $F_3(r)$, $F_4(r)$ и $F_5(r)$.

В силу определения $F_1(r)$, $F_2(r)$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_1(r) = 0 \quad \text{при} \quad q \geq p - 1 + p/n; \quad p < n(p - 1), \quad (4.3.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_2(r) = 0 \quad \text{при} \quad q \geq p - 1 + p/n; \quad q' < 2. \quad (4.3.42)$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_1(r) = 0 \quad \text{при} \quad q \geq p - 1 + p/n, \quad p = n(p - 1), \quad (4.3.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_2(r) = 0 \quad \text{при} \quad q = p - 1 + p/n, \quad q' = 2. \quad (4.3.44)$$

Далее, при $q \geq p - 1 + p/n$ и $p > n(p - 1)$ имеем

$$\begin{aligned} & [F_1(r)]^{-q(p-1)} [F_2(r)]^{q-p+1} \\ & \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{-p(p-1)(n+1)}{n} \theta + [1 - \frac{n(p-1)}{p}](p-1+p/n)(p-1)}, \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

$$[F_1(r)]^{p-1} [F_4(r)]^{q-p+1} \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{[1 - \frac{n(p-1)}{p} - \theta](p-1)}. \quad (4.3.46)$$

Правые части неравенств (4.3.45) и (4.3.46) стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, если

$$\theta \geq \max \left\{ \frac{p + n(p-1)}{p(n+1)}, \frac{1}{p}(p - (n-1/2)(p-1))_+ \right\}. \quad (4.3.47)$$

Аналогично, при $q = p - 1 + p/n$ и $q' > 2$ получаем

$$\begin{aligned} & [F_2(r)]^{q(p-1)} [F_5(r)]^{q-p+1} \\ & \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{-p(p-1)(n+1)}{n} \theta + [1 - \frac{1}{p-2+p/n}](p-1)(p-1+p/n)}, \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

$$[F_2(r)]^{p-1} [F_4(r)] \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{(1 - \frac{1}{p-2+p/n} - \theta)(p-1)}. \quad (4.3.49)$$

Правые части неравенств (4.3.48) и (4.3.49) стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, если

$$\theta \geq \max \left\{ \frac{p+n(p-1)}{p(n+1)}, 1 - \frac{1}{2(p-2+p/n)} \right\}. \quad (4.3.50)$$

Окончательно, выбирая θ , равным наибольшему значению правых частей неравенств (4.3.48) и (4.3.49), получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_6(r) = 0. \quad (4.3.51)$$

Теперь, переходя в неравенстве (4.3.39) к пределу при $r \rightarrow 0$, получим (4.3.32). $\square$

4.3.4. Доказательство Теоремы 4.3.1. Докажем сначала вспомогательную оценку.

Лемма 4.3.6. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.3.1. Тогда*

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(2\rho) \leq & \gamma \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0}} \tilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0}} \tilde{M}^p\left(\frac{\rho}{2}\right) \right]^{\frac{(n+p)r'_0}{p(n+p+2r'_0)}} \\ & \times \left(\iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^p(x, t) \xi_\rho^p(x, t) dx dt \right)^{\frac{n+p-nr'_0}{p(n+p+2r'_0)}}. \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

где $\xi_\rho(x, t) = \xi_\rho(|x|^{p+n(p-2)} + t)$, $\xi_\rho(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция класса C^∞ такая, что $\xi_\rho(s) = 1$, при $s \geq \rho^{p+n(p-2)}$, $\xi_\rho(s) = 0$ при $s \leq (\rho/2)^{p+n(p-2)}$, $0 \leq \xi_\rho(s) \leq 1$, $|d\xi_\rho/ds| \leq \gamma/\rho^{p+n(p-2)}$.

Доказательство. Подставим в (4.3.3) функцию $\varphi(x, t) = [u_{2\rho}(x, t)]^t \xi_\rho^k(x, t)$, $l, k > 0$, интегрируя по частям, аналогично (4.2.31) устанавливаем оценку

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^l(x, t) \xi_\rho^k(x, t) dx dt \leq & \gamma(l+k)^{\rho(p/n+2)} \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0}} \tilde{M}^2(\rho/2) \right. \\ & \left. + \rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0}} \tilde{M}^p(\rho/2) \right]^{(n+p)/n} \left\{ \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^{l\bar{\theta}-l'}(x, t) \xi_\rho^{k\theta-k'}(x, t) dx dt \right\}^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

где

$$\theta = \frac{nr'_0}{n+p}, \quad l' = \frac{p(n+2)}{n+p} r'_0, \quad k' = pr'_0,$$

l, k – произвольные положительные числа, такие что $l\bar{\theta} - l' \geq p$, $k\bar{\theta} - k' \geq p$.

Неравенство (4.3.33) дает возможность применить итерационный метод Мозера. В результате получим (4.3.52). $\square$

Лемма 4.3.7. *С некоторой постоянной a , зависящей лишь от известных величин, справедлива оценка*

$$\tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(2\rho) \leq \gamma \rho^{a-n}. \quad (4.3.54)$$

Доказательство. Оценим интеграл в правой части (4.3.52). Используя неравенство Пуанкаре и лемму 4.3.5, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^p(x, t) \xi_\rho^p(x, t) dx dt &\leq \iint_{\Omega_T} u^{\rho/2}(x, t) dx dt \\ &\leq \gamma \rho^p \iint_{E(\rho/2, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq \gamma \tilde{M}(\rho) \rho^{p+\varepsilon(p-1)+\delta p/2}. \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Тогда из (4.3.52) и (4.3.55) следует неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\rho) - \tilde{M}(2\rho) &\leq \gamma \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1}} + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0} - p\frac{p+n(p-2)}{q-1}} \right] \\ &\quad \times \left[\rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1} + p+\varepsilon(p-1) + \frac{\delta p}{2}} \right]^{\frac{n+p-nr'_0}{p(n+p+2r'_0)}}. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Имеем

$$\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1} \leq \frac{p+n(p-2)}{r_0} - p\frac{p+n(p-2)}{q-1},$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1} \right] \frac{(n+p)r'_0}{p(n+p+2r'_0)} \\ + \left[p - \frac{p+n(p-2)}{q-1} \right] \frac{n+p-nr'_0}{p(n+p+2r'_0)} \geq -n. \end{aligned}$$

Из двух последних неравенств и неравенства (4.3.55) следует оценка (4.3.54). $\square$

Определим последовательности $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{\tilde{M}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ равенствами

$$\rho_j = \tilde{R}_0/2^j, \quad \tilde{M}_j = \tilde{M}(\rho_j).$$

Из (4.3.54) получаем

$$\tilde{M}_j - \tilde{M}_{j-1} \leq \gamma 2^{j(n-a)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.57)$$

Суммируя неравенство (4.3.57), получим

$$\tilde{M}_j - \tilde{M}_1 \leq \gamma 2^{j(n-a)}.$$

Откуда следует оценка

$$\tilde{M}(\rho) \leq \gamma(\tilde{M}_1 + \rho^{a-n}),$$

которая в свою очередь обеспечивает оценку

$$|u(x, t)| \leq \gamma \left\{ [|x| + |t|^{1/(p+n(p-2))}]^{a-n} + \tilde{M}_1 \right\}. \quad (4.3.58)$$

Это неравенство уже обеспечивает устранимость особенности решения $u(x, t)$ в $\{(0, 0)\}$, что и доказывает теорему 4.3.1.

ГЛАВА 5

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КЛАССА КАТО

5.1. Введение

В данной главе мы изучаем некоторые качественные свойства решений квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из Като классов.

После выдающихся работ Де Джорджи [37], Нэша [98], Мозера [93], многими авторами исследовался вопрос о гельдеровости и неравенстве Харнака для решений эллиптических уравнений. О.А.Ладыженская и Н.Н.Уральцева [88], Серрин [112] установили логальную гельдеровость и неравенство Харнака для решений общих квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного типа при условии, что коэффициенты уравнений принадлежат соответствующим L^q -классам.

Айзенман и Саймон в работе [1] доказали неравенство Харнака для неотрицательных решений уравнения $-\Delta u + V(x)u = 0$ при условии, что $V(x)$ принадлежит классу Като. Киаренза, Фэйбс и Карофало [33] доказали аналогичный результат для линейного дивергентного эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами и потенциалом из класса Като. Кюрата [83], используя метод Киарензы, Фэйбса и Карофало доказал неравенство Харнака для уравнения $-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + V(x)u = 0$ при условии, что $\sum_{i=1}^n b_i^2(x)$, $V(x)$ принадлежат классу Като. Позже, Бироли [20] ввел нелинейный класс Като и доказал неравенство Харнака для неотрицательных решений эллиптического уравнения вида $-\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = 0$. Неравенство Харнака для общего квазилинейного эллиптического уравнения дивергентного типа с коэффициентами из классов Като было получено в статье [121].

Вопрос об устранимости изолированной особенности для уравнения $-\Delta u + V(x)u = 0$ с $V(x)$ принадлежащей классу Като был рассмотрен в [130]. В работах [90, 91] установлены точные условия устранимости изолированных особенностей для общих дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из класса Като.

Изложение результатов работ [90, 91, 121] составляет существенную часть содержания данной главы.

В разделе 5.2 излагаются результаты статьи [121] и доказывается неравенство Харнака для неотрицательных решений квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из класса Като. В разделе 5.3 представлены результаты [90] и доказывается точное условие устранимости изолированной особенности для решений квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из классов Като. Наконец, в разделе 5.4 изложены результаты [91] и доказывается точное условие устранимости изолированной особенности для решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией и коэффициентами из классов Като.

5.2. Неравенство Харнака

5.2.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Рассмотрим неотрицательные решения уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in B_1 = \{ |x| < 1 \}. \quad (5.2.1)$$

Предполагаем, что функции $a_i(x, u, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x \in B_1$, $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям Каратеодори и выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_i \geq c_1 |\xi|^p - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \quad 1 < p < n, \quad (5.2.2)$$

$$|a_i(x, u, \xi)| \leq c_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2.3)$$

$$|a_0(x, u, \xi)| \leq h(x) |\xi|^{p-1} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x) \quad (5.2.4)$$

с неотрицательными функциями $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h(x)$.

Для формулировки условий на функции $h(x)$, $g_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ введем в рассмотрение классы K_p , $\tilde{K}_p$ и $K_{2,p}$, обобщающие для $p \neq 2$ известный класс Като.

Говорим, что неотрицательная функция $g(x) \in L^1(B_1)$ принадлежит K_p , если

$$\lim_{R \rightarrow 0} \sup_{x \in B_1} \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} g(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} = 0. \quad (5.2.5)$$

Говорим также, что неотрицательная функция $g(x) \in L^1(B_1)$ принадлежит $\tilde{K}_p$, если

$$\lim_{R \rightarrow 0} \sup_{x \in B_1} \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} g(z) dz \right\}^{1/p} \frac{dr}{r} = 0. \quad (5.2.6)$$

Кроме того, говорим, что неотрицательная функция $g(x) \in L^1(B_1)$ принадлежит $K_{2,p}$, если

$$\lim_{R \rightarrow 0} \sup_{x \in B_1} \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} g(z) dz \right\}^{\frac{1}{\max(p,2)-1}} \frac{dr}{r} = 0. \quad (5.2.7)$$

В дальнейшем предполагаем, что

$$g_1(x), f_1(x), g_2^{p/(p-1)}(x), f_2^{p/(p-1)}(x) \in \tilde{K}_p, \quad h^p(x), g_3(x), f_3(x) \in K_p. \quad (5.2.8)$$

Под решением уравнения (5.2.1) понимаем функцию $u(x) \in W_{loc}^{1,p}(B_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{B_1} \left[\sum_{i=1}^n a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \right] dx = 0 \quad (5.2.9)$$

для любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_{loc}^{1,p}(B_1)$.

Для формулировки результатов введем такие обозначения:

$$\begin{aligned} f(R) = \sup_{x_0 \in B_1} \sup_{x \in B(x_0, R)} \left\{ \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} [f_1(z) + f_2^{p/(p-1)}(z)] dz \right\}^{1/p} \frac{dr}{r} \right. \\ \left. + \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} f_3(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned} g(R) = \sup_{x_0 \in B_1} \sup_{x \in B(x_0, R)} \left\{ \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} [g_1(z) + g_2^{p/(p-1)}(z)] dz \right\}^{1/p} \frac{dr}{r} \right. \\ \left. + \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} g_3(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$h(R) = \sup_{x_0 \in B_1} \sup_{x \in B(x_0, R)} \int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x,r)} h^p(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r}. \quad (5.2.12)$$

Теорема 5.2.1. Пусть $u(x)$ – неотрицательное решение уравнения (5.2.1). Предположим, что выполняются неравенства (5.2.2)–(5.2.4) и условия (5.2.8). Пусть v_0 – такая постоянная, что

$$f(R) + g(R) + h(R) \leq v_0 \quad \text{при} \quad 0 < R < 1/4. \quad (5.2.13)$$

Тогда для любого $q \in (0, n(p-1)/(n-p))$ существуют постоянные K_1 и α , зависящие только от n, p, c_1, c_2, v_0 и q такие, что для любой точки $x_0 \in B_1$ такой что $B(x_0, 4R) \subset B_1$ справедлива оценка

$$\int_{B(x_0, R/2)} [u(x) + \alpha f(R)]^q dx \leq K_1 R^n \inf_{B(x_0, R)} [u(x) + \alpha f(R)]^q. \quad (5.2.14)$$

При доказательстве теоремы 5.2.1 будем использовать

Лемма 5.2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $R_0 = R_0(\varepsilon) < 1$ и $\tau(\varepsilon)$, зависящие только от n, p и ε , такие, что из неравенства

$$\sup_{x \in B_1} \int_0^{R_0} \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x, r)} H(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \leq \tau(\varepsilon), \quad (5.2.15)$$

следует оценка

$$\int_{B(x_0, R)} H(x) |\varphi(x)|^p dx \leq \varepsilon \int_{B(x_0, R)} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^p dx \quad (5.2.16)$$

для любой функции $\varphi(x) \in \mathring{W}^{1,p}(B(x_0, R))$, если $R \leq R_0$, $B(x_0, 4R_0) \subset B_1$.

Доказательство леммы имеется в [20].

Теорема 5.2.2. Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения (5.2.1). Предположим, что выполнены неравенства (5.2.2)–(5.2.4) и условия (5.2.8). Тогда существуют положительные постоянные K_2 и τ_* , зависящие только от n, p, c_1, c_2 и v_0 , такие, что для R и α , удовлетворяющих неравенству

$$g(R) + h(R) \leq \tau_*, \quad \alpha \geq \tau_*^{-1}, \quad (5.2.17)$$

и любой точки $x_0 \in B_1$, такой что $B(x_0, 4R) \subset B_1$ справедлива оценка

$$\max_{x \in B(x_0, R)} [u(x) + \alpha f(R)] \leq K_2 \min_{x \in B(x_0, R)} [u(x) + \alpha f(R)]. \quad (5.2.18)$$

5.2.2. *Доказательство теоремы 5.2.1.* Пусть x_0 – некоторая точка из B_1 , $R < (1 - |x_0|)/4$ и зафиксируем $x_1 \in B(x_0, \frac{R}{2})$. Определим при $r < R$ функцию $\xi(x) \in C_0^\infty(B(x_1, r))$, равную единице в $B(x_1, r/2)$, $0 \leq \xi(x) \leq 1$, $|\frac{\partial \xi(x)}{\partial x}| \leq 2/r$.

Определим также при положительных α, l, δ

$$v(x) = [u(x) + \alpha f(R)]^{-1}, \quad \alpha > 0, \quad L = B(x_0, r) \cap \{v(x) > l\},$$

$$\lambda = \frac{(p-1)(n-1)}{p(n-p-1)}, \quad k = p + \frac{(p^2-1)(1+\lambda)}{p-1-\lambda}. \quad (5.2.19)$$

Лемма 5.2.2. Пусть выполнены условия (5.2.2)–(5.2.4). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_L \left\{ \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds + v(x) \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \\ & \leq \gamma \delta^p r^{-p} \int_L u(x) \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(p+1)} \xi^{k-p}(x) dx \\ & \quad + \gamma \int_L v^p(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) dx \\ & \quad + \gamma \int_L v^{p+1}(x) \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) dx, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(x) &= g_1(x) + g_3(x) + h^p(x) \\ & \quad + f_1(x) f^{-p}(R) \alpha^{-p} + f_3(x) f^{-1-p}(R) \alpha^{1-p}, \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

$$H_2(x) = g_1(x) + g_2^{\frac{p}{p+1}}(x) + [f_1(x) + f_2^{\frac{p}{p+1}}(x)] f^{-p}(R) \alpha^{-p}. \quad (5.2.22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (5.2.9) функцию

$$\varphi(x) = v^{2p-1}(x) \left[\int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds \right]_+ \xi^k(x), \quad k > 0.$$

Получим

$$\int_L v^{2p}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) g^k(x) dx$$

$$+ \int_L v^{2p+1}(x) \left(1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \leq \gamma \sum_{j=1}^5 I_j, \quad (5.2.23)$$

где

$$I_1 = \int_L v^{2p}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds [g_1(x)u^p(x) + f_1(x)] \xi^k(x) dx,$$

$$I_2 = \int_L v^{2p+1}(x) \left(1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} [g_1(x)u^p(x) + f_1(x)] \xi^k(x) dx,$$

$$I_3 = \frac{1}{r} \int_L v^{2p+1}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + g_2(x)u^{p-1}(x) + f_2(x) \right] \xi^{k-1}(x) dx,$$

$$I_4 = \int_L h(x)v^{2p-1}(x) \int_1^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \xi^k(x) dx,$$

$$I_5 = \int_L v^{2p-1}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds [g_3(x)u^{p-1}(x) + f_3(x)] \xi^k(x) dx.$$

Далее будем использовать легко проверяемое неравенство

$$\int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \leq \gamma \delta. \quad (5.2.24)$$

Используя определение функции $v(x)$ и неравенство Юнга, получим

$$I_1 \leq \int_L v^p(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds [g_1(x)u^p(x) + f_1(x)f^{-p}(R)\alpha^{-p}] \xi^k(x) dx, \quad (5.2.25)$$

$$I_2 \leq \gamma \int_L v^{p+1}(x) \left[1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right]^{-1-\lambda} [g_1(x) + f_1(x)f^{-p}(R)\alpha^{-p}] \xi^k(x) dx, \quad (5.2.26)$$

$$\gamma I_3 \leq \frac{1}{4} \int_L v^{2p+1}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p g^k(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \frac{\delta^p}{r^p} \int_L v(x) \left(1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x) dx \\
& + \gamma \int_L v^{p+1}(x) \left[1 + \frac{v(x) - l}{\delta} \right]^{-1-\lambda} [g_2^{\frac{p}{p-1}}(x) + f_2^{\frac{p}{p-1}}(x) f^{-p}(R) \alpha^{-p}] \xi^k(x) dx,
\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

$$\begin{aligned}
\gamma I_4 & \leq \frac{1}{4} \int_L v^{2p}(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \\
& + \gamma \int_L v^p(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds h^p(x) \xi^k(x) dx,
\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

$$I_5 \leq \gamma \int_L v^p(x) \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds [g_3(x) + f_3(x) f^{1-p}(R) \alpha^{1-p}] \xi^k(x) dx. \tag{5.2.29}$$

Теперь оценка (5.2.20) является непосредственным следствием неравенств (5.2.23), (5.2.25)–(5.2.29). $\square$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\delta} \left[\int_l^{v(x)} s^{1/p} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-(1+\lambda)/p} ds \right]. \tag{5.2.30}$$

Лемма 5.2.3. Пусть выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4) и (5.2.8). Тогда существует число $\theta_1 \in (0, 1)$, зависящее только от n, p, c_1, c_2 и v_0 , такое, что для R, α , удовлетворяющих неравенству

$$g(R) + h(R) \leq \theta_1, \quad \alpha \geq \theta_1^{-1}, \tag{5.2.31}$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\int_L \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx & \leq \gamma r^{-p} \int_L v(x) \left(1 + \frac{v(x) - 1}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x) dx \\
& + \gamma l^p \delta^{1-p} \int_L H_1(x) \xi^k(x) dx + \gamma l^{p+1} \delta^{-p} \int_L H_2(x) \xi^k(x) dx.
\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

Доказательство. Используя неравенства (5.2.2), (5.2.6) и определение функции $\Phi(x)$, заключаем, что для доказательства леммы достаточно получить следующие оценки

$$2^{p-1} \gamma I_8 \leq \frac{1}{4} I_6 + \gamma I_7, \quad 2^p \gamma I_9 \leq \frac{1}{4} I_6 + \gamma I_7, \tag{5.2.33}$$

где

$$I_6 = \int_L \left\{ \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds + v(x) \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx,$$

$$I_7 = \delta^p r^{-p} \int_L v(x) \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x) dx,$$

$$I_8 = \int_L (v(x)-l)^p \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) dx,$$

$$I_9 = \int_L (v(x)-l)^{p+1} \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) dx.$$

Покажем, что второе из неравенств (5.2.33) следует из леммы 5.2.1. Условие (5.2.15) для функции H_2 следует из (5.2.31) при достаточно малом θ_1 , так как

$$\int_0^R \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B_r(x)} H_2(z) dz \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \leq \gamma[g(R) + \alpha^{p/(p-1)}]. \quad (5.2.34)$$

Поэтому при $\gamma[g(R) + \alpha^{p/(p-1)}] \leq \tau(\varepsilon)$ имеем

$$I_9 \leq \varepsilon \int_{B_r(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (v(x)-l)^{(p+1)/p} \left(1 + \frac{v(x)-l}{\delta} \right)^{-(1+\lambda)/p} \xi^{k/p}(x) \right\} \right| dx,$$

и дальше, оценивая последний интеграл, приходим к неравенству (5.2.33) для I_9 при соответствующем выборе ε .

Для доказательства первого неравенства в (5.2.33) введем в рассмотрение вспомогательную функцию $w(x)$ как решение задачи

$$-\Delta_p w = H_1(x), \quad w(x) \in \mathring{W}^{1,p} B(x_0, R), \quad (5.2.35)$$

где Δ_p — p -лапласиан. Условие (5.2.8) обеспечивает включение $H_1(x) \in [\mathring{W}^{1,p}(B_R)(x_0)]^*$, так что существование $w(x)$ немедленно следует из теории монотонных операторов. Для $w(x)$ справедлива оценка

$$|w(x)| \leq \gamma[g(R) + h(R) + \alpha^{-\frac{p}{(p-1)}} + \alpha^{-1}], \quad (5.2.36)$$

вытекающая из [59].

Используя определение решения задачи (5.2.35), имеем

$$I_8 = \sum_{i=1}^n \int_L \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (v(x) - l)^p \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \xi^k(x) \right\} dx. \quad (5.2.37)$$

Вычисляя производную выражения в фигурной скобке и применяя неравенство Юнга приходим к оценке

$$2^{p-1} \gamma I_8 \leq \frac{1}{8} I_6 + \gamma (I_7 + I_{10}), \quad (5.2.38)$$

где

$$I_{10} = \int_L (v(x) - l)^p \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx.$$

Снова используя интегральное тождество для решения задачи (5.2.35), получаем

$$I_{10} = \int_L w(x) (v-l)^p \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_L \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (v-l)^p \int_l^{v(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \xi^k(x) \right\} dx.$$

Оценивая последний интеграл аналогично оценке правой части (5.2.37), приходим к следующему неравенству

$$I_{10} \leq \gamma \max \{ |w(x)| x \in B_R(x_0) \} [I_8 + I_6 + I_7 + I_{10}]. \quad (5.2.39)$$

Используя оценку (5.2.36), можем выбрать θ_1 столь малым числом, чтобы неравенства (5.2.31), (5.2.38) и (5.2.39) обеспечивали выполнение первой оценки в (5.2.33). $\square$

Рассмотрим последовательность чисел $R_j = R2^{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, и последовательность функций $\xi_j(x) \in C_0^\infty(B_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, такую, что $\xi_j(x) = 1$ в $B_{j+1} = B(x_1, R_{j+1})$, $\xi_j(x) = 0$ вне B_j , $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$, $|\frac{\partial \xi_j}{\partial x}| \leq 2R_j^{-1}$.

Пусть $l_0 = 0$ и определим для любого $j \geq 1$

$$\varkappa = \frac{1}{R_j^n} \int_{L_j} \frac{v(x)}{l_{j+1}} \left(\frac{v(x) - l_j}{l_{j+1} - l_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) dx, \quad (5.2.40)$$

$L_j = B_j \cap \{v(x) > l_j\}$, $k > p$ – некоторое фиксированное число, которое определим позже. Равенство (5.2.40) определяет l_{j+1} , если l_j известно. Задав l_0 , тем самым определим последовательность $\{l_j\}$.

Положим

$$\delta_j = l_{j+1} - l_j, \quad \Phi_j(x) = \left[\int_{l_j}^{v(x)} s^{1/p} \left(1 + \frac{s - l_j}{\delta_j} \right)^{-(1+\lambda)/p} ds \right]_+.$$

Лемма 5.2.4. Пусть выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4), (5.2.8) и неравенство (5.2.31). Тогда существует $\varkappa$, зависящее только от n, p, c_1, c_2 и v_0 , такое, что для любого $j \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \delta_j \leq \frac{1}{2} \delta_{j-1} + \gamma l_j \left\{ R_j^{p-n} \int_{B_j} H_1(x) \xi_j(x) dx \right\}^{1/(p-1)} \\ + \gamma \left\{ R_j^{p-n} l_j^{p-1} \int_{B_j} H_2(x) \xi_j(x) dx \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

Доказательство. Предположим, что $\delta_j \geq \delta_{j-1}/2$, в противном случае неравенство (5.2.41) очевидно.

Представим L_j виде

$$L_j = L'_j \cup L''_j, \quad L'_j = \left\{ \frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \leq \varepsilon \right\} \cap L_j, \quad L''_j = L_j \setminus L'_j,$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ будет выбрано в дальнейшем. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_j^n} \int_{L'_j} v(x) \left(\frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) dx \\ & \leq \frac{2^n}{R_{j-1}^n} \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \int_{L_{j-1} \cap \{v > l_j\}} v(x) \xi_j^{k-p}(x) dx \\ & \leq \frac{2^n}{R_{j-1}^n} \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \int_{L_{j-1}} v(x) \left(\frac{v(x) - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_{j-1}^{k-p}(x) dx \\ & \leq 2^n \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \varkappa l_j. \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

Далее воспользуемся просто проверяемым неравенством

$$\Phi_j(x) \geq \gamma(\varepsilon) v^{\frac{1}{p}}(x) \left(\frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{1-(1+\lambda)/p} \quad (5.2.43)$$

при $v(x) - l_j \geq \delta_j \varepsilon$ с постоянной $\gamma(\varepsilon)$, зависящей от известных параметров и ε .

Используя теорему вложения, в силу выбора λ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_j''} \int_{L_j''} v(x) \left(\frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) dx \\ & \leq \gamma(\varepsilon) l_j^{\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} R_j^{-n} \int_{L_j} [\Phi_j(x)]^{p \frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}} \xi_j^{(k-p)}(x) dx \\ & \leq \gamma(\varepsilon) l_j^{\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} \left[R_j^{p-n} \int_{L_j} \left| \frac{\partial \Phi_j(x)}{\partial x} \right|^p \xi_j^{(k-p) \frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)}} dx \right. \\ & \quad \left. + R_j^{-n} \int_{L_j} \Phi_j^p(x) \xi_j^{(k-p) \frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)} - p} dx \right]^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \quad (5.2.44) \end{aligned}$$

Используя лемму 5.2.3 и выбирая k из условия $(k-p) \frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)} = p+1$, из (5.2.44) получим

$$\begin{aligned} & R_j^{-n} \int_{L_j''} v(x) \left(\frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) dx \\ & \leq \gamma(\varepsilon) l_j^{\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} \left[R_j^{-n} \int_{L_j} v(x) \left(1 + \frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j(x) dx \right. \\ & \quad \left. + R_j^{p-n} \delta_j^{1-p} l_j^p \int_{B_j} H_1(x) \xi_j(x) dx + R_j^{p-n} \delta_j^{-p} l_j^{p+1} \int_{B_j} H_2(x) \xi_j(x) dx \right]^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \quad (5.2.45) \end{aligned}$$

Здесь также была использована непосредственно проверяемая оценка

$$\Phi_j(x) \leq \gamma v^{\frac{1}{p}}(x) \left(1 + \frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{1-(1+\lambda)/p} \quad \text{при } x \in L_j. \quad (5.2.46)$$

Аналогично (5.2.42) в силу неравенства $\delta_j \geq \delta_{j-1}/2$ имеем

$$\begin{aligned} R_j^{-n} \int_{L_j} v(x) \left(1 + \frac{v(x) - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j(x) dx \\ \leq 2^n R_{j-1}^{-n} \int_{L_{j-1} \cap \{v > l_j\}} v(x) \left(3 \frac{v(x) - l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_{j-1}^{k-p}(x) \\ \leq 2^n 3^{(1+\lambda)(p-1)} \varkappa l_j. \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

Используя равенство (5.2.30) и оценки (5.2.42), (5.2.45) и (5.2.47), получим

$$\begin{aligned} \varkappa \leq 2^n \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \varkappa + \gamma(\varepsilon) \varkappa^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}} \\ + \gamma(\varepsilon) \left\{ \delta_j^{-p} l_j^{-1} R_j^{p-n} \int_{B_j} [\delta_j l_j^p H_1(x) + l_j^{p+1} H_2(x)] \xi_j(x) dx \right\}^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

Выбираем сначала ε , а затем $\varkappa$ так, чтобы выполнялись равенства

$$2^n \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} = 1/4, \quad \gamma(\varepsilon) \varkappa^{\lambda p/(p-1-\lambda)} = 1/4,$$

получаем из (5.2.48), что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\delta_j^{1-p} l_j^{p-1} R_j^{p-n} \int_{B_j} H_1(x) \xi_j(x) dx \geq \frac{1}{2} \left[\frac{\varkappa}{4\gamma(\varepsilon)} \right]^{\frac{p-1-\lambda}{(1+\lambda)(p-1)}},$$

$$\delta_j^{-p} l_j^p R_j^{p-n} \int_{B_j} H_2(x) \xi_j(x) dx \geq \frac{1}{2} \left[\frac{\varkappa}{4\gamma(\varepsilon)} \right]^{\frac{p-1-\lambda}{(1+\lambda)(p-1)}}.$$

Отсюда следует, что δ_j удовлетворяет неравенству (5.2.41). $\square$

Лемма 5.2.5. Пусть выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4), и (5.2.8). Тогда существует $\theta_2 \in (0, \theta_1)$, зависящее только от n, p, c_1, c_2 и v_0 , такое, что при $g(R) + h(R) < \theta_2$ и $\alpha > \theta_2^{-1}$ справедлива оценка

$$\max_{B(x_0, \frac{R}{2})} v(x) \leq \gamma \left\{ R^{-n} \int_{B(x_0, R)} v^{p+\lambda(p-1)}(x) dx \right\}^{\frac{1}{p+\lambda(p-1)}}. \quad (5.2.49)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Просуммируем (5.2.41) по $j = 1, 2, \dots, J$. Используя неравенство (5.2.34) и аналогичную оценку для H_1 , получаем

$$l_{J+1} \leq \delta_0 + \gamma[g(R) + h(R) + \alpha^{\frac{p}{p-1}}]l_J. \quad (5.2.50)$$

Выбирая $\theta_2 \in (0, \theta_1)$ так, чтобы

$$\gamma(\theta_2 + \alpha^{\frac{p}{p-1}}) < 1/2, \quad (5.2.51)$$

переходя к пределу при $J \rightarrow \infty$, в силу определения δ_0 , получим (5.2.49). $\square$

Лемма 5.2.6. Пусть выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4), (5.2.8), и пусть $\xi(x)$ – срезающая функция, определенная в начале подраздела. Тогда для любого $K > p$ существуют положительные постоянные $\tau(K)$ и $\gamma(K)$, зависящие только от известных параметров и K , такие, что при $0 < s \leq K$ и $p \leq k \leq K$ справедливо неравенство

$$\int_{B(x_1, r)} v^{s+1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \leq \gamma(K) r^{-p} \int_{B(x_1, r)} v^{s+1-p}(x) \xi^{k-p}(x) dx, \quad (5.2.52)$$

как только $g(R) + h(R) \leq \tau(K)$, $\alpha \geq \tau^{-1}(K)$ и $r \leq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (5.2.9) функцию

$$\varphi(x) = v^s(x) \xi^k(x), \quad s, k > 0.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_{B(x_1, r)} v^{s+1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx &\leq \gamma(K) r^{-p} \int_{B(x_1, r)} v^{s+1-p}(x) \xi^{k-p}(x) dx \\ &+ \gamma(K) \int_{B(x_1, r)} v^{s+1-p}(x) (H_1(x) + H_2(x)) \xi^k(x) dx, \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

где $H_1(x)$ и $H_2(x)$ определены в (5.2.21), (5.2.22).

При $s = p - 1$ и $k = p$ в силу условия (5.2.8), из (5.2.53) получим неравенство

$$\int_{B(x_1, r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln v(x) \right|^p dx \leq \gamma r^{n-p},$$

которое обеспечивает возможность применения леммы Йона-Ниренберга для функции $\ln v(x)$.

В силу леммы 5.2.1 при любом $s > p - 1$ получим

$$\begin{aligned} \gamma(K) \int_{B(x_1, r)} v^{s+1-p}(x) (H_1(x) + H_2(x)) \xi^k(x) dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \int_{B(x_1, r)} v^{s+1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx + r^{-p} \int_{B(x_1, r)} v^{s+1-p}(x) \xi^{k-p}(x) dx \right\}, \end{aligned}$$

если $\tau(K)$ достаточно мало. Отсюда и из (5.2.53) выводим (5.2.52). $\square$

Теперь из лемм 5.2.4 и 5.2.5, используя лемму Йона-Ниренберга и конечное число итераций мозеровского типа, получим теорему 5.2.1.

5.2.3. Доказательство теоремы 5.2.2. Пусть $\alpha, l, \delta, \lambda, k$ и $\xi(x)$ те же числа и функция, что и в доказательстве леммы 5.2.2. Обозначим

$$\bar{u}(x) = u(x) + \alpha f(R), \quad E = B_r(x_0) \cap \{\bar{u}(x) > l\}.$$

Лемма 5.2.7. *Предположим, что выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4). Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \int_E \left\{ \int_l^{\bar{u}(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds + \bar{u}(x) \left(1 + \frac{\bar{u}(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \\ \leq \left(\frac{\delta}{r} \right)^p \int_E \bar{u}(x) \left(1 + \frac{\bar{u}(x)-l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x) dx \\ + \gamma \int_E \bar{u}^p(x) \int_l^{\bar{u}(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) dx \\ + \gamma \int_E \bar{u}^{p+1}(x) \left(1 + \frac{\bar{u}(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) dx \quad (5.2.54) \end{aligned}$$

с функциями $H_1(x)$, $H_2(x)$, определенными равенствами (5.2.21) и (5.2.22).

Для доказательства достаточно подставить в интегральное тождество (5.2.9) функцию

$$\varphi(x) = \bar{u}(x) \left[\int_l^{\bar{u}(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \right] \xi^k(x)$$

и оценить возникающие интегралы аналогично доказательству леммы 5.2.2.

Заметим, что неравенство (5.2.54) получается из (5.2.20) заменой $v(x)$ и L на $\bar{u}(x)$ и E соответственно. Аналогично леммам 5.2.3 и 5.2.4 получим

Лемма 5.2.8. *Предположим, что выполняются условия (5.2.2)–(5.2.4) и (5.2.8). Тогда при R и α , удовлетворяющих условию леммы 5.2.5, справедлива оценка*

$$\max_{B(x_0, \frac{R}{2})} \bar{u}(x) \leq \gamma \left\{ R^{-n} \int_{B(x_0, R)} \bar{u}^{p+\lambda(p-1)}(x) dx \right\}^{\frac{1}{p+\lambda(p-1)}}. \quad (5.2.55)$$

Теперь оценка (5.2.18) является непосредственным следствием неравенств (5.2.13) и (5.2.55). Этим закончено доказательство теоремы 5.2.1.

5.3. Устранимость изолированных особенностей

5.3.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Без ограничения общности считаем, что $\{0\} \in \Omega$ и $\{0\}$ – особая точка решения $u(x)$ уравнения

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = a_0(x, u), \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (5.3.1)$$

Предполагаем, что функции $a_0(x, u)$, $a_i(x, u, \xi)$, $i = 1, 2, \dots$, определены при $x, u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяют условиям Каратеодори и справедливы неравенства (5.3.2), (5.3.3) и

$$|a_0(x, u) \leq g_3(x)|u|^{p-1} + f_3(x). \quad (5.3.2)$$

Кроме того, в дальнейшем считаем, что

$$g_1, f_1, g_1^{p/(p-1)}, f_2^{p/(p-1)} \in \tilde{K}_p, \quad (5.3.3)$$

$$g_3, f_3 \in K_p \quad \text{при } p \geq 2 \text{ и } g_3, f_3 \in K_{2,p} \quad \text{при } 1 < p < 2. \quad (5.3.4)$$

Говорим, что $u(x)$ – решение уравнения (5.3.1) в $\Omega \setminus \{0\}$, если для любой функции $\varphi(x) \in W^{1,p}(\Omega)$, равной нулю вблизи границы множества $\Omega \setminus \{0\}$, имеет место включение $u(x)\varphi(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ и справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - a_0(x, u) \varphi \right\} dx = 0. \quad (5.3.5)$$

Пусть R_0 – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < R_0 < \min \{1, \text{dist}(\{0\}, \partial\Omega)\}$$

Обозначим для $0 < r \leq R_0$

$$M(r) = \max \{|u(x)| : r < |x| \leq R_0\}. \quad (5.3.6)$$

Из результатов предыдущего раздела следует, что функция $u(x)$ непрерывна при $x \in \{r \leq |x| \leq R_0\}$, поэтому $M(r) < \infty$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 5.3.1. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (5.3.1) в $\Omega \setminus \{0\}$. Предположим, что выполняются неравенства (5.2.2), (5.2.3) и (5.3.2) и условия (5.3.3) и (5.3.4). Тогда если

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r)r^{(n-p)/(p-1)} = 0, \quad (5.3.7)$$

то особенность в $\{0\}$ для решения уравнения (5.3.1) устранима.

Пример 5.3.1. Функция $u(x) = |x|^{2-n} \ln^{-\alpha} \frac{1}{|x|}$ является решением уравнения

$$-\Delta u + gu = 0 \quad \text{в} \quad B(0, 1) \setminus \{0\},$$

где

$$g(x) = \alpha(2-n)|x|^{-2} \ln^{-1} \frac{1}{|x|} + \alpha(\alpha+1)|x|^{-2} \frac{1}{|x|}.$$

Решение $u(x)$ имеет неустранимую особенность в $\{0\}$. При этом $g \notin K_2$, хотя $|x|^{-2} \ln^{-1-\varepsilon} \frac{1}{|x|} \in K_2$ при любом $\varepsilon > 0$.

Аналогично, $u(x) = |x|^{\frac{p-n}{p-1}} \ln^{-\alpha} \frac{1}{|x|}$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_p u + gu^{p-1} = 0 \quad \text{в} \quad B(0, 1) \setminus \{0\},$$

где $g(x)$ в окрестности нуля ведет себя как $c|x|^{-p} \ln^{-1} \frac{1}{|x|}$, при этом $\tilde{g}(x) = c|x|^{-p} \ln^{-\beta} \frac{1}{|x|}$ принадлежит K_p при $\beta > p-1$ и принадлежит $K_{2,p}$ при $\beta > 1$. Это показывает, что наши условия являются оптимальными при $1 < p \leq 2$.

Теорема 5.3.1 является следствием некоторых поточечных оценок, аналогичных тем, которые получены в главе 3, и следующей теоремы.

Теорема 5.3.2. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (5.3.1) в $\Omega \setminus \{0\}$. Предположим, что выполнены условия теоремы 5.3.2 и, кроме того,

$$M(r) \leq \gamma r^{-a+(n-p)/(p-1)} \quad (5.3.8)$$

с некоторым $a > 0$. Тогда

$$\max \{|u(x)| : x \in \Omega\} \leq K, \quad (5.3.9)$$

с некоторой постоянной K , зависящей только от n, p, c_1, c_2, v_0 и a .

5.3.2. Доказательство Теоремы 5.3.2. Пусть x_0 – произвольная точка Ω , $0 < R_1 < \frac{1}{2} \min \{1, \text{dist}(\{x_0\}, \partial\Omega)\}$

$$\lambda = \min \left\{ \frac{1}{2} a \frac{p-1}{1 + \frac{p-1}{p}}, \frac{(p-1)(n-1)}{p(n-p+1)} \right\},$$

$$k = p + \frac{(p^2-1)(1+\lambda)}{p-1-\lambda}, \quad \delta, l > 0. \quad (5.3.10)$$

Зафиксируем $x_1 \in B(x_0, R_1)$. Определим при $R \leq R_1$, функцию $\xi(x) \in C_0^\infty(B(x_1, R))$, равную единице в $B(x_1, \frac{R}{2})$, $|\frac{\partial \xi}{\partial x}| \leq \frac{4}{R}$; $\psi_r(x) = \psi(\frac{|x|}{r})$, $r > 0$, где функция $\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяет условиям

$$\psi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 1, \quad \psi(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geq 2,$$

$$-2 \leq \frac{d\psi}{dt} \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in [1, 2].$$

Положим $v(x) = u(x) + \theta f(R_1)$, где θ – некоторое число, зависящее только от n, p, c_1 и c_2 , которое определим позже.

Лемма 5.3.1. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 5.3.2. Тогда для любых α и $\beta > 0$ справедливо*

$$\begin{aligned} & \int_L \left\{ v^{\alpha-1} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \right. \\ & \quad \left. + v^{\alpha+\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p \xi^k \psi_r^k dx \\ & \leq \gamma R^{-p} \delta^p \int_L v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x)-1}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p} \psi_r^k dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma r^{-p} \delta^p \int_{L \cap K(r)} v^{\alpha - (\beta - 1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^k \psi_r^{k-p} ds \\
& + \frac{\delta}{r} \int_{L \cap K(r)} v^\alpha \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} dx [g_2(x) u^{p-1}(x) + f_2(x)] \xi^k \psi_r^{k-1} dx \\
& + \gamma \int_L v^{p-1+\alpha} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k \psi_r^k dx \\
& + \gamma \int_L v^{p-1+\alpha+\beta} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k \psi_r^k dx. \tag{5.3.11}
\end{aligned}$$

где $L = B_R(x_1) \cap \{v^\beta(x) > l\}$, $K(r) = \{r \leq |x| \leq 2r\}$,

$$H_1(x) = g_1(x) + g_3(x) + f_1(x) f^{-p}(R) \theta^{-p} + f_3(x) f^{1-p}(R) \theta^{1-p}, \tag{5.3.12}$$

$$H_2(x) = g_1(x) + g_2^{p/(p-1)}(x) + [f_1(x) + f_2^{p/(p-1)}(x)] f^{-p}(R) \theta^{-p}. \tag{5.3.13}$$

Доказательство. Подставив в интегральное тождество (5.3.5) функцию

$$\varphi(x) = v^\alpha(x) \left[\int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \right]_+ \xi^k(x) \psi_r^k(x),$$

и проведя рассуждения, аналогичные изложенным в лемме 5.2.2, получим (5.3.11). $\square$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\delta} \left(\int_l^{v^\beta(x)} s^{\frac{\alpha - (\beta-1)(p-1)}{\beta p}} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-(1+\lambda)/p} ds \right)_+. \tag{5.3.14}$$

Лемма 5.3.2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 5.3.2. Пусть $\alpha + p - 1 - \beta p > 0$, тогда существует число $v_1 \in (0, 1)$, зависящее только от n, p, c_1, c_2 и v_0 , такое, что для θ и R , удовлетворяющих неравенствам*

$$g(R) < v_1, \quad \theta > v_1^{-1}, \tag{5.3.15}$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \int_L \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) dx \\
& \leq \gamma R^{-p} \int_l v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x) \psi_r^k(x) dx \\
& + \gamma r^{-p} \int_{L \cap K(r)} v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^k(x) \psi_r^{k-p}(x) dx \\
& + \gamma \delta^{1-p} r^{-1} \int_{L \cap K(r)} v^\alpha \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds [g_2(x) u^{p-1}(x) + f_2(x)] dx \\
& + \gamma \delta^{1-p} l^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_L H_1(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx + \gamma \delta^{-p} l^{\frac{p-1+\alpha+\beta}{\beta}} \int_L H_2(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx.
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_L v^{p-1+\alpha-\beta} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \leq \\
& \leq \gamma \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha-\beta}{\beta}} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& + \gamma l^{\frac{p-1+\alpha-\beta}{\beta}} \int_L H_2(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx.
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

В силу определения $H_2(x)$ и (5.3.15)

$$\begin{aligned}
& \int_0^R \left(\frac{1}{r^{n-p}} \int_{B_r(x)} H_1(z) dz \right)^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} \\
& \leq \gamma \left[g(R) + \theta^{-p/(p-1)} \right] \leq \gamma \left[v_1 + v_1^{p/(p-1)} \right].
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Поэтому из леммы 5.3.1 и условия $\alpha + p - 1 - \beta p > 0$ вытекает, что

$$\begin{aligned}
& \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha+\beta}{\beta}} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} H_2(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& \leq \frac{1}{8} \int_L v^{\alpha+\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& \quad + \gamma \delta^p \int_L v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta - l}{\delta}\right)^{p-1-\lambda} \\
& \quad \times \left| \frac{\partial(\xi(x) \psi_r(x))}{\partial x} \right|^p \xi^{k-p}(x) \psi_r^{k-p}(x) dx. \quad (5.3.19)
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \int_L v^{\alpha+p-1} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& \leq \gamma \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& \quad + \gamma \delta l^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_L H_1(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx. \quad (5.3.20)
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу (5.2.35). В силу определения решения имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds H_1(x) \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_L \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \\
& \quad \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds \xi^k(x) \psi_r^{k-p}(x) \right\}. \quad (5.3.21)
\end{aligned}$$

Вычисляя производную выражения в фигурной скобке и применяя неравенство Юнга, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
I_1 \leq & \frac{1}{8} \int_L \left\{ v^{\alpha-1} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \right. \\
& \left. + v^{\alpha+\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& + \gamma \delta^p \int_L v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(\frac{v^\beta(x)-l}{\delta} \right)^{p-1} \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi(x) \psi_r(x)) \right|^p \xi^{k-p}(x) \psi_r^{k-p}(x) dx \\
& + I_2 + I_3, \quad (5.3.21)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_2 &= \gamma \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx, \\
I_3 &= \gamma \int_L (v^\beta - l)^{\frac{p+\alpha}{\beta}} v^{\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^p \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx.
\end{aligned}$$

Снова, используя интегральное тождество для решения задачи (5.3.35), получаем

$$\begin{aligned}
I_2 &= \gamma \int_L H_1(x) w(x) (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \\
&\times \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx - \gamma \sum_{i=1}^n \int_L w \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&\times \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \xi^k(x) \psi_r^k(x) \right\} dx. \quad (5.3.22)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$I_2 \leq \gamma \int_L \left[w H_1(x) + \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi(x) \psi_r(x)) \right| w^p \right] (v^\beta - l)^{\frac{p-1+\alpha}{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_l^{v^\beta(x)} \left(\frac{1+s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \xi^{k-p}(x) \psi_r^{k-p} dx \\
& + \gamma \int_L w^p \left\{ v^{\alpha-1} \int_l^{v^\beta(x)} \left(1 + \frac{s-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} ds \right. \\
& \left. + v^{\alpha+\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \right\} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p \xi^k \psi_r^k dx + I_3. \quad (5.3.23)
\end{aligned}$$

Вновь воспользуемся интегральным тождеством для задачи (5.2.35). Получим

$$\begin{aligned}
I_3 &= \gamma \int_L H_1(x) w (v^\beta - l)^{\frac{p+\alpha}{\beta}} v^{\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& - \gamma \sum_{i=1}^n \int_L w \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{p-1} \frac{\partial w}{\partial x_i} \\
& \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (v^\beta - l)^{\frac{p+\alpha}{\beta}} v^{\beta+1} \left(1 + \frac{v^\beta-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \xi^k(x) \psi_r^k(x) \right\} dx. \quad (5.3.24)
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \gamma \int_L w H_1(x) (v^\beta - l)^{\frac{p+\alpha}{\beta}} v^{\beta-1} \left(1 + \frac{v^\beta(x)-l}{\delta} \right)^{-1-\lambda} \xi^k(x) \psi_r^k(x) dx \\
& + \gamma \delta^p \int_L w^p v^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(\frac{v^\beta-l}{\delta} \right)^{p-1} \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi(x) \psi_r(x)) \right| \xi^{k-1}(x) \psi_r^{k-1}(x) dx. \quad (5.3.25)
\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (5.3.25) оценивается аналогично (5.3.19). Теперь, используя оценку (5.2.36) для $w(x)$, из (5.3.17)–(5.3.25) получим (5.3.16). $\square$

Рассмотрим последовательности чисел $R_j = 2^{-j} R$, $j = 0, 1, 2, \dots$ и функций $\xi_j(x) \in C_0^\infty(B_j)$, $\xi_j(x) = 1$ в $B_{j+1} = B(x_1, R_{j+1})$, $\xi_j(x) = 0$ вне B_j , $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$, $|\partial \xi_j / \partial x| \leq \gamma R_j^{-1}$.

Пусть $l_0 = 0$. Определим для любого $j \geq 1$

$$\kappa = \frac{1}{R_j^n} \int_{L_j} \left(\frac{v(x)}{l_{j+1}^{1/\beta}} \right)^{\alpha-(\beta-1)(p-1)} \left(\frac{v^\beta(x)-l_j}{l_{j+1}-l_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) dx, \quad (5.3.26)$$

где $L_j = B_J \cap \{v(x) > l_j^{1/\beta}\}$, $\beta = (p-1)/p$, $\alpha = \lambda$. В силу (5.3.8) и условий на α, β и λ интеграл в правой части (5.3.26) конечен. Положим $\delta_j = l_{j+1} - l_j$.

Аналогично (5.2.49) получаем оценку

$$\begin{aligned} \varkappa &\leq 2^n \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \varkappa \\ &+ \gamma(\varepsilon) \left\{ \varkappa + \gamma \delta_j^{1-p} l_j^{p-1} \int_{L_1} H_1(x) dx + \varkappa + \gamma \delta_j^{1-p} l_j^{p-1} \int_{L_j} H_1(x) dx \right. \\ &+ \gamma r^{-p} \int_{L_j \cap K(r)} \left(\frac{v(x)}{l_j^{1/\beta}} \right)^{\alpha - (\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} dx \\ &\left. + \gamma \delta_j^{1-p} l_j^{\frac{\alpha - (\beta-1)(p-1)}{\beta}} r^{-1} \int_{L_j \cap K(r)} v^\alpha(x) [g_2(x) u^{p-1}(x) + f_2(x)] dx \right\}^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

В силу выбора α, β и λ и неравенства (5.3.8) получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-p} \int_{L_j \cap K(r)} \left(\frac{v(x)}{l_j^{1/\beta}} \right)^{\alpha - (\beta-1)(p-1)} \left(1 + \frac{v^\beta(x) - l_j}{\delta_j} \right)^{(1+\lambda)(p-1)} dx = 0, \quad (5.3.28)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \delta_j^{1-p} l_j^{\frac{\alpha - (\beta-1)(p-1)}{\beta}} r^{-1} \int_{L_j \cap K(r)} v^\alpha(x) [g_2(x) u^{p-1} + f_2(x)] dx = 0. \quad (5.3.29)$$

Из (5.3.27)–(5.3.29) аналогично лемме 5.2.5 получим

$$\max_{B(x_0, \frac{R}{2})} v(x) \leq \gamma \left\{ R^{-n} \int_{B(x_0, R)} v^{p-1+\alpha+\beta\lambda(p-1)}(x) dx \right\}^{\frac{1}{p-1+\alpha+\beta\lambda(p-1)}}. \quad (5.3.30)$$

Правая часть неравенства (5.3.30) конечна в силу (5.3.8) и выбора λ, α и β . Это приводит к завершению доказательства теоремы 5.3.2.

5.3.3. Доказательство теоремы 5.3.1.

Лемма 5.3.3. Пусть выполняются все условия теоремы 5.3.1. Тогда

$$\int_{E(R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \leq \gamma \{M^p(r) r^{n-p} + 1\}, \quad (5.3.31)$$

где $E(R) = \{x \in B(R) \setminus \{0\} : u(x) > M(R)\}$, а функция $\psi_r(x)$ определена в подразделе 5.3.2.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 3.2.1.

В дальнейшем полагаем, что r и ρ удовлетворяют условиям

$$0 < r < \rho < R < R_0, \quad M(\rho) > \max \{2M(R), M(R/2)\}. \quad (5.3.32)$$

Лемма 5.3.4. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 5.3.1. Тогда*

$$\int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx \leq \gamma [M(\rho) - M(R)] \{M^{p-1}(r)r^{n-p} + v_0\} + \gamma, \quad (5.3.33)$$

где $E(\rho, R) = \{x \in \Omega : 0 < u_R(x) < M(\rho) - M(R)\}$, а v_0 определено в (5.2.13).

Доказательство. Подставив в интегральное тождество (5.3.5) функцию

$$\varphi(x) = \min \{u_R(x), M(\rho) - M(R)\} \psi_r^p(x),$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho, R)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) dx &\leq \gamma [M(\rho) - M(R)] \{M^{p-1}(r)r^{n-p} + v_0^{p-1} \\ &+ \gamma [M(\rho) - M(R)] \int_{E(\rho)} g_3(x) u^{p-1}(x) \psi_r^p(x) dx + \gamma. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

В силу (5.3.7) и (5.2.13) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho)} g_3(x) u^{p-1}(x) \psi_r^p(x) dx &\leq \gamma \int_{E(\rho)} g_3(x) |x|^{p-n} \psi_r^p(x) dx \\ &\leq \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^{p-n} \int_{K(\rho_i)} g_3(x) dx \leq \gamma v_0, \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

где $\rho_i = 2^{-i}\rho$ и $K(\rho_i) = \{\rho_i < |x| < \rho_{i-1}\}$. Отсюда и из (5.3.34) получим требуемое неравенство (5.3.33). $\square$

Аналогично (5.3.30) получаем оценку

$$[M(\rho_i) - M(R)]^p \leq \gamma_i \rho^{-n} \int_{G_i} (u_R^p(x) + 1) dx, \quad (5.3.36)$$

где

$$G_i = \left\{ \rho_i - \frac{\rho}{2}(1 - 2^{-i}) < |x| < \rho_i^{(1)} + \frac{\rho}{2}(1 - 2^{-i}) \right\},$$

$$\rho_i = \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-i}), \quad \rho_i^{(1)} = |x_i|, \quad i = 1, 2, \dots,$$

а x_i — некоторая точка, удовлетворяющая условию

$$\rho_i \leq |x_i| \leq R_0/2, \quad |u(x_i)| = M(\rho_i).$$

Используя (5.3.33), из неравенства (5.3.36) получаем

$$(M(\rho_i) - M(R))^p \leq \gamma^i [M(\rho_{i+1}) - M(R)]$$

$$\times \left(M^{p-1}(r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{n-p} + v_0 \rho^{p-n} \right) + \gamma^i \rho^{p-n}. \quad (5.3.37)$$

Итерируя последнее неравенство, получим

$$M(\rho) \leq \gamma M(r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{n-p}{p-1}} + \gamma \rho^{a-\frac{n-p}{p-1}} + \gamma v_0^{\frac{1}{p-1}} \rho^{-\frac{n-p}{p-1}}, \quad (5.3.38)$$

где $a = \frac{n-p}{p(p-1)}$. Устремляя $r \rightarrow 0$, в силу (5.3.7) получим

$$M(\rho) \leq \gamma \rho^{a-\frac{n-p}{p-1}} + \gamma v_0^{\frac{1}{p-1}} \rho^{-\frac{n-p}{p-1}} \quad (5.3.39)$$

для любого $0 < \rho < R_1$.

Можно считать, что

$$\rho^a \leq v_0, \quad (5.3.40)$$

так как в противном случае, в силу теоремы 5.3.2, получим, что функция $u(x)$ ограничена в Ω .

Итак, получим оценку

$$M(\rho) \leq \gamma v_0 \rho^{-\frac{n-p}{p-1}}. \quad (5.3.41)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, на I -ом шаге придем к оценке

$$M(\rho) \leq \gamma \rho^{a-\frac{n-p}{p-1}} + \gamma^I v_0^I \rho^{-\frac{n-p}{p-1}}. \quad (5.3.42)$$

После этого выбирая I из условия

$$I = \left\lceil \frac{a \log \rho^{-1}}{\log (\gamma v_0)^{-1}} \right\rceil + 1, \quad (5.3.43)$$

приходим к оценке

$$M(\rho) \leq \gamma \rho^{a - \frac{n-p}{p-1}}, \quad 0 < \rho < R_1, \quad (5.3.44)$$

которая в силу теоремы 6.2.2 влечет ограниченность решения $u(x)$ в Ω . Дальнейшие рассуждения при доказательстве теоремы 5.3.1 аналогичны [113].

5.4. Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией

5.4.1. *Формулировка предположений и основных результатов.* Рассмотрим уравнение вида

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) + g(x, u) = a_0(x, u), \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (5.4.1)$$

Предполагаем, что функции $a_0(x, u)$, $g(x, u)$, $a_i(x, u, \xi)$, $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют условию Каратеодори, для функций $a_0(x, u)$, $a_i(x, u, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, выполнены неравенства (5.2.2), (5.2.3) и (5.3.2), и, кроме того,

$$|g(x, u)| \leq c_2 |u|^q + f_4(x), \quad g(x, u) \operatorname{sign} u \geq c_1 |u|^q - f_4(x), \quad (5.4.2)$$

где $f_4(x) \geq 0$, $f_4(x) \in K_p$, $p \geq 2$, $f_4(x) \in K_{2,p}$ при $1 < p < 2$.

Определение 5.4.1. Говорим, что $u(x)$ – решение уравнения (5.4.1) в $\Omega \setminus \{0\}$, если для любой функции $\varphi(x) \in W^{1,p}(\Omega)$, равной нулю вблизи границы множества $\Omega \setminus \{0\}$, имеет место включение $u(x)\varphi(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ и справедливо тождество

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi + g(x, u) \varphi \right\} dx = 0. \quad (5.4.3)$$

Определение 5.4.2. Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (5.4.1) имеет устранимую особенность в точке $\{0\}$, если $u(x) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ и тождество (5.4.3) справедливо для любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 5.4.1. Пусть выполняются неравенства (5.2.2), (5.2.3), (5.3.2) и (5.4.2), и пусть $u(x)$ – решение уравнения (5.4.1) в $\Omega \setminus \{0\}$. Предположим, что справедливо неравенство

$$q \geq \frac{n(p-1)}{n-p}. \quad (5.4.4)$$

Тогда особенность $u(x)$ в точке $\{0\}$ устранима.

Сначала докажем такой результат.

Теорема 5.4.2. Пусть выполняются условия теоремы 5.4.1. Тогда справедлива оценка

$$|u(x)| \leq \gamma |x|^{-p/(q-p+1)}, \quad 0 < |x| \leq R_0. \quad (5.4.5)$$

5.4.2. Доказательство Теоремы 5.4.2. Будем считать, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty. \quad (5.4.6)$$

В противном случае теорема 5.4.1 следует из результатов предыдущего раздела.

Зафиксируем число $R_1 \in (0, R_0)$ такое, что

$$M(R_1) \geq 1. \quad (5.4.7)$$

Определим при $\rho > 0$ и $\sigma \in (0, 1)$ функцию $\varphi_{\rho, \sigma}(x)$ условиями: $\varphi_{\rho, \sigma}(x) = 1$ при $\rho \leq |x| \leq 2\rho$, $\varphi_{\rho, \sigma}(x) = 0$ вне множества $\{(1-\sigma)\rho < |x| < (2+\sigma)\rho\}$ и выполнена оценка $|\partial \varphi_{\rho, \sigma}(x)/\partial x| \leq 2/\sigma\rho$.

Лемма 5.4.1. Предположим, что выполняются условия теоремы 5.4.2. Тогда при $0 < \sigma < 1$ и $0 < \rho < R_1/3$ выполнена оценка

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + |u|^{q+1} \right) \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx \leq \gamma \rho^{n-p} M^p(\rho - \sigma\rho). \quad (5.4.8)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (5.4.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = u(x) \varphi_{\rho, \sigma}^p(x).$$

Используя неравенства (5.2.2)–(5.2.3), (5.3.2) и (5.4.2) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + |u|^{q+1} \right) \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx &\leq \gamma \int_{\Omega} |u(x)|^p H(x) \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^p \left| \frac{\partial \varphi_{\rho, \sigma}}{\partial x} \right|^p dx + \gamma \int_{\Omega} [f_1(x) + f_3(x) + f_4(x)] \varphi_{\rho, \sigma}^p(x) dx, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

где $H(x) = 1 + g_1(x) + [g_2(x)]^{p/(p-1)} + [f_2(x)]^{p/(p-1)} + g_3(x) + f_3(x) + f_4(x) + h^p(x)$.

Интегралы в правой части (5.4.9) оцениваем, применяя неравенство Гельдера и учитывая определения функций $\varphi_{\rho,\sigma}(x)$ и $M(r)$. В итоге имеем

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p H(x) \varphi_{\rho,\sigma}^p \leq \frac{1}{8} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \varphi_{\rho,\sigma}^p(x) dx + \gamma \int_{\Omega} |u(x)|^p \left| \frac{\partial \varphi_{\rho,\sigma}}{\partial x} \right|^p dx$$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \left| \frac{\partial \varphi_{\rho,\sigma}}{\partial x} \right|^p dx \leq \gamma \sigma^{-p} \rho^{n-p} M^p(\rho - \sigma \rho),$$

$$\int_{\Omega} [f_1(x) + f_3(x) + f_4(x)] \varphi_{\rho,\sigma}^p(x) dx \leq \gamma \rho^n.$$

Теперь оценка (5.4.8) следует из (5.4.9) и трех последних неравенств. $\square$

Зафиксируем число R_2 из интервала $(0, R_1/2)$ так, чтобы $M(R_2) > M(R_1/2)$ и пусть ρ – произвольное число из интервала $(0, R_2)$. Определим числовые последовательности $\{\rho_j\}$, $\{\sigma_j\}$ равенствами

$$\rho_j = (2^{-1} + 2^{-j})\rho, \quad \sigma_j = 2^{-(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Выберем точку x_j так, чтобы $M(\rho_j) = |u(x_j)|$, $\rho_j \leq |x_j| \leq R_2$ и обозначим $\rho'_j = |x_j|$. Определим $\varphi_j(x) = \varphi_{\rho'_j, \sigma_j}(x)$.

Аналогично лемме 5.2.5, получаем оценку

$$[M(\rho_j)]^{p+1} = |u(x_j)|^{p+1} \leq \gamma 2^{jp/\sigma} \rho^{-n} \int_{\Omega} (1 + |u(x)|)^{q+1} \varphi_j^p(x) dx. \quad (5.4.10)$$

Далее, оценим интеграл в (5.4.10), используя неравенство (5.4.8). Получим

$$[M(\rho_j)]^{q+1} \leq \gamma \rho^{-p} a^j [M(\rho'_j - \sigma_j \rho'_j)]^p \leq \gamma a^j \rho^{-p} [M(\rho_{j+1})]^p, \quad (5.4.11)$$

где $a = 4^p$.

Последовательно применяя оценку (5.4.11), устанавливаем неравенство

$$M(\rho_j) \leq C_8 \frac{1}{a^{\frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^j \left(\frac{p}{q+1}\right)^j}} a^{\frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^j (j+1) \left(\frac{p}{q+1}\right)^j} \rho^{\frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^j \left(\frac{p}{q+1}\right)^j} [M(\rho_{j+1})] \left(\frac{p}{q+1}\right)^{j+1}. \quad (5.4.12)$$

Устремляя $j \rightarrow \infty$ и пользуясь ограниченностью последовательности $M(\rho)$, из (5.4.12) выводим, что

$$M(\rho) \leq \gamma \rho^{\frac{p}{q-p+1}},$$

что и заканчивает доказательство теоремы 5.4.2.

5.4.3. *Интегральные и поточечные оценки градиента решения.* Определим при $r \in (0, 1)$ функцию $\psi_r : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_r(x) = \tilde{\psi}_r(|x|)$, где $\tilde{\psi}_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная равенствами: $\tilde{\psi}_r(t) \equiv 0$ при $t \leq r$, $\tilde{\psi}_r(t) \equiv 1$ при $t \geq R(r)$,

$$\tilde{\psi}_r(t) = \frac{1}{(1-\theta) \ln \ln \frac{1}{r}} \int_r^t \frac{dt}{t \ln \frac{1}{t}} \quad \text{при } r \leq t \leq R(r), \quad (5.4.13)$$

θ – выбираемое далее число из интервала $(0, 1)$, $R(r)$ – число, определенное равенством

$$\ln \frac{1}{R(r)} = \left(\ln \frac{1}{r} \right)^\theta. \quad (5.4.14)$$

Определим при $\rho \in (0, R_0)$ функции $u_\rho(x)$, $F_1(r, \rho)$, $F_2(r, \rho)$ и множество $E(\rho)$ равенствами

$$u_\rho(x) = [u(x) - M(\rho)]_+, \quad E(\rho) = \{x \in B(\rho) \setminus \{x_0\} : u(x) > M(\rho)\}, \quad (5.4.15)$$

$$\bar{p} = \frac{qp}{q-p+1}, \quad \lambda = \left(\frac{p}{q-p+1} - \frac{n-p}{p-1} \right) (p-1) \geq 0, \quad (5.4.16)$$

$$F_1(r, \rho) = \begin{cases} \rho^{n-\bar{p}} & , \text{ если } g > \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{2-\frac{n}{p}} & , \text{ если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n < 2p, \\ \ln \ln \frac{1}{r} & , \text{ если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n = 2p, \\ \left[\ln \frac{1}{\rho} \right]^{2-\frac{n}{p}} & , \text{ если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad n > 2p. \end{cases} \quad (5.4.17)$$

$$F_2(r, \rho) = \begin{cases} \rho^\lambda [g(\rho) + f(\rho) + h(\rho)]^{p-1} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^p, & \text{ если } q > \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \ln \frac{1}{r} [1 + g(\rho) + f(\rho)]^{p-1}, & \text{ если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}. \end{cases} \quad (5.4.18)$$

Лемма 5.4.2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 5.4.1. Тогда при $r \in (0, 1)$ и $R(r) < \rho < R_2$ справедлива оценка*

$$\int_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\bar{p}} F_1(r, \rho) + F_2(r, \rho) \right\}. \quad (5.4.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (5.4.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = \ln_+ \frac{u(x)}{M(\rho)} \psi_r^{\bar{p}}(x).$$

После очевидных преобразований получим

$$\int_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + u^q \ln \frac{u}{M(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma(I_1 + I_2), \quad (5.4.20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E(\rho)} \ln \frac{u}{M(\rho)} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx, \\ I_2 &= \int_{E(\rho)} u^{p-1}(x) \left\{ f_1(x) + g_1(x) + (f_2(x) + g_2(x)) \ln \frac{u}{M(\rho)} \cdot \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \right. \\ &\quad \left. + (f_3(x) + g_3(x) + f_4(x)) \ln \frac{u}{M(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга, находим, что

$$\gamma I_1 \leq \frac{1}{2} \int_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + u^q \ln \frac{u}{M(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx + \gamma I_3, \quad (5.4.21)$$

где

$$I_3 = \int_{E(\rho)} \left[\ln \frac{u}{M(\rho)} \right]^{(1-(p-1)/qp)\bar{p}} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^{\bar{p}} dx.$$

Используя теорему 5.4.2, получаем

$$I_3 \leq \gamma \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-\bar{p}} F_1(r, \rho). \quad (5.4.22)$$

Далее, в случае $q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ имеем

$$I_2 \leq \gamma \ln \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2^i} \right)^{p-n} \int_{K(\rho_i)} H(x) dx \leq \gamma F_2(r, \rho), \quad (5.4.23)$$

а в случае $q > \frac{n(p-1)}{n-p}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \gamma \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2^i} \right)^{p-n+\lambda} \\ &\times \int_{K(\rho_i)} \left[f_1(x) + g_1(x) + (f_3(x) + g_3(x) + f_4(x)) \ln \frac{1}{|x|} \right] \leq \gamma F_2(r, \rho), \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

где $K(\rho_i) = \{\rho_i < |x| < \rho_{i-1}\}$, $\rho_i = \frac{\rho}{2^i}$.

Собирая оценки (5.4.20)–(5.4.24), получаем (5.4.19). $\square$

Определим функцию $u^{(\rho)}(x)$ и множество $E(\rho, 4\rho)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(\rho)}(x) &= \min\{[u(x) - M(4\rho)]_+, M(\rho) - M(4\rho)\}, \\ E(\rho, 4\rho) &= \{x \in B_{R_0}(x_0) : M(4\rho) < u(x) < M(\rho)\}. \end{aligned}$$

Лемма 5.4.3. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 5.4.1. Тогда справедлива оценка*

$$\int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx \leq v_0(M(\rho) - M(4\rho))\rho^\lambda, \quad (5.4.25)$$

где v_0 определено в (5.4.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в интегральное тождество (5.4.3) функцию

$$\varphi(x) = u^{(\rho)}(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) \quad \text{при} \quad r \in (0, 1), \quad R(r) < \rho < R_1.$$

Используя неравенства (5.2.2)–(5.2.3), (5.3.2) и (5.4.2), получим

$$\int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx + \int_{E(4\rho)} u^q(x) u^{(\rho)}(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \leq \gamma \sum_{i=4}^6 I_i, \quad (5.4.26)$$

где

$$I_4 = (M(\rho) - M(4\rho)) \int_{E(4\rho)} u^{p-1}(x) H(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx, \quad (5.4.27)$$

$$I_5 = \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx, \quad (5.4.28)$$

$$I_6 = \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) u^{p-1}(x) [f_2(x) + g_2(x)] \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{\bar{p}-1}(x) dx. \quad (5.4.29)$$

Имеем

$$I_4 \leq \gamma(M(\rho) - M(4\rho)) \times \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2^i} \right)^{p-n+\lambda} \int_{K(\rho_i)} H(x) dx \leq \gamma v_0(M(\rho) - M(\rho)) \rho^\lambda \quad (5.4.30)$$

$$\gamma I_5 \leq \frac{1}{2} \int_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x) u^q(x) \psi_r^{\bar{p}}(x) dx + \gamma I_7 I_8, \quad (5.4.31)$$

где

$$I_7 = \left\{ \int_{E(4\rho)} \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}},$$

$$I_8 = \left\{ \int_{E(4\rho)} [u^{(\rho)}(x)]^{(1+\frac{p-1}{pq})\bar{p}} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^{\bar{p}} dx \right\}^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}}.$$

Далее, используя вид функции $\psi_r(x)$, получим

$$I_8 \leq \gamma(M(\rho) - M(4\rho)) \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{qp}{qp-p+1}} \times \left[\int_r^{R(r)} \frac{|x|^{n-1} d|x|}{\left[\ln \frac{1}{|x|} \right]^{\bar{p}} |x|^{\bar{p}}} \right]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \leq \gamma(M(\rho) - M(4\rho)) F_3(r), \quad (5.4.32)$$

где

$$F_3(r) = \begin{cases} [R(r)]^{(n-\bar{p})\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, & \text{если } q > \frac{n(p-1)}{n-p}, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-\bar{p}\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, & \text{если } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \end{cases}$$

а $R(r)$ определено равенством (5.4.15),

$$\begin{aligned}
 I_6 &\leq \gamma[M(\rho) - M(4\rho)] \left(\int_{r < |x| < R(r)} u^{p-1}(x) (f_2(x) + g_2(x))^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\quad \times \left(\int_{r < |x| < R(r)} u^{p-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma(M(\rho) - M(4\rho))v_0 \\
 &\quad \times \left(\int_r^{R(r)} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-p} |x|^{-1} d|x| \right)^{\frac{1}{p}} \leq (M(\rho) - M(4\rho))v_0 \left(\ln \frac{1}{R(r)} \right)^{1-p}.
 \end{aligned} \tag{5.4.33}$$

Теперь из неравенств (5.4.26)–(5.4.33) и (5.4.19) получим

$$\begin{aligned}
 \int_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x) dx &\leq \gamma \left\{ (M(\rho) - M(4\rho))\rho^\lambda v_0 + M(\rho) \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-p} \right. \\
 &\quad \left. + M(\rho) F_3(r) \left[\left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}} F_1(r, \rho) + F_2(r, \rho) \right]^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.4.34}$$

Выберем теперь $\theta \in (0, 1)$, введенное в (5.4.14), из условий

$$-\theta(n-1)(q-p+1) + \left(1 - \frac{n}{p}\right)q(p-1) < 0, \quad \text{если} \quad q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \tag{5.4.35}$$

$$-\theta(n-1)(q-p+1) + q(p-1) < 0, \quad \text{если} \quad q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \tag{5.4.36}$$

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad q > \frac{n(p-1)}{n-p}. \tag{5.4.37}$$

Возможность выбора такого θ обеспечивает условие на q . Зафиксируем в дальнейшем число $\theta \in (0, 1)$, удовлетворяющее (5.4.35)–(5.4.37). Теперь можно перейти к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (5.4.34). При этом второе и третье слагаемые правой части стремятся к нулю. Отсюда получаем (5.4.25). $\square$

Аналогично лемме 5.2.5 получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 &[M(\rho) - M(4\rho)]^p \\
 &\leq \gamma \rho^{-n} \int_{E(2\rho)} \max^p \{ (u(x) - M(2\rho), M(\rho/2) - M(2\rho)) \} dx.
 \end{aligned} \tag{5.4.38}$$

Теперь используя лемму 5.4.3, из (5.4.38) выводим, что

$$[M(\rho) - M(2\rho)]^p \leq \gamma \rho^{p-n+\lambda} v_0 [M(\rho/2) - M(2\rho)]. \quad (5.4.39)$$

Итерируя последнее неравенство, получим

$$M(\rho) - M(2\rho) \leq \gamma \rho^{\frac{\lambda+p-n}{p-1}} v_0^{\frac{1}{p-1}}. \quad (5.4.40)$$

Рассмотрим последовательность $\rho_i = 2^{i-1} \rho$, $i = 1, \dots, I$, где I определяется условием $R_1/4 < 2^I \rho \leq R_1/2$. Суммируя неравенство (5.4.40) по i , получим

$$M(\rho) \leq M(R_1/4) + \rho^{\frac{\lambda+p-n}{p-1}} v_0^{\frac{1}{p-1}}. \quad (6.4.41)$$

Повторим все предыдущие рассуждения на j -ом шаге. В результате получим

$$M(\rho) \leq M(R_1/4) + (\gamma v_0^{\frac{1}{p-1}})^j \rho^{\frac{\lambda+p-n}{p-1}}, \quad (5.4.42)$$

и выбирая j из условия

$$j = \frac{a \log \rho}{\log(\gamma v_0)}, \quad (5.4.43)$$

приходим к неравенству

$$M(\rho) \leq M\left(\frac{R_1}{4}\right) + \rho^{a+\frac{\lambda+p-n}{p-1}}. \quad (5.4.44)$$

Далее устранимость особенности в точке $\{0\}$ устанавливается стандартными рассуждениями, аналогичными [113].

ЧАСТЬ III

ГРАНИЧНЫЕ РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ

ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ

ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА 6

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

6.1. Введение: локализованные и нелокализованные сингулярные граничные режимы

В этой главе мы начинаем изучение структуры особенностей решений начально-краевых задач для широких классов дивергентных квазилинейных параболических уравнений (как второго, так и высоких порядков), порождаемых сингулярно обостряющимся в окрестности некоторого значения времени $t = T < \infty$ граничными данными. В качестве простейшего модельного примера таких задач, на котором можно проследить историю вопроса и выявить основные эффекты и структуру возможных результатов, рассмотрим следующую задачу Коши-Дирихле для одномерного уравнения пористой среды (или нелинейной теплопроводности):

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, \infty), \quad m > 1, \quad 0 < T < \infty; \quad (6.1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, \infty); \quad (6.1.2)$$

$$u(t, 0) = \psi(t) \quad \forall t \in [0, T), \quad \psi(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow T. \quad (6.1.3)$$

В предположении, что u_0 является непрерывной, ограниченной, неотрицательной функцией, а $\psi(t)$ – неотрицательной и непрерывной на $[0, T)$ с $\psi(0) = u_0(0)$, задача (6.1.1)–(6.1.2) имеет единственное непрерывное обобщенное решение $u(t, x)$ (см. [103], [144]), которое является классическим решением (6.1.1) на множестве точек $(t, x) : u(t, x) > 0$ и может не быть классическим в точках, где $u(t, x) = 0$. Если u_0 имеет компактный носитель, то обобщенное решение u задачи (6.1.1)–(6.1.3) также имеет компактный носитель по x для любого $t \in (0, T)$ (см. [135], [136]), который не может уменьшаться с ростом t и при $t \rightarrow \infty$ заполняет всю

полуось $\Omega = [0, \infty)$ (см. [54], [10], [11]). Следовательно, корректно определяется свободная граница (термальный фронт, см. [139]):

$$\zeta(t) = \sup\{x \in \Omega : u(t, x) > 0\} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.1.4)$$

Эта функция является непрерывной и монотонно возрастающей (см. [53], [103], [143]). Граничное условие (6.1.3) определяет так называемый граничный режим с обострением с временем обострения $t = T$. Наличие такого режима приводит к необходимости изучения предельного поведения решения $u(t, x)$ и свободной границы $\zeta(t)$ при $t \rightarrow T$. Такие исследования были начаты в начале 60-х годов прошлого века (см. [110], [84], [86], [109], [137] и имеющуюся там литературу) и были связаны, в частности, с поисками условий локализации граничных режимов с обострением, описанием множеств интенсификации.

Определение 6.1.1. Граничный режим $\psi(t)$ в задаче (6.1.1)–(6.1.2) называется локализованным, если при любой непрерывной, ограниченной, неотрицательной начальной функции u_0 с компактным носителем $\text{supp } u_0$ для соответствующего решения $u(t, x)$ выполняется:

$$\lim_{t \rightarrow T} \zeta_u(t) := \lim_{t \rightarrow T} \zeta(t) < \infty, \quad \zeta(t) \text{ из (6.1.4)}. \quad (6.1.5)$$

Определение 6.1.2. Для произвольного решения $u(t, x)$ задачи (6.1.1)–(6.1.2) множествами интенсификации (или множествами "blow-up") называются:

$$\Omega_s = \Omega_s(u) = \{x : \limsup_{t \rightarrow T} u(t, x) = \infty\}, \quad (6.1.6)$$

$$\Omega_s^* = \Omega_s^*(u) = \{x : \limsup_{t \rightarrow T} \int_x^\infty u(t, y) dy = \infty\}. \quad (6.1.7)$$

Следуя концепции локализации из [141], [109], [50] введем также следующее

Определение 6.1.3. Решение $u(t, x)$ некоторой задачи с обостряющимся при $t = T$ граничным режимом называется эффективно локализованным, если $\omega := \sup\{x \in \Omega_s(u)\} < \infty$, и метастабильно локализованным, если $\omega^* := \sup\{x \in \Omega_s^*(u)\} < \infty$, где $\Omega_s(u)$ и $\Omega_s^*(u)$ из определения 6.1.2.

Первые общие точные результаты о локализации решений задачи (6.1.1)–(6.1.3) были получены В.А. Галактионовым и А.А. Самарским [42]. Ими было установлено, что в классе сингулярно обостряющихся граничных режимов $\psi(t)$ таких, что

$$\psi \in C^2(0, T), \quad \psi'(t) > 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (6.1.8)$$

и существует

$$\lim_{t \rightarrow T} (\psi/\psi')'(t) := l, \quad (6.1.9)$$

необходимым и достаточным условием локализации является выполнение соотношения:

$$l = -\infty \text{ либо } \psi^m/\psi' \in L^\infty(0, T). \quad (6.1.10)$$

При этом размер области интенсификации удовлетворяет равенству:

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{если } l = -\infty \\ C \limsup_{t \rightarrow T} (\psi^m(t)/\psi'(t))^{\frac{1}{2}} & \text{если } l > -\infty, \end{cases} \quad (6.1.11)$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от l . В частности, $C = (2m(m+1))^{\frac{1}{2}}/(m-1)$, если $l = -(m-1)$. Ранее [137] этот результат был установлен для модельного, предельного с точки зрения выполнения условия (6.1.10) граничного режима

$$\psi(t) = \psi_0(T-t)^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t < T, \quad \psi_0 = \text{const} > 0. \quad (6.1.12)$$

Б. Гилдинг и М. Херреро установили [50], что для произвольного непрерывного монотонного режима с обострением $\psi(t)$ необходимым и достаточным условием локализации является выполнение лишь одного условия:

$$\rho := \limsup_{t \rightarrow T} \left(\psi(t)^{-1} \cdot \int_0^t \psi^m(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (6.1.13)$$

Кроме того в [50] показано, что

1) если имеет место локализация, то

$$\limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{m-1}} u(t, x) < \infty \quad \forall x > 0,$$

2) если нет локализации, то

$$\limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{m-1}} u(t, x) = \infty \quad \forall x \geq 0,$$

3) для произвольного $x \in \Omega_s(u)$ $\liminf_{t \rightarrow T} u(t, x) = \infty$ и $\Omega_s(u)$ является связным интервалом содержащим точку $x = 0$,

4) для величины ω области интенсификации Ω_s справедливы оценки:

$$C_1 \rho \leq \omega \leq C_2 \rho, \quad (6.1.14)$$

где

$$\rho \text{ из (6.1.13), } C_1 = \left(\frac{(m+1)(2m+1)}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_2 = \left(\frac{2m^{\frac{2m+1}{m}}(m+1)^{\frac{1}{m}}}{(m-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

5) на классе "гладких" режимов с обострением, определяемом условиями (6.1.8), (6.1.9) критерии локализации (6.1.10) и (6.1.13) являются эквивалентными.

В работе [34] К. Кортазар и М. Элгуэта на более широком, чем в [50] классе непрерывных сингулярных граничных режимов $\psi(t)$ (без условия монотонности), установили критерии локализации в виде:

$$\rho^* := \limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{m-1}} \int_0^t \psi^m(s) ds < \infty, \quad (6.1.15)$$

который эквивалентен (6.1.13) на подклассе монотонных режимов. В [34] с то же полнотой, что и задачи Дирихле, изучена локализация решений задачи Неймана для уравнения (6.1.1) с сингулярно обостряющимися граничными данными:

$$(u^m)_x(t, 0) = -h(t), \quad h(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (6.1.16)$$

Установлено, в частности, что критерием локализации этого режима является условие:

$$\sigma^* := \limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{m-1}} \int_0^t h(s) ds < \infty. \quad (6.1.17)$$

Теперь о зависимости характеристик локализации граничных режимов с обострением от структуры уравнения. Сначала об уравнении (6.1.1) при $m = 1$. В этом случае задача (6.1.1)–(6.1.3) решается явно. Так при $u_0 = 0$

$$u(t, x) = \frac{x}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-s)}\right) \psi(s) ds. \quad (6.1.18)$$

Понятно, что у этого решения отсутствует термальный фронт, следовательно, нет локализации в смысле определения 6.1.1 ни при каком режиме $\psi(t)$. Но, как показано в [141], может наблюдаться метастабильная локализация (см. определение 6.1.3). Если

$$\psi(t) = (T-t)^\alpha \exp(\gamma(T-t)^{-\beta}) \quad \forall t < T, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta > 0, \quad (6.1.19)$$

то при $\beta < 1$ имеет место метастабильная локализация с $\omega = 0$ (LS – режим в терминологии из [109]). При $\beta = 1$ имеет место метастабильная локализация с $\omega = 2\gamma^{\frac{1}{2}}$ (S – режим), причем $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$ для всех $x < 2\gamma^{\frac{1}{2}}$ и $u(t, 2\gamma^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$, если $\alpha \leq 2^{-1}$. При $\beta > 1$ $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$ для всех $x \geq 0$ (HS – режим).

Естественно ожидать, что локализация граничных режимов с обострением возникает в широком классе уравнений структуры отличной либо более общей, чем (6.1.1) (см. [109]). Так для уравнения нелинейной теплопроводности с градиентной нелинейностью

$$u_t = (|u_x|^{p-1}u_x)_x, \quad p > 1, \quad (6.1.20)$$

в [109] были найдены автомодельные решения, соответствующие граничному условию Дирихле (6.1.3) с

$$\psi(t) = \psi_0(T - t)^{-l}, \quad l > 0, \quad \psi_0 > 0. \quad (6.1.21)$$

Структура этого решения говорит о том, что предельный локализованный граничный режим (S -режим) соответствует значению

$$l = (p - 1)^{-1}. \quad (6.1.22)$$

В [49] изучена локализация решений осесимметрических задач Дирихле и Неймана с сингулярным обострением граничных данных для n -мерного уравнения нелинейной теплопроводности, то есть, фактически, для следующего "одномерного" уравнения с переменным коэффициентом:

$$u_t = r^{1-n}(r^{n-1}(u^m)_r)_r, \quad u = u(t, r), \quad r \in (1, \infty), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.1.23)$$

Показана эквивалентность для этого уравнения эффективной и метастабильной локализации, установлены аналогичные (6.1.15), (6.1.17) критерии локализации граничных режимов с обострением, получены точные оценки сверху и снизу для области интенсификации.

Теперь о существующих методах изучения локализации граничных режимов с обострением. Все исследования в этой области, начиная с [110] и до конца 90-х годов, основывались на различных вариантах барьерной техники, сравнении изучаемых решений с различными специальными автомодельными решениями, построении так называемых аппроксимационных (приближенных) автомодельных решений (см. [42], [109], [49]). Особо важную роль при этом играли следующие два класса решений:

1) впервые построенные А.С. Калашниковым [54] решения уравнения (6.1.1), продемонстрировавшие эффект временной задержки (waiting

time) распространения носителей:

$$U(t, x, \tau, a) = \begin{cases} Aa^{\frac{2}{m-1}}(\tau - t)^{-\frac{1}{m-1}}(1 - \frac{x}{a})^{\frac{2}{m-1}} & \forall x < a, \quad \forall t < \tau, \\ 0 & \forall x \geq a, \quad \forall t < \tau; \quad A := \left(\frac{m-1}{2m(m+1)}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \end{cases} \quad (6.1.24)$$

где $a > 0$, $\tau \leq T$ – произвольные параметры (аналоги этого решения для уравнения (6.1.23) построены в [49]);

2) так называемые решения Баренблатта (или Баренблатта-Паттла (см. [135], [145], [10], [11], [17])), которые в частных случаях уравнения (6.1.23) при $n = 1$ и $n = 3$ были впервые построены Я.Б. Зельдовичем и А.С. Компанейцем [139].

В [116], [118] был предложен принципиально другой, не связанный с барьерной техникой, метод исследования локализации граничных режимов с сингулярным обострением для общих квазилинейных дивергентных параболических уравнений второго порядка в произвольных многомерных областях. Этот метод является комбинацией идей, развивавшихся в рамках метода локальных энергетических оценок (см. [39], [6]), метода априорных оценок типа принципа Сен-Венана в изучении асимптотических свойств и свойств единственности энергетических обобщенных решений линейных эллиптических и параболических уравнений (см. [127], [61], [102], [104], [142]), нелинейного варианта метода оценок типа принципа Сен-Венана (см. [115], [2]) и состоит в эффективной оценке перетоков энергии, связанной с изучаемым решением, в бесконечном семействе подобластей-полос, накапливающихся в окрестности времени обострения граничного режима.

В настоящей главе (§6.2, §6.3) приводятся усовершенствованные по сравнению с [116], [118] доказательства результатов о достаточных условиях локализации обостряющихся граничных режимов Дирихле для общих квазилинейных параболических уравнений типа медленной ньютоновско-неньютоновской диффузии (теплопроводности) (модельный пример: уравнение (6.1.1) с $m > 1$). Затем проводится (§6.4) адаптация этих методов к общим уравнениям типа "нейтральной" (постоянной) диффузии (теплопроводности) (модельный пример: уравнение (6.1.1) с $m = 1$), а в §6.5 устанавливаются характеристики локализации для уравнений типа "быстрой" диффузии (уравнение (6.1.1) с $m < 1$).

Итак, пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с C^1 -гладкой границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$, где

$$\partial_0\Omega = \{x : |x| = 1\}, \quad \partial_1\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R_1\}, \quad R_1 = \text{const} > 1. \quad (6.1.25)$$

В цилиндрической области $Q = Q^{(T)} = (0, T) \times \Omega$, $0 < T < \infty$, рассмат-

ривается следующая начально-краевая задача:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \sum_{i=1}^n (a_i(t, x, u, D_x u))_{x_i} = 0 \quad \text{в } Q, \quad q = \text{const} > 0; \quad (6.1.26)$$

$$u(t, x) = f(t, x) \quad \text{на } (0, T) \times \partial_0 \Omega; \quad (6.1.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} := \sum_{i=1}^n a_i(t, \dots, D_x u) \nu_i = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial_1 \Omega; \quad (6.1.28)$$

$$u(0, x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega). \quad (6.1.29)$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) = \nu(x)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial_1 \Omega$ в точке x , непрерывные функции всех своих аргументов $a_i(t, x, s, \xi)$ удовлетворяют следующим условиям коэрцитивности и роста:

$$d_0 |\xi|^{p+1} \leq \sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \xi) \xi_i \quad \forall (t, x, s, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad p = \text{const} > 0, \quad (6.1.30)$$

$$a_i(t, \dots, \xi) \leq d_1 |\xi|^p \quad \forall (t, \dots, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.1.31)$$

где постоянные $d_0 > 0$, $d_1 < \infty$ не зависят от (t, x, s, ξ) . Предполагаем, что функция $f(t, x)$, определяющая граничный режим (6.1.27), является следом на $(0, T) \times \partial_0 \Omega$ функции $\bar{f}(t, x)$, удовлетворяющей следующим условиям гладкости:

$$\bar{f}(t, \cdot) \in C_{\text{loc}}([0, T]; L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{p+1, \text{loc}}([0, T]; W_{p+1}^1(\Omega)); \quad (6.1.32)$$

$$\bar{f}_t(t, \cdot) \in L_{1, \text{loc}}([0, T], L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{\frac{p+1}{p-q+1}, \text{loc}}([0, T], L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)). \quad (6.1.33)$$

Через $W_m^1(\Omega, S)$ обозначим, как обычно, замыкание в норме пространства Соболева $W_m^1(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности множества $S \subset \partial \Omega$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -операцию спаривания элементов пространств $(W_{p+1}^1(\Omega, \partial_0 \Omega))^*$ и $W_{p+1}^1(\Omega, \partial_0 \Omega)$. Характер обострения граничного режима при $t \rightarrow T$ будем описывать функцией

$$F(t) := \sup_{0 < \tau < t} \int_{\Omega} |\bar{f}(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D_x \bar{f}(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} |\bar{f}_\tau(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T. \quad (6.1.34)$$

Определение 6.1.4. Функция $u(t, x) \in C_{\text{loc}}([0, T]; L_{q+1}(\Omega))$ называется обобщенным (энергетическим) решением задачи (6.1.26)–(6.1.29), если:

- 1) $u(t, \cdot) - f(t, \cdot) \in L_{p+1, \text{loc}}([0, T]; W_{p+1}^1(\Omega, \partial_0 \Omega));$
- 2) $(|u(t, \cdot)|^{q-1} u(t, \cdot))_t \in L_{\frac{p+1}{p}, \text{loc}}([0, T]; (W_{p+1}^1(\Omega, \partial_0 \Omega))^*);$
- 3) выполняется интегральное тождество:

$$\int_0^{\bar{T}} \langle (|u|^{q-1} u)_t, \eta \rangle dt + \int_0^{\bar{T}} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, \dots, D_x u) \eta_{x_i} dx dt = 0 \quad (6.1.35)$$

для произвольного $\bar{T} < T$ и произвольной функции $\eta(t, x) \in L_{p+1}((0, \bar{T}); W_{p+1}^1(\Omega, \partial_0 \Omega));$

- 4) выполняется начальное условие (6.1.29).

Замечание 6.1.1. Уравнение (6.1.26) с структурными условиями (6.1.30), (6.1.31) принадлежит к классу квазилинейных "дважды вырождающихся" (или дважды нелинейных) параболических уравнений. Изучение разрешимости начально-краевых задач для уравнений из этого класса было инициировано книгой Ж.-Л. Лионса [89] и активно проводилось в дальнейшем многими математиками (см., например, [54], [14] и имеющуюся там литературу). В програмной работе [3] впервые изучена начально-краевая задача с неоднородными начальными и граничными данными Дирихле. Из результатов этой работы следует, в частности, существование обобщенного (в смысле определения (6.1.4)) решения $u_j(t, x)$ задачи (6.1.26)–(6.1.31) в области $Q_j := (0, T_j) \times \Omega$ с произвольным $T_j < T$ при дополнительном условии монотонности для функций $a_i(t, x, s, \xi)$:

$$\text{M)} \quad \sum_{i=1}^n (a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, \dots, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geq c_0 |\xi - \eta|^{p+1} \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $c_0 > 0$ не зависит от (t, x, s, ξ, η) . Отметим, что для функций $a_i(\dots)$ из (6.1.30), (6.1.31) условие M) может быть выполненным только при $p \geq 1$.

Замечание 6.1.2. В качестве области Ω в задаче (6.1.26)–(6.1.29) выбрана область с модельной "внутренней" границей $\partial_0 \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ только для простоты обозначений и построений. Как это будет видно из дальнейших построений, в качестве исходной области Ω может быть взята любая область с C^1 -гладкой "внутренней" границей $\partial_0 \Omega$, являющейся границей некоторой выпуклой ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 6.1.3. Все выше упоминавшиеся уравнения нелинейной теплопроводности ((6.1.1), (6.1.20), (6.1.23)) являются частными случаями общего уравнения (6.1.26). Так, уравнение (6.1.1), переписанное относительно новой неизвестной функции $v := |u|^{m-1} u$, соответствует уравнению (6.1.26) с $p = 1$, $q = m^{-1}$, $a_i(t, x, s, \xi) = \xi_i$, $n = 1$.

Как хорошо известно (см., например, [6], [39]), уравнение (6.1.26) в случае медленной диффузии, то есть при

$$0 < q < p. \quad (6.1.36)$$

обладает свойством конечности скорости распространения носителя произвольного энергетического решения $u(t, x)$. В частности, если

$$\text{supp } u_0 \subset B_0(R) := \{x : |x| < R\}, \quad 1 < R, \quad \Omega \setminus \overline{B_0(R)} \neq \emptyset, \quad (6.1.37)$$

то существует непрерывная неубывающая функция $\zeta(t)$, $\zeta(0) = R$, такая что

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subset B_0(\zeta(t)) \quad \forall t < T. \quad (6.1.38)$$

Поэтому естественно ввести следующее аналогичное 6.1.1

Определение 6.1.5. Решение u задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.1.36), (6.1.37) (или соответствующий граничный режим f (или F)) является локализованным, если найдется такое $\bar{R} > R$, что $\Omega \setminus \overline{B_0(\bar{R})} \neq \emptyset$ и $\zeta_u(t) := \zeta(t) < \bar{R}$ для всех $t < T$.

Теперь приведем определение множества интенсификации решения u задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.1.30)–(6.1.34), адаптированное к используемым нами интегральным характеристикам поведения решения в окрестности времени обострения $t = T$.

Определение 6.1.6. Множеством интенсификации (blow-up множеством) $\Omega_s(u)$ обобщенного решения u задачи (6.1.26)–(6.1.29) называется множество точек $x \in \bar{\Omega}$ таких, что

$$\sup_{t < T} \left\{ \int_{\{|y-x| < \varepsilon\} \cap \Omega} |u(t, y)|^{q+1} dy + \int_0^t \int_{\{|y-x| < \varepsilon\} \cap \Omega} |D_y u(\tau, y)|^{p+1} dy d\tau \right\} = \infty \quad (6.1.39)$$

для произвольного $\varepsilon > 0$.

Замечание 6.1.4. Несложно проверить, что приведенное определение соответствует определению множества интенсификации $\Omega_s^*(u)$ из (6.1.7).

Следующее определение является естественным обобщением определения 6.1.3.

Определение 6.1.7. Обобщенное решение u задачи (6.1.26)–(6.1.29) (и соответствующий граничный режим f) называем эффективно локализованным (или S -режимом), если

$$\Omega \setminus \bar{\Omega}_s \neq \emptyset,$$

где $\Omega_s := \Omega_s(u)$ – множество интенсификации этого решения. Локализованный режим f с $\Omega_s \subset \partial_0 \Omega$ будем, следуя [109], называть LS -режимом. Соответственно, нелокализованные режимы с обострением будем называть HS -режимами.

6.2. Достаточные условия локализации граничных режимов с обострением

Теорема 6.2.1. ([116], [118]) Пусть в задаче (6.1.26)–(6.1.29) дополнительно к условиям (6.1.30)–(6.1.33) выполнены также условия (6.1.36), (6.1.37). Пусть сингулярно обостряющаяся в момент времени $t = T$ граничная функция $f(t, x)$ обладает следующим свойством: существует такое ее продолжение $\bar{f}(t, x)$ в область $(0, T) \times \Omega$, что соответствующая функция $F(t)$, определяемая (6.1.34), удовлетворяет оценке:

$$F(t) \leq \omega_0(T-t)^{-\alpha_0} \quad \forall t < T, \quad \alpha_0 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega_0 = \text{const} > 0. \quad (6.2.1)$$

Тогда существуют положительные постоянные L_1, L_2 , зависящие только от параметров n, p, q , такие, что для носителя произвольного обобщенного решения $u(t, x)$ рассматриваемой задачи справедливо следующее включение:

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subset \{x \in \Omega : |x| \leq L_1 h_0^{b_1} + L_2 \omega_0^{b_2}\} \quad \forall t < T, \quad (6.2.2)$$

где

$$b_1 = \frac{(p-q)(n+q) + (q+1)^2}{(p-q)(n+q+1) + (q+1)^2}, \quad b_2 = \frac{p-q}{(q+1)(p+1) + n(p-q)},$$

$$h_0 = \int_{\Omega} |u_0(x)|^{q+1} dx.$$

Следовательно, граничный режим (6.2.1) является локализованным, если

$$L_1 h_0^{b_1} + L_2 \omega_0^{b_2} < 2^{-1} \text{diam } \Omega. \quad (6.2.3)$$

В частности, если Ω – неограниченная область, то режим (6.2.1) локализован при любом $\omega_0 < \infty$, причем при $h_0 = 0$ для радиуса R^* области локализации справедлива оценка:

$$R^* \leq L_2 \omega_0^{b_2}. \quad (6.2.4)$$

Замечание 6.2.1. Оценка (6.2.4) является точной параметру ω_0 из (6.2.1). Действительно, пусть $u(t, x)$ – решение задачи (6.1.1)–(6.1.3) с $u_0(x) = 0$, $\psi(t) = \psi_0(T - t)^{-\frac{1}{m-1}} = \bar{\psi}(t, 0)$, где

$$\bar{\psi}(t, x) = U\left(t, x, T, \left(\frac{\psi_0}{A}\right)^{\frac{m-1}{2}}\right) \quad \forall x > 0, \quad A \text{ из (6.1.24)}. \quad (6.2.5)$$

Здесь $U(t, x, \tau, a)$ – решение из (6.1.24). В соответствии с (6.1.11)–(6.1.14) для величины ω области интенсификации $\Omega_s(u)$ справедлива оценка:

$$\omega \leq C_2(m-1)^{1/2} \cdot \psi_0^{\frac{m-1}{2}}. \quad (6.2.6)$$

Теперь отметим, что новая неизвестная функция $v(t, x) = u(t, x)^m$ является решением задачи (6.1.26), (6.1.27), (6.1.29) с

$$q = m^{-1}, \quad p = 1, \quad n = 1, \quad \Omega = (0, \infty), \quad u_0(|x|) = 0, \quad f(t, x) = \bar{\psi}(t, x)^m, \quad (6.2.7)$$

причем для соответствующей функции $F(t)$ из (6.1.34) имеем представление:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) := \int_{\Omega} \bar{\psi}(t, x)^{m+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\psi}^m(\tau, x))_x^2 dx d\tau + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} |(\bar{\psi}^m(\tau, x))_{\tau}|^{\frac{m+1}{m}} dx \right)^{\frac{m}{m+1}} d\tau \right)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Простые вычисления, использующие явный вид функции $\bar{\psi}(t, x)$ из (6.2.5), приводят к оценкам:

$$F_i(t) \leq c_i \psi_0^{\frac{3m+1}{2}} (T-t)^{-\frac{m+1}{m-1}} \quad \forall t < T, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.2.8)$$

где c_i – явно вычисляемые константы, зависящие только от m . Заметим, что при значениях p, q из (6.2.7) $\frac{q+1}{p-q} = \frac{m+1}{m-1}$. Поэтому оценка (6.2.8) соответствует оценке (6.2.1) с $\omega_0 = c\psi_0^{\frac{3m+1}{2}}$, $c = c_1 + c_2 + c_3$. Следовательно, оценка (6.2.4) в силу (6.2.7) может быть записана так:

$$R^* \leq L_2 c^{\frac{m-1}{3m+1}} \psi_0^{\frac{(3m+1)(m-1)}{2(3m+1)}} = L_2 c^{\frac{m-1}{3m+1}} \psi_0^{\frac{m-1}{2}},$$

что соответствует точному соотношению (6.2.6).

Замечание 6.2.2. Если $u_j(t, x)$ – произвольная последовательность решений задачи (6.1.26)–(6.1.31) с необостряющимися граничными данными в областях $(0, T_j) \times \Omega$, $T_j \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$ (такая последовательность упоминалась в замечании 6.1.1), то теорема 6.2.1 гарантирует равномерную по j ограниченность носителей этих решений:

$$\text{supp } u_j(t, \cdot) \subset \{|x| \leq L_1 h_0^{b_1} + L_2 w_0^{b_2}\} \quad \forall t < T, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Предваряя непосредственное доказательство теоремы 6.2.1, установим ряд вспомогательных утверждений. Сначала выведем при произвольных $p > 0$, $q > 0$ глобальную интегральную оценку решения u задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.1.30)–(6.1.34) в слоях $Q^{(\tau)} := Q \cap \{0 < t < \tau\}$ $\forall \tau < T$ в терминах функции граничного режима $F(\tau)$.

Лемма 6.2.1. *Для произвольного энергетического решения задачи (6.1.26)–(6.1.29) имеет место следующая интегральная априорная оценка:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \leq \\ & \leq C_1 \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx + C_2 F(\tau) \quad \forall \tau \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

где постоянные C_1, C_2 зависят только от известных параметров задачи (6.1.26)–(6.1.29) и не зависят от решения u .

Доказательство. В силу формулы интегрирования по частям (см. [3]) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \langle (|u|^{q-1}u)_t, u - f \rangle dt = \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} \left(|u(\tau, x)|^{q+1} - |u(0, x)|^{q+1} \right) dx + \\ & + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left(|u(t, x)|^{q-1}u(t, x) - |u(0, x)|^{q-1}u(0, x) \right) f'_t(t, x) dx dt - \\ & - \int_{\Omega} \left(|u(\tau, x)|^{q-1}u(\tau, x) - |u(0, x)|^{q-1}u(0, x) \right) f(\tau, x) dx. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Подставляя в интегральное тождество (6.1.35) в качестве пробной функции $u(t, x) - f(t, x)$, получаем с учетом (6.2.10) и структурных условий (6.1.30), (6.1.31):

$$\begin{aligned} & \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + d_0 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \leq \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx + \\ & + d_1 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |D_x u|^p |D_x f| dx dt + \int_{\Omega} (|u(\tau, x)|^q + |u_0|^q) |f(\tau, x)| dx + \\ & + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left(|u(t, x)|^q + |u_0(x)|^q \right) |f'_t(t, x)| dx dt. \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Оценим сверху слагаемые в правой части (6.2.11). В силу неравенства Юнга с “ ε ”:

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} |D_x u|^p \cdot |D_x f| dx dt \leq \varepsilon \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt +$$

$$\begin{aligned}
& +c(\varepsilon) \int_0^\tau \int_\Omega |D_x f|^{p+1} dx dt, \quad \forall \varepsilon > 0; \\
& \int_\Omega \left(|u(\tau, x)|^q + |u_0(x)|^q \right) |f(\tau, x)| dx \leq \varepsilon \left(\int_\Omega |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_\Omega |u_0|^{q+1} dx \right) + \\
& +c(\varepsilon) \int_\Omega |f(\tau, x)|^{q+1} dx \quad \forall \varepsilon > 0; \\
& \int_0^\tau \int_\Omega |u_0(x)|^q |f_t(t, x)| dx dt \leq \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}^q \int_0^\tau \left(\int_\Omega |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \leq \\
& \leq \varepsilon \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} + c(\varepsilon) \left(\int_0^\tau \left(\int_\Omega |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} \quad \forall \varepsilon > 0; \\
& \int_0^\tau \int_\Omega |u(t, x)|^q |f_t(t, x)| dx dt \leq \sup_{0 < t < \tau} \left(\int_\Omega |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{q}{q+1}}. \\
& \int_0^\tau dt \left[\int_\Omega |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right]^{\frac{1}{q+1}} \leq \varepsilon \sup_{0 < t < \tau} \int_\Omega |u(t, x)|^{q+1} dx + \\
& +c(\varepsilon) \left(\int_0^\tau \left(\int_\Omega |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Используя полученные оценки, выводим из (6.2.11):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon \right) \int_\Omega |u(\tau, x)|^{q+1} dx + (d_0 - \varepsilon) \int_0^\tau \int_\Omega |D_x u|^{p+1} dx dt \leq \\
& \leq \varepsilon \sup_{0 < t < \tau} \int_\Omega |u(t, x)|^{q+1} dx + \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon \right) \int_\Omega |u_0|^{q+1} dx + \\
& +c(\varepsilon) \left[\int_\Omega |f(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^\tau \int_\Omega |D_x f|^{p+1} dx dt + \right. \\
& \left. + \left(\int_0^\tau \left(\int_\Omega |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} \right] \quad (6.2.12)
\end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется значение $t_\varepsilon = t_\varepsilon(\tau) \leq \tau$ такое, что

$$(1 - \varepsilon) \sup_{t < \tau} \int_\Omega |u(t, x)|^{q+1} dx \leq \int_\Omega |u(t_\varepsilon, x)|^{q+1} dx.$$

Тогда оценка (6.2.12) при $\tau_1 = t_\varepsilon(\tau)$ дает:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right)(1 - \varepsilon) \sup_{t < \tau} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx &\leq \left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right) \int_{\Omega} |u(t_\varepsilon, x)|^{q+1} dx \\ &\leq \varepsilon \sup_{0 < t < t_\varepsilon} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx + \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon\right) \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx \\ &\quad + c(\varepsilon) \left[\int_{\Omega} |f(t_\varepsilon, x)|^{q+1} dx + \int_0^{t_\varepsilon} \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{t_\varepsilon} \left(\int_{\Omega} |f_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} \right], \end{aligned}$$

откуда вытекает:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right)(1 - \varepsilon) - \varepsilon \right] \sup_{t < \tau} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx \\ &\leq \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon\right) \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx + c(\varepsilon) F(\tau), \quad F(\tau) \text{ из (6.1.39)}. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Оценивая первый член в правой части (6.2.12) при помощи (6.2.13), приходим к:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right) \int_{\Omega} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + (d_0 - \varepsilon) \int_0^\tau \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \leq \\ &\leq \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right)(1 - \varepsilon) - \varepsilon}\right) \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx + \\ &\quad + c(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon\right)(1 - \varepsilon) - \varepsilon}\right) F(\tau), \end{aligned}$$

откуда при фиксированном $\varepsilon < \max\{\frac{d_0}{2}, \frac{q}{2(q+1)}, 2^{-1}\}$ следует доказываемая оценка (6.2.9). $\square$

Введем семейства подобластей, связанных с рассматриваемыми областями Ω , Q :

$$\begin{aligned} \Omega(s) &:= \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > s\} \quad \forall s > 1, \\ Q_r^\tau(s) &:= (r, \tau) \times \Omega(s) \quad \forall 0 \leq r < \tau \leq T. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Следующий шаг является подготовительным к выводу локальных энергетических оценок решения u в семействах подобластей $Q_a^b(s)$ для любых $s > 1$, для любых $a, b < T$.

Лемма 6.2.2. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (6.1.26)–(6.1.34), (6.1.36). Тогда существуют положительные постоянные C_3, C_4 , зависящие только от заданных параметров рассматриваемой задачи, такие, что имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx + \frac{d_0(q+1)}{q} \int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\ & \leq \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + \left(\int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} d\sigma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ & \times \left[C_4 \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1}{p+1}} + C_3 \left(\int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}} \right] \quad (6.2.15) \end{aligned}$$

для любых $a, b : 0 \leq a < b < T$, любых $s > 1$, где

$$\partial_0 \Omega(s) := \partial \Omega(s) \cap \{|x| = s\}, \quad \theta = \frac{n(p-q) + q + 1}{n(p-q) + (q+1)(p+1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем числа $s > 1$, $\delta > 0$ и введем липшицеву срезающую функцию $\eta_{s,\delta}(r)$:

$$\begin{aligned} \eta_{s,\delta}(r) &= 0 \quad \forall r < s, \quad \eta_{s,\delta}(r) = 1 \quad \forall r > s + \delta, \\ \eta_{s,\delta}(r) &= \frac{r-s}{\delta} \quad \forall r : s < r < s + \delta. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Подставим в интегральное тождество (6.1.35) пробную функцию

$$\eta(t, x) = u(t, x) \eta_{s,\delta}(|x|).$$

Запишем сначала это тождество с $\bar{T} = b$, затем с $\bar{T} = a$ и вычтем полученные равенства. Используя формулу интегрирования по частям из [3],

приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} \eta_{s,\delta} dx + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, \dots, D_x u) u_{x_i} \eta_{s,\delta} dx dt \\ &= \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} \eta_{s,\delta}(|x|) dx \\ & \quad - \int_a^b \int_{\Omega(s) \setminus \Omega(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots, D_x u) u \cdot (\eta_{s,\delta}(|x|))_{x_i} dx dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу $\delta \rightarrow 0$ (см. [39]), получаем, что для почти всех s существует $\int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots) u \nu_i d\sigma dt$ ($\vec{\nu} = \vec{\nu}(x)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial_0 \Omega(s)$) и справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, D_x u) u_{x_i} dx dt \\ & \leq \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots) u \nu_i d\sigma dt \quad (6.2.17) \end{aligned}$$

для почти всех $s > 1$. Используя структурные условия (6.1.30), (6.1.31) и неравенство Гельдера, из последнего неравенства выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx + \frac{d_0(q+1)}{q} \int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \\ & \leq \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx \\ & + \frac{(q+1)d_1}{q} \left(\int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} |D_x u|^{p+1} d\sigma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} |u|^{p+1} d\sigma dt \right)^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Это есть наше стартовое неравенство, справедливое для произвольных $p > 0$, $q > 0$. Теперь в силу (6.1.36), применяя предложение 9.1.1, полу-

чаем:

$$\begin{aligned} \int_{\partial_0 \Omega(s)} |u(t, x)|^{p+1} d\sigma &\leq k_1^{p+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx \right)^\theta \\ &\times \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta)(p+1)}{q+1}} + k_2^{p+1} \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}}. \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Интегрируя это неравенство по t и подставляя результат в (6.2.18), получаем соотношение (6.2.15) с $C_3 = k_1 d_1 q^{-1}(q+1)$, $C_4 = k_2 d_1 q^{-1}(q+1)$. $\square$

Замечание 6.2.3. Стандартный размерностный анализ показывает, что неравенство (6.2.19) справедливо с $k_2 = 0$, если $\partial_1 \Omega = \emptyset$, либо $\text{supp } u(t, \cdot) \cap \partial_1 \Omega = \emptyset$. Поэтому неравенство (6.2.15) выполняется с $C_4 = 0$, если

$$\text{supp } u(t_1, \cdot) \cap \partial_1 \Omega = \emptyset \quad \forall t \in (a, b).$$

Введем теперь монотонно возрастающую последовательность $\{t_j\}$, $j = 1, 2, \dots$; $t_0 = 0$, $t_j \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$, $\Delta_j := t_j - t_{j-1}$. Конкретизацию выбора этой последовательности будем осуществлять в дальнейшем. Определим теперь два семейства энергетических функций, связанных с рассматриваемым решением $u(t, x)$:

$$\begin{aligned} E_j(s) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \quad \forall s > 1, \quad j = 1, 2, \dots, \\ h_j(s) &= \sup_{t \in (t_{j-1}, t_j]} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \quad \forall s > 1, \quad j = 1, 2, \dots, \\ h_0(s) &= \int_{\Omega(s)} |u_0(x)|^{q+1} dx. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Лемма 6.2.3. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.1.30)–(6.1.34), (6.1.36). Тогда соответствующие энергетические функции из (6.2.20) удовлетворяют следующей системе дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} h_j(s) + E_j(s) &\leq C_5 h_{j-1}(s) + C_6 \Delta_j^{\nu_1} (-E'_j(s))^{1+\mu_1} \\ &\quad + C_7 \Delta_j^{\nu_2} (-E'_j(s))^{1+\mu_2}, \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

$$\begin{aligned} h_j(s) &\leq (1 + \gamma) h_{j-1} + C_8 \Delta_j^{\nu_1} (-E'_j(s))^{1+\mu_1} \\ &\quad + C_9 \Delta_j^{\nu_2} (-E'_j(s))^{1+\mu_2} \quad \forall \gamma > 0, \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

$$\text{где } \nu_1 = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1, \quad \mu_1 = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)}, \quad \nu_2 = \frac{q+1}{q(p+1)}, \quad \mu_2 = \frac{p-q}{q(p+1)},$$

$$C_8 = C_8(\gamma) \rightarrow \infty, \quad C_9 = C_9(\gamma) \rightarrow \infty \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0, \quad \theta \text{ из (6.2.15).}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стандартно проверяется (см. [39]), что функция $E_j(s)$ дифференцируема почти всюду и для почти всех s имеет место равенство

$$-\frac{d}{ds}E_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial_0\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} d\sigma dt \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (6.2.23)$$

Полагая в неравенстве (6.2.15) $a = t_{j-1}$, $b = t_j$, выводим в силу (6.2.23)

$$\begin{aligned} E_j(s) &\leq c_0(-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} \left[C_4 \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1}{p+1}} \right. \\ &+ C_3 E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}} \left. + c_0 \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1}, x)|^{q+1} dx \right] \\ &\leq c_0 h_{j-1}(s) + c_0 C_3 E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1-\theta}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}} \\ &\quad + c_0 C_4 (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}, \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

где $c_0 = q(q+1)^{-1}d_0^{-1}$. Полагая в неравенстве (6.2.15) $a = t_{j-1}$, $b = \bar{t}_\delta \in (t_{j-1}, t_j) : (1-\delta)h_j(s) = \int_{\Omega(s)} |u(\bar{t}_\delta, x)|^{q+1} dx$, получим

$$\begin{aligned} (1-\delta)h_j(s) + c_0^{-1}\bar{E}_j(s) &\leq h_{j-1}(s) + C_3 \bar{E}_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-\bar{E}'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1-\theta}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}} \\ &+ C_4 (-\bar{E}'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}, \quad \bar{E}_j(s) := \int_{t_{j-1}}^{\bar{t}_\delta} \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt. \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Складывая неравенства (6.2.24), (6.2.25), выбирая δ достаточно малым и замечая, что $\bar{E}_j \leq E_j$, $-\bar{E}'_j(s) < -E'_j(s)$, получим с использованием неравенства Юнга с “ ε ”:

$$\begin{aligned} h_j(s) + E_j(s) &\leq (1+c_0)h_{j-1} + \varepsilon(1+c_0)C_3 E_j(s) + \\ &+ \varepsilon(1+c_0)C_3 h_j(s) + (1+c_0)C_3 c_1(\varepsilon) \Delta_j^{\nu_1} (-E'_j(s))^{1+\mu_1} \\ &+ (1+c_0)C_4 \varepsilon h_j(s) + (1+c_0)C_4 c_2(\varepsilon) \Delta_j^{\nu_2} (-E'_j(s))^{1+\mu_2} \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

где $c_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$, $c_2(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Полагая в (6.2.26) $\varepsilon = \bar{\varepsilon} := 2^{-1}(1+c_0)^{-1}(C_3+C_4)^{-1}$, приходим к соотношению (6.2.21) с

$$C_5 = 2(1+c_0), \quad C_6 = 2(1+c_0)C_3c_1(\bar{\varepsilon}), \quad C_7 = 2(1+c_0)C_4c_2(\bar{\varepsilon}). \quad (6.2.27)$$

Для получения оценки (6.2.22) применим неравенство Юнга с “ ε ” при оценке членов в правой части неравенства (6.2.25):

$$(1-\delta)h_j(s) + c_0^{-1}\bar{E}_j(s) \leq h_{j-1}(s) + \varepsilon C_3\bar{E}_j(s) + \varepsilon C_3h_j(s) + C_3c_1(\varepsilon)\Delta_j^{\nu_1}(-\bar{E}'_j(s))^{1+\mu_1} + \varepsilon C_4h_j(s) + c_2(\varepsilon)C_4\Delta_j^{\nu_2}(-\bar{E}'_j(s))^{1+\mu_2} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Полагая $\delta = \varepsilon$, выводим, что

$$(1-\varepsilon-\varepsilon C_3-\varepsilon C_4)h_j(s) + (c_0^{-1}-\varepsilon C_3)\bar{E}_j(s) \leq h_{j-1}(s) + C_3c_1(\varepsilon)\Delta_j^{\nu_1}(-\bar{E}'_j(s))^{1+\mu_1} + C_4c_2(\varepsilon)\Delta_j^{\nu_2}(-\bar{E}'_j(s))^{1+\mu_2}.$$

Полагая здесь $\varepsilon = \varepsilon' := \gamma(1+\gamma)^{-1}(1+C_3+C_4)^{-1}$, приходим к (6.2.22) с

$$C_8 = C_3c_1(\varepsilon'), \quad C_9 = C_4c_2(\varepsilon'). \quad (6.2.28)$$

Лемма доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6.2.1 теперь состоит в анализе свойств решений бесконечной системы дифференциальных неравенств (6.2.21), (6.2.22). В этой системе имеется бесконечное количество свободных параметров, которыми мы можем управлять. Выберем сначала значения параметров Δ_i , $i = 1, 2, \dots$. Для этого зафиксируем число $\xi := 0 < \xi < 1$ и определим

$$\Delta_1 = T(1-\xi), \quad \Delta_j = \xi\Delta_{j-1} \quad \forall j \geq 2. \quad (6.2.29)$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i = T$, а также:

$$T - t_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i = \frac{\xi}{1-\xi}\Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.2.30)$$

Введем теперь нормированные энергетические функции:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s) \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.2.31)$$

Легко видеть, что параметры в системе (6.2.21), (6.2.22) удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{\nu_2}{\mu_2} = \frac{q+1}{p-q} \iff \nu_1 - (1+\mu_1)\frac{(q+1)}{(p-q)} = \nu_2 - (1+\mu_2)\frac{(q+1)}{(p-q)} = -\frac{q+1}{p-q}.$$

Поэтому система (6.2.21), (6.2.22) по отношению к новым неизвестным функциям $A_j(s)$, $H_j(s)$ переписывается в виде:

$$H_j(s) + A_j(s) \leq \overline{C}_5 H_{j-1}(s) + C_6 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} + C_7 (-A'_j(s))^{1+\mu_2}, \quad (6.2.32)$$

$$H_j(s) \leq (1 + \gamma) \xi^{\frac{q+1}{p-q}} H_{j-1}(s) + C_8 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} + C_9 (-A'_j(s))^{1+\mu_2} \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6.2.33)$$

где $H_0(s) = \left(\frac{T(1-\xi)}{\xi} \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s)$, $\overline{C}_5 = C_5 \xi^{\frac{q+1}{p-q}}$. Теперь конкретизируем выбор параметра γ в (6.2.33). Зафиксируем некоторое число λ :

$$\xi^{\frac{q+1}{p-q}} < \lambda < 1, \quad \xi \text{ из (6.2.29)}, \quad (6.2.34)$$

и положим

$$0 < \gamma = \gamma(\lambda) := \lambda \xi^{-\frac{q+1}{p-q}} - 1 \iff (1 + \gamma) \xi^{\frac{q+1}{p-q}} = \lambda < 1. \quad (6.2.35)$$

Теперь воспользуемся дополнительными условиями из теоремы 6.2.1, условиями (6.1.36), (6.1.37). В силу этих условий, как хорошо известно (см., например, [39]), носитель решения $u(t, \cdot)$ распространяется непрерывно и, следовательно, существует такое $\overline{T} \leq T$, что

$$\text{supp } u(t, \cdot) \cap \partial_1 \Omega = \emptyset \quad \forall t < \overline{T} \leq T. \quad (6.2.36)$$

Тогда в силу леммы 6.2.2 в (6.2.15) $C_4 = 0$ при $b < \overline{T}$ и, следовательно, в силу (6.2.27), (6.2.28) система (6.2.32), (6.2.33) имеет “укороченную форму”:

$$H_j(s) + A_j(s) \leq \overline{C}_5 H_{j-1}(s) + C_6 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \quad \forall j \leq \bar{j}, \quad (6.2.37)$$

$$H_j(s) \leq \lambda H_{j-1}(s) + C_8 (-A'_j(s))^{1+\mu_1}, \quad (6.2.38)$$

где $\bar{j} := \max\{j : \Delta_1 \frac{1-\xi^j}{1-\xi} \leq \overline{T}\}$. Теперь, как легко видеть, для доказательства теоремы 6.2.1 достаточно показать, что при выполнении ограничения (6.2.1) на граничный режим, а, следовательно, в силу леммы 6.2.1, при выполнении соответствующих оценок сверху на начальные значения $A_j(1)$, $H_j(1)$, все решения системы (6.2.37), (6.2.38) обладают следующим свойством равномерной по j ограниченности носителей:

$$\sup\{s : A_j(s) > 0\} \leq R_1, \quad \sup\{s : H_j(s) > 0\} \leq R_1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (6.2.39)$$

где R_1 из условия (6.1.25). Доказательство (6.2.39) мы теперь и проведем. Итерируя соотношение (6.2.38), получаем:

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) &\leq \bar{C}_5 H_{j-1}(s) + C_6 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \leq \bar{C}_5 \lambda H_{j-2}(s) \\ &+ \bar{C}_5 C_8 (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu_1} + C_6 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \leq \bar{C}_5 \lambda^2 H_{j-3}(s) + \bar{C}_5 C_8 \lambda (-A'_{j-2}(s))^{1+\mu_1} \\ &+ \bar{C}_5 C_8 (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu_1} + C_6 (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \leq \dots \leq \bar{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) \\ &+ C_{10} \sum_{i=1}^j \lambda^{j-i} (-A'_i(s))^{1+\mu_1}, \quad \forall j \leq \bar{j}, \quad C_{10} = \lambda^{-1} \max(C_6 \lambda, \bar{C}_5 C_8). \end{aligned}$$

В силу выпуклости функции $g(s) = s^{1+\mu_1}$, $\mu_1 > 0$, из последнего неравенства вытекает:

$$H_j(s) + A_j(s) \leq C_{11} \lambda^{j-1} h_0(s) + C_{10} \left(\sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} (-A'_i(s)) \right)^{1+\mu_1}, \quad \forall j \leq \bar{j}, \quad (6.2.40)$$

где $C_{11} = \bar{C}_5 (T(1-\xi)\xi^{-1})^{\frac{q+1}{p-q}}$. Введем еще одно семейство энергетических функций:

$$U_j(s) := \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} A_i(s), \quad j = 1, 2, \dots, \quad U_0(s) = 0. \quad (6.2.41)$$

Очевидно, имеют место равенства:

$$U_j(s) - \lambda^{\frac{1}{1+\mu_1}} U_{j-1}(s) = A_j(s), \quad \forall j \geq 1.$$

Поэтому соотношения (6.2.40) могут быть записаны в виде:

$$U_j(s) \leq \lambda^{\frac{1}{1+\mu_1}} U_{j-1}(s) + C_{10} (-U'_j(s))^{1+\mu_1} + C_{11} \lambda^{j-1} h_0(s) \quad \forall j : 1 \leq j \leq \bar{j}. \quad (6.2.42)$$

Оценим сверху начальное значение $U_j(1)$.

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} A_i(1) = \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы 6.2.1 имеем:

$$E_i(1) \leq C_1 h_0(1) + C_2 F(t_i) \leq C_1 h_0(1) + C_2 \omega_0 (T - t_i)^{-\alpha_0}. \quad (6.2.43)$$

Следовательно, учитывая (6.2.30), получаем:

$$U_j(1) \leq C_1 h_0(1) \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\frac{q+1}{p-q}} + C_2 \omega_0 \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right)^{\frac{q+1}{p-q}} \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \leq \\ \leq C_{12} \lambda^{\frac{j}{1+\mu_1}} h_0(1) + C_{13} \omega_0, \quad (6.2.44)$$

где $C_{12} = C_1 \Delta_1^{\frac{q+1}{p-q}} \lambda^{-\frac{1}{1+\mu_1}} (1 - \lambda^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}})^{-1}$, $C_{13} = C_2 \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right)^{\frac{q+1}{p-q}} (1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu_1}})^{-1}$.

Значит, учитывая условие (6.1.37), устанавливаем, что функции $U_j(s)$ являются решением задачи Коши для следующей бесконечной системы дифференциальных неравенств:

$$U_j(s) \leq \lambda_1 U_{j-1}(s) + C_{10} (-U'_j(s))^{1+\mu_1} \quad \forall s : 1 < s < R_1, \\ U_j(1) \leq C_{12} \lambda_1^j h_0(1) + C_{13} \omega_0, \quad \lambda_1 = \lambda^{\frac{1}{1+\mu_1}} < 1, \quad 1 \leq j \leq \bar{j}. \quad (6.2.45)$$

Применяя лемму 9.2.1 для анализа системы (6.2.45), получаем заключение теоремы 6.2.1 с

$$L_1 = a_2 C_{10}^{\frac{1}{1+\mu_1}} C_{12}^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}}, \quad L_2 = a_2 C_{10}^{\frac{1}{1+\mu_1}} C_{13}^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}} \quad \square$$

Замечание 6.2.4. Специфический вид части границы $\partial_0 \Omega$, несущей на себе обостряющиеся граничные данные, был использован лишь при определении исчерпывающего семейства подобластей $\Omega(s)$ из (6.2.14). Очевидно, что это семейство может быть определено следующей общей формулой:

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : \rho(x, \partial_0 \Omega) > s - 1\} \quad \forall s > 1,$$

где $\rho(x, S)$ – расстояние от точки x до компактного множества S . Очевидно, что в таком виде определение семейства $\Omega(s)$, подходящего для целей нашего рассмотрения, может быть реализовано для гораздо более широкого класса областей, чем (6.1.25). В частности, несложно проверить, что такие семейства подобластей корректно определяются для областей из замечания 6.1.2. Более того, приведенное доказательство показывает, что аналогичным образом может быть рассмотрена локализация носителя решения (а в дальнейшем и эффективная локализация) в случае неоднородного исходного уравнения с финитной правой частью, сингулярно обостряющейся на некотором компактном подмножестве $S \subset \Omega$.

6.3. Точные условия эффективной локализации граничных режимов: случай медленной диффузии $p > q$

Теорема 6.3.1. ([116], [118]) Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.1.36). Пусть граничная функция f такова, что функция $F(t)$, определенная в (6.1.34), удовлетворяет оценке

$$F(t) \leq \omega(T - t)^{-\alpha_0} \quad \forall t < T, \quad \alpha_0 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega = \text{const} > 0. \quad (6.3.1)$$

Тогда существует постоянная $\delta = \delta(\omega)$, $\delta(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$, зависящая также и от других известных параметров исходной задачи, такая, что множество интенсификации

$$\Omega_s = \Omega_s(u) \subset \bar{\Omega} \cap \{x : |x| \leq 1 + \delta\}. \quad (6.3.2)$$

То есть, граничный режим (6.3.1) и соответствующее решение u эффективно локализованы, если $\omega < \omega_0$, где ω_0 определяется равенством: $1 + \delta(\omega_0) = \sup\{|x| : x \in \partial_1 \Omega\}$.

Следствие 6.3.1. Пусть в условиях теоремы 6.3.1 граничный режим таков, что выполняется более сильная, чем (6.3.1) оценка

$$F(t) \leq \omega(t)(T - t)^{-\alpha_0} \quad \forall t < T, \quad \omega(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T. \quad (6.3.3)$$

Тогда для произвольного решения u $\Omega_s(u) \subset \partial_0 \Omega = \{|x| = 1\}$, то есть граничный режим (6.3.3) является локализованным LS-режимом.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 6.3.1. В условиях теоремы 6.3.1 для произвольного $\alpha_1 : p^{-1} < \alpha_1 < \alpha_0 = \frac{q+1}{p-q}$ существует значение $s_0 = s_0(\omega) > 0$, ($s_0(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$), такое, что для любого решения u имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \max_{\tau \leq t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\ \leq C(T - t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \forall s > 1 + s_0(\omega), \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

где $C = C(\alpha_1)$ не зависит от s .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стартуем с дифференциальной системы (6.2.20), (6.2.21), установленной в лемме 6.2.3. Положим в ней в качестве

смещений Δ_i значения, определенные в (6.2.29). Но в качестве новых вспомогательных энергетических функций введем другие, отличные от (6.2.30) функции, а именно, положим

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6.3.5)$$

где $\alpha_1 > 0$ – произвольное число из интервала:

$$\frac{\nu_2}{1 + \mu_2} = \frac{1}{p} < \alpha_1 < \alpha_0 := \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{q + 1}{p - q}. \quad (6.3.6)$$

При этом система (6.2.20), (6.2.21) по отношению к новым неизвестным функциям (6.3.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) \leq \tilde{C}_5 H_{j-1}(s) + C_6 \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} (-A'_j(s))^{1 + \mu_1} \\ + C_7 \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} (-A'_j(s))^{1 + \mu_2}, \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

$$\begin{aligned} H_j(s) \leq (1 + \gamma) \xi^{\alpha_1} H_{j-1}(s) + C_8 \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} (-A'_j(s))^{1 + \mu_1} \\ + C_9 \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} (-A'_j(s))^{1 + \mu_2}. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

где

$$\tilde{C}_5 = C_5 \cdot \xi^{\alpha_1}, \quad H_0(s) = \left(\frac{T(1 - \xi)}{\xi} \right)^{\alpha_1} h_0(s), \quad \text{а } \xi \text{ из (6.2.29).}$$

Наложим сейчас первое ограничение на выбор параметров γ , ξ , а именно,

$$(1 + \gamma) \xi^{\alpha_1} := \lambda < 1. \quad (6.3.9)$$

Итерируя теперь оценку (6.3.7) с использованием (6.3.8), получаем

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) \leq \tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) + \tilde{C}_{10} \sum_{i=1}^j \lambda^{j-i} \Delta_i^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} (-A'_i(s))^{1 + \mu_1} \\ + C_{12} \sum_{i=1}^j \lambda^{j-i} \Delta_i^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} (-A'_i(s))^{1 + \mu_2}, \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

где $\tilde{C}_{10} = \lambda^{-1} \max(C_6 \lambda, \tilde{C}_5 C_8)$, $C_{12} = \lambda^{-1} \max(C_7 \lambda, \tilde{C}_5 C_9)$. Отсюда непосредственно вытекает неравенство

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) \leq \tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) \\ + \tilde{C}_{10} \left[\sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1 + \mu_1}} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1}{1 + \mu_1}} (-A'_i(s)) \right]^{1 + \mu_1} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} \end{aligned}$$

$$+C_{12} \left[\sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_2-\alpha_1\mu_2}{1+\mu_2}} (-A'_i(s)) \right]^{1+\mu_2} \Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.3.11)$$

Введем еще два семейства функций

$$\begin{aligned} U_j^{(1)}(s) &= \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_1-\alpha_1\mu_1}{1+\mu_1}} (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots, \\ U_j^{(2)}(s) &= \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_2-\alpha_1\mu_2}{1+\mu_2}} (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Очевидны соотношения

$$\begin{aligned} U_j^{(1)}(s) - A_j(s) - H_j(s) &= U_{j-1}^{(1)}(s) \cdot \theta_1, \quad j = 1, 2, \dots, \\ U_j^{(2)}(s) - A_j(s) - H_j(s) &= U_{j-1}^{(2)}(s) \cdot \theta_2, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda^{\frac{1}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_1-\alpha_1\mu_1}{1+\mu_1}} = (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \cdot \xi^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}}, \\ \theta_2 &= \lambda^{\frac{1}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \right)^{\frac{\nu_2-\alpha_1\mu_2}{1+\mu_2}} = (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \cdot \xi^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались дополнительно равенством (6.3.9). Наложим следующие более жесткие, чем (6.3.9) ограничения на выбор параметров γ, ξ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \cdot \xi^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}} < 1, \\ \theta_2 &:= (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \cdot \xi^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}} < 1. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Так как в силу условия (6.3.6) $\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1} > 0$, $\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2} > 0$, то для любого $\xi < 1$ неравенства (6.3.14) имеют место для достаточно малых $\gamma < \gamma_0(\xi)$, $\gamma_0(\xi) > 0$. Очевидно, что все функции $H_j(s)$, $j = 1, 2, \dots$, являются абсолютно непрерывными убывающими функциями. Поэтому из неравенства (6.3.11) в силу равенств (6.3.13) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} U_j^{(1)}(s) &\leq \tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_1 U_{j-1}^{(1)}(s) + \tilde{C}_{10} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s) \right)^{1+\mu_1} \Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1} \\ &+ C_{12} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s) \right)^{1+\mu_2} \Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2}, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

$$\begin{aligned}
U_j^{(2)}(s) &\leq \tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_2 U_{j-1}^{(2)}(s) + \tilde{C}_{10} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s) \right)^{1+\mu_1} \cdot \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} \\
&\quad + C_{12} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s) \right)^{1+\mu_2} \cdot \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2}, \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

Оценим сверху значения $U_j^{(1)}(1)$ и $U_j^{(2)}(1)$. Очевидно, что

$$U_j^{(1)}(1) = \sum_{i=1}^j \theta_1^{j-i} (A_i(1) + H_i(1)) = \sum_{i=1}^j \theta_1^{j-i} \Delta_i^{\alpha_1} (E_i(1) + h_i(1)).$$

В силу леммы 6.2.1

$$\begin{aligned}
h_i(1) + E_i(1) &\leq C_1 h_0(1) + C_2 F(t_i) \leq C_1 h_0(1) + C_2 \omega (T - t_i)^{-\alpha_0} \\
&\leq C_1 h_0(1) + C_2 \left(\frac{\xi}{1 - \xi} \right)^{-\alpha_0} \omega \Delta_i^{-\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
U_j^{(1)}(1) &\leq C_1 h_0(1) \sum_{i=1}^j \theta_1^{j-i} \Delta_i^{\alpha_1} + C_2 \left(\frac{1 - \xi}{\xi} \right)^{\alpha_0} \omega \sum_{i=1}^j \theta_1^{j-i} \Delta_i^{-(\alpha_0 - \alpha_1)} \\
&\leq \tilde{C}_1 \theta_1^j h_0(1) + \tilde{C}_2 \omega \Delta_j^{-(\alpha_0 - \alpha_1)}, \tag{6.3.17}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{C}_1 = \frac{C_1 \Delta_1^{\alpha_1}}{\theta_1 - \xi^{\alpha_1}}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2 (1 - \xi)^{\alpha_0}}{\xi^{\alpha_0} (1 - \theta_1 \xi^{\alpha_0 - \alpha_1})}.$$

Аналогично,

$$U_j^{(2)}(1) \leq \sum_{i=1}^j \theta_2^{j-i} (A_i(1) + H_i(1)) \leq \hat{C}_1 \theta_2^j h_0(1) + \hat{C}_2 \omega \Delta_j^{-(\alpha_0 - \alpha_1)}, \tag{6.3.18}$$

где

$$\hat{C}_1 = \frac{C_1 \Delta_1^{\alpha_1}}{\theta_2 - \xi^{\alpha_1}}, \quad \hat{C}_2 = \frac{C_2 (1 - \xi)^{\alpha_0}}{\xi^{\alpha_0} (1 - \theta_2 \xi^{\alpha_0 - \alpha_1})}.$$

Из соотношений (6.3.15), (6.3.16), (6.3.17), (6.3.18) вытекает следующая “объединенная” система:

$$U_j(s) := U_j^{(1)}(s) + U_j^{(2)}(s) \leq 2\tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(s) + \bar{\theta} U_{j-1}(s)$$

$$+ \max \left[\tilde{C}_{10} \Delta_j^{(\alpha_0 - \alpha_1)\mu_1} \left(-\frac{d}{ds} U_j(s) \right)^{1+\mu_1}, C_{12} \Delta_j^{\mu_2(\alpha_0 - \alpha_1)} \left(-\frac{d}{ds} U_j(s) \right)^{1+\mu_2} \right], \quad (6.3.19)$$

$$U_j(1) \leq (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) \theta^j h_0(1) + (\tilde{C}_2 + \hat{C}_2) \omega \Delta_j^{-(\alpha_0 - \alpha_1)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6.3.20)$$

где $\bar{\theta} = \max(\theta_1, \theta_2) < 1$. Обозначив,

$$b := \max\{(1 - \bar{\theta})^{-1} 2\tilde{C}_5 H_0(1), (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) h_0(1)\},$$

из (6.3.19), (6.3.20) легко выводим, что

$$\begin{aligned} \bar{U}_j(s) := U_j(s) - b &\leq \bar{\theta} \bar{U}_{j-1}(s) + \max \left\{ k_{j,1} (-\bar{U}'_j(s))^{1+\mu_1}, k_{j,2} (-\bar{U}'_j(s))^{1+\mu_2} \right\}, \\ \bar{U}_j(1) &\leq K_j := (\tilde{C}_2 + \hat{C}_2) \Delta_j^{-(\alpha_0 - \alpha_1)} \omega, \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

где $k_{j,1} = \tilde{C}_{10} \Delta_j^{\mu_1(\alpha_0 - \alpha_1)}$, $k_{j,2} = C_{12} \Delta_j^{\mu_2(\alpha_0 - \alpha_1)}$. Следующим шагом в доказательстве леммы является анализ системы (6.3.21) и вывод следующей оценки сверху функций $\bar{U}_j(s)$, удовлетворяющих этой системе:

$$\bar{U}_j(s) \leq \bar{M}_j(s-1) := \max\{\bar{M}_{j,1}(s-1), \bar{M}_{j,2}(s-1)\} \quad \forall s > 1, \quad (6.3.22)$$

где $\bar{M}_{j,1}(s)$, $\bar{M}_{j,2}(s)$ — это функции $\bar{M}_1(s)$, $\bar{M}_2(s)$ из (9.2.14), вычисленные при следующих значениях параметров: $k_1 = \frac{k_{j,1}}{1-\bar{\theta}}$, $k_2 = \frac{k_{j,2}}{1-\bar{\theta}}$, $K = K_j$, $\gamma_1 = \mu_1$, $\gamma_2 = \mu_2$. Доказательство проведем по индукции. При $j = 1$ оценка (6.3.22) проверяется непосредственным применением леммы 9.2.2. Пусть оценка (6.3.22) справедлива для всех $j \leq l-1$. Покажем ее справедливость при $j = l$. Сначала убедимся, что последовательность функций $\bar{M}_j(s)$ является неубывающей последовательностью. Очевидно, что

$$k_2 K^{\gamma_2} = (1 - \bar{\theta})^{-1} k_{j,2} K_j^{\mu_2} = (1 - \bar{\theta})^{-1} C_{12} (\tilde{C}_2 + \hat{C}_2)^{\mu_2} \omega^{\mu_2} \quad \text{не зависит от } j,$$

$$k_1 K^{\gamma_1} = (1 - \bar{\theta})^{-1} k_{j,1} K_j^{\mu_1} = (1 - \bar{\theta})^{-1} \tilde{C}_{10} (\tilde{C}_2 + \hat{C}_2)^{\mu_1} \omega^{\mu_1} \quad \text{не зависит от } j,$$

$$\bar{s}_1 = \bar{s}_{j,1} = \begin{cases} a_2^{(1)} \left(\frac{k_{j,1} K_j^{\mu_1}}{1-\bar{\theta}} \right)^{\frac{1}{1+\mu_1}} = g_1 \omega^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}}, & \text{если } \omega \leq g_3, \\ a_2^{(2)} \left(\frac{k_{j,2} K_j^{\mu_2}}{1-\bar{\theta}} \right)^{\frac{1}{1+\mu_2}} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{k_{j,1}^{\mu_2}}{k_{j,2}^{\mu_1}} \right)^{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1}} = g_2 \omega^{\frac{\mu_2}{1+\mu_2}} + g_4, & \text{если } \omega > g_3, \end{cases} \quad (6.3.23)$$

где

$$g_1 = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} \left(\frac{\tilde{C}_{10}(\tilde{C}_2 + \hat{C}_2)^{\mu_1}}{1 - \bar{\theta}} \right)^{\frac{1}{1+\mu_1}}, \quad g_3 = (\tilde{C}_2 + \hat{C}_2)^{-1} \left(\frac{\tilde{C}_{10}^{1+\mu_2}}{C_{12}^{1+\mu_1}} \right)^{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}},$$

$$g_2 = \frac{1 + \mu_2}{\mu_2} \left(\frac{C_{12}(\tilde{C}_2 + \hat{C}_2)^{\mu_2}}{1 - \bar{\theta}} \right)^{\frac{1}{1+\mu_2}}, \quad g_4 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 \mu_1} \left(\frac{\tilde{C}_{10}^{\mu_2}}{C_{12}^{\mu_1}} \right)^{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}},$$

то есть значения $\bar{s}_{j,1}$ также не зависят от j . Теперь необходимая монотонность последовательностей функций $\{\bar{M}_{j,1}(s)\}$, $\{\bar{M}_{j,2}(s)\}$ вытекает из монотонности последовательностей $\{k_{j,1}\}$, $\{k_{j,2}\}$. Возвращаемся к доказательству оценки (6.3.22) при $j = l$. Предположив, что эта оценка не имеет места, то есть, что существует интервал (s_1, s_2) такой, что

$$\bar{U}_l(s) > \bar{M}_l(s-1) \quad \forall s \in (s_1, s_2), \quad \bar{U}_l(s_1) = \bar{M}_l(s_1), \quad s_1 \geq 1, \quad (6.3.24)$$

мы получим для любого $s \in (s_1, s_2)$:

$$(1 - \bar{\theta})\bar{U}_{l-1}(s) \leq (1 - \bar{\theta})\bar{M}_{l-1}(s-1) \leq (1 - \bar{\theta})\bar{M}_l(s-1) \leq (1 - \bar{\theta})U_l(s).$$

Следовательно, в силу (6.3.21) имеем

$$\bar{U}_l(s) \leq (1 - \bar{\theta})\bar{U}_l(s) + \max\{k_{j,1}(-\bar{U}'_j(s))^{1+\mu_1},$$

$$k_{j,2}(-\bar{U}'_j(s))^{1+\mu_2}\}, \quad \bar{U}_l(s_1) = \bar{M}_l(s_1 - 1).$$

Отсюда в силу леммы 9.2.2 следует неравенство

$$\bar{U}_l(s) \leq \bar{M}_l(s-1) \quad \forall s \in (s_1, s_2),$$

противоречащее допущению (6.3.24). Тем самым оценка (6.3.22) доказана. Отметим теперь, что в силу (6.3.23)

$$\text{supp } \bar{M}_j \subset [0, \bar{s}_1], \quad \bar{s}_1 \leq g_5 \max(\omega^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}}, \omega^{\frac{\mu_2}{1+\mu_2}}) = \bar{s}_{1,0} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (6.3.25)$$

$g_5 = \max(g_1, g_2 + g_4 g_3^{-\frac{\mu_2}{1+\mu_2}})$. Следовательно, в силу (6.3.21)

$$U_j(s) \leq b = \max\{(1 - \bar{\theta})^{-1} 2\tilde{C}_5 H_0(1), (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1)h_0(1)\}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s \geq \bar{s}_{1,0} + 1, \quad (6.3.26)$$

где $\bar{s}_{1,0}$ из (6.3.25). Вспоминая теперь определение (6.3.19) функций $U_j(s)$, из (6.3.26) выводим следующую оценку:

$$h_j(s) + E_j(s) \leq b \Delta_j^{-\alpha_1} \quad \forall s > 1 + \bar{s}_{1,0}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (6.3.27)$$

где α_1 из (6.3.5), (6.3.6). Суммируя неравенства (6.3.27) по j от $j = 1$ до $j = i$ и учитывая (6.2.28), (6.2.29) получаем

$$\begin{aligned} h_{t_i}(s) + E(t_i, s) &:= \max_{t \leq t_i} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^{t_i} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \\ &\leq b \sum_{j=1}^i \Delta_j^{-\alpha_1} \leq \frac{b \xi^{\alpha_1}}{(1 - \xi)^{\alpha_1} (1 - \xi^{\alpha_1})} (T - t_i)^{-\alpha_1} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

Отсюда в силу (6.2.30) следует оценка

$$\begin{aligned} h_t(s) + E(t, s) &\leq b_1 (T - t)^{-\alpha_1} \\ \forall t < T, \quad \forall s &\geq 1 + g_5 \max(\omega^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}}, \omega^{\frac{\mu_2}{1+\mu_2}}) := 1 + s_0(\omega), \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

где $b_1 = b(1 - \xi)^{-\alpha_1} (1 - \xi^{\alpha_1})^{-1}$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 6.3.1. Снова обращаемся к системе (6.2.20), (6.2.21) при $s \geq 1 + s_0(\omega)$. Но теперь выбор смещений Δ_i в произвольной точке $\bar{s} > 1 + s_0(\omega)$ будет определяться самым исследуемым решением u , вернее, его энергетическими функциями $E(t, \bar{s}), h_t(\bar{s})$. Для этого зафиксируем числа ξ, η :

$$0 < \xi < 1; \quad \alpha_1 < \eta < \alpha_0 = \frac{q+1}{p-q}, \quad (6.3.30)$$

где α_1 из (6.3.6). Затем зафиксируем произвольную точку $\bar{s} > 1 + s_0(\omega)$, в которой выполнено неравенство

$$E(T, \bar{s}) + \sup_{0 < t < T} h(t, \bar{s}) > b_1 T^{\alpha_1} \xi^{-\alpha_1} \quad (6.3.31)$$

Если бы таких точек не оказалось, то это бы значило, что для всех $\bar{s} > 1 + s_0(\omega)$ выполняется противоположное к (6.3.31) неравенство, и, следовательно, утверждение теоремы 6.3.1 уже доказано. Теперь заметим, что, в силу монотонности функции $E(T, \bar{s}) + \sup_{0 < t < T} h(t, \bar{s}) := R_T(\bar{s})$ по

$\bar{s}$, вытекает справедливость неравенства (6.3.31) для всех $\bar{s}$ из некоторого интервала $(1 + s_0, s'), s' > 1 + s_0$. То есть, будем полагать, что $1 + s_0 < \bar{s} < s'$. Теперь определим непрерывную функцию $\Gamma_{\bar{s}}(t) : [0, t'] \rightarrow [t_1, T]$ равенством

$$(\Gamma_{\bar{s}}(t) - t)^{-\eta} = \frac{\xi^\eta}{b_1 T^{\eta-\alpha_1}} (E(\Gamma_{\bar{s}}(t), \bar{s}) - E(t, \bar{s}) + \sup_{t < \tau < \Gamma_{\bar{s}}(t)} h(\tau, \bar{s})), \quad (6.3.32)$$

где $t_1 = \Gamma_{\bar{s}}(0)$ определяется равенством

$$t_1^{-\eta} = \frac{\xi^\eta}{b_1 T^{\eta-\alpha_1}} (E(t_1, \bar{s}) + \sup_{\tau < t_1} h(\tau, \bar{s})),$$

а t' определяется из соотношения

$$(T - t')^{-\eta} = \frac{\xi^\eta}{b_1 T^{\eta-\alpha_1}} (E(T, \bar{s}) - E(t', \bar{s}) + \sup_{t' < \tau < T} h(\tau, \bar{s})).$$

Легко видеть, что из условия (6.3.31) вытекает: $t_1 < T$. Кроме того из определения числа t' очевидно, что

$$\text{а) } t' < T, \quad \text{если} \quad \sup_{t \rightarrow T} (E(t, \bar{s}) + h(t, \bar{s})) \leq c < \infty;$$

$$\text{б) } t' = T, \quad \text{если} \quad \sup_{t \rightarrow T} (E(t, \bar{s}) + h(t, \bar{s})) = \infty.$$

Итак, учитывая непрерывность и положительность функций $E(t, \bar{s})$, $h(t, \bar{s})$ и монотонное неубывание функции $E(t, \bar{s})$ заключаем, что равенство (6.3.32) определяет непрерывную строго монотонно возрастающую функцию $\Gamma_{\bar{s}}(t) : [0, t'] \rightarrow [t_1, T]$. Поэтому анонсированную выше последовательность $\Delta_i := t_i - t_{i-1}$ можем определить следующим рекуррентным соотношением:

$$t_i := \Gamma_{\bar{s}}(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots; \quad t_0 = 0. \quad (6.3.33)$$

Причем, эта последовательность является бесконечной в случае б): $t_i \rightarrow T$ при $i \rightarrow \infty$; в случае а) эта последовательность является конечной, ее построение обрывается на некотором номере i' таком, что

$$t_{i'} = \Gamma_{\bar{s}}(t_{i'-1}) > t', \quad t_{i'-1} \leq t'. \quad (6.3.34)$$

Проверим, что построенная последовательность смещений $\{\Delta_i\}$ удовлетворяет условию квалифицированной монотонности типа (6.2.28).

Из (6.3.32), (6.3.33) в силу оценки (6.3.29) вытекает неравенство

$$\Delta_i^{-\eta} \leq \frac{\xi^\eta}{T^{\eta-\alpha_1}} (T - t_i)^{-\alpha_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_i &\geq \frac{T^{1-\frac{\alpha_1}{\eta}}}{\xi} (T - t_i)^{\frac{\alpha_1}{\eta}} = \frac{T^{1-\frac{\alpha_1}{\eta}}}{\xi} \left(\frac{T - t_i}{T} \right)^{\frac{\alpha_1}{\eta}} T^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \\ &\geq \frac{T}{\xi} \left(\frac{T - t_i}{T} \right) > \xi^{-1} \Delta_{i+1}. \end{aligned}$$

То есть,

$$\Delta_{i+1} < \xi \Delta_i \quad \forall i \leq i_\infty := \begin{cases} i', & \text{если а)} \\ \infty, & \text{если б)}. \end{cases} \quad (6.3.35)$$

По построенной последовательности $\{t_i\}$ определим новые энергетические функции $E_j(s)$, $h_j(s)$ при $s > \bar{s}$ по формулам (6.2.19). Понятно, что для этих новых энергетических функций также справедливы неравенства (6.2.20), (6.2.21), доказанные в лемме 6.2.3. Введем теперь энергетические функции $A_j(s)$, $H_j(s)$ равенствами (6.3.5), (6.3.6), где теперь $\{\Delta_j\}$ – это новые смещения из (6.3.35), (6.3.33), а параметр α_1 из оценки (6.3.29), установленной в лемме 6.3.1. Несложно проверить, что эти новые функции удовлетворяют следующим неравенствам, аналогичным (6.3.7), (6.3.8):

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) \leq C_5 \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} H_{j-1}(s) + C_6 \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \\ + C_7 \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} (-A'_j(s))^{1+\mu_2}, \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

$$\begin{aligned} H_j(s) \leq \lambda_j H_{j-1}(s) + C_8 \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} (-A'_j(s))^{1+\mu_1} \\ + C_9 \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} (-A'_j(s))^{1+\mu_2}, \end{aligned} \quad (6.3.37)$$

где $H_0(s) = h_0(s) \Delta_0^{\alpha_1}$, $\Delta_0 := \xi^{-1} \Delta_1$,

$$\lambda_j := (1 + \gamma) \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1} \leq (1 + \gamma) \xi^{\alpha_1} := \lambda < 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.3.38)$$

Очевидно следующее соотношение:

$$\lambda_j \lambda_{j-1} \dots \lambda_{i+1} \Delta_i^{\nu - \alpha_1 \mu} = (1 + \gamma)^{j-i} \Delta_j^{\nu - \alpha_1 \mu} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{(1+\mu)\alpha_1 - \nu} \quad \forall j > i. \quad (6.3.39)$$

Учитывая это соотношение, после итерирования неравенств (6.3.36), (6.3.37) получаем

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) \leq C_5 (1 + \gamma)^{j-1} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0} \right)^{\alpha_1} H_0(s) \\ + \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1 \mu_1} \tilde{C}_{10} \left[\sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{(1+\mu_1)\alpha_1 - \nu_1} (-A'_i(s))^{1+\mu_1} \right] \\ + \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1 \mu_2} C_{12} \left[\sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{(1+\mu_2)\alpha_1 - \nu_2} (-A'_i(s))^{1+\mu_2} \right] \\ \forall j \leq i_\infty, \quad \forall s \geq \bar{s}. \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

Неравенство (6.3.40) определяет структуру новых энергетических функций:

$$\begin{aligned}
 U_j^{(1)}(s) &= \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \\
 &\quad \times (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots, \\
 U_j^{(2)}(s) &= \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} \\
 &\quad \times (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots.
 \end{aligned} \tag{6.3.41}$$

Очевидны соотношения

$$\begin{aligned}
 U_j^{(1)}(s) - A_j(s) - H_j(s) &= \theta_1^{(j)} U_{j-1}^{(1)}(s), \\
 j = 1, 2, \dots; \quad U_0^{(1)}(s) &= 0, \\
 U_j^{(2)}(s) - A_j(s) - H_j(s) &= \theta_2^{(j)} U_{j-1}^{(2)}(s), \\
 j = 1, 2, \dots; \quad U_0^{(2)}(s) &= 0,
 \end{aligned} \tag{6.3.42}$$

где

$$\begin{aligned}
 \theta_1^{(j)} &:= (1 + \gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \cdot \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \\
 &\leq (1 + \gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \cdot \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} := \theta_1, \\
 \theta_2^{(j)} &:= (1 + \gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \cdot \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} \\
 &\leq (1 + \gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \cdot \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} := \theta_2.
 \end{aligned} \tag{6.3.43}$$

Отметим, что величины θ_1, θ_2 из (6.3.43) совпадают с θ_1, θ_2 из (6.3.13). Потребуем снова, чтобы параметры γ, ξ удовлетворяли ограничениям (6.3.14). Теперь из неравенств (6.3.40) в силу (6.3.42), (6.3.43) получаем справедливость соотношений (6.3.15), (6.3.16) при всех $s > \bar{s}$. Но конечно же, начальные значения $U_j^{(1)}(\bar{s}), U_j^{(2)}(\bar{s})$ теперь оцениваются иначе, чем в (6.3.17), (6.3.18). А именно, используя определение (6.3.33), получаем

$$\begin{aligned}
 U_j^{(1)}(\bar{s}) &= \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\alpha_1} (E_i(\bar{s}) + h_i(\bar{s})) \\
 &= b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta - \alpha_1} \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\alpha_1 - \eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \sum_{i=1}^j (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\eta-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \\
&\leq b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \sum_{i=1}^j (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \xi^{(j-i)(\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1})} \\
&= b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \sum_{i=1}^j \theta_1^{j-i} \\
&\leq b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} (1-\theta_1)^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \quad \forall j \leq i_\infty.
\end{aligned} \tag{6.3.44}$$

Аналогично получаем

$$U_j^{(2)}(\bar{s}) \leq b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} (1-\theta_2)^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \quad \forall j \leq i_\infty. \tag{6.3.45}$$

Складывая полученные неравенства, получаем, что энергетические функции $U_j(s) = U_j^{(1)}(s) + U_j^{(2)}(s)$ удовлетворяют при всех $s > \bar{s}$ дифференциальному неравенству (6.3.19) и начальному условию

$$\begin{aligned}
U_j(\bar{s}) &\leq 2(1-\bar{\theta})^{-1} b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \\
&\quad \forall j \leq i_\infty, \quad \bar{\theta} = \max(\theta_1, \theta_2).
\end{aligned} \tag{6.3.46}$$

Обозначив, $b^{(j)} = (1-\bar{\theta})^{-1} 2\tilde{C}_5 \lambda^{j-1} H_0(\bar{s})$, приходим к системе

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_j(s) &:= U_j(s) - b^{(j)} \\
&\leq \bar{\theta} \tilde{U}_{j-1}(s) + \max\{k_{j,1}(-\tilde{U}'_j(s))^{1+\mu_1}, k_{j,2}(-\tilde{U}'_j(s))^{1+\mu_2}\} \quad \forall s > \bar{s}, \\
\tilde{U}_j(\bar{s}) &\leq K_j := b_2 \Delta_j^{-(\eta-\alpha_1)} \quad \forall j \leq i_\infty, \quad b_2 = 2(1-\bar{\theta})^{-1} b_1 \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1},
\end{aligned} \tag{6.3.47}$$

где $k_{j,1}$, $k_{j,2}$ те же, что и в (6.3.21), но с новыми значениями Δ_j (определяемыми в (6.3.33)). Применяя леммы 9.2.5 и 9.2.6 для анализа системы (6.3.47), получаем следующую равномерную оценку:

$$\tilde{U}_j(s) \leq \max\{D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}), D_2\} \quad \forall s > \bar{s}, \quad \forall j \leq i_\infty, \tag{6.3.48}$$

где $\bar{U}_0(s) = s^{-\frac{(1+\mu_1)(\eta-\alpha_1)}{\mu_1(\alpha_0-\eta)}}$, постоянные D_1 , D_2 :

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2ba_1^{(1)}(a_2^{(1)})^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}} \left(\frac{\alpha_0 - \eta}{\alpha_0 - \alpha_1} \right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}} \left(\frac{\eta - \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1} \right)^{\frac{(1+\mu_1)(\eta-\alpha_1)}{\mu_1(\alpha_0-\eta)}} \\
&\quad \times \xi^{-\eta} T^{\eta-\alpha_1} (1-\bar{\theta})^{-1} (1-\xi)^{-\alpha_1} (1-\xi^{\alpha_1})^{-1},
\end{aligned}$$

$$D_2 = \frac{(2b)^{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 - \eta}} a_1^{(1)} (a_2^{(1)})^{\frac{1 + \mu_1}{\mu_1}}}{(1 - \bar{\theta})(1 - \xi)^{\frac{\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_0 - \eta}} (1 - \xi^{\alpha_1})^{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 - \eta}}} \left(\frac{C_{12}^{1 + \mu_1}}{\tilde{C}_{10}^{1 + \mu_2}} \right)^{\frac{\eta - \alpha_1}{(\alpha_0 - \eta)(\mu_2 - \mu_1)}},$$

а постоянная b из (6.3.26). Из (6.3.48) следует, что

$$U_j(s) \leq \max\{D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}), D_2 + b^{(1)}\} \quad \forall j \leq i_\infty, \\ b^{(1)} = (1 - \bar{\theta})^{-1} 2C_5 H_0(\bar{s}). \quad (6.3.49)$$

Определим число $\delta_0 > 0$ равенством

$$\bar{U}_0(\delta_0) = (D_2 + b^{(1)}) D_1^{-1}. \quad (6.3.50)$$

Тогда, очевидно, из (6.3.49) вытекает, что

$$U_j(s) \leq D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \quad \forall s : \bar{s} < s < \bar{s} + \delta_0, \quad \forall j \leq i_\infty. \quad (6.3.51)$$

Вспоминая определение функций $U_j(s)$ и выбор смещений Δ_j согласно (6.3.33), из (6.3.51) получаем

$$h_j(s) + E_j(s) \leq D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \Delta_j^{-\alpha_1} \\ = D_3 \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_j(\bar{s}) + E_j(\bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \quad \forall j \leq i_\infty, \quad (6.3.52)$$

где

$$D_3 = D_1 \xi^{\alpha_1} b_1^{-\frac{\alpha_1}{\eta}} T^{-\frac{\alpha_1(\eta - \alpha_1)}{\eta}}.$$

Отметим, что соотношение (6.3.52) имеет место для произвольных $s, \bar{s}$ таких, что

$$1 + s_0 < \bar{s} < s < \bar{s} + \delta_0, \quad \text{где } s_0 = s_0(\omega) \quad \text{из } (6.3.29). \quad (6.3.53)$$

Теперь зафиксируем произвольное $i < i_\infty$ и просуммируем неравенства (6.3.52) по j от 1 до i . Используя дополнительно свойство (6.3.35) последовательности $\{\Delta_j\}$, получаем

$$h_{t_i}(s) + E(t_i, s) \leq D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \sum_{j=1}^i \Delta_j^{-\alpha_1} \leq D_1 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} \sum_{j=1}^i \xi^{(j-1)\alpha_1} \\ \leq D_1 (1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} = D_3 (1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_i(\bar{s}) + E_i(\bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \\ \leq D_3 (1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_{t_i}(\bar{s}) + E(t_i, \bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}}, \\ \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall s : \bar{s} < s < \bar{s} + \delta_0. \quad (6.3.54)$$

Следующей нашей целью является получение оценки типа (6.3.54) не только для $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots$, но и для произвольной точки $t < T$. Для этого возвращаемся к отображению $\Gamma_{\bar{s}}$ из (6.3.32) и определяемой им последовательности $\{t_i\}$. В силу непрерывности и строгой монотонности этой последовательности $\Gamma_{\bar{s}}$ отображает непрерывно, монотонно и взаимно однозначно отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ для любых $i \geq 1$ в случае б), и для любых $i : 1 \leq i \leq i' - 1$ в случае а). Кроме того в случае а) непрерывно и взаимнооднозначно отображается $[t_{i'-1}, t']$ на $[t_{i'}, T]$. Пусть теперь $\bar{t}$ – произвольная точка из интервала $[t_1, T)$, для определенности, $\bar{t} := \bar{t}_k \in (t_k, t_{k+1}]$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, единственным образом восстанавливается последовательность $\{\bar{t}_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, такая, что

$$\bar{t}_{i+1} = \Gamma(\bar{t}_i), \quad \forall i \leq k-1, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad \bar{t}_0 \in (0, t_1].$$

Тем самым определяются новые смещения $\bar{\Delta}_j$:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_j^{-\eta} &= (\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})^{-\eta} \\ &= \frac{\xi^\eta}{b_1 T^{\eta-\alpha_1}} \left(E(\bar{t}_j, \bar{s}) - E(\bar{t}_{j-1}, \bar{s}) + \sup_{t \in (\bar{t}_{j-1}, \bar{t}_j]} h(t, \bar{s}) \right). \end{aligned} \quad (6.3.55)$$

Также как и выше проверяется, что

$$\bar{\Delta}_{i+1} < \xi \bar{\Delta}_i \quad \forall i \leq k-1.$$

По этим новым смещениям определяем соответствующие функции $\bar{E}_j(s)$, $\bar{h}_j(s)$, затем $\bar{A}_j(s)$, $\bar{H}_j(s)$ и систему (6.3.36), (6.3.37) для этих последних функций. Отличие состоит только в том, что теперь в качестве начальной выступает функция

$$\bar{h}_0(s) := h(\bar{t}_0, s) = \int_{\Omega(s)} |u(\bar{t}_0, x)|^{q+1} dx \implies \bar{H}_0(s) = \bar{h}_0(s) \bar{\Delta}_1 \xi^{-1}.$$

Оценим эту новую начальную функцию сверху. Для положения точки $\bar{t}_0$ могут реализоваться две возможности:

$$\text{а) } \bar{t}_0 < 2^{-1}T; \quad \text{б) } \bar{t}_0 > 2^{-1}T.$$

В первом случае имеем в силу оценки (6.3.29): $h(\bar{t}_0, \bar{s}) \leq b_1 2^{\alpha_1} T^{-\alpha_1}$.

В случае б) в силу определения (6.3.33) имеем

$$h(\bar{t}_0, \bar{s}) \leq \sup_{t \in (0, t_1)} h(t, \bar{s}) \leq b_1 T^{\eta-\alpha_1} \xi^{-\eta} t_1^{-\eta} \leq b_1 T^{\eta-\alpha_1} \xi^{-\eta} \bar{t}_0^{-\eta} \leq b_1 (2\xi)^{-\eta} T^{-\alpha_1}.$$

То есть справедлива оценка

$$\bar{H}_0(\bar{s}) = \bar{h}_0(\bar{s})\xi^{-1}\bar{\Delta}_1 \leq \xi^{-1}T\bar{h}_0(\bar{s}) \leq \xi^{-1}b_1T^{1-\alpha_1} \max(2^{\alpha_1}, (2\xi)^{-\eta}). \quad (6.3.56)$$

Далее, действуя совершенно аналогично выводу оценки (6.3.51), для функций $\bar{U}_j(s)$, определяемых по последовательности $\{\bar{\Delta}_j\}$, получаем универсальную оценку

$$\bar{U}_j(s) \leq D_1\bar{U}_0(s - \bar{s}) \quad \forall s : \bar{s} < s < \bar{s} + \bar{\delta}_0, \quad \forall j \leq k, \quad (6.3.57)$$

где число $\bar{\delta}_0$ определяется равенством

$$\bar{U}_0(\bar{\delta}_0) = (D_2 + \bar{b}^{(1)})D_1^{-1}, \quad (6.3.58)$$

а постоянные D_1 , D_2 и функция $\bar{U}_0(s)$ те же, что и в оценке (6.3.51). Здесь постоянная $\bar{b}^{(1)}$ зависит от новой начальной функции $\bar{H}_0(s)$, а именно

$$\bar{b}^{(1)} = (1 - \bar{\theta})^{-1}2\tilde{C}_5\bar{H}_0(\bar{s}), \quad \bar{H}_0(\bar{s}) \text{ из (6.3.56).}$$

Из оценки (6.3.57) теперь стандартно выводим оценку (6.3.54) для $t = \bar{t}_k$. Так как в качестве $\bar{t}_k$ может быть взята произвольная точка $t < T$, то имеем

$$\begin{aligned} h_t(s) + E(t, s) &= \sup_{0 < \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} + \int_0^t \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\ &\leq D_3(1 - \xi^{\alpha_1})^{-1}\bar{U}_0(s - \bar{s})(E(t, \bar{s}) + h_t(\bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \\ &\quad \forall t < T, \quad \forall s, \bar{s} : 1 + s_0 \leq \bar{s} < s < \bar{s} + \bar{\delta}_0. \end{aligned} \quad (6.3.59)$$

Вспоминая, что $\bar{U}_0(s) = s^{-\frac{(1+\mu_1)(\eta-\alpha_1)}{\mu_1(\alpha_0-\eta)}}$, убеждаемся, что семейство функций $f_t(s) := h_t(s) + E(t, s)$, зависящих от аргумента s и параметра t , удовлетворяет в силу установленного соотношения (6.3.59) всем условиям леммы 9.3.2. Следовательно, в силу этой леммы для всех функций из указанного семейства справедлива универсальная априорная оценка сверху

$$h_t(s) + E(t, s) \leq C(s - 1 - s_0)^{-\frac{(1+\mu_1)\eta}{\mu_1(\alpha_0-\eta)}} \quad \forall s \geq 1 + s_0(\omega), \quad (6.3.60)$$

где $C < \infty$ – постоянная, зависящая только от известных параметров задачи, но не зависящая от t, s . Следовательно, множество интенсификаций рассматриваемого решения $u(t, x)$ целиком содержится в $\{x : |x| < 1 + s_0(\omega)\}$, где $s_0(\omega)$ из (6.3.29). Тем самым утверждение теоремы 6.3.1 справедливо с $\delta = \delta(\omega) := s_0(\omega)$, где $s_0(\omega)$ из (6.3.29) $\square$

6.4. Эффективная локализация сингулярных граничных режимов для квазиоднородных параболических уравнений

В настоящем разделе рассматривается задача (6.1.26)–(6.1.29) в наиболее трудном для анализа случае

$$p = q > 0. \quad (6.4.1)$$

когда предельный эффективно локализованный граничный режим не порождает автомодельное решение даже для простейшего уравнения. Отметим, что в этот класс уравнений (6.4.1) попадает при $p = q = 1$ и стандартное уравнение теплопроводности.

Теорема 6.4.1. Пусть в задаче (6.1.26)–(6.1.29) выполняются условия (6.1.30), (6.1.31), (6.4.1) и сингулярно обостряющая в момент $t = T$ граничная функция f такова, что функция $F(t)$, определяемая в (6.1.34), удовлетворяет следующей оценке:

$$F(t) \leq \exp(\omega(T-t)^{-p^{-1}}) := F_0(t) \quad \forall t < T, \quad \omega > 0. \quad (6.4.2)$$

Тогда существует постоянная $c > 0$, зависящая только от известных параметров задачи (6.1.26)–(6.1.29) (но не зависящая от ω) такая, что для множества интенсификации произвольного решения $u(t, x)$ имеет место включение:

$$\Omega_s(u) \subset \bar{\Omega} \cap \{|x| < 1 + c\omega^{\frac{p}{p+1}}\},$$

и, следовательно, граничный режим (6.4.2) эффективно локализован, если

$$c\omega^{\frac{p}{p+1}} < \sup\{|x| : x \in \partial_1\Omega\} - 1.$$

Следствие 6.4.1. Пусть в условиях теоремы 6.4.1 выполняется более сильная, чем (6.4.2) оценка

$$F(t) \leq \exp[\omega(t)(T-t)^{-\frac{1}{p}}] \quad \forall t < T, \quad \omega(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T. \quad (6.4.3)$$

Тогда для произвольного решения u имеем $\Omega_s(u) \subset \partial_0\Omega$, то есть режим (6.4.3) является локализованным LS -режимом.

Замечание 6.4.1. Условие (6.4.2) эффективной локализации при $p = q = 1$ соответствует точному условию эффективной локализации в стандартном уравнении теплопроводности, полученному в [141] (см. также (6.1.18), (6.1.19) и комментарии к ним).

Доказательство теоремы 6.4.1 также базируется на анализе свойств бесконечной системы дифференциальных неравенств (6.2.21), (6.2.22). В силу (6.4.1) теперь $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Так как при этом $\nu_1 = \frac{1}{p+1} < \nu_2 = \frac{1}{p}$, то из системы (6.2.21), (6.2.22) легко следует, что

$$\begin{aligned} h_j(s) + E_j(s) &\leq C_5 h_{j-1}(s) + \overline{C}_6 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-E'_j(s)) \quad \forall j \geq 1, \\ h_j(s) &\leq (1 + \gamma) h_{j-1}(s) + \overline{C}_8 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-E'_j(s)) \quad \forall \gamma > 0, \quad \forall s > 1, \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

где

$$\overline{C}_6 = C_6 + C_7 T^{\nu_2 - \nu_1} = C_6 + C_7 T^{\frac{1}{p(p+1)}}, \quad \overline{C}_8 = C_8 + C_9 T^{\frac{1}{p(p+1)}}.$$

Для произвольных $L > 0$ и $p > 0$ обозначим

$$\sigma = \sigma(L, p) := \sum_{i=1}^{\infty} (i + L)^{-(p+1)}. \quad (6.4.5)$$

Зафиксируем теперь постоянные $\gamma > 0$, $L_0 > 0$ и $\nu > 0$ так, что выполняется соотношение

$$\theta_0 := \frac{(1 + \gamma)(L_0 + 1)}{L_0} \exp \left[-\frac{L_0}{(1 + \nu)(1 + L_0)} \right] < 1. \quad (6.4.6)$$

В качестве первого шага докажем следующее утверждение.

Лемма 6.4.1. Пусть $u(t, x)$ – произвольное решение уравнения (6.1.26) в области $(0, T) \times \Omega(s_0)$, $s_0 \geq 1$, удовлетворяющее оценке

$$h_t(s_0) + E(t, s_0) \leq D_1 \exp(\omega(T - t)^{-\frac{1}{p}}) \quad \forall t < T. \quad (6.4.7)$$

Пусть параметр ω удовлетворяет следующему техническому ограничению

$$\omega \geq \tilde{\omega} := (1 + \nu) \left(\frac{T}{p\sigma_0} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6.4.8)$$

где $\sigma_0 := \sigma(L_0, p)$, σ из (6.4.5), $\nu > 0$ из (6.4.6). Тогда существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, зависящие только от n , p , γ , L_0 и ν , такие, что имеет место оценка

$$h_t(s_1) + E(t, s_1) \leq c_1 D_1 \exp \left(\frac{\omega}{1 + \nu} (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right) \quad \forall t < T, \quad (6.4.9)$$

где $s_1 = s_0 + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим смещения $\{\Delta_i\}$ в системе дифференциальных неравенств (6.4.4) следующим способом:

$$\Delta_i = p\omega^p(i + L_1)^{-(p+1)}, \quad t_i = t_{i-1} + \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t_0 = 0, \quad (6.4.10)$$

где $L_1 > 0$ определяется следующим обязательным свойством последовательности $\{\Delta_i\}$:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i = p\omega^p \sum_{i=1}^{\infty} (i + L_1)^{-(p+1)} := p\omega^p \sigma(L_1, p),$$

то есть L_1 должно удовлетворять уравнению

$$\sigma(L_1, p) = Tp^{-1}\omega^{-p}. \quad (6.4.11)$$

Убедимся в разрешимости этого уравнения. Из определения (6.4.5) следует, что функция $\sigma(L, p)$ является монотонно убывающей функцией аргумента L и $\sigma(L, p) \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$. Поэтому для разрешимости уравнения (6.4.11) достаточно обеспечить неравенство

$$Tp^{-1}\omega^{-p} < \sigma(L_0, p) = \sigma_0.$$

Но последнее неравенство очевидным образом выполняется в силу условия (6.4.8). Следовательно, существует решение $L_1 = L_1(T, \omega)$ уравнения (6.4.11) и определение (6.4.10) корректно. В силу очевидных неравенств

$$\int_{j-1}^j \frac{ds}{s^{p+1}} > \frac{1}{j^{p+1}} > \int_j^{j+1} \frac{ds}{s^{p+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

из определения (6.4.10) вытекает, что

$$\omega^p(j + L_1 + 1)^{-p} \leq T - t_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i \leq \omega^p(j + L_1)^{-p}. \quad (6.4.12)$$

Поэтому выполняются соотношения

$$\exp\left[\omega(T - t_j)^{-\frac{1}{p}}\right] \leq e \cdot \exp(j + L_1). \quad (6.4.13)$$

Введем теперь весовые энергетические функции

$$A_i(s) = \beta_i E_i(s), \quad H_i(s) = \beta_i h_i(s), \quad i = 1, 2, \dots; \quad H_0(s) = \beta_0 h_0(s), \quad (6.4.14)$$

где

$$\beta_i = \lambda_0^{i+L_1} = \exp\left[-\frac{(i + L_1)L_0}{(1 + \nu)(1 + L_0)}\right], \quad \lambda_0 := \exp[-L_0(1 + \nu)^{-1}(1 + L_0)^{-1}],$$

ν из (6.4.8). По отношению к этим функциям система (6.4.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) &\leq \lambda_0 C_5 H_{j-1}(s) + \overline{C}_6 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-A'_j(s)) \quad \forall j \geq 1, \quad \forall s > 1, \\ H_j(s) &\leq (1 + \gamma) \lambda_0 H_{j-1}(s) + \overline{C}_8 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-A'_j(s)) \quad \forall j \geq 1. \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Итерируя эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) &\leq C_5 (1 + \gamma)^{-1} \lambda_1^j H_0(s) + \overline{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \sum_{i=1}^j \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} (-A'_i(s)), \\ \lambda_1 &:= (1 + \gamma) \lambda_0, \quad \overline{C}_9 = \max\{\overline{C}_6, (1 + \gamma)^{-1} C_5 \overline{C}_8\}. \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Выбор свободного параметра γ подчиним ограничению $\lambda = (1 + \gamma) \lambda_0 < 1 \iff \gamma < \lambda_0^{-1} - 1$. Введем теперь по аналогии с (6.3.12), семейство функций

$$U_j(s) = \sum_{i=1}^j \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.4.17)$$

Очевидны следующие, аналогичные (6.3.13), соотношения:

$$U_j(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_j U_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, \dots, \quad U_0(s) = 0, \quad (6.4.18)$$

где в силу (6.4.6) и (6.4.10),

$$\begin{aligned} \theta_j &= \lambda_1 \left(\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} = (1 + \gamma) \lambda_0 \left(\frac{j + L_1}{j - 1 + L_1} \right) \\ &\leq (1 + \gamma) \lambda_0 \left(\frac{1 + L_0}{L_0} \right) = \theta_0. \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Поэтому из (6.4.1) в силу (6.4.18) вытекает соотношение

$$U_j(s) \leq C_5 (1 + \gamma)^{-1} \lambda_1^j H_0(s) + \theta_0 U_{j-1}(s) + \overline{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-U'_j(s)). \quad (6.4.20)$$

Используя (6.4.7), (6.4.13), (6.4.6), оценим значение $U_j(s_0)$:

$$\begin{aligned} U_j(s_0) &= \sum_{i=1}^j \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} \beta_i (h_i(s_0) + E_j(s_0)) \\ &\leq e D_1 \sum_{i=1}^j \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} \exp [(1 - \ln \lambda_0^{-1})(i + L_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq eD_1 \sum_{i=1}^j \theta_0^{j-i} \exp \left[(1 - \ln \lambda_0^{-1})(i + L_1) \right] \\
&\leq eD_1(1 - \theta_0)^{-1} \exp \left[(1 - \ln \lambda_0^{-1})(j + L_1) \right]. \quad (6.4.21)
\end{aligned}$$

Неравенства (6.4.20) и (6.4.21) приводят к системе

$$\begin{aligned}
\bar{U}_j(s) &:= U_j(s) - \frac{b_0}{1 - \theta_0} \leq \theta_0 \bar{U}_{j-1}(s) + \bar{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-\bar{U}'_j(s)) \quad \forall s > 1, \\
\bar{U}_j(1) &\leq \frac{D_1}{1 - \theta_0} \exp \left[(1 - \ln \lambda_0^{-1}) p^{\frac{1}{p+1}} \omega^{\frac{p}{p+1}} \Delta_j^{-\frac{1}{p+1}} \right] \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6.4.22)
\end{aligned}$$

где $b_0 := D_1 C_5 (1 + \gamma)^{-1} \lambda_1 \beta_0 \exp(\omega T^{-\frac{1}{p}})$. В силу леммы 9.2.7 для решений системы (6.4.22) справедлива следующая равномерная оценка:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_j(s) &\leq \bar{M}_j(s) = \frac{D_1 e}{1 - \theta_0} \exp \left[\frac{(1 - \theta_0)}{\bar{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}} \left(\frac{(1 - \ln \lambda_0^{-1}) \bar{C}_9 p^{\frac{1}{p+1}} \omega^{\frac{p}{p+1}}}{(1 - \theta_0)} + s_0 - s \right) \right] \\
&\forall j \geq 1, \quad \forall s : s_0 \leq s \leq s_1 := s_0 + (1 - \theta_0)^{-1} \bar{C}_9 p^{\frac{1}{p+1}} (1 - \ln \lambda_0^{-1}) \omega^{\frac{p}{p+1}}. \quad (6.4.23)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$U_j(s_1) \leq D_1 \left(\frac{e}{1 - \theta_0} + \frac{C_5 \lambda_1 \beta_0 \exp(\omega T^{-\frac{1}{p}})}{1 + \gamma} \right) := D_1 C_{10}. \quad (6.4.24)$$

Отсюда в силу (6.4.14), (6.4.17) вытекает оценка для исходных энергетических функций

$$E_j(s_1) + h_j(s_1) \leq D_1 C_{10} \exp \left[\ln \lambda_0^{-1} (j + L_1) \right] \quad \forall j \geq 1. \quad (6.4.25)$$

Суммируя оценки (6.4.25) по j от 1 до i , получаем

$$h_{t_i}(s_1) + E(t_i, s_1) \leq D_1 C_{11} \exp \left[\ln \lambda_0^{-1} (i + L_1) \right] \quad \forall i \geq 1,$$

где $C_{11} = C_{10} (1 - \lambda_0)^{-1}$. Продолжая последнюю оценку с учетом определения (6.4.12), получаем

$$h_{t_i}(s_1) + E(t_i, s_1) \leq D_1 C_{11} \exp \left[\ln \lambda_0^{-1} \omega (T - t_i)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall i \geq 1.$$

Наконец, еще раз используя неравенство (6.4.12) и соотношение (6.4.6) на введенные постоянные, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
h_t(s_1) + E(t, s_1) &\leq D_1 C_{11} \exp \left[\frac{(L_1 + 1)}{L_1} \ln \lambda_0^{-1} \omega (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq D_1 C_{11} \exp \left(\omega_1 (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right) \quad \forall t < T, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{1 + \nu}, \\
s_1 &= 1 + \frac{\bar{C}_9 p^{\frac{1}{p}} L_0}{(1 - \theta_0)(1 + L_0)} (1 + \nu)^{-1} \omega^{\frac{p}{p+1}}. \quad (6.4.26)
\end{aligned}$$

Тем самым установлена оценка (6.4.9) с

$$c_1 = C_{11}, \quad c_2 = \frac{\bar{C}_9 p^{\frac{1}{p}} L_0}{(1 - \theta_0)(1 + L_0)(1 + \nu)}.$$

□

Лемма 6.4.2. В условиях теоремы 6.4.1 существуют постоянные $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ и $\alpha_1 > 0$, зависящие только от n , p , d_0 , d_1 , такие, что для произвольного решения $u(t, x)$ выполняется оценка

$$h_t(\tilde{s}) + E(t, \tilde{s}) \leq c_3 (T - t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \text{где} \quad \tilde{s} = 1 + c_4 \omega^{\frac{p}{p+1}}. \quad (6.4.27)$$

Доказательство. Отметим, что в силу условия (6.4.2) из оценки (6.2.9) следует справедливость неравенства (6.4.7) при $s_0 = 1$ с

$$D_1 = \bar{D}_1 := C_2 + C_1 h_0(1) \exp(-\omega T^{-\frac{1}{p}}). \quad (6.4.28)$$

Зафиксируем теперь постоянные $\gamma > 0$, $L_0 > 0$ и $\nu > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение (6.4.6). Предположим, что для постоянной ω из условия (6.4.2) выполняется оценка снизу (6.4.8). При этом мы оказываемся в условиях применимости леммы 6.4.1, которая гарантирует следующую оценку решения:

$$\begin{aligned}
h_t(s_1) + E(t, s_1) &\leq c_1 \bar{D}_1 \exp \left[\omega_1 (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall t < T, \\
\omega_1 &= (1 + \nu)^{-1} \omega, \quad s_1 = 1 + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}}. \quad (6.4.29)
\end{aligned}$$

Если теперь для ω_1 выполняется условие (6.4.8): $\omega_1 > \tilde{\omega} \iff \omega > (1 + \nu)^2 (T p^{-1} \sigma_0^{-1})^{\frac{1}{p}}$, то мы снова можем применить лемму 6.4.1 с исходным неравенством (6.4.29) вместо (6.4.7). В результате приходим к оценке

$$h_t(s_2) + E(t, s_2) \leq c_1^2 \bar{D}_1 \exp \left[\omega_2 (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall t < T,$$

$$\omega_2 = (1 + \nu)^{-2} \omega, \quad s_2 = s_1 + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}} = 1 + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}} (1 + (1 + \nu)^{-\frac{p}{p+1}}).$$

Понятно, что такая итеративная процедура может повторяться пока $\omega_k = \frac{\omega}{(1+\nu)^k} \geq \tilde{\omega}$, то есть $k := \left\lceil \ln(\omega(T^{-1} p \sigma_0)^{\frac{1}{p}}) \cdot (\ln(1 + \nu))^{-1} \right\rceil$ (здесь $[a]$ – целая часть числа a) раз. В результате получаем

$$h_t(s_k) + E(t, s_k) \leq c_1^k \bar{D}_1 \exp \left(\frac{\omega}{(1 + \nu)^k} (T - t)^{-\frac{1}{p}} \right) \quad \forall t < T, \quad (6.4.30)$$

где

$$s_k = 1 + c_2 \sum_{i=1}^k (1 + \nu)^{-\frac{ip}{p+1}} \omega^{\frac{p}{p+1}}.$$

Причем непосредственное дальнейшее применение леммы 6.4.1 в точке $s = s_k$ невозможно, так как не выполнено соответствующее условие (6.4.8), то есть, выполняется строго обратное неравенство

$$\omega < \tilde{\omega}_{k+1} =: (1 + \nu)^{k+1} \left(\frac{T}{p \sigma_0} \right)^{\frac{1}{p}} \iff T > p \left(\frac{\omega}{(1 + \nu)^{k+1}} \right)^p \sigma_0.$$

Определим теперь новую начальную точку $t_0^{(k)}$:

$$t_0^{(k)} := T - p \sigma_0 \left(\frac{\omega}{(1 + \nu)^{k+1}} \right)^p \iff \omega_k (T - t_0^{(k)})^{-\frac{1}{p}} = (1 + \nu)^{-\frac{1}{p}} \sigma_0^{-\frac{1}{p}}, \quad (6.4.31)$$

где $\omega_k = \omega(1 + \nu)^{-k}$. При этом из (6.4.30) и (6.4.31) следует

$$h_t(s_k) + E(t, s_k) \leq c_1^k \bar{D}_1 \exp(\omega_k (T - t)^{-\frac{1}{p}}), \quad t_0^{(k)} \leq t \leq T, \quad (6.4.32)$$

$$h_t(s) + E(t, s) \leq c_1^k \bar{D}_1 \exp \left(\frac{1 + \nu}{(p \sigma_0)^{\frac{1}{p}}} \right), \quad 0 \leq t \leq t_0^{(k)}, \quad \forall s \geq s_k. \quad (6.4.33)$$

Оценку (6.4.33) будем рассматривать как финальную оценку для всех $s \geq s_k$, $0 \leq t \leq t_0^{(k)}$. В области же $Q_k(s_k) = \{|x| > s_k, t_0^{(k)} < t < T\}$ продолжим итеративное оценивание энергетических функций решения $u(t, x)$. В силу определения (6.4.31) имеем

$$\omega_k = (1 + \nu) \left(\frac{T_k}{p \sigma_0} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{где} \quad T_k = T - t_0^{(k)}.$$

Поэтому для решения $u(t, x)$, рассматриваемого только в области $Q_k(s_k)$, в силу (6.4.32) выполнено условие (6.4.8), обеспечивающее применимость

в этой области леммы 6.4.1. В силу этой леммы имеем

$$h_t(s_{k+1}) + E(t, s_{k+1}) \leq c_1^{k+1} \bar{D}_1 \exp \left[\frac{\omega_k}{1+\nu} (T-t)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall t_0^{(k)} < t < T, \quad (6.4.34)$$

где $s_{k+1} = s_k + c_2 \omega_k^{\frac{p}{p+1}}$.

Далее определим следующую начальную точку:

$$t_0^{(k+1)} := T - p \sigma_0 \left(\frac{\omega}{(1+\nu)^{k+2}} \right)^{\frac{1}{p}} > t_0^{(k)}$$

и запишем следствия оценки (6.4.34):

$$h_t(s_{k+1}) + E(t, s_{k+1}) \leq c_1^{k+1} \bar{D}_1 \exp \left[\omega_{k+1} (T-t)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall t_0^{(k+1)} \leq t \leq T,$$

$$h_t(s) + E(t, s) \leq c_1^{k+1} \bar{D} \exp \left[\frac{1+\nu}{(p \sigma_0)^{\frac{1}{p}}} \right] \quad \forall s > s_{k+1}, \quad 0 < t \leq t_0^{(k+1)}.$$

Первая из этих оценок по аналогии с выводом (6.4.34) из (6.4.32) приводит к неравенству:

$$h_t(s_{k+2}) + E(t, s_{k+2}) \leq c_1^{k+2} \bar{D}_1 \exp \left[\omega_{k+2} (T-t)^{-\frac{1}{p}} \right] \quad \forall t > t_0^{k+1},$$

где $s_{k+2} = s_{k+1} + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}}$. Эту оценку используем для следующего цикла оценивания. После i таких циклов приходим к

$$h_t(s_{k+i}) + E(t, s_{k+i}) \leq R_{k+i}(t), \quad s_{k+i} = 1 + c_2 \omega^{\frac{p}{p+1}} \sum_{j=0}^{k+i} \frac{1}{(1+\nu)^{\frac{j p}{p+1}}},$$

$$R_{k+i}(t) = \begin{cases} c_1^{k+i} \bar{D}_1 \exp \left[\frac{\omega}{(1+\nu)^{k+i}} (T-t)^{-\frac{1}{p}} \right] & \forall t : t_0^{(k+i-1)} < t < T, \\ c_1^{k+i-j} \bar{D}_1 \exp \left[\frac{1+\nu}{(p \sigma_0)^{1/p}} \right] & \forall t : t_0^{k+i-j-1} < t \leq t_0^{k+i-j}, \\ j = 1, \dots, i, \end{cases} \quad (6.4.35)$$

где $t_0^{k+i-j} := T - p \sigma_0 \omega_{k+i-j}^{\frac{1}{p}}$, $\omega_{k+i-j} = \omega (1+\nu)^{-(k+i-j)}$.

Определим теперь значение $\tilde{s}$:

$$\tilde{s} := \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 1 + c_4 \omega^{\frac{p}{p+1}}, \quad c_4 = c_2 \frac{(1+\nu)^{\frac{p}{p+1}}}{(1+\nu)^{\frac{p}{p+1}} - 1}. \quad (6.4.36)$$

Для произвольной точки $t < T$ оценим сверху значение $h_t(\tilde{s}) + E(t, \tilde{s})$. Так как построенная выше последовательность точек $t_0^{(j)} \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$, то для любой выбранной точки $t < T$ можно найти номер $j \in \mathbb{N}$ такой, что

$$t \in \Gamma_j := (t_0^{(j-1)}, t_0^{(j)}]. \quad (6.4.37)$$

Из оценки (6.4.35) в силу монотонного невозрастания функций $h_t(s)$, $E(t, s)$ по s при произвольном $t < T$ выводим, что

$$h_t(\tilde{s}) + E_t(\tilde{s}) \leq h_t(s_{j+1}) + E(t, s_{j+1}) \leq R_{j+1}(t) = A_1 c_1^j, \\ \forall t \in (t_0^{(j-1)}, t_0^{(j)}] \quad A_1 := \overline{D}_1 \exp \left[\frac{1 + \nu}{(p \sigma_0)^{\frac{1}{p}}} \right]. \quad (6.4.38)$$

Легко проверить соотношение

$$A_1 c_1^j = c_3 (T - t_0^{(j-1)})^{-\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{p \ln c_1}{\ln(1 + \nu)}, \quad c_3 = A_1 (p \sigma_0 \omega)^{\frac{\alpha_1}{p}}. \quad (6.4.39)$$

С учетом этого соотношения из (6.4.38) вытекает окончательная оценка

$$h_t(\tilde{s}) + E(t, \tilde{s}) \leq c_3 (T - t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T,$$

где

$$c_3 = A_1 (p \sigma_0 \omega)^{\frac{\alpha_1}{p}} = \overline{D}_1 \exp \left[\frac{(1 + \nu)}{(p \sigma_0)^{\frac{1}{p}}} \right] (p \sigma_0 \omega^{\frac{\ln c_1}{\ln(1 + \nu)}}), \quad \alpha_1 = \frac{p \ln c_1}{\ln(1 + \nu)}.$$

Тем самым, требуемая оценка (6.4.27) получена. $\square$

Заключительная часть доказательства теоремы 6.4.1 проводится аналогично последнему этапу доказательства теоремы 6.3.1. Пусть $s' : s' > \tilde{s}$ — произвольная точка, в которой имеет место неравенство структуры (6.3.31) с s' вместо $\tilde{s}$. Без ограничения общности будем полагать, что постоянная α_1 из оценки (6.4.27) удовлетворяет неравенству $\alpha_1 > (p + 1)^{-1}$. Зафиксируем числа $0 < \xi < 1$, $\eta > 0$ и $\gamma > 0$ так, что

$$(1 + \gamma) \xi^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} := \theta_0 < 1; \quad \frac{1}{p + 1} < \alpha_1 < \eta. \quad (6.4.40)$$

Теперь для произвольной точки $\bar{s} \in [\tilde{s}, s']$ определим последовательность $\{t_i\} = \{t_i\}(\bar{s})$ следующим, аналогичным (6.3.33), соотношением:

$$(t_i - t_{i-1})^{-\eta} := \frac{\xi^\eta}{c_3 T^{\eta - \alpha_1}} \left[E(t_i, \bar{s}) - E(t_{i-1}, \bar{s}) + \sup_{t_{i-1} < t \leq t_i} h(t, \bar{s}) \right]. \quad (6.4.41)$$

Также как ранее из определения (6.3.33), выводим теперь из (6.4.41), что новая последовательность $\{t_i\}$ удовлетворяет в силу оценки (6.4.27) соотношению (6.3.35). По этой последовательности определяем новые энергетические функции $E_j(s)$ и $h_j(s)$ при $s > \bar{s}$ по формулам (6.2.20). Далее введем новые функции $A_j(s)$ и $H_j(s)$ по формулам (6.3.5), где теперь α_1 определяется в (6.4.27) (или (6.4.39)), а смещения $\{\Delta_i\}$ – в (6.4.41). Эти новые функции удовлетворяют, как несложно убедиться, системе

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) &\leq C_5 \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1} H_{j-1}(s) + \bar{C}_6 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-A'_j(s)) \quad \forall j \geq 1, \\ H_j(s) &\leq \lambda_j H_{j-1}(s) + \bar{C}_8 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-A'_j(s)) \quad \forall s > \bar{s}, \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

где

$$\Delta_0 = \xi^{-1} \Delta_1, \quad H_0(s) = \Delta_0^{\alpha_1} h_0(s), \quad \lambda_j = (1 + \gamma) \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1}.$$

Очевидно соотношение

$$\lambda_j \lambda_{j-1} \dots \lambda_{i+1} \Delta_i^{\frac{1}{p+1}} = (1 + \gamma)^{j-i} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}}.$$

В силу этого соотношения, итерируя систему (6.4.42), получаем

$$\begin{aligned} H_j(s) + A_j(s) &\leq C_5 (1 + \gamma)^{j-1} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0} \right)^{\alpha_1} H_0(s) + \bar{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \\ &\times \left[\sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} (-A'_i(s)) \right], \quad \bar{C}_9 = \max \left\{ \bar{C}_6, \frac{C_5 \bar{C}_8}{(1 + \gamma)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.4.43)$$

По аналогии с (6.3.41) введем новые энергетические функции $U_j(s)$:

$$U_j(s) := \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Очевидны следующие аналоги неравенств (6.3.42):

$$U_j(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta^{(j)} U_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, \dots, \quad U_0(s) = 0,$$

где

$$\theta^{(j)} := (1 + \gamma) \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} \leq (1 + \gamma) \xi^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} = \theta_0 < 1.$$

Из последнего неравенства в силу (6.4.43) следует такой аналог соотношения (6.4.20):

$$U_j(s) \leq C_5 T^{\alpha_1} \bar{\lambda}^{j-1} h_0(s) + \theta_0 U_{j-1}(s) + \bar{C}_9 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-U'_j(s)), \quad \forall s > \bar{s}, \quad (6.4.44)$$

где $\bar{\lambda} = (1 + \gamma)\xi^{\alpha_1} < 1$. Начальное значение $U_j(\bar{s})$ оцениваем с учетом определения (6.4.41):

$$\begin{aligned} U_j(\bar{s}) &= \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{p+1}} \Delta_i^{\alpha_1} (E_i(\bar{s}) + h_i(\bar{s})) \\ &= c_3 T^{\eta - \alpha_1} \xi^{-\eta} \Delta_j^{-(\eta - \alpha_1)} \sum_{i=1}^j (1 + \gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\eta - \frac{1}{p+1}} \\ &\leq c_3 (1 - \theta_0)^{-1} T^{\eta - \alpha_1} \xi^{-\eta} \Delta_j^{-(\eta - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (6.4.45)$$

Из неравенств (6.4.44) и (6.4.45) в силу леммы 9.2.9 вытекает универсальная оценка

$$U_j(s) \leq C_5 T^{\alpha_1} h_0(1) + D_4 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \quad \forall j \geq 1, \quad \forall s > \bar{s}, \quad (6.4.46)$$

где

$$\bar{U}_0(s) = s^{-(\eta - \alpha_1)(p+1)}, \quad D_4 = \frac{c_3 T^{\eta - \alpha_1}}{(1 - \theta_0)\xi^\eta} \left[\frac{e\bar{C}_9(\eta - \alpha_1)(p+1)}{(1 - \theta_0)} \right]^{(\eta - \alpha_1)(p+1)}.$$

Следовательно,

$$U_j(s) \leq 2D_4 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \quad \forall j \geq 1, \quad \forall s : \bar{s} < s \leq \bar{s} + \delta_0, \quad (6.4.47)$$

где δ_0 определяется равенством: $\bar{U}_0(\delta_0) = C_5 D_4^{-1} T^{\alpha_1} h_0(1)$. Из неравенства (6.4.47) в силу (6.4.41) следует:

$$\begin{aligned} h_j(s) + E_j(s) &\leq 2D_4 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \Delta_j^{-\alpha_1} \\ &= D_5 \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_j(\bar{s}) + E_j(\bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \end{aligned} \quad (6.4.48)$$

$$\forall s \in [\bar{s}, \bar{s} + \delta_0], \quad \text{где } D_5 = 2D_4 \xi^{\alpha_1} c_3^{-\frac{\alpha_1}{\eta}} T^{-\frac{(\eta - \alpha_1)\alpha_1}{\eta}}.$$

Фиксируем произвольный номер $i \in \mathbb{N}$ и суммируя неравенства (6.4.48) по j от 1 до i , аналогично (6.3.54) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
h_{t_i}(s) + E(t_i, s) &\leq 2D_4 \bar{U}_0(s - \bar{s}) \sum_{j=1}^i \Delta_j^{-\alpha_1} \leq 2D_4(1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \Delta_i^{-\alpha_1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) \\
&= D_5(1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_i(\bar{s}) + E_i(\bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}}, \quad \forall s \in [\bar{s}, \bar{s} + \delta]. \quad (6.4.49)
\end{aligned}$$

Рассуждая также как в доказательстве теоремы 6.3.1 при выводе соотношения (6.3.59) из неравенства (6.3.54), мы получаем на основе (6.4.49) следующее неравенство:

$$h_t(s) + E(t, s) \leq D_5(1 - \xi^{\alpha_1})^{-1} \bar{U}_0(s - \bar{s}) (h_t(\bar{s}) + E(t, \bar{s}))^{\frac{\alpha_1}{\eta}} \quad \forall t < T. \quad (6.4.50)$$

Из неравенства (6.4.51) в силу леммы 9.3.2 вытекает окончательная оценка

$$h_t(s) + E(t, s) \leq C(s - \tilde{s})^{-\eta(p+1)} \quad \forall s > \tilde{s} = 1 + C_4 \omega^{\frac{p}{p+1}}, \quad \forall t < T.$$

Тем самым теорема 6.4.1 доказана.

6.5. Эффективная локализация сингулярных граничных режимов для уравнений типа нестационарной быстрой диффузии

Теперь рассмотрим последний возможный вариант соотношения между параметрами p и q в уравнении (6.1.26), случай “быстрой” нестационарной диффузии:

$$0 < p < q. \quad (6.5.1)$$

Покажем, что для таких уравнений любой сингулярный граничный режим является локализованным и, более того, локализованным на границе области LS -режимом.

Теорема 6.5.1. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (6.1.26)–(6.1.29), (6.5.1). Тогда независимо от степени сингулярности граничного режима, то есть, независимо от функции $F(t)$, множество интенсификации решения $u(t, x)$ $\Omega_s(u) \subset \partial_0 \Omega$, то есть любой граничный режим является локализованным LS -режимом. Причем справедлива следующая универсальная оценка:

$$\begin{aligned}
h(\tau, s) + E(\tau, s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\
&\leq D_1 h_0(1) + D_2(s - 1)^{-\frac{pq+2p+1}{q-p}} \quad \forall s > 1, \forall \tau < T, \quad (6.5.2)
\end{aligned}$$

где постоянные D_1, D_2 зависят только от p, q, n, T .

Замечание 6.5.1. Оценка (6.5.2) является точной на всем классе сингулярных граничных режимов. В этом можно убедиться следующим образом. Рассмотрим следующую модельную задачу Коши-Дирихле:

$$\begin{aligned} v_t &= (v^m)_{xx} & \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+^1, \quad 0 < m < 1, \\ v(t, 0) &= \infty, & \forall t > 0, \\ v(0, x) &= 0 & \forall x \in \mathbb{R}_+^1. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Эта задача имеет явное решение, так называемое решение структуры “razor blade” (см. [129]):

$$V(t, x) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right)^{-\frac{2}{1-m}}. \quad (6.5.4)$$

Введя новую неизвестную функцию: $u := v^m$, уравнение (6.5.3) можно переписать в виде

$$\left(u^{\frac{1}{m}} \right)_t - u_{xx} = 0, \quad U(t, x) := V(t, x)^m.$$

Это уравнение соответствует уравнению структуры (6.1.26) с $q = \frac{1}{m}, p = 1$. При этом энергетическая функция $h(t, s)$, соответствующая решению (6.5.4), имеет вид

$$\begin{aligned} h(t, s) &= \int_{\Omega(s)} U(t, x)^{q+1} dx = \int_{\Omega(s)} V(t, x)^{m(q+1)} dx = \int_{\Omega(s)} V^{1+m} dx \\ &= t^{\frac{m+1}{1-m}} \int_{x>s} s^{-\frac{2(1+m)}{1-m}} dx = t^{\frac{m+1}{1-m}} s^{-\frac{1+3m}{1-m}}. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Легко замечаем, что для рассматриваемого уравнения $\frac{pq+2q+1}{q-p} = \frac{1+3m}{1-m}$. Следовательно, асимптотика решения $U(t, x)$ в окрестности множества интенсификации точно соответствует максимальному росту, допускаемому общей оценкой (6.5.2).

Для доказательства теоремы 6.5.1 выведем сначала основную систему дифференциальных неравенств, управляющую поведением энергетических функций, связанных с соответствующим решением $u(t, x)$.

Лемма 6.5.1. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (6.1.26)–(6.1.34), (6.5.1). Тогда соответствующие энергетические функции $E_j(s)$ и $h_j(s)$ из (6.2.20) удовлетворяют следующей системе

дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} h_i(s) &\leq (1 + \gamma)h_{i-1}(s) + C_1\Delta_i^{\frac{1}{p+1}}(-E'_i(s))^{1-\frac{q-p}{(q+1)(p+1)}} \\ &\quad + C_2\Delta_i^{\frac{q+1}{(p+1)q}}(-E'_i(s))^{1-\frac{q-p}{q(p+1)}}, \quad \forall s > 1, \quad \forall \gamma > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}; \\ C_1 &= C_1(\gamma) \rightarrow \infty, \quad C_2 = C_2(\gamma) \rightarrow \infty \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

$$\begin{aligned} h_i(s) + E_i(s) &\leq 2(1 + c_0)h_{i-1}(s) + C_3\Delta_i^{\frac{1}{p+1}}(-E'_i(s))^{1-\frac{q-p}{(q+1)(p+1)}} + \\ &\quad + C_4\Delta_i^{\frac{q+1}{(p+1)q}}(-E'_i(s))^{1-\frac{q-p}{q(p+1)}} \quad \forall s > 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

где C_0 из (6.2.24), постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 не зависят от s .

Доказательство леммы 6.5.1 начнем с промежуточного соотношения (6.2.18) из леммы 6.2.2, справедливого при произвольных $p > 0$ и $q > 0$. Но теперь будем оценивать второй сомножитель во втором слагаемом справа другим способом. А именно, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int_{\partial_0\Omega(s)} |u(t, x)|^{p+1} d\sigma \leq (\text{meas } \partial_0\Omega(s))^{\frac{r-p}{r+1}} \left(\int_{\partial_0\Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} d\sigma \right)^{\frac{p+1}{r+1}}, \quad (6.5.8)$$

где $r = p(q+1)(p+1)^{-1}$. Применим теперь неравенство из п. 1) предложения 9.1.1 к функции $v := |u|^r u$. Получим

$$\int_{\partial_0\Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} d\sigma \leq k_0 \left((r+1) \int_{\Omega(s)} \sum_{i=1}^n |u|^r |D_{x_i} u| dx + \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} dx \right).$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{r(p+1)}{p} = q+1$, в силу неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial_0\Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} d\sigma &\leq \bar{k}_0 \left[\left(\int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} + \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} dx \right], \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

где $\bar{k}_0$ зависит только от k_0, n, p, q . Интегрируя неравенство (6.5.9) по t ,

получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{\tilde{t}_i} \int_{\partial_0 \Omega(s)} |u(t, x)|^{r+1} d\sigma dt &\leq \bar{k}_0 \sup_{t \in (t_{i-1}, \tilde{t}_i]} \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\times \left(\int_{t_{i-1}}^{\tilde{t}_i} \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}} \tilde{\Delta}_i^{\frac{p}{p+1}} + \bar{k}_0 (\text{meas } \Omega(s))^{\frac{q-r}{q+1}} \tilde{\Delta}_i \\ &\times \left(\sup_{t \in (t_{i-1}, \tilde{t}_i]} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{r+1}{q+1}}, \quad (6.5.10) \end{aligned}$$

где $\{t_i\}$ — последовательность из (6.2.20), $\tilde{t}_i$ — произвольная точка из интервала $(t_{i-1}, t_i]$, $\tilde{\Delta}_i := \tilde{t}_i - t_{i-1}$. Теперь оценка (6.2.18) в силу (6.5.8) и (6.5.10) порождает соотношение:

$$\begin{aligned} h(\tilde{t}_i, s) + c_0^{-1} \tilde{E}_i(s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(\tilde{t}_i, x)|^{q+1} dx + c_0^{-1} \int_{t_{i-1}}^{\tilde{t}_i} \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\ &\leq h(t_{i-1}, s) + \frac{q+1}{q} d_1 (-\tilde{E}'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} (\text{meas } \partial_0 \Omega(s))^{\frac{r-p}{(r+1)(p+1)}} \cdot \tilde{\Delta}_i^{\frac{r-p}{(r+1)(p+1)}} \\ &\quad \times \left[\bar{k}_0 \sup_{t \in (t_{i-1}, \tilde{t}_i]} h(t, s)^{\frac{p}{p+1}} \cdot \tilde{E}_i(s)^{\frac{1}{p+1}} \tilde{\Delta}_i^{\frac{p}{p+1}} \right. \\ &\quad \left. + \bar{k}_0 (\text{meas } \Omega(s))^{\frac{q-r}{q+1}} \tilde{\Delta}_i \cdot \sup_{t \in (t_{i-1}, \tilde{t}_i]} h(t, s)^{\frac{r+1}{q+1}} \right]^{\frac{1}{r+1}}, \quad c_0 = \frac{q}{(q+1)d_0} \quad (6.5.11) \end{aligned}$$

Для произвольного $\delta > 0$, произвольного номера i и произвольного $s > 1$ мы можем найти такое $\tilde{t}_i = \tilde{t}_i(\delta, s)$, что

$$(1 - \delta)h_i(s) = \int_{\Omega(s)} |u(\tilde{t}_i, x)|^{q+1} dx. \quad (6.5.12)$$

При этом из соотношения (6.5.11) следует неравенство

$$\begin{aligned} (1 - \delta)h_i(s) + c_0^{-1} \tilde{E}_i(s) &\leq h_{i-1}(s) + c_1 (-\tilde{E}'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \tilde{\Delta}_i^{\frac{r}{(r+1)(p+1)}} \tilde{E}_i(s)^{\frac{1}{(p+1)(r+1)}} h_i(s)^{\frac{p}{(p+1)(r+1)}} \\ &\quad + c_2 (-\tilde{E}'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \tilde{\Delta}_i^{\frac{1}{p+1}} h_i(s)^{\frac{1}{q+1}}, \quad (6.5.13) \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \frac{(q+1)d_1}{q} \bar{k}_0^{\frac{1}{r+1}} \left(\max_{s>1} (\text{meas } \partial_0 \Omega(s)) \right)^{\frac{r-p}{(r+1)(p+1)}}, \quad c_2 = c_1 (\text{meas } \Omega)^{\frac{q-r}{(q+1)(r+1)}}.$$

Применяя при оценке слагаемых в правой части (6.5.13) неравенство Юнга с “ ε ”, получаем

$$\begin{aligned} (1-\delta)h_i(s) + c_0^{-1}\tilde{E}_i(s) &\leq h_{i-1}(s) + \varepsilon\tilde{E}_i(s) + \varepsilon h_i(s) \\ &+ c_3(\varepsilon)\tilde{\Delta}_i^{\frac{1}{p+1}} \cdot \left(-\tilde{E}'_i(s) \right)^{\frac{p(r+1)}{(p+1)r}} + \varepsilon h_i(s) + c_4(\varepsilon)\tilde{\Delta}_i^{\frac{(q+1)}{q(p+1)}} \cdot (-E'_i(s))^{\frac{p(q+1)}{(p+1)q}}, \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

где $c_3(\varepsilon) \rightarrow \infty$, $c_4(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (6.5.14) следует, что

$$\begin{aligned} (1-\delta-2\varepsilon)h_i(s) + (c_0^{-1}-\varepsilon)\tilde{E}_i(s) &\leq h_{i-1}(s) + c_3\tilde{\Delta}_i^{\frac{1}{p+1}} \left(-\tilde{E}'_i(s) \right)^{\frac{p(r+1)}{(p+1)r}} \\ &+ c_4\tilde{\Delta}_i^{\frac{q+1}{q(p+1)}} \cdot (-\tilde{E}'_i(s))^{\frac{p(q+1)}{(p+1)q}}. \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Так как $-\tilde{E}'_i(s) \leq -E'_i(s)$, то из (6.5.15) в силу произвольности $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ следует требуемое соотношение (6.5.6).

Вернемся теперь снова к соотношению (6.5.11) и положим в нем $\tilde{t}_i := t_i$. В результате по аналогии с (6.5.13) имеем

$$\begin{aligned} E_i(s) &\leq c_0 h_{i-1}(s) + c_0 c_1 (-E'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \Delta_i^{\frac{r}{(r+1)(p+1)}} E_i(s)^{\frac{1}{(p+1)(r+1)}} h_i(s)^{\frac{p}{(p+1)(r+1)}} \\ &+ c_0 c_2 (-E'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \Delta_i^{\frac{1}{p+1}} h_i(s)^{\frac{1}{q+1}}, \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

где постоянные c_1, c_2 те же, что и в (6.5.13). Складывая (6.5.13) и (6.5.16), получаем

$$\begin{aligned} (1-\delta)h_i(s) + E_i(s) &\leq (1+c_0)h_{i-1}(s) + (1+c_0)c_1(-E'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \Delta_i^{\frac{r}{(r+1)(p+1)}} \\ &\times E_i(s)^{\frac{1}{(p+1)(r+1)}} \cdot h_i(s)^{\frac{p}{(p+1)(r+1)}} + (1+c_0)c_2(-E'_i(s))^{\frac{p}{p+1}} \Delta_i^{\frac{1}{p+1}} h_i(s)^{\frac{1}{q+1}}. \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

Здесь мы воспользовались очевидными соотношениями: $\tilde{\Delta}_i \leq \Delta_i$, $\tilde{E}_i(s) \leq E_i(s)$, $(-\tilde{E}'_i(s)) \leq (-E'_i(s))$. Оцениваем теперь слагаемые справа в (6.5.17)

при помощи неравенства Юнга с “ ε ” так, как это делалось при получении (6.5.14). В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & (1 - \delta - 2(1 + c_0)\varepsilon)h_i(s) + (1 - (1 + c_0)\varepsilon)E_i(s) \\ & \leq (1 + c_0)h_{i-1}(s) + (1 + c_0)c_3\Delta_i^{\frac{1}{p+1}}(-E'_i(s))^{\frac{p(r+1)}{(p+1)r}} \\ & \quad + (1 + c_0)c_4\Delta_i^{\frac{q+1}{q(p+1)}}(-E'_i(s))^{\frac{p(q+1)}{q(p+1)}}. \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

Фиксируем теперь $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\delta + 2(1 + c_0)\varepsilon \leq 2^{-1}, \quad \varepsilon(1 + c_0) < 2^{-1}.$$

При этом из неравенства (6.5.18) вытекает необходимое соотношение (6.5.7) с $C_3 = 2(1 + c_0)c_3$ и $C_4 = 2(1 + c_0)c_4$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6.5.1 проведем, анализируя соотношение (6.5.7). Запишем это неравенство для единого интервала $(0, \tau]$ с произвольным $\tau < T$:

$$\begin{aligned} J_\tau(s) &:= \sup_{t \in (0, \tau]} \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right) + \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \\ &\leq 2(1 + c_0)h_0(1) + C_3 T^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} E(\tau, s) \right)^{1 - \frac{q-p}{(q+1)(p+1)}} \\ &\quad + C_4 T^{\frac{q+1}{q(p+1)}} \left(-\frac{d}{ds} E(\tau, s) \right)^{1 - \frac{q-p}{q(p+1)}} \quad \forall s > 1, \quad \forall \tau < T, \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

или иначе с учетом того, что $\frac{d}{ds} E(\tau, s) \geq \frac{d}{ds} J_\tau(s)$:

$$\begin{aligned} \bar{J}_\tau(s) &:= J_\tau(s) - 2(1 + c_0)h_0(1) \leq \left(C_3 T^{\frac{1}{p+1}} + C_4 T^{\frac{q+1}{q(p+1)}} \right) \\ &\quad \times \max \left\{ \left(-\frac{d}{ds} \bar{J}_\tau(s) \right)^{1 - \frac{q-p}{(q+1)(p+1)}}, \left(-\frac{d}{ds} \bar{J}_\tau(s) \right)^{1 - \frac{q-p}{q(p+1)}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

Мы рассматриваем поведение функции $\bar{J}_\tau(s)$ только в области больших значений этой не возрастающей по s функции, то есть при

$$s \in S := \left\{ \bar{J}_\tau(s) \geq C_5 := \left(C_3 T^{\frac{1}{p+1}} + C_4 T^{\frac{q+1}{q(p+1)}} \right) \right\}. \quad (6.5.21)$$

На этом множестве, как легко видеть,

$$-\frac{d}{ds}I_\tau(s) > 1 \quad \forall s \in S.$$

Поэтому из (6.5.20) вытекает неравенство

$$\bar{J}_\tau(s) \leq C_5 \left(-\frac{d}{ds} \bar{J}_\tau(s) \right)^{1 - \frac{q-p}{(q+1)(p+1)}} \quad \forall s \in S. \quad (6.5.22)$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, легко выводим следующую оценку:

$$\bar{J}_\tau(s) \leq \left[J_\tau(1)^{-\mu} + \mu C_5^{-\nu} (s-1) \right]^{-\mu^{-1}} \quad \forall s > 1 : s \in S. \quad (6.5.23)$$

где

$$\mu = \frac{q-p}{pq+2p+1} > 0, \quad \nu = \frac{(q+1)(p+1)}{pq+2p+1} > 0.$$

Из (6.5.23) вытекает, в частности, следующая универсальная оценка, справедливая для любых граничных режимов:

$$J_\tau(s) \leq 2(1+c_0)h_0(1) + \mu^{-\frac{1}{\mu}} C_5^{\frac{\nu}{\mu}} (s-1)^{-\frac{1}{\mu}} \quad \forall s \in S, \quad \forall \tau < T. \quad (6.5.24)$$

Из этого неравенства следует, в частности, требуемая оценка (6.5.2). $\square$

ГЛАВА 7

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В РЕЖИМАХ С ОБОСТРЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

7.1. Граничные режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка

Переходим теперь к рассмотрению условий локализации (эффективной локализации) сингулярных граничных режимов для общих дивергентных параболических уравнений структуры

$$(B(u))_t + A(u) := (|u|^{q-1}u)_t + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_x^\alpha a_\alpha(t, x, u, D_x^1 u, \dots, D_x^m u) = 0, \quad (7.1.1)$$

где $m > 1$, $q > 0$, непрерывные функции $a_\alpha(t, x, \xi)$ удовлетворяют следующим условиям коэрцитивности (параболичности) и роста:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha \geq d_0 \left(\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta| \right)^{p+1}, \quad p > 0, \quad d_0 > 0, \quad (7.1.2)$$

$$|a_\alpha(t, x, \xi)| \leq d_1 \left(\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta| \right)^p \quad \forall (t, x, \xi) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^{N(m)}. \quad (7.1.3)$$

Здесь $N(m)$ – число различных мультииндексов $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ длины $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, не превышающей m . Используем стандартные обозначения:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_x^m u = \{D_x^\alpha u, |\alpha| = m\}.$$

Энергетические методы из главы 6 не могут быть непосредственно применены к уравнениям структуры (7.1.1) при $m > 1$, так как в этом случае представляется невозможным получение для соответствующих энергетических функций системы обыкновенных дифференциальных неравенств типа (6.2.21), (6.2.22). Естественным аппаратом при построении аналога

метода локальных энергетических оценок в качественной теории эллиптических и параболических уравнений высокого порядка оказались не обыкновенные дифференциальные уравнения и неравенства, а специфические функциональные неравенства (см. [114], [115]). Адаптация метода функциональных неравенств к изучению асимптотических свойств решений в окрестности времени сингулярного обострения граничных данных, связанная с введением бесконечного семейства подобластей-полос в окрестности времени обострения, была предложена в работах [117], [43].

Итак, пусть снова Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$, удовлетворяющей (6.1.25). На протяжении главы 7 при изучении локализации сингулярных граничных режимов в ограниченных областях Ω в целях упрощения формулировок результатов будем предполагать выполненными следующее ограничение сверху на параметр q :

$$(q+1)^{-1} > (p+1)^{-1} - mn^{-1} \iff q+1 < n(p+1)(n-m(p+1))^{-1} \quad (7.1.4)$$

Будем рассматривать решения $u(t, x)$ уравнения (7.1.1) в области $(0, T) \times \Omega$, удовлетворяющие следующим неоднородным начальному и граничному условиям:

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega) \quad \text{в } \Omega, \quad \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} := \bar{h}_0, \quad (7.1.5)$$

$$D_x^\alpha(u - f) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial_0\Omega \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m-1, \quad (7.1.6)$$

и следующему однородному условию Дирихле на $(0, T) \times \partial_1\Omega$:

$$D_x^\alpha u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial_1\Omega \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m-1. \quad (7.1.7)$$

Функция $\bar{f}$ из условия Дирихле (7.1.6) является следом на $(0, T) \times \partial_0\Omega$ функции $\bar{f}(t, x)$ такой, что

$$\bar{f}(t, \cdot) \in C_{\text{loc}}([0, T]; L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{p+1, \text{loc}}([0, T]; W_{p+1}^m(\Omega, \partial_1\Omega)), \quad (7.1.8)$$

$$\bar{f}_t(t, \cdot) \in L_{1, \text{loc}}([0, T]; L_{q+1}(\Omega)), \quad (7.1.9)$$

причем

$$\begin{aligned} F(t) := & \sup_{0 < \tau < t} \int_{\Omega} |\bar{f}(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D_x^m \bar{f}(t, x)|^{p+1} dx dt \\ & + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} |\bar{f}_\tau(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Определение 7.1.1. Функция $u(t, x)$ является обобщенным энергетическим решением задачи (7.1.1), (7.1.5)–(7.1.7), если

- 1) $u \in f + L_{p+1, \text{loc}}([0, T]; W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega)) \cap C_{\text{loc}}([0, T]; L_{q+1}(\Omega));$
- 2) $(|u|^{q-1}u)_t \in L_{\frac{p+1}{p}, \text{loc}}([0, T]; (W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega))^*);$
- 3) выполняется начальное условие (7.1.4) и следующее интегральное тождество:

$$\int_0^\tau \left\langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta \right\rangle dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, \dots, D_x^m u) D_x^\alpha \eta dx dt = 0 \quad (7.1.10)$$

для произвольного $\tau < T$ и произвольной функции $\eta(t, x) \in L_{p+1, \text{loc}}([0, \tau]; W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega))$. Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена билинейная операция спаривания элементов пространств $(W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega))^*$ и $W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega)$.

Замечание 7.1.1. Изучение разрешимости однородной задачи Дирихле для неоднородных уравнений:

$$\text{P)} \quad (B(u))_t + A(u) = g(t, x),$$

с операторами B, A из (7.1.1) (а также и более общей структуры) было начато в середине 60-х годов. Был изучен в полном объеме случай $B = I$ (т.е., $q = 1$) (см., например, [138], [89]). В работе [52] установлено существование обобщенного решения однородной задачи Дирихле для уравнения P) в случае потенциальности операторов B и A , а также компактности оператора B по отношению к оператору A (что эквивалентно условию (7.1.4) на параметры q и p). В работе [140] установлена разрешимость указанной задачи для некоторых классов непотенциальных операторов A . При этом основным структурным условием на оператор A является условие монотонности:

$$\text{L)} \quad \sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(t, x, \xi) - A_\alpha(t, x, \eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq 0 \quad \forall t, x, \xi, \eta \in \mathbb{R}_+^1 \times \Omega \times \mathbb{R}^{N(m)} \times \mathbb{R}^{N(m)}.$$

Замечание 7.1.2. Мы приводим в главах 7, 8 методы изучения локализации граничных режимов с обострением для однородного уравнения (7.1.1). Однако, как это будет видно в дальнейшем, эти методы легко могут быть адаптированы к изучению локализации решений однородных граничных задач для неоднородного уравнения P) из замечания 7.1.1 с

сингулярно обостряющейся при $t \rightarrow T$ на некотором подмножестве $S \subset \Omega$ правой частью $g(t, x)$.

Определение 7.1.2. Множеством интенсификации (blow-up множеством) $\Omega_s(u)$ энергетического решения u из определения 7.1.1 будем называть множество точек $x \in \bar{\Omega}$ таких, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t < T} \left\{ \int_{\{|y-x| < \varepsilon\} \cap \Omega} |u(t, y)|^{q+1} dy + \int_0^t \int_{\{|y-x| < \varepsilon\} \cap \Omega} |u(\tau, y)|^{p+1} dy d\tau \right\} = \infty.$$

Замечание 7.1.3. Определение 7.1.2 несколько отличается от определения 6.1.6 из главы 6. Однако несложно проверить их эквивалентность.

7.2. Энергетические функции решений и основная система функциональных неравенств

Пусть $u(t, x)$ – произвольное решение задачи (7.1.1), (7.1.5)–(7.1.7) из определения 7.1.1 и $\Omega(s)$ – семейство подобластей, определенных в (6.2.14). Для описания режимов с сингулярным обострением в уравнениях высокого порядка ($m > 1$) требуется больше энергетических функций, чем это было в случае $m = 1$. А именно, введем следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} h(t, s) &= \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx, \quad t < T, \quad s > 1, \\ E(t, s) &= \int_0^t \int_{\Omega(s)} |D_x^m u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau, \\ J(t, s) &= \int_0^t \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.1)$$

Сначала установим глобальную энергетическую априорную оценку произвольного решения $u(t, x)$ через функцию $F(t)$, характеризующую граничный режим с обострением.

Лемма 7.2.1. Для произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (7.1.1), (7.1.5)–(7.1.10) справедлива следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} h(t, 1) + E(t, 1) &= \int_{\Omega=\Omega(1)} |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D_x^m u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx + C_2 F(t) = C_1 \bar{h}_0 + C_2 F(t), \quad \forall t < T, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Доказательство является непосредственным обобщением доказательства леммы 6.2.1. $\square$

Теперь, как и в главе 6, введем строго монотонно возрастающую последовательность $\{t_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 \geq 0$, $t_j \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$, и определим три семейства энергетических функций, соответствующих трем функциям из (7.2.1):

$$\begin{aligned} E_j(s) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} dx dt \quad \forall s > 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad t_{-1} := 0; \\ J_j(s) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{p+1} dx dt \quad \forall s > 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ h_j(s) &= \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Выведем теперь две системы функциональных неравенств относительно этих семейств функций: первая из них связывает функции $E_j(s)$, $h_j(s)$, $j = 1, 2, \dots$, а вторая – $J_j(s)$, $h_j(s)$. Каждая из этих систем имеет свою область применимости при анализе свойств локализуемости сингулярных граничных режимов. Вывод этих функциональных систем основывается на следующих интегральных априорных оценках решений.

Лемма 7.2.2. ([117]) Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (7.1.1)–(7.1.6). Тогда для произвольных $\delta > 0$, $s > 1$, $0 \leq a < b < T$ и произвольного $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(s+\delta)} |u(b, x)|^{q+1} dx + k_1 \int_a^b \int_{\Omega(s+\delta)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} dx dt \leq \\ &(1 + \varepsilon) \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + c(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} \int_a^b \int_{\Omega(s, \delta)} |u(t, x)|^{p+1} dx dt, \\ &\Omega(s, \delta) := \Omega(s) \setminus \Omega(s + \delta), \quad k_1 = d_0(q+1)q^{-1}, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

где постоянная $c(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем $c(\varepsilon)$ не зависит ни от решения u , ни от параметров s , δ .

Доказательство. Введем в рассмотрение C^m -гладкую срезающую функцию $\eta_0(h)$:

$$\eta_0(h) = 0 \quad \text{при } h \leq 0, \quad \eta_0(h) = 1 \quad \text{при } h \geq 1, \quad 0 \leq \eta_0(h) \leq 1 \quad \forall h \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющую также условию

$$\eta_0^q \in C^m(\mathbb{R}^1), \quad \text{где } q > 0 \text{ из (9.1.1)}. \quad (7.2.5)$$

Зафиксируем произвольно числа $s > 1$, $\delta > 0$ и определим срезающую функцию

$$\eta(x) = \eta_0 \left(\frac{|x| - s}{\delta} \right) \quad \forall x \in \Omega : |\nabla_x^i \eta| \leq c\delta^{-i} \quad \forall i \leq m. \quad (7.2.6)$$

Зафиксируем теперь число s_1 : $1 < s_1 < s$ и определим еще одну срезку:

$$\eta_1(x) := \eta_0 \left(\frac{|x| - s_1}{s - s_1} \right) \quad \forall x \in \Omega.$$

Очевидно, что $\text{supp } \eta_1 \in \{|x| > s_1\}$, а также $\eta_1(x) = 1$ при $|x| > s$. Следовательно,

$$\eta_1(x)^{q+1} \eta(x) = \eta(x) \quad \forall x \subset \overline{\Omega}.$$

Поэтому, с учетом (7.2.5) имеем

$$\langle (|u|^{q-1})_t, \eta u \rangle = \langle \eta_1^q (|u|^{q-1} u)_t, \eta_1 \eta u \rangle = \langle (|u \eta_1|^{q-1} u \eta_1)_t, \eta \eta_1 u \rangle. \quad (7.2.7)$$

Так как $v(t, x) := \eta_1 \cdot u(t, x) \in L_{p+1, \text{loc}}([0, T]; W_{p+1}^m(\Omega, \partial_0 \Omega))$, то в силу формулы интегрирования по частям, (см. [16, в Prop. 3.2]), для произвольных чисел $0 \leq a < b < T$ из (7.2.7) вытекает равенство

$$\begin{aligned} \frac{q+1}{q} \int_a^b \langle (|u|^{q-1})_t, \eta u \rangle dt &= \int_{\Omega} |v(b, x)|^{q+1} \eta dx - \int_{\Omega} |v(a, x)|^{q+1} \eta dx \\ &= \int_{\Omega} |u(b, x)|^{q+1} \eta dx - \int_{\Omega} |u(a, x)|^{q+1} dx. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Поэтому, подставляя в интегральное тождество (7.1.11) в качестве пробной функции $u(t, x)\eta(x)$, с учетом (7.2.8), структурных условий (7.1.2), (7.1.3) и неравенства (7.2.6):

$$\begin{aligned} &\frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} \eta dx + d_0 \int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} \eta dx dt \\ &\leq \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} \eta dx + c \left(\int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{m-1} \delta^{-(m-i)(p+1)} \int_a^b \int_{\Omega(s, \delta)} |D_x^i u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Оценим второе слагаемое справа при помощи п. 3) из предложения 9.1.2 (часть 3):

$$\begin{aligned} \delta^{-(m-i)(p+1)} \int_{\Omega(s,\delta)} |D_x^i u(t, x)|^{p+1} dx &\leq c \delta^{-(m-i)(p+1)} \left[\delta^{-i(p+1)} \int_{\Omega(s,\delta)} |u|^{p+1} dx \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega(s,\delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\frac{i}{m}} \left(\int_{\Omega(s,\delta)} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{m-i}{m}} \right] = c \delta^{-m(p+1)} \\ &\times \int_{\Omega(s,\delta)} |u|^{p+1} dx + c \left(\int_{\Omega(s,\delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\frac{i}{m}} \left(\delta^{-m(p+1)} \int_{\Omega(s,\delta)} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{m-i}{m}}. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по t и подставляя в (7.2.9), а также используя неравенство Юнга с “ ε ”, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} \eta dx + k_1 \int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} \eta dx dt \\ \leq \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} \eta dx + \varepsilon \int_a^b \int_{\Omega(s,\delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt \\ + c(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} \int_a^b \int_{\Omega(s,\delta)} |u|^{p+1} dx dt, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.2.10) \end{aligned}$$

Будем рассматривать (7.2.10) как соотношение для следующих функций:

$$\begin{aligned} A_b(s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx, \quad A_a(s) = \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx, \\ B(s) &= \int_a^b \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{p+1} dx dt, \quad H(s) = k_1 \int_a^b \int_{\Omega(s)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} dx dt. \end{aligned}$$

В этих обозначениях неравенство (7.2.10) записывается в виде:

$$A_b(s+\delta) + H(s+\delta) \leq \varepsilon H(s) + c(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} (B(s) - B(s+\delta)) + A_a(s). \quad (7.2.11)$$

Из соотношения (7.2.11) в силу леммы 9.3.1 следует необходимая оценка (7.2.4). $\square$

Лемма 7.2.3. ([43]) *В условиях и обозначениях леммы 7.2.2 для произвольного решения и задачи (7.1.1)–(7.1.7) справедливо также следующее соотношение:*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega(s+\delta)} |u(b, x)|^{q+1} dx + k_1 \int_a^b \int_{\Omega(s+\delta)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} dx dt \\
& \leq \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + c_3 \delta^{-\varkappa} \left(\int_a^b \int_{\Omega(s, \delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\
& \quad \times \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
& \quad + c_4 \sum_{i=0}^{m-1} \delta^{-(m-i)} \left(\int_a^b \int_{\Omega(s, \delta)} |D_x^m u|^{p+1} \right)^{\frac{p+\theta_i}{p+1}} \\
& \quad \times \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta_i}{p+1}}, \quad (7.2.12)
\end{aligned}$$

где

$$\varkappa = m + \frac{n(p-q)}{(p+1)(q+1)}, \quad \theta_i = \frac{i(p+1)(q+1) + n(p-q)}{m(p+1)(q+1) + n(p-q)}.$$

Доказательство. Используя интерполяционные неравенства из предложения 9.1.2, оцениваем интегралы в правой части соотношения (7.2.9) несколько иначе, чем это делалось в лемме 7.2.2, а именно,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega(s, \delta)} |D_x^i u(t, x)|^{p+1} dx \\
& \leq c \left(\int_{\Omega(s, \delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_i} \left(\int_{\Omega(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta_i)(p+1)}{q+1}} \\
& \quad + c \delta^{-\frac{i(p+1)(q+1) + n(p-q)}{q+1}} \left(\int_{\Omega(s, \delta)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}},
\end{aligned}$$

где θ_i из (7.2.12). Интегрируя последнее неравенство по t и подставляя полученную оценку в (7.2.9), приходим после простых вычислений к соотношению (7.2.12). $\square$

Лемма 7.2.4. ([117]) Энергетические функции $h_j(s)$ и $J_j(s)$, определяемые в (7.2.3), удовлетворяют следующей системе функциональных неравенств:

$$h_j(s + \delta) \leq R_j(s, \delta) := (1 + \varepsilon)h_{j-1}(s) + c(\varepsilon) \frac{\Delta J_j(s)}{\delta^{m(p+1)}} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (7.2.13)$$

$$J_j(s + \delta) \leq c \Delta_j^{1-\theta_0} R_j(s, \delta)^{1+\nu} \quad \forall j \in \mathbb{N}; \quad \forall s > 1, \quad \forall \delta > 0, \quad (7.2.14)$$

где

$$\Delta J_j(s) := J_j(s) - J_j(s + \delta), \quad \nu = \frac{(p-q)(1-\theta_0)}{q+1}, \quad a \theta_0 \text{ из (7.2.12).}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка (7.2.13) следует непосредственно из неравенства (7.2.4) при $a = t_{j-1}$ и $b \leq t_j$. В силу того, что решение $u(t, x)$ удовлетворяет однородному граничному условию (7.1.7), предложение 9.1.2 (п. 2)) гарантирует справедливость следующего интерполяционного неравенства:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s+\delta)} |u(t, x)|^{p+1} dx &\leq c \left(\int_{\Omega(s+\delta)} |D_x^m u(t, x)|^{p+1} dx \right)^{\theta_0} \\ &\times \left(\int_{\Omega(s+\delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta_0)(p+1)}{q+1}} \quad \forall s > 0, \delta > 0. \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

Интегрируя это неравенство по t , а затем используя оценку (7.2.4), получаем

$$\begin{aligned} J_j(s + \delta) &\leq c \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s+\delta)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt \right)^{\theta_0} \Delta_j^{1-\theta_0} \\ &\times \left[\sup_{t \in (t_{j-1}, t_j]} \left(\int_{\Omega(s+\delta)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right) \right]^{\frac{(p+1)(1-\theta_0)}{q+1}} \\ &\leq c \Delta_j^{1-\theta_0} R_j(s, \delta)^{\theta_0 + \frac{(p+1)(1-\theta_0)}{q+1}} = c \Delta_j^{1-\theta_0} R_j(s, \delta)^{1+\nu}, \end{aligned}$$

что соответствует доказываемому неравенству (7.2.14). $\square$

Лемма 7.2.5. Энергетические функции $h_j(s)$ и $E_j(s)$, определенные в (7.2.1), удовлетворяют следующей системе функциональных неравенств:

$$h_j(s + \delta) \leq (1 + \varepsilon) h_{j-1}(s) + c(\varepsilon) \Delta E_j(s) \Gamma(P_j(s, \delta)) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (7.2.16)$$

$$E_j(s + \delta) \leq c_1 h_{j-1}(s) + c_2 \Delta E_j(s) \Gamma(P_j(s, \delta)), \quad \forall s > 1, \delta > 0, \quad (7.2.17)$$

где

$$\Delta E_j(s) := E_j(s) - E_j(s + \delta); \quad \Gamma(h) := h^{\frac{1}{q(p+1)}} + h^{\frac{1-\theta_{m-1}}{(p+1)(q+\theta_{m-1})}},$$

$$P_j(s, \delta) := E_j(s)^{p-q} \Delta_j^{q+1} \delta^{-\varkappa(p+1)(q+1)},$$

а $\varkappa$, θ_{m-1} из (7.2.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Юнга с “ ε ”, из соотношения (7.2.12) выводим

$$\begin{aligned} h_j(s + \delta) &\leq h_{j-1}(s) + c_3 \delta^{-\varkappa} (\Delta E_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \\ &\quad + c_4 \sum_{i=0}^{m-1} \delta^{-(m-i)} (\Delta E_j(s))^{\frac{p+\theta_i}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1-\theta_i}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta_i}{p+1}} \\ &\leq h_{j-1}(s) + \varepsilon h_j(s) + c(\varepsilon) \left[\delta^{-\varkappa} (\Delta E_j(s))^{\frac{p}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \right]^{\frac{q+1}{q}} \\ &\quad + c(\varepsilon) \sum_{i=0}^{m-1} \left[\delta^{-(m-i)} (\Delta E_j(s))^{\frac{p+\theta_i}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta_i}{p+1}} \right]^{\frac{q+1}{q+\theta_i}} \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Просто проверяются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{p(q+1)}{(p+1)q} &= 1 + \frac{p-q}{q(p+1)}, \quad \frac{\varkappa(q+1)}{q} = \frac{m(p+1)(q+1) + n(p-q)}{q(p+1)}, \\ \frac{(p+\theta_i)(q+1)}{(p+1)(q+\theta_i)} &= 1 + \frac{(p-q)(1-\theta_i)}{(q+\theta_i)(p+1)}, \\ \frac{(m-i)(q+1)}{q+\theta_i} &= [m(p+1)(q+1) + n(p-q)] \frac{1-\theta_i}{(p+1)(q+\theta_i)}. \end{aligned}$$

Поэтому из последнего неравенства непосредственно вытекает, что

$$h_j(s + \delta) \leq h_{j-1}(s) + \varepsilon h_j(s) + c(\varepsilon) \Delta E_j(s) G_j(s, \delta), \quad (7.2.19)$$

где

$$G_j(s, \delta) := P_j(s, \delta)^{\frac{1}{q(p+1)}} + \sum_{i=0}^{m-1} P_j(s, \delta)^{\frac{1-\theta_i}{(p+1)(q+\theta_i)}}.$$

Из неравенства (7.2.19) в силу леммы 9.3.1 следует:

$$h_j(s + \delta) \leq (1 + \varepsilon) h_{j-1}(s) + c(\varepsilon) \Delta E_j(s) G_j(s, \delta).$$

Из этого неравенства в силу того, что $0 < \theta_i \leq \theta_{m-1} \quad \forall i \leq m-1$, вытекает справедливость оценки (7.2.16). Для доказательства (7.2.17)

снова возвращаемся к (7.2.12). Из этой оценки при $a = t_{j-1}$ и $b = t_j$ по аналогии с (7.2.18) и (7.2.19) выводим также неравенство

$$E_j(s + \delta) \leq k_1^{-1} h_{j-1}(s) + \varepsilon h_j(s) + c(\varepsilon) \Delta E_j(s) G_j(s, \delta).$$

Складывая последнее неравенство с (7.2.19), получаем:

$$h_j(s + \delta) + E_j(s + \delta) \leq (1 + k_1^{-1}) h_{j-1}(s) + \varepsilon h_j(s) + c(\varepsilon) \Delta E_j(s) G_j(s, \delta).$$

Из этого неравенства в силу леммы 9.3.1 вытекает оценка (7.2.17) с $c_1 = (1 + k_1^{-1})(1 - \varepsilon)^{-1}$, $c_2 = c(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ произвольное, удовлетворяющее неравенству: $\varepsilon < \varepsilon_0 := 2^{-\frac{\kappa(q+1)}{q}}$. $\square$

7.3. Локализованные сингулярные граничные режимы: случай медленной диффузии $p > q$

В настоящем разделе приводится усовершенствованное доказательство следующего общего результата о достаточном условии эффективной локализации сингулярных граничных режимов.

Теорема 7.3.1. (см. Т.1 из [117], Т.1.2 из [45]) Пусть граничная функция f из условия (7.1.5) удовлетворяет условиям (7.1.8), (7.1.9), а соответствующей функции $F(t)$ из (7.1.10) удовлетворяет оценке

$$F(t) \leq \omega(T - t)^{-\alpha_0} \quad \forall t < T, \quad \alpha_0 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega = \text{const} > 0. \quad (7.3.1)$$

Тогда существует постоянная $c < \infty$, зависящая только от известных параметров n, p, q, d_0, d_1 задачи (7.1.1)–(7.1.9), (7.3.1), но не зависящая от ω из (7.3.1), такая, что для множества интенсификаций $\Omega_s(u)$ произвольного энергетического решения и рассматриваемой задачи с сингулярным обострением имеет место включение:

$$\Omega_s(u) \subset \Omega \cap \{|x| \leq 1 + c \omega^{\frac{p-q}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}}\}. \quad (7.3.2)$$

В частности, если $\Omega \subset B_{R_1} := \{x : |x| < R_1\}$, то рассматриваемый граничный режим (7.3.1) эффективно локализован, если $\omega < \omega_0$, где ω_0 определяется равенством

$$1 + c \omega_0^{\frac{p-q}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} = R_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на несколько этапов. Предварительно проведем некоторую трансформацию функциональной системы

(7.2.13), (7.2.14), выведенной в лемме 7.2.4. Зафиксируем произвольный номер $j \in \mathbb{N}$, затем введем j неотрицательных свободных параметров δ_i , $i \leq j$. Учитывая монотонность функции $J_i(s)$ и свободу в выборе параметров s, δ в системе (7.2.13), (7.2.14), имеем следующие j пар неравенств:

$$J_i\left(s + \sum_{k=1}^i \delta_k\right) \leq c\Delta_i^{1-\theta_0} \left((1+\varepsilon)h_{i-1}\left(s + \sum_{k=1}^{i-1} \delta_k\right) + c(\varepsilon) \frac{J_i(s)}{\delta_i^{m(p+1)}} \right)^{1+\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad (7.3.3)$$

$$h_i\left(s + \sum_{k=1}^i \delta_k\right) \leq (1+\varepsilon)h_{i-1}\left(s + \sum_{k=1}^{i-1} \delta_k\right) + c(\varepsilon) \frac{J_i(s)}{\delta_i^{m(p+1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, j.$$

Проведем теперь итеративное оценивание. В первом неравенстве (7.3.3) при $i = j$ оценим слагаемое $h_{j-1}(s + \sum_{k=1}^{j-1} \delta_k)$ справа при помощи второго неравенства (7.3.3) с $i = j - 1$. Затем слагаемое $h_{j-2}(s + \sum_{k=1}^{j-2} \delta_k)$ в правой части получившегося неравенства оценим при помощи второго неравенства в (7.3.3) с $i = j - 2$ и так далее. В результате j таких оцениваний приходим к

$$J_j\left(s + \sum_{k=1}^j \delta_k\right) \leq c\Delta_j^{1-\theta_0} \left[c(\varepsilon) \sum_{i=1}^j \delta_i^{-m(p+1)} (1+\varepsilon)^{j-i} J_i(s) + (1+\varepsilon)^j h_0(s) \right]^{1+\nu}. \quad (7.3.4)$$

Определяем еще одно семейство энергетических функций

$$I_i(s) := J_i(s)^{\frac{1}{1+\nu}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.3.5)$$

Теперь в результате простых вычислений из соотношения (7.3.4) выводим, что

$$I_j\left(s + \sum_{k=1}^j \delta_k\right) \leq c(\varepsilon) \sum_{i=1}^j \frac{\Delta_i^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} (1+\varepsilon)^{j-i} I_i(s)^{1+\nu}}{\delta_i^{m(p+1)}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} + c(1+\varepsilon)^j \Delta_j^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} h_0(s) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall s > 1, \forall \delta_k > 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.3.6)$$

Основным применением функциональной системы (7.2.13), (7.2.14) и ее следствия (7.3.6) в нашем анализе граничных сингулярностей является доказательство следующего утверждения.

Лемма 7.3.1. Пусть для некоторого решения $u(t, x)$ задачи (7.1.5)–(7.1.10) существуют такие постоянные $s_0 \geq 1$ и $\gamma : \frac{q+1}{p-q} > \gamma > 0$, что выполняется оценка

$$\begin{aligned} h(t, s_0) + E(t, s_0) &= \int_{\Omega(s_0)} |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega(s_0)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt \\ &\leq CF_\gamma(t) := C(T-t)^{-\frac{q+1}{p-q}+\gamma} \quad \forall t \in (0, T), \quad C = \text{const} < \infty. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

Тогда существует невозрастающая непрерывная функция $K(s) : K(s) < \infty \quad \forall s > 0$, такая что имеет место равномерная по $t \in (0, T)$ оценка

$$J(t, s) = \int_0^t \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \leq K(s-s_0) \quad \forall s > s_0, \quad \forall t < T. \quad (7.3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала, исходя из оценки (7.3.7), получим оценку сверху для значений $J_j(s_0)$. Для этого проинтегрируем по t интерполяционное неравенство (7.2.15) при $s + \delta = s_0$. В результате получим

$$J_j(s_0) \leq cE_j(s_0)^{\theta_0} h_j(s_0)^{\frac{(1-\theta_0)(p+1)}{q+1}} \Delta_j^{1-\theta_0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Оценивая сомножители справа при помощи оценки (7.3.7), приходим к

$$J_j(s_0) \leq cC^{1+\nu} F_\gamma(t_j)^{1+\nu} \Delta_j^{1-\theta_0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.9)$$

Отметим, что эта оценка справедлива при произвольном выборе последовательности $\{t_i\}$, а, следовательно, и $\{\Delta_i\}$. Введем теперь положительное число $\mu = \mu(\gamma)$ (где γ из (7.3.7)), удовлетворяющее лишь следующему ограничению:

$$1 < \mu < 1, \quad \text{если} \quad \frac{q+1}{(p-q)(1+\nu)} \leq \gamma < \frac{q+1}{p-q}, \quad (7.3.10)$$

$$0 < \mu < \max \left\{ 1, \gamma \nu \left(\frac{q+1}{(p-q)(1+\nu)} - \gamma \right)^{-1} \right\}, \quad \text{если} \quad 0 < \gamma < \frac{q+1}{(p-q)(1+\nu)}.$$

Зафиксируем также положительное число g (точное значение этого числа будет приведено в формуле (7.3.29)) и выберем произвольную точку $\bar{s} > s_0$ в которой выполняется аналогичное (6.3.31) неравенство:

$$T^{1-\theta_0} J(T, \bar{s})^{\nu+\mu} > g^{1+\nu}. \quad (7.3.11)$$

Понятно, что отсутствие таких точек изначально означало бы, что лемма 7.3.1 уже доказана. Отметим теперь, что в силу монотонности функции $J(T, \bar{s})$ по второму аргументу, неравенство (7.3.11) справедливо для всех $\bar{s}$ из некоторого интервала (s_0, s') , $s' > s_0$. Для каждого такого $\bar{s}$ определим по аналогии с (6.3.32) непрерывную, положительную, строго монотонно возрастающую функцию $\Phi_{\bar{s}} : [0, t_\infty] \rightarrow [\Phi_{\bar{s}}(0), T]$ равенством:

$$(\Phi_{\bar{s}}(t) - t)^{1-\theta_0} (J(\Phi_{\bar{s}}(t), \bar{s}) - J(t, \bar{s}))^{\nu+\mu} = g^{1+\nu}, \quad (7.3.12)$$

где значение $\Phi_{\bar{s}}(0)$, очевидно, определяется равенством:

$$\Phi_{\bar{s}}(0)^{1-\theta_0} J(\Phi_{\bar{s}}(0), \bar{s})^{\nu+\mu} = g^{1+\nu}, \quad (7.3.13)$$

а для величины $t_\infty : \Phi_{\bar{s}}(t_\infty) := T$, очевидно, выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а) } t_\infty < T, \text{ если } \lim_{t \rightarrow T} J(t, \bar{s}) &\leq c < \infty; \\ \text{б) } t_\infty = T, \text{ если } \lim_{t \rightarrow T} J(t, \bar{s}) &= \infty. \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

Очевидно также, что

$$t < \Phi_{\bar{s}}(t) < T \quad \forall t \in [0, t_\infty), \quad (7.3.15)$$

Определим теперь последовательность $\{t_i\} = \{t_i(\bar{s})\}$ следующим, аналогичным (6.3.33), рекуррентным соотношением:

$$t_i := \Phi(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad t_0 \geq 0. \quad (7.3.16)$$

где $t_0 \in [0, \Phi_{\bar{s}}(0))$ выбирается так, чтобы обеспечить выполнение равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = T. \quad (7.3.17)$$

В случае б) из (7.3.14) при произвольном $t_0 \geq 0$ определяемая в (7.3.16) последовательность является бесконечной строго возрастающей и удовлетворяющей (7.3.17). В случае же а) из (7.3.14), как это следует из непрерывности и монотонности функции $\Phi_{\bar{s}}(t)$, существует единственное значение $t_0 \in [0, \Phi_{\bar{s}}(0))$ такое, что при некотором конечном номере i' для определяемых (7.3.16) чисел выполняется соотношение:

$$t_{i'-1} = t_\infty \implies t_{i'} = \Phi_{\bar{s}}(t_{i'-1}) = T. \quad (7.3.18)$$

Именно это значение t_0 и берем в качестве начального значения в определении (7.3.16) в случае а), в случае же б) полагаем $t_0 = 0$. Тем самым однозначно формулой (7.3.16) определена последовательность $\{t_i\}$, а, следовательно, и последовательность смещений $\{\Delta_i\} := \{\Delta_i(\bar{s})\}$. В

терминах этой последней последовательности равенства (7.3.12), (7.3.16) порождают следующее, важное для наших дальнейших построений, соотношение:

$$\Delta_i(\bar{s})^{1-\theta_0} J_i(\bar{s})^{\nu+\mu} = g^{1+\nu} \quad \forall i \geq 1. \quad (7.3.19)$$

Так как $J_i(\bar{s}) \leq J_i(s_0) \forall i \in \mathbb{N}$ то из определения (7.3.12), (7.3.16) в силу оценки (7.3.9) следует:

$$c^{\nu+\mu} C^{(1+\nu)(\nu+\mu)} \Delta_i^{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)} F_\gamma(t_i)^{(1+\nu)(\nu+\mu)} \geq g^{1+\nu} \quad \forall i \geq 1, \quad \Delta_i = \Delta_i(\bar{s}),$$

или в силу определения $F_\gamma(t)$:

$$\Delta_i \geq C_1 g^{\frac{1+\nu}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}} (T - t_i)^B, \quad (7.3.20)$$

где

$$C_1 = c^{-\frac{\nu+\mu}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}} C^{-\frac{(1+\nu)(\nu+\mu)}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}}, \quad B = \left(\frac{q+1}{p-q} - \gamma \right) \frac{(1+\nu)(\nu+\mu)}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}.$$

Учитывая равенство

$$1 - \theta_0 = \frac{m(p+1)(q+1)}{m(p+1)(q+1) + n(p-q)},$$

просто проверяется, что

$$B = 1 + \frac{\mu(q+1) - \gamma(1+\nu)(\nu+\mu)(p-q)}{\nu(q+1)(1+\nu+\mu)}.$$

Отсюда следует, что условия (7.3.10) достаточны для справедливости неравенства

$$B = B(\gamma, \mu) \leq 1. \quad (7.3.21)$$

Следовательно, из неравенства (7.3.20) при условии (7.3.10) вытекает соотношение

$$\Delta_i \geq C_1 g^{\frac{1+\nu}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}} T^{-(1-B)} (T - t_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

а, следовательно, и

$$\Delta_{i+1} \leq C_2 \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad C_2 = T^{1-B} C_1^{-1} g^{-\frac{1+\nu}{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}}. \quad (7.3.22)$$

Наше первое условие на выбор параметра g состоит в требовании выполнения неравенства:

$$C_2 < 1 \iff g > (T^{1-B} C_1^{-1})^\alpha, \quad \alpha = \frac{(1-\theta_0)(1+\nu+\mu)}{1+\nu} \quad (7.3.23)$$

Относительно функций $I_i(s)$ из (7.3.5) равенства (7.3.12), (7.3.16) записываются в виде:

$$I_i(\bar{s}) = g^{\frac{1}{\nu+\mu}} \Delta_i^{-\frac{1-\theta_0}{(1+\nu)(\nu+\mu)}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.3.24)$$

Продолжая это неравенство с учетом (7.3.22), получаем

$$I_i(\bar{s}) \leq g^{\frac{1}{\nu+\mu}} C_2^{\frac{(1-\theta_0)(j-i)}{(1+\nu)(\nu+\mu)}} \Delta_j^{-\frac{1-\theta_0}{(1+\nu)(\nu+\mu)}} = C_2^{\frac{(1-\theta_0)(j-i)}{(1+\nu)(\nu+\mu)}} I_j(\bar{s}) \quad \forall i \leq j. \quad (7.3.25)$$

Теперь обращаемся к нашему основному функциональному соотношению (7.3.6). Зафиксируем постоянную $b : 0 < b < 1$ и определим смещения $\{\delta_k\}$ следующим образом:

$$\delta_k := \delta b^{j-k}, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad 0 < b < 1, \quad \delta > 0. \quad (7.3.26)$$

Учитывая соотношение (7.3.19), а также (7.3.22)–(7.3.25), в результате простых вычислений получаем

$$\begin{aligned} I_j\left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) &\leq \frac{gc(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} \sum_{i=1}^j I_i(\bar{s})^{1-\mu} \left[\frac{(1+\varepsilon)C_2^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}}}{b^{m(p+1)}} \right]^{j-i} \\ &+ c\Delta_1^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} (1+\varepsilon)^j C_2^{\frac{(j-1)(1-\theta_0)}{1+\nu}} h_0(\bar{s}) \leq \frac{gc(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} I_j(\bar{s})^{1-\mu} \sum_{i=1}^j \left(\frac{(1+\varepsilon)C_2^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}}}{b^{m(p+1)}} \right)^{j-i} \\ &+ c\Delta_1^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} (1+\varepsilon)((1+\varepsilon)C_2^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}})^{j-1} h_0(\bar{s}). \end{aligned} \quad (7.3.27)$$

Проведем теперь окончательный выбор значений свободных параметров g, b, ε и μ , потребовав выполнение равенства

$$(1+\varepsilon)C_2^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} b^{-m(p+1)} \leq 2^{-1}. \quad (7.3.28)$$

Подставляя сюда значение C_2 из (7.3.22) и (7.3.20), получаем, что условие (7.3.28) эквивалентно тому, что

$$g \geq (1+\varepsilon)^{1+\nu+\mu} T^{\frac{(1-B)(1-\theta_0)(1+\mu+\nu)}{1+\nu}} c^{\frac{\nu+\mu}{1+\nu}} C^{\nu+\mu} 2^{1+\nu+\mu} b^{-m(p+1)(1+\nu+\mu)}, \quad (7.3.29)$$

где C из (7.3.7), c из (7.2.15), а B из (7.3.20). Очевидно, что при произвольных $\varepsilon > 0$, $0 < b < 1$, μ из (7.3.10) неравенства (7.3.23) и (7.3.29)

определяют конечную оценку снизу для допустимого значения параметра $g = g(\varepsilon, \mu, b)$. При указанном выборе параметров $\varepsilon, \mu, b, g = g(\varepsilon, \mu, b)$ из неравенства (7.3.27) следует:

$$I_j\left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) \leq \frac{2gc(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} I_j(\bar{s})^{1-\mu} + c\Delta_1^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} (1+\varepsilon) \left(\frac{b^{m(p+1)}}{2}\right)^{j-1} h_0(\bar{s}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.3.30)$$

Из (7.3.30) в силу (7.3.25) следует также, что

$$I_i\left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) \leq \frac{2gc(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} C_2^{\frac{(1-\theta_0)(1-\mu)(j-i)}{(1+\nu)(\nu+\mu)}} I_j(\bar{s})^{1-\mu} + c\Delta_1^{\frac{1-\theta_0}{1+\nu}} (1+\varepsilon) \left(\frac{b^{m(p+1)}}{2}\right)^{i-1} h_0(\bar{s}) \quad \forall i \leq j. \quad (7.3.31)$$

Возводя эти неравенства в степень $1 + \nu$ и суммируя по i от 1 до j , получаем

$$J\left(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) - J\left(t_0, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) \leq B_1 \delta^{-m(p+1)(1+\nu)} J_j(\bar{s})^{1-\mu} + B_2 h_0(\bar{s})^{1+\nu} \leq B_1 \delta^{-m(p+1)(1+\nu)} J(t_j, \bar{s})^{1-\mu} + B_2 h_0(\bar{s})^{1+\nu} \quad \forall j \geq 1, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall \bar{s} > s_0, \quad (7.3.32)$$

где

$$B_1 = (1+\nu)(2gc(\varepsilon))^{1+\nu} \cdot \left(1 - C_2^{\frac{(1-\theta_0)(1-\mu)}{\nu+\mu}}\right)^{-1},$$

$$B_2 = (1+\nu)c^{1+\nu}\Delta_1^{1-\theta_0}(1+\varepsilon)^{1+\nu}(1-2^{-1}b^{m(p+1)})^{-1}.$$

В случае b) из (7.3.14), то есть при $t_0 = 0$, имеем:

$$J\left(t_0, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) = 0, \quad h_0(\bar{s}) \leq \bar{h}_0, \quad \text{где } \bar{h}_0 \text{ из (7.1.5)}.$$

Поэтому из соотношения (7.3.32) в силу лемм 9.3.2, 9.3.3 следует справедливость доказываемой оценки (7.3.8) с

$$K(s) = K_1(s) := \max\left\{2B_2\bar{h}_0^{1+\nu}, \quad B_3 s^{-\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}\right\}, \quad (7.3.33)$$

$$B_3 := 2^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{(1-\mu)\mu^2}} (2B_1)^{\frac{1}{\mu}} \cdot (1-b)^{-\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}.$$

В случае а) из (7.3.14), то есть при $t_0 > 0$, из неравенства (7.3.32) в силу произвольности значений его аргументов легко следует:

$$\begin{aligned} J\left(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) &= J\left(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{2(1-b)} + \frac{\delta}{2(1-b)}\right) \leq B_1 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-m(p+1)(1+\nu)} \\ J\left(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{2(1-b)}\right)^{1-\mu} &+ J\left(t_0, \bar{s} + \frac{\delta}{(1-b)}\right) + B_2 h_0 \left(\bar{s} + \frac{\delta}{2(1-b)}\right)^{1+\nu} \\ &\quad \forall \delta > 0, \forall \bar{s} > s_0, \forall j \geq 1. \end{aligned} \quad (7.3.34)$$

Оценим второе и третье слагаемое справа. Из неравенства (7.2.4) при $b = t_0$, $a = 0$, выводим

$$h_0 \left(\bar{s} + \frac{\delta}{2(1-b)}\right) \leq (1+\varepsilon)\bar{h}_0 + c(\varepsilon)J(t_0, \bar{s}) \left(\frac{\delta}{2(1-b)}\right)^{-m(p+1)}. \quad (7.3.35)$$

В силу монотонности $J(t_0, s)$ по s имеем

$$J\left(t_0, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) \leq J(t_0, \bar{s}). \quad (7.3.36)$$

Осталось оценить сверху $J(t_0, \bar{s})$. В силу (7.3.16), (7.3.9) и определения (7.3.7) функции $F_\gamma(t)$ имеем

$$J(t_0, \bar{s}) \leq J(\Phi_{\bar{s}}(0), \bar{s}) \leq cC^{1+\nu}\Phi_{\bar{s}}(0)^{1-\theta_0}(T - \Phi_{\bar{s}}(0))^{-(\frac{q+1}{p-q}-\gamma)(1+\nu)}. \quad (7.3.37)$$

С другой стороны, из определения (7.3.13) следует:

$$J(\Phi_{\bar{s}}(0), \bar{s}) = g^{\frac{1+\nu}{\nu+\mu}}\Phi_{\bar{s}}(0)^{-\frac{1-\theta_0}{\nu+\mu}}. \quad (7.3.38)$$

Сравнивая (7.3.37) и (7.3.38), получаем

$$g^{\frac{1+\nu}{\nu+\mu}}(T - \Phi_{\bar{s}}(0))^{(\frac{q+1}{p-q}-\gamma)(1+\nu)} \leq cC^{1+\nu}\Phi_{\bar{s}}(0)^{\frac{(1-\theta_0)(\nu+\mu+1)}{\nu+\mu}}.$$

Отсюда, очевидно, вытекает универсальная априорная оценка снизу для $\Phi_{\bar{s}}(0)$:

$$\Phi_{\bar{s}}(0) \geq \bar{\Phi} = \text{const} > 0. \quad (7.3.39)$$

Здесь постоянная $\bar{\Phi}$ зависит от известных параметров рассматриваемой задачи, но не зависит ни от решения u , ни от точки $\bar{s}$. Возвращаясь к (7.3.38) и (7.3.37), получаем

$$J(t_0, \bar{s}) \leq B_3 = g^{\frac{1+\nu}{\nu+\mu}}\bar{\Phi}^{-\frac{1-\theta_0}{\nu+\mu}}. \quad (7.3.40)$$

Используя неравенства (7.3.35), (7.3.36) и (7.3.40) для оценивания слагаемых в правой части (7.3.34), получаем

$$\begin{aligned} J\left(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) &\leq B_1 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-m(p+1)(1+\nu)} [J(t_j, \bar{s})^{1-\mu} + B_4] + B_5 \\ &\leq B_1 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-m(p+1)(1+\nu)} (1-\mu)^{-1} [J(t_j, \bar{s}) + B_4^{\frac{1}{1-\mu}}]^{1-\mu} + B_5, \end{aligned} \quad (7.3.41)$$

где

$$B_4 = (1+\nu)B_2B_1^{-1}c(\varepsilon)^{1+\nu}B_3^{1+\nu}(1-b)^{-m(p+1)(1+\nu)},$$

$$B_5 = B_3 + (1+\nu)B_2(1+\varepsilon)^{1+\nu}\bar{h}_0^{1+\nu}.$$

Из неравенства (7.3.41) в силу леммы 9.3.3 вытекает оценка (7.3.8) с

$$\begin{aligned} K(s) = K_2(s) &:= \max \left\{ 2\left(B_5 + B_4^{\frac{1}{1-\mu}}\right), \quad B_6 s^{-\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}} \right\} + B_4^{\frac{1}{1-\mu}}, \\ \text{где } B_6 &= 2^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu^2(1-\mu)}} \left(\frac{2B_1}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{2}{1-b}\right)^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}. \end{aligned} \quad (7.3.42)$$

□

Замечание 7.3.1. Анализируя структуру функций $K_1(s)$ из (7.3.33) и $K_2(s)$ из (7.3.42) легко выводим следующую универсальную оценку для функций $K(s)$ из (7.3.8):

$$K(s) \leq \max \left\{ c_1 + c_2 \bar{h}_0^{1+\nu}, c_3 s^{-\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}} \right\} \quad \forall s > 0,$$

где $\bar{h}_0 = \int_{\Omega} u_0^{q+1} dx$, а постоянные c_1, c_2, c_3 зависят только от заданных параметров задачи (7.1.1)–(7.1.10), (7.3.7), но зависят ни от самого решения u , ни от начальной функции u_0 .

Лемма 7.3.1 является эффективным инструментом анализа асимптотических свойств решения в случае появления зоны "пологой" сингулярности, то есть, в случае граничного режима (7.3.6). В зонах, где такая пологость отсутствует, контроль за энергетическими функциями исследуемого сингулярного решения осуществляется при помощи других инструментов, к описанию которых мы сейчас приступаем. Итак, пусть для некоторого $s_0 \geq 1$ энергетические функции (7.2.1) решения $u(t, x)$ удовлетворяют оценке

$$h(t, s_0) + E(t, s_0) \leq F(t) \quad \forall t < T, \quad (7.3.43)$$

где непрерывная, положительная, неубывающая функция $F(t)$, не удовлетворяет оценке (7.3.7), а именно

$$F(t)(T-t)^{\frac{q+1}{p-q}} > c > 0 \quad \forall t < T. \quad (7.3.44)$$

Определим последовательность $\{t_j\}$ при помощи функции $F(t)$ из (7.3.44), а именно

$$F(t_j) := r^{-1}F(t_{j-1}) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad t_0 = 0, \quad \Delta_j = t_j - t_{j-1}, \quad (7.3.45)$$

где $1 > r > 0$ – свободный параметр, который будет определяться в дальнейшем. Определим также последовательность $\{\bar{\delta}_i\}$, минимально монотонно не убывающую мажоранту последовательности $\{\delta_i\}$

$$\bar{\delta}_i \geq \delta_i := (F(t_i)^{\frac{p-q}{q+1}} \Delta_i)^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \varkappa = m + \frac{n(p-q)}{(p+1)(q+1)} \quad (7.3.46)$$

Лемма 7.3.2. Пусть для некоторого решения $u(t, x)$ задачи (7.1.5)–(7.1.10) при некотором $s_0 \geq 1$ выполнена оценка (7.3.43) с функцией $F(t)$, удовлетворяющей (7.3.44). Пусть $h_j(t, x), E_j(t, s)$ – энергетические функции рассматриваемого решения u , построенные по последовательности $\{t_j\}$, определяемой в (7.3.45). Тогда для произвольного числа $b \in (0, 1)$ существует такое значение параметра $r = r(b) \in (0, 1)$ в определении (7.3.45) смещений $\{\Delta_i\}$, что справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} E_j(s_0 + c_0 \bar{\delta}_j) &\leq r^{jb} F(t_j) & \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t < T, \\ h_j(s_0 + c_0 \bar{\delta}_j) &\leq r^{jb} F(t_j) & \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t < T, \end{aligned} \quad (7.3.47)$$

где $c_0 > 0$ не зависит от j .

Доказательство. В силу условия (7.3.43) имеем

$$h_j(s_0) + E_j(s_0) \leq F(t_j) \quad \forall j \geq 1.$$

В силу этого неравенства для функций $P_j(s, \delta)$ из (7.2.16), (7.2.17) справедливы следующие оценки:

$$P_j(s_0, \delta) \leq \delta^{-\varkappa(p+1)(q+1)} F(t_j)^{p-q} \Delta_j^{q+1} \quad \forall j \geq 1, \quad \forall \delta > 0. \quad (7.3.48)$$

Определим теперь первую серию смещений $\{\delta_j^{(1)}\}$ формулой

$$\delta_j^{(1)} = \xi^{-\frac{1}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \bar{\delta}_j \quad \forall j \geq 1, \quad \text{из (7.3.46)} \quad (7.3.49)$$

где $\xi > 0$ – малый параметр, значение которого будет зафиксировано в дальнейшем. В силу (7.3.48) имеем

$$P_j(s_0, \delta_j^{(1)}) \leq \xi \quad \forall j \geq 1. \quad (7.3.50)$$

Следовательно, для функции $\Gamma(P_j(s, \delta))$ справедлива оценка

$$\Gamma(P_j(s_0, \delta_j^{(1)})) \leq \zeta(\xi) := \xi^{\frac{1}{q(p+1)}} + \xi^{\frac{1-\theta_{m-1}}{(p+1)(q+\theta_{m-1})}}. \quad (7.3.51)$$

В силу (7.3.51) из неравенства (7.2.17) следует

$$E_j(s_0 + \delta_j^{(1)}) \leq c_1 F(t_{j-1}) + c_2 \zeta F(t_j) \leq (c_1 r + c_2 \zeta) F(t_j) \quad \forall j \geq 1. \quad (7.3.52)$$

Аналогично из неравенства (7.2.16) следует, что

$$\begin{aligned} h_j(s_0 + \delta_j^{(1)}) &\leq (1 + \varepsilon) F(t_{j-1}) + c(\varepsilon) \zeta F(t_j) \\ &\leq ((1 + \varepsilon)r + c(\varepsilon)\zeta) F(t_j) \quad \forall j > 1. \end{aligned} \quad (7.3.53)$$

Теперь будем выбирать значения свободных параметров. Сначала зафиксируем произвольно $b : 0 < b < 1$. Затем выберем $r = r(b)$ и $\varepsilon = \varepsilon(b) > 0$ так, чтобы было выполнено

$$r^{1-b} < \max\{(1 + \varepsilon), c_1^{-1}\} \iff (1 + \varepsilon)r < r^b, \quad c_1 r < r^b. \quad (7.3.54)$$

Теперь зафиксируем достаточно малое $\xi = \xi(b) > 0$ так, чтобы были выполнены неравенства

$$c_1 r + c_2 \zeta(\xi) \leq r^b, \quad (1 + \varepsilon)r + c(\varepsilon)\zeta(\xi) \leq r^b, \quad (7.3.55)$$

где постоянные c_1, c_2 и $c(\varepsilon)$ из (7.2.16) и (7.2.17). При таком выборе свободных параметров из (7.3.52) и (7.3.53) следуют неравенства

$$E_j(s_0 + \delta_j^{(1)}) \leq r^b F(t_j), \quad h_j(s_0 + \delta_j^{(1)}) \leq r^b F(t_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (7.3.56)$$

Теперь, если $j \geq 2$, то можно провести следующий цикл аналогичный вычислений. А именно, введем вторую серию смещений $\{\delta_j^{(2)}\}$:

$$\delta_j^{(2)} := r^{\frac{b(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \delta_j^{(1)} \quad \forall j \geq 1, \quad (7.3.57)$$

где $\delta_j^{(1)}$ из (7.3.49). В силу (7.3.56) для функций $P_j(s, \delta)$ из (7.2.16) справедлива оценка

$$P_j(s_0 + \delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}) \leq \xi \implies \Gamma(P_j(s_0 + \delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)})) \leq \zeta = \zeta(\xi). \quad (7.3.58)$$

В результате из оценки (7.2.17) при $s = s_0 + \delta_j^{(1)}$, $\delta = \delta_j^{(2)}$ следует

$$\begin{aligned} E_j(s_0 + \delta_j^{(1)} + \delta_j^{(2)}) &\leq c_1 h_{j-1}(s_0 + \delta_j^{(1)}) + c_2 \zeta E_j(s_0 + \delta_j^{(1)}) \\ &\leq (\text{в силу монотонности последовательности } \bar{\delta}_i \text{ и (7.3.56)}) \\ &\leq c_1 r^b F(t_{j-1}) + c_2 \zeta r^b F(t_j) \leq (7.3.45) \\ &\leq (c_1 r + c_2 \zeta) r^b F(t_j) \leq (7.3.59) \leq r^{2b} F(t_j), \quad \forall j \geq 2. \end{aligned} \quad (7.3.59)$$

Аналогично, с учетом (7.3.55) выводим из (7.2.16):

$$h_j(s_0 + \delta_j^{(1)} + \delta_j^{(2)}) \leq r^{2b} F(t_j) \quad \forall j \geq 2. \quad (7.3.60)$$

Тем самым закончен второй цикл оценок. Далее, если $j \geq 3$, то можно привести третий цикл итеративного оценивания. Для этого третьего цикла естественно вводим третью серию смещений

$$\delta_j^{(3)} := r^{\frac{b(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \delta_j^{(2)}.$$

В результате j таких циклов получаем

$$\max\left\{h_j\left(s_0 + \sum_{i=1}^j \delta_j^{(i)}\right), E_j\left(s_0 + \sum_{i=1}^j \delta_j^{(i)}\right)\right\} \leq r^{jb} F(t_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Из этого неравенства вытекают доказываемые оценки (7.3.47) с

$$c_0 = \xi^{-\frac{1}{\varkappa(p+1)(q+1)}} (1 - r^{\frac{b(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)}})^{-1}. \quad (7.3.61)$$

□

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7.3.1. В силу леммы 7.2.1 имеем следующую стартовую оценку для энергетических функций, связанных с рассматриваемым решением u :

$$\begin{aligned} h(t, 1) + E(t, 1) &\leq C_1 \bar{h}_0 + C_2 \omega (T - t)^{-\frac{q+1}{p-q}} \\ &= \omega (T - t)^{-\frac{q+1}{p-q}} (C_2 + C_1 \bar{h}_0 \omega^{-1} (T - t)^{\frac{q+1}{p-q}}) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (7.3.62)$$

Для произвольного $\omega > 0$, обозначим число $t_\omega : 0 < t_\omega < T$ такое, что

$$\omega^{-1} (T - t)^{\frac{q+1}{p-q}} \leq 1 \quad \forall t \in [t_\omega, T] \iff t_\omega = T - \omega^{\frac{p-q}{q+1}}. \quad (7.3.63)$$

Будем рассматривать теперь решение $u(t, x)$ исследуемой смешанной задачи как решение только в области $(t_\omega, T) \times \Omega$. Вводя соответствующие этой области энергетические функции решения, а затем проводя замену временной координаты и осуществляя соответствующие преобразования, приходим к решению задачи структуры (7.1.1)–(7.1.10), удовлетворяющему в силу (7.3.62), (7.3.63) глобальной стартовой энергетической оценке:

$$h(t, 1) + E(t, 1) \leq CF_0(t) := C\omega(T - t)^{-\frac{q+1}{p-q}} \quad \forall t \in [0, T], C = C_2 + \bar{h}_0 C_1. \quad (7.3.64)$$

Проверим применимость леммы 7.3.2 с $s_0 = 1$, $F(t) = CF_0(t)$. Зафиксируем $r : 0 < r < 1$ и определим последовательность $\{t_i\}$ равенством

$$\Delta_i := t_i - t_{i-1} = \Delta_1 r^{\frac{(i-1)(p-q)}{q+1}} \quad \forall i \geq 1, \quad \Delta_1 = T(1 - r^{\frac{p-q}{q+1}}). \quad (7.3.65)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} T - t_j &= \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i = \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_1 r^{\frac{(i-1)(p-q)}{q+1}} = \Delta_1 r^{\frac{j(p-q)}{q+1}} \left(1 - r^{\frac{p-q}{q+1}}\right)^{-1} \\ &= Tr^{\frac{j(p-q)}{q+1}} \implies F_0(t_j) = \omega T^{-\frac{q+1}{p-q}} r^{-j}. \end{aligned} \quad (7.3.66)$$

Следовательно, $F_0(t_j) = r^{-1} F_0(t_{j-1}) \quad \forall j \geq 1$, что соответствует определению (7.3.45) из леммы 7.3.2. В соответствии с определением (7.3.46) последовательность смещений $\bar{\delta}_i$ можем определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i &:= \left(C^{\frac{p-q}{q+1}} F_0(t_i)^{\frac{p-q}{q+1}} \Delta_i \right)^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} = \bar{\delta} = \bar{\delta}(\omega) \\ &= \left(\omega^{\frac{p-q}{q+1}} r^{-\frac{p-q}{q+1}} \left(1 - r^{\frac{p-q}{q+1}}\right) C^{\frac{p-q}{q+1}} \right)^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.3.67)$$

Из (7.3.65)–(7.3.67) следует, что выполнены все предположения леммы 7.3.2, а значит, справедливы следующие оценки для энергетических функций:

$$\begin{aligned} E_j(1 + c_0 \bar{\delta}(\omega)) &\leq Cr^{jb} F_0(t_j) = C\omega T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} (T - t_j)^{-\frac{(q+1)(1-b)}{p-q}}, \\ h_j(1 + c_0 \bar{\delta}(\omega)) &\leq Cr^{jb} F_0(t_j) = C\omega T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} (T - t_j)^{-\frac{(q+1)(1-b)}{p-q}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (7.3.68)$$

где $\bar{\delta}(\omega)$ из (7.3.67), а c_0 из (7.3.61). Суммируя неравенства из (7.3.68), с учетом (7.3.66)

$$\begin{aligned} E(t_i, 1 + c_0 \bar{\delta}) &\leq C\omega T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} \sum_{j=1}^i (T - t_j)^{-\frac{(q+1)(1-b)}{p-q}} \\ &= C\omega T^{-\frac{q+1}{p-q}} \sum_{j=1}^i r^{-j(1-b)} \leq C\omega T^{-\frac{q+1}{p-q}} r^{-i(1-b)} (1 - r^{1-b})^{-1} \\ &= C\omega^b T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} (1 - r^{1-b})^{-1} F_0(t_i)^{1-b} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.3.69)$$

Отсюда в силу (7.3.66) следует, что

$$E(t, 1 + c_0 \bar{\delta}) \leq C\omega^b \bar{c}_1 F_0(t)^{1-b} \quad \forall t < T, \quad (7.3.70)$$

где

$$\bar{c}_1 = T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} (1 - r^{1-b})^{-1} r^{-(1-b)}.$$

Также из (7.3.68) очевидным образом следует оценка для $h(t, 1 + c_0 \bar{\delta}(\omega))$:

$$h(t, 1 + c_0 \bar{\delta}) \leq C\omega^b \bar{c}_2 F_0(t)^{1-b} \quad \forall t < T, \quad \bar{c}_2 = T^{-\frac{b(q+1)}{p-q}} r^{-(1-b)}. \quad (7.3.71)$$

Из неравенств (7.3.70) и (7.3.71) следует, что выполнено условие (7.3.7) леммы 7.3.1 с $s_0 = 1 + c_0 \bar{\delta}$ и $\gamma = b \frac{(q+1)}{p-q}$. Значит, в силу этой леммы

$$J(t, 1 + c_0 \bar{\delta} + s) < K(s) < \infty \quad \forall s > 0, \quad \forall t < T, \quad (7.3.72)$$

где $K(s)$ из (7.3.33). В обозначениях энергетических функций (7.2.1) неравенство (7.2.4) при $b = t$, $a = 0$, $s = 1 + c_0 \bar{\delta}(\omega) + \frac{\tau}{2}$ и $\delta = \frac{\tau}{2}$, записывается в виде

$$\begin{aligned} h(t, 1 + c_0 \bar{\delta}(\omega) + \tau) + k_1 E(t, 1 + c_0 \bar{\delta}(\omega) + \tau) &\leq (1 + \varepsilon) h\left(0, 1 + c_0 \bar{\delta} + \frac{\tau}{2}\right) \\ &+ c(\varepsilon) \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-m(p+1)} J\left(t, 1 + c_0 \bar{\delta} + \frac{\tau}{2}\right) \quad \forall \tau > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя полученную оценку (7.3.72), получаем:

$$\begin{aligned} h(t, 1 + c_0 \bar{\delta} + \tau) + k_1 E(t, 1 + c_0 \bar{\delta} + \tau) &\leq (1 + \varepsilon) h\left(0, 1 + c_0 \bar{\delta} + \frac{\tau}{2}\right) \\ &+ c(\varepsilon) \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-m(p+1)} K\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad \forall \tau > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (7.3.73)$$

Из этого неравенства, учитывая зависимость $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\omega)$ (7.3.67), выводим справедливость доказываемого утверждения теоремы 7.3.1. $\square$

7.3.1. О точности утверждения теоремы 7.3.1. Рассмотрим граничные режимы с обострением для следующего одномерного параболического уравнения порядка $2m$, $m > 1$:

$$u_t + \Delta_{m,p}(u) = 0 \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+^1, \quad p > 1, \quad (7.3.74)$$

$$\Delta_{m,p}(u) := (-1)^m D_x^m (|D_x^m u|^{p-1} D_x^m u).$$

Уравнение (7.3.74), как не сложно проверить, инвариантно относительно следующей группы преобразований:

$$u \rightarrow \lambda^{-l} u, \quad x \rightarrow x/\lambda^\beta, \quad t \rightarrow t/\lambda \quad \forall \lambda > 0,$$

где l – произвольное действительное число, а

$$\beta = (1 - l(p - 1))(m(p + 1))^{-1}. \quad (7.3.75)$$

В силу этой инвариантности уравнение (7.3.74) допускает автомодельное решение структуры:

$$u(t, x) = (T - t)^{-l} v(y), \quad y = \frac{x}{(T - t)^\beta}, \quad (7.3.76)$$

где $v(y)$ – это решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) порядка $2m$:

$$B_{m,p}(v) := \Delta_{m,p}(v) + \beta y v(y) + l v(y) = 0 \quad \forall y > 0, \quad v(\infty) = 0. \quad (7.3.77)$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения (7.3.77):

$$D_y^i v(0) = a_i = \text{const} \in \mathbb{R}^1, \quad D_y^i v(\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (7.3.78)$$

Теорема 7.3.2. (см. Т.2.1 в [45]). *В предположении*

$$\beta - 2l < 0 \quad (7.3.79)$$

задача (7.3.77), (7.3.78) имеет единственное решение $v \in W_{p+1}^m(\mathbb{R}_+^1) \cap L_2(\mathbb{R}_+^1)$.

Теорема 7.3.3. *При дополнительном предположении $\beta \leq 0$ решение v из теоремы 7.3.2 имеет компактный носитель для любого $\{a_i\} \in \mathbb{R}^m$, причем существует постоянная $\bar{K} = \bar{K}(a_1, \dots, a_m, p, m)$ такая, что*

$$\sup\{y \in \text{supp } v\} \leq \bar{K} \quad \forall \{a_i\} \in \mathbb{R}^m. \quad (7.3.80)$$

Доказательства этих теорем приведем позже, а сначала проведем некоторые их следствия. Решение $u(t, x)$ из (7.3.76) удовлетворяет, как не сложно проверить, следующим условиям Дирихле:

$$D_x^i u(t, 0) = a_i (T - t)^{-\gamma_i} \quad i = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (7.3.81)$$

где $\gamma_i = l + i\beta$. Отметим также, что наряду с решением $v(y)$ задачи (7.3.77), (7.3.78) решением уравнения (7.3.77) является также

$$v_\omega(y) := \omega^{\frac{m(p+1)}{p-1}} v\left(\frac{y}{\omega}\right) \quad \forall y > 0 \quad (7.3.82)$$

при любом значении параметра $\omega > 0$. Следовательно, функция

$$u_\omega(t, x) := (T - t)^{-l} v_\omega(y), \quad y = \frac{x}{(T - t)^\beta}, \quad (7.3.83)$$

при любом $\beta \leq 0$ является решением уравнения (7.3.74) с компактным носителем по x при всех $t \in (0, T)$, удовлетворяющим граничным условиям:

$$D_x^i u_\omega(t, 0) = f_i(t) := a_i \omega^{\frac{m(p+1)}{p-1} - i} (T - t)^{-\gamma_i}, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (7.3.84)$$

Ограничимся теперь случаем $\beta = 0 \iff l = (p - 1)^{-1}$, который, как это будет следовать из теоремы 7.3.1 и из вида автомодельного решения и из (7.3.76), соответствует предельному локализованному S -режиму. При этом граничное условие (7.3.84) принимает вид

$$D_x^i u_\omega(t, 0) = f_i(t) = a_i \omega^{\frac{m(p+1)}{p-1} - i} (T - t)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (7.3.85)$$

Соответственно, в качестве продолжения $\bar{f}(t, x)$ такого, что $D_x^i \bar{f}(t, 0) = f_i(t)$, можем положить:

$$\bar{f}(t, x) := u_\omega(t, x) = \omega^{\frac{m(p+1)}{p-1}} (T - t)^{-\frac{1}{p-1}} v\left(\frac{x}{\omega}\right) \quad \forall x > 0.$$

По этой функции определим $\bar{F}(t)$ формулой (7.1.10) (при $q = 1$, $n = 1$). При этом после простых вычислений, использующих тот факт, что $\text{supp } f(t, \cdot) \subset [0, \bar{K}\omega]$ (где $\bar{K}$ из (7.3.80)), получаем оценку:

$$\bar{F}(t) \leq \bar{K}_1 \omega^{\frac{2m(p+1)+(p-1)}{p-1}} (T - t)^{-\frac{2}{p-1}} \quad \forall t < T, \quad (7.3.86)$$

где $\bar{K}_1$ – постоянная, зависящая лишь от известных параметров задачи, но не зависящая от ω . В силу оценки (7.3.86) теорема 7.3.1 гарантирует, что для множества интенсификаций $\Omega_s(u)$ произвольного решения $u(t, x)$

уравнения (7.3.74), удовлетворяющего граничным условиям (7.3.85) и начальному условию (7.1.5) с произвольной функцией $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+^1)$, справедлива оценка:

$$\Omega_s(u) \subset [0, c\omega]. \quad (7.3.87)$$

В силу (7.3.80)–(7.3.82) $\Omega_s(u_\omega) = [0, \bar{K}\omega]$, что доказывает точность оценки (7.3.87), а значит, и (7.3.2) относительно параметра $\omega > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7.3.2. Стандартные теоремы о разрешимости операторных уравнений с монотонными коэрцитивными операторами не применимы к уравнению (7.3.77), так как оператор $v \rightarrow B_{m,p}(v)$ имеет неограниченный в области $\Omega = \mathbb{R}_+^1$ коэффициент при v' . Поэтому будем строить решение v как предел при $j \rightarrow \infty$ решений $\{v_j(y)\}$ уравнения (7.3.77) на ограниченном интервале $(0, j)$ с граничными условиями:

$$D^i v_j(0) = a_i, \quad D^i v_j(j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1; \quad j = 1, 2. \quad (7.3.88)$$

Введем в рассмотрение функцию $g \in W_{p+1}^m(R_+^1)$ с $\text{supp } g \subset [0, 1)$, удовлетворяющую граничным условиям (7.3.88). Определим теперь оператор $B_{m,p,g}^{(j)} : W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j) \rightarrow (W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j))^*$ равенством:

$$B_{m,p,g}^{(j)}(W) := B_{m,p}(g + w) \quad \forall w \in W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j),$$

где $\Omega_j = (0, j)$. Для произвольных $w_1 = v_1 - g$, $w_2 = v_2 - g$ из $W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j)$ получаем, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} \langle B_{m,p,g}^{(j)}(w_1) - B_{m,p,g}^{(j)}(w_2), w_1 - w_2 \rangle &= \langle \Delta_{m,p}(v_1) - \Delta_{m,p}(v_2), v_1 - v_2 \rangle \\ &+ \left(l - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\Omega_j} |v_1 - v_2|^2 dx \geq c_0 \int_{\Omega_j} |D^m(v_1 - v_2)|^{p+1} dx \\ &+ \left(l - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\Omega_j} |v_1 - v_2|^2 dx, \quad c_0 > 0. \end{aligned} \quad (7.3.89)$$

Отсюда в силу (7.3.79) следует сильная монотонность оператора $B_{m,p,g}^{(j)}$. Кроме того имеем для произвольного $w = v - g \in W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j)$:

$$\begin{aligned} \langle B_{m,p,g}^{(j)}(w), w \rangle &= \int_{\Omega_j} \left[|D^m v|^{p+1} - |D^m v|^p D^m v \cdot D^m g + \left(l - \frac{\beta}{2}\right) w^2 \right. \\ &\quad \left. + (\beta y g' + l g) w \right] dy. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и Юнга с " ε " выводим:

$$\begin{aligned} \langle B_{m,p,g}^{(j)}(w), w \rangle &\geq (1 - \varepsilon) \int_{\Omega_j} |D^m v|^{p+1} dy - c_1(\varepsilon) \int_{\Omega_1} |D^m g|^{p+1} dy \\ &+ \left(l - \frac{\beta}{2} - \delta\right) \int_{\Omega_j} w^2 dx - c_1(\delta) \int_{\Omega_1} (\beta^2 |g'|^2 + l^2 g^2) dy \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \delta \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{\Omega_j} |D^m v|^{p+1} dy \geq \int_{\Omega_j} |D_x^m w|^{p+1} dy - \int_{\Omega_1} g^{p+1} dy$, выводим из последнего неравенства:

$$\langle B_{m,p,g}^{(j)}(w), w \rangle \geq 2^{-1} \int_{\Omega_j} |D^m w|^{p+1} dy + 2^{-1} \left(l - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\Omega_j} w^2 dy - L, \quad (7.3.90)$$

где L – постоянная, зависящая только от l , β и $\|g\|_{w_{p+1}^m(\Omega_1)}$, но не зависящая ни от w , ни от j . Из (7.3.88) в силу неравенства Пуанкаре следует, в частности, коэрцитивность оператора $B_{m,p,g}^{(j)}$:

$$\langle B_{m,p,g}^{(j)}(w), w \rangle \geq b_j \|w\|_{w_{p+1}^m(\Omega_j)}^{p+1} - L, \quad b_j > 0. \quad (7.3.91)$$

В силу (7.3.89) и (7.3.91) стандартная теорема уравнений с монотонными операторами (см. [89], гл. 2) гарантирует существование и единственность решения v_j задачи (7.3.77), (7.3.88), для которого в силу (7.3.90) выполняется следующая равномерная по $j \in \mathbb{N}$ априорная оценка:

$$\int_{\Omega_j} |v_j^{(m)}|^{p+1} dy + \left(l - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\Omega_j} v_j^2 dy \leq 2L, \quad f^{(m)} := D^m f. \quad (7.3.92)$$

Теперь для доказательства теоремы 7.3.2 достаточно показать, что для любого $j_0 \in \mathbb{N}$ последовательность $\{v_j\}$ является последовательностью Коши в пространстве $W_{p+1}^m(\Omega_{j_0})$, то есть, что

$$\|v_j - v_k\|_{w_{p+1}^m(\Omega_{j_0})} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7.3.93)$$

Для этого зафиксируем постоянные $\tau > j_0$, $\delta > 0$, $\tau + \delta < \min(j, k)$ и введем монотонно невозрастающую срезающую функцию $\xi(y) \geq 0$ такую, что $\xi(y) = 1$ при $y < \tau$, $\xi(y) = 0$ при $y > \tau + \delta$ и $|D_y^i \xi| := |\xi^{(i)}| \leq c_0 \delta^{-i}$ при всех $y \in [\tau, \tau + \delta] \forall i \leq m - 1$. Очевидно, что функция $(v_j - v_k)$ принадлежит обоим пространствам $W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j)$ и $W_{p+1}^m(\Omega_k, \partial\Omega_k)$. Поэтому, используя ее в качестве пробной функции в интегральных тождествах, определяющих решения v_j , v_k , и затем вычитая полученные равенства,

получаем после интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{R_1^+} \left[(|v_j^{(m)}|^{p-1} v_j^{(m)} - |v_k^{(m)}|^{p-1} v_k^{(m)}) (v_j^{(m)} - v_k^{(m)}) + \left(l - \frac{\beta}{2} \right) (v_j - v_k)^2 \right] \xi dy \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\delta} (|v_j^{(m)}|^{p-1} v_j^{(m)} - |v_k^{(m)}|^{p-1} v_k^{(m)}) \sum_{i=1}^m b_{i,m} \xi^{(i)} (v_j^{(m-i)} - v_k^{(m-i)}) dy \\ & \quad + \int_{\tau}^{\tau+\delta} y \xi'(y) (v_j - v_k)^2 dy := R_1 + R_2, \quad (7.3.94) \end{aligned}$$

где $b_{i,m}$ – соответствующие биномиальные коэффициенты. Будем обозначать через C различные постоянные, зависящие от m, p, l и постоянной L из оценки (7.3.92), но не зависящие от j, k, τ, δ . Применяя теорему о среднем к функции $f(s) = |s|^{p-1}s$, а также неравенства Гельдера, Юнга и оценку (7.3.92), получим:

$$\begin{aligned} R_1 &\leq C \int_{\tau}^{\tau+\delta} |v_j^{(m)} - v_k^{(m)}|^{p+1} dy \\ & \quad + C \sum_{i=1}^m \left(\delta^{-i(p+1)} \int_{\tau}^{\tau+\delta} |v_j^{(m-i)} - v_k^{(m-i)}|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (7.3.95) \end{aligned}$$

Используя интерполяционное неравенство Гальярдо-Ниренберга [41], [101] (см. также предложение 9.1.2) и неравенство Юнга, оцениваем слагаемые в правой части (7.3.95):

$$\begin{aligned} & \left(\delta^{-i(p+1)} \int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^{m-i}(v_j - v_k)|^{p+1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \delta^{-\nu} \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |v_j - v_k|^2 dy \right)^{\frac{p+1}{2p}} \\ & \quad + C \delta^{-\mu_i} \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |v_j - v_k|^2 dy \right)^{\rho_i} + C \int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^m(v_j - v_k)|^{p+1} dy, \\ & \text{где } \nu = \frac{2(p+1)m-1}{p} > 0, \quad \mu_i = i(p+1)(p-\theta_i)^{-1} > 0, \\ & \rho_i = 2^{-1}(1-\theta_i)(p+1)(p-\theta_i)^{-1} > 0, \quad \theta_i = \frac{2(p+1)(m-i)+p-1}{2(p+1)m+p-1} \end{aligned} \quad (7.3.96)$$

Подставляя оценку (7.3.96) в (7.3.95), а затем используя (7.3.95) для оценки правой части в равенстве (7.3.94), получаем после простых вы-

числений, с учетом строгой монотонности функции $f(s) = |s|^{p-1}s$:

$$\begin{aligned}
I(\tau) &:= I^{(j,k)}(\tau) := I_1^{(j,k)}(\tau) + \left(l + \frac{\beta}{2}\right) I_2^{(j,k)}(\tau) := I_1(\tau) + \left(l - \frac{\beta}{2}\right) I_2(\tau) \\
&:= \int_0^\tau |D^m(v_j - v_k)|^{p+1} dy + \left(l - \frac{\beta}{2}\right) \int_0^\tau |v_j - v_k|^2 dy \leq C(I_1(\tau + \delta) - I_1(\tau)) \\
&\quad + C(\tau + \delta)\delta^{-1}(I_2(\tau + \delta) - I_2(\tau)) + C \sum_{i=1}^m \delta^{-\mu_i}(I_2(\tau + \delta) - I_2(\tau))^{\rho_i} \\
&\quad + C\delta^{-\nu}(I_2(\tau + \delta) - I_2(\tau))^{\frac{p+1}{2p}}. \quad (7.3.97)
\end{aligned}$$

Полагая в этом неравенстве $\delta = \tau$ и используя равномерную оценку (7.3.92), выводим следующее соотношение:

$$I(\tau) \leq C(I(2\tau) - I(\tau)) + C\tau^{-\gamma} \quad \forall \tau \in \left(0, \frac{\min\{j, k\}}{2}\right), \quad (7.3.98)$$

где $\gamma = \min_{1 \leq i \leq m} \{\nu, \mu_i\} > 0$. Окончательно, из (7.3.98) вытекает неравенство:

$$I(\tau) \leq \lambda I(2\tau) + \lambda\tau^{-\gamma} \quad \forall \tau < \frac{\min\{j, k\}}{2}, \quad \lambda = \frac{C}{1+C} < 1.$$

Итерируя это неравенство i раз, приходим к:

$$I(\tau) \leq \lambda^i I(2^i \tau) + C_1 \tau^{-\gamma} \quad \forall \tau \leq \frac{\min\{j, k\}}{2}, \quad C_1 = \frac{2^\gamma}{2^\gamma - \lambda}. \quad (7.3.99)$$

Пусть теперь $\tau = j_0$, где j_0 из (7.3.93). Зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Теперь зафиксируем $\bar{\tau} \geq j_0$ такое, что

$$C_1 \bar{\tau}^{-\gamma} \leq 2^{-1} \varepsilon \implies \bar{\tau} = \bar{\tau}(j_0, \varepsilon).$$

Теперь зафиксируем $i = i_0$ такое, что

$$2\lambda^{i_0} L \leq 2^{-1} \varepsilon_+ \implies i_0 = i_0(\varepsilon, L),$$

где L из априорной оценки (7.3.92). Тогда из (7.3.99) вытекает оценка:

$$I(\bar{\tau}) := I^{(j,k)}(\bar{\tau}) \leq \varepsilon \quad \forall j \geq \bar{j} := \bar{\tau} 2^{i_0}, \quad \forall k \geq \bar{j}, \quad (7.3.100)$$

из которой в силу интерполяционного неравенства Гальярдо-Ниренберга и вытекает необходимая сходимости (7.3.93). $\square$

Доказательство теоремы 7.3.3. Введем срезающую функцию $\eta(y) = 1 - \xi(y)$, где $\xi(y)$ из теоремы 7.3.2. Очевидно, что

$$\text{supp } \eta \subset \{y > \tau\}, \quad \text{supp } D^i \eta \subset \{\tau \leq y \leq \tau + \delta\} \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Так как $\eta v_j \in W_{p+1}^m(\Omega_j, \partial\Omega_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$, то подставляя в интегральное тождество, определяющее решение v_j , пробную функцию ηv_j , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\delta} \left(D^m v_j |^{p+1} + \left(l - \frac{\beta}{2} \right) v_j^2 \right) \eta dy - \frac{\beta}{2} \int_{\tau}^{\tau+\delta} y \eta'(y) v_j^2 dy \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^m v_j|^{p-1} D^m v_j \sum_{i=1}^m b_{i,m} \eta^{(i)}(y) D^{m-i} v_j dy := R \end{aligned} \quad (7.3.101)$$

В силу неравенства Гельдера имеем:

$$R \leq C \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^m v_j|^{p+1} dy \right)^{\frac{p}{p+1}} \sum_{i=1}^m \delta^{-i} \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^{m-i} v_j|^{p+1} dy \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (7.3.102)$$

Применение интерполяционного неравенства Гальярдо-Ниренберга приводит к:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^{m-j} v_j|^{p+1} dy \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq C \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} |D^m v_j|^{p+1} dy \right)^{\frac{\theta_i}{p+1}} \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} v_j^2 dy \right)^{\frac{(1-\theta_i)}{2}} \\ & + C \delta^{-(m-j) - \frac{p-1}{2(p+1)}} \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} v_j^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } \theta_i \text{ из (7.3.96)}. \end{aligned} \quad (7.3.103)$$

Введем теперь энергетическую функцию, связанную с решением v_j :

$$E(\tau) := E^{(j)}(\tau) := \int_{y>\tau} \left(|D^m v_j|^{p+1} + \left(l - \frac{\beta}{2} \right) v_j^2 \right) dy \quad \forall \tau \in (0, j).$$

Подставляем теперь оценку (7.3.103) в (7.3.102), получим, применяя неравенство Юнга:

$$\begin{aligned} R &\leq C(E(\tau) - E(\tau + \delta))^{1+\gamma} \delta^{-(m + \frac{p-1}{2(p+1)})} \\ &+ C \sum_{i=1}^m \delta^{-i} (E(\tau) - E(\tau + \delta))^{1+\gamma_i}, \end{aligned} \quad (7.3.104)$$

где

$$\gamma = \frac{p-1}{2(p+1)}, \quad \gamma_i = \frac{(1-\theta_i)(p-1)}{2(p+1)} = \frac{i(p-1)}{2(p+1)m+p-1}.$$

Учитывая, что $\eta'(y) \geq 0$, $\beta \leq 0$, выводим теперь из (7.3.101) с использованием оценки (7.3.104)

$$\begin{aligned} E(\tau) &\leq C(E(\tau) - E(\tau + \delta))^{1+\gamma} \delta^{-(m+\frac{p-1}{2(p+1)})} \\ &\quad + C \sum_{i=1}^m \delta^{-j} (E(\tau) - E(\tau + \delta))^{1+\gamma_i} \\ &\quad \forall \tau : 0 < \tau < j, \quad \forall \delta > 0 : \tau + \delta < j. \end{aligned} \quad (7.3.105)$$

В силу (7.3.92) имеем следующую равномерную по j оценку:

$$E(0) := E^{(j)}(0) < 2L \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому из соотношения (7.3.105) в силу леммы 9.3.2, п. 3) вытекает равномерная по j ограниченность $\sup E^{(j)}(\cdot)$, что и доказывает теорему 7.3.3. $\square$

7.4. Локализованные граничные режимы: случай $p = q$

В настоящем разделе мы приводим модифицированное доказательство следующего общего утверждения.

Теорема 7.4.1. (см. Т. 1.3 из [43], Т. 1.2 из [44]) Пусть в граничной задаче (7.1.1)–(7.1.7) $p = q$, граничная функция f удовлетворяет условиям (7.1.8)–(7.1.9) с $p = q$, а построенная по ней в (7.1.10) функция $F(t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$F(t) \leq \exp(w(T-t)^{-\frac{1}{m(p+1)-1}}) := F_0(t) \quad \forall t < T, \quad (7.4.1)$$

где $w = \text{const} > 0$. Тогда существует постоянная K , зависящая только от исходных параметров рассматриваемой задачи и не зависящая, в частности от w из (7.4.1) такая что для произвольного решения u рассматриваемой задачи имеет место:

$$\Omega_s(u) \subset \left\{ x \in \bar{\Omega} : |x| < 1 + Kw^{\frac{m(p+1)-1}{m(p+1)}} \right\}. \quad (7.4.2)$$

В п. 7.4.1 мы приведем аргументы, демонстрирующие определенную точность предельного локализованного граничного режима, определяемого теоремой 7.4.1, но сначала проведем доказательство этой теоремы, которое, как и в случае $p > q$, состоит из последовательного анализа процесса локализации сингулярности в зонах "пологого" и "непологого" нарастания энергии решения в окрестности времени обострения.

Лемма 7.4.1. Пусть для некоторого решения $u(t, x)$ из определения 7.1.1 существует $s_0 \geq 1$ такое, что выполняется оценка

$$h(t, s_0) + E(t, s_0) \leq C(T - t)^{-A} \quad \forall t < T, \quad 1 < A = \text{const} < \infty. \quad (7.4.3)$$

Тогда множество сингулярности $\Omega_s(u) \subset \{x : |x| \leq s_0\}$, и существует невозрастающая непрерывная функция $K(s) < \infty \quad \forall s > 0$ такая, что выполняется оценка (7.3.8).

Доказательство проводим по схеме доказательства леммы 7.3.1. Стартуем снова с соотношения (7.3.6), которое при $p = q$ принимает вид

$$\begin{aligned} J_j(s + \sum_{k=1}^j \delta_k) &:= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s + \sum_{k=1}^j \delta_k)} |u(t, x)|^{p+1} dx dt \leq c(1 + \varepsilon)^j \Delta_j h_0(s) \\ &+ c(\varepsilon) \sum_{i=1}^j \frac{\Delta_i J_i(s)(1 + \varepsilon)^{j-i}}{\delta_i^{m(p+1)}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall s > 1, \forall \delta_k > 0, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

В силу (7.4.3) и леммы 7.2.1 имеем стартовую оценку

$$J_j(s_0) \leq cC(T - t_j)^{-A} \Delta_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (7.4.5)$$

Фиксируем произвольное значение $\bar{s} > s_0$ и изучаем поведение при $t \rightarrow T$ функции $J(t, \bar{s})$. Определяем последовательность $\{t_i\}$ рекуррентным соотношением, аналогичным (7.3.16):

$$(t_i - t_{i-1})(J(t_i, \bar{s}) - J(t_{i-1}, \bar{s}))^\mu = g, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t_0 \geq 0. \quad (7.4.6)$$

где $g > 0$ – некоторое число, которое будет определено ниже, а μ – произвольное число из следующего интервала:

$$0 < \mu < \max\{1, (A - 1)^{-1}\}. \quad (7.4.7)$$

Снова будем различать два случая:

$$\text{a) } J(t, \bar{s}) \leq c' = \text{const} < \infty \quad \forall t < T.$$

$$\text{b) } J(t, \bar{s}) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В случае b) полагаем $t_0 = 0$, а в случае a) по аналогии с § 7.3 определяем $t_0 \geq 0$ как единственное число такое, что

$$0 \leq t_0 \leq \bar{t}, \quad \bar{t}J(\bar{t}, s)^\mu := g,$$

и для некоторого номера $i_0 < \infty : t_{i_0} = T$. В силу монотонности функций $J_i(s)$ из (7.4.5), (7.4.6) следует, что

$$(cC)^\mu \Delta_i^{\mu+1} (T - t_i)^{-A\mu} \geq g \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что $T - t_i \geq \Delta_{i+1}$ и $\frac{A\mu}{1+\mu} \leq 1$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\Delta_i \geq g^{\frac{1}{1+\mu}} (cC)^{-\frac{\mu}{1+\mu}} (T - t_i)^{\frac{A\mu}{1+\mu}} \geq \frac{g^{\frac{1}{1+\mu}} \Delta_{i+1}}{(cC)^{\frac{\mu}{1+\mu}} T^{1-\frac{A\mu}{1+\mu}}} \implies \quad (7.4.8)$$

$$\Delta_{i+1} \leq C_1 \Delta_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad C_1 = (cC)^{\frac{\mu}{1+\mu}} T^{1-\frac{A\mu}{1+\mu}} g^{-\frac{1}{1+\mu}}.$$

Первое наше ограничение на выбор числа g будет состоять в том, что

$$C_1 = \text{const} < 1 \iff g > (cC)^\mu T^{1-\mu(A-1)}. \quad (7.4.9)$$

Запишем теперь соотношение (7.4.6) в виде

$$J_i(\bar{s}) = g^{\frac{1}{\mu}} \Delta_i^{-\frac{1}{\mu}} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (7.4.10)$$

Комбинируя соотношения (7.4.8) и (7.4.10), получаем

$$J_i(\bar{s}) \leq C_1^{\frac{(j-i)}{\mu}} J_j(\bar{s}) \quad \forall i \leq j. \quad (7.4.11)$$

Зафиксируем произвольный номер $j \in \mathbb{N}$ и определим смещения $\delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, j$, формулой (7.3.26). Подставляя введенные значения δ_k и Δ_k в соотношение (7.4.4), в результате простых вычислений с использованием (7.4.6)–(7.4.11) получаем

$$\begin{aligned} J_j\left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b}\right) &\leq \frac{c(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} \sum_{i=1}^j \left(\frac{1+\varepsilon}{b^{m(p+1)}}\right)^{j-i} \Delta_i J_i(\bar{s})^\mu J_i(\bar{s})^{1-\mu} \\ &+ c(1+\varepsilon)^j \Delta_j h_0(\bar{s}) \leq \frac{g c(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} J_j(\bar{s})^{1-\mu} \sum_{i=1}^j \left(\frac{(1+\varepsilon) C_1^{\frac{1-\mu}{\mu}}}{b^{m(p+1)}}\right)^{j-i} \\ &+ c(1+\varepsilon)^j C_1^{j-1} \Delta_1 h_0(\bar{s}). \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Зафиксируем теперь свободные параметры $\varepsilon > 0$, $0 < b < 1$, затем наложим второе ограничение на выбор g :

$$\begin{aligned} \frac{(1+\varepsilon)C_1^{\frac{1-\mu}{\mu}}}{b^{m(p+1)}} &:= \frac{(1+\varepsilon)(cC)^{\frac{1-\mu}{1+\mu}} T^{\frac{1-\mu}{\mu} - \frac{A(1-\mu)}{\mu+1}}}{b^{m(p+1)} g^{\frac{1-\mu}{(\mu+1)\mu}}} \leq 2^{-1} \\ \Rightarrow g &\geq \left(\frac{1+\varepsilon}{2b^{m(p+1)}} \right)^{\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}} (cC)^{\mu} T^{1-\mu(A-1)}. \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

При этом из неравенства (7.4.12) следует, что

$$J_j \left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b} \right) \leq \frac{2g c(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} J_j(\bar{s})^{1-\mu} + c(1+\varepsilon)(C_1(1+\varepsilon))^{j-1} \Delta_1 h_0(\bar{s}). \quad (7.4.14)$$

Так как неравенство (7.4.14) справедливо для любого $j \in \mathbb{N}$, то из него в силу (7.4.11) следует также, что

$$\begin{aligned} J_i \left(\bar{s} + \frac{\delta}{1-b} \right) &\leq \frac{2g c(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} C_1^{\frac{1-\mu}{\mu}(j-i)} J_j(\bar{s})^{1-\mu} \\ &\quad + c(1+\varepsilon)(C_1(1+\varepsilon))^{i-1} \Delta_1 h_0(\bar{s}) \quad \forall i \leq j. \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

Складывая неравенства (7.4.15) по i от 1 до j , получаем следующий аналог неравенства (7.3.32):

$$\begin{aligned} J(t_j, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}) &\leq B_3 \delta^{-m(p+1)} J_j(\bar{s})^{1-\mu} \\ &\quad + B_4 h_0(\bar{s}) + J(t_0, \bar{s} + \frac{\delta}{1-b}) \quad \forall j \geq 1, \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

где $B_3 = 2g c(\varepsilon)(1 - C_1^{\frac{1-\mu}{\mu}})^{-1}$, $B_4 = c(1+\varepsilon)\Delta_1(1 - C_1(1+\varepsilon))^{-1}$. Теперь заключительная часть доказательства леммы 7.4.1 состоит в анализе функционального неравенства (7.4.16), аналогичном тому, что последовал в концовке доказательства леммы 7.3.1 после получения соотношения (7.3.32) $\square$

Анализ локализации сингулярности в зонах "непологого" нарастания полной энергии решения проводится на основе системы (7.2.16), (7.2.17), которая в изучаемом случае $p = q$ приобретает вид

$$h_j(s + \delta) \leq (1 + \varepsilon)h_{j-1}(s) + c(\varepsilon)\Delta E_j(s) G(\Delta_j, \delta) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (7.4.17)$$

$$E_j(s + \delta) \leq c_1 h_{j-1}(s) + c_2 \Delta E_j(s) G(\Delta_j, \delta) \quad \forall s > 1, \quad \forall \delta > 0, \quad (7.4.18)$$

где

$$G(\Delta_j, \delta) := \left(\frac{\Delta_j}{\delta^{m(p+1)}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\Delta_j}{\delta^{m(p+1)}}\right)^{\frac{1}{mp+m-1}}.$$

Лемма 7.4.2. Пусть для решения $u(t, x)$ из определения 7.1.1 при некотором $s_0 \geq 1$ выполнена оценка

$$h(t, s_0) + E(t, s_0) \leq C F_0(t) = C \exp(w(T-t)^{-\frac{1}{l}}) \quad \forall t < T, \quad (7.4.19)$$

где $C = \text{const} > 0$, $w = \text{const} > 0$ и $l = m(p+1) - 1$. Тогда для произвольного числа $b : 0 < b < \frac{1}{2}$ существуют постоянные $K_1 = K_1(b) < \infty$ и $K_2 = K_2(b)$, не зависящие от постоянных C и w такие, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} E(t, s_0 + K_1 w^{\frac{l}{l+1}}) &\leq C K_2 F_0(0)^b F_0(t)^{1-b} \quad \forall t > 0, \\ h(t, s_0 + K_1 w^{\frac{l}{l+1}}) &\leq C K_2 F_0(0)^l F_0(t)^{1-b} \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим последовательность $\{t_i\}$ аналогичным (7.3.45) рекуррентным соотношением

$$F_0(t_j) = \exp \left[w(T-t_j)^{-\frac{1}{l}} \right] := r^{-1} F_0(t_{j-1}) \quad \forall j \geq 1, t_0 = 0, \quad (7.4.21)$$

где $r : 0 < r < 1$ – свободный параметр, значение которого будет зафиксировано ниже. Предварительно получим явные оценки сверху и снизу интервалов $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$, определенных в (7.4.21). Запишем (7.4.21) в виде

$$g_0(t_j) - g_0(t_{j-1}) = k := \ln r^{-1}, \quad g_0(t) := w(T-t)^{-\frac{1}{l}}. \quad (7.4.22)$$

В силу выпуклости функции $g_0(t)$ из (7.4.22) следует, что

$$k g_0'(t_j)^{-1} \leq \Delta_j \leq k g_0'(t_{j-1})^{-1} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (7.4.23)$$

Очевидно соотношение $g_0'(t) = w l^{-1} (T-t)^{-\frac{l+1}{l}} = l^{-1} w^{-l} g_0(t)^{l+1}$. Поэтому из (7.4.23) вытекает, что

$$k l w^l g_0(t_j)^{-(l+1)} \leq \Delta_j \leq k l w^l g_0(t_{j-1})^{-(l+1)}. \quad (7.4.24)$$

Отметим также, что из определения (7.4.22) следует, что

$$g_0(t_j) = k j + g_0(0) = k \left(j + \frac{g_0(0)}{k} \right) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (7.4.25)$$

Теперь из левого неравенства (7.4.24) в силу (7.4.25) вытекает, что

$$\Delta_j \geq \frac{klw^l}{g_0(t_j)^{l+1}} = \frac{klw^l}{(kj)^{l+1}} \left(\frac{kj}{kj + g_0(0)} \right)^{l+1} \geq \frac{klw^l}{(k + g_0(0))^{l+1} j^{l+1}} \quad \forall j \geq 1. \quad (7.4.26)$$

С другой стороны, из правого неравенства (7.4.24) в силу (7.4.25) следует, что

$$\Delta_j \leq \frac{klw^l}{(kj)^{l+1}} \left(\frac{kj}{kj - k + g_0(0)} \right)^{l+1} \leq \frac{2^{l+1}lw^l}{k^l j^{l+1}} \quad \forall j \geq 2. \quad (7.4.27)$$

Для Δ_1 непосредственно из (7.4.22) получаем следующее выражение:

$$\Delta_1 = T \left[1 - \left(\frac{w}{w + kT^{\frac{1}{l}}} \right)^l \right]. \quad (7.4.28)$$

Зафиксируем теперь номер j и определим смещение δ_j :

$$\delta_j := \omega^{-\frac{1}{m(p+1)}} \Delta_j^{\frac{1}{m(p+1)}}, \quad 0 < \omega < 1. \quad (7.4.29)$$

Достаточно малое значение параметра ω определим ниже. Теперь система (7.4.17), (7.4.18) записывается в виде

$$\begin{aligned} h_i(s + \delta_j) &\leq (1 + \varepsilon)h_{i-1}(s) \\ &+ c(\varepsilon)\Delta E_i(s)G(\Delta_i, \delta_j) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \leq j, \quad \forall s \geq S_0, \end{aligned} \quad (7.4.30)$$

$$\begin{aligned} E_i(s + \delta_j) &\leq c_1 h_{i-1}(s) \\ &+ c_2 \Delta E_i(s)G(\Delta_i, \delta_j) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \leq j, \quad \forall s \geq S_0. \end{aligned} \quad (7.4.31)$$

Оценим сверху величину $G(\Delta_i, \delta_j)$. В силу оценок (7.4.26), (7.4.27) для всех i , $2 \leq i \leq j$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_i \delta_j^{-m(p+1)} &= \Delta_j \delta_j^{-m(p+1)} \cdot \Delta_i \Delta_j^{-1} = \omega \Delta_i \Delta_j^{-1} \leq \\ &\omega 2^{l+1} l (k + g_0(0))^{l+1} \gamma^{-l} i^{-(l+1)} j^{l+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, обозначая через $[a]$ целую часть числа a , получаем

$$\begin{aligned} \Delta_i \delta_j^{-m(p+1)} &\leq k_1 \omega \quad \forall j \geq 2, \quad \forall i : \left[\frac{j}{2} \right] + 1 \leq i \leq j, \\ k_1 &= 4^{l+1} l (k + g_0(0))^{l+1} k^{-l}. \end{aligned} \quad (7.4.32)$$

С учетом (7.4.32) получаем

$$G(\Delta_i, \delta_j) \leq \omega_1(\omega) := (k_1\omega)^{\frac{1}{p}} + (k_1\omega)^{\frac{1}{mp+m-1}} \\ \forall j \geq 2, \forall i: \left[\frac{j}{2}\right] + 1 \leq i \leq j. \quad (7.4.33)$$

Используя (7.4.33), из соотношения (7.4.31) с учетом оценки (7.4.19)

$$E_i(s_0 + \delta_j) \leq c_1 CF_0(t_{i-1}) + c_2 \omega_1(\omega) CF_0(t_i) \leq (7.4.21) \\ \leq (c_1 r + c_2 \omega_1(\omega)) CF_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \forall i: \left[\frac{j}{2}\right] + 1 \leq i \leq j. \quad (7.4.34)$$

Аналогичным способом из (7.4.30) выводим:

$$h_i(s_0 + \delta_j) \leq (1 + \varepsilon) CF_0(t_{i-1}) + c(\varepsilon) \omega_1(\omega) CF_0(t_i) \\ \leq ((1 + \varepsilon)r + c(\varepsilon) \omega_1(\omega)) CF_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \forall i: \left[\frac{j}{2}\right] + 1 \leq i \leq j. \quad (7.4.35)$$

Теперь произведем выбор значений свободных параметров аналогично тому, как это делалось в (7.3.54) и (7.3.55). А именно, для произвольного $b: 0 < b < 1/2$ найдем столь малые $r = r(b) > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(b) > 0$, что выполнены соотношения

$$(1 + \varepsilon)r < r^{2b}, \quad c_1 r < r^{2b} \iff r < [\max\{(1 + \varepsilon)^{-1}, c_1^{-1}\}]^{\frac{1}{1-2b}}. \quad (7.4.36)$$

Затем зафиксируем $\omega > 0$ столь малым, чтобы были выполнены неравенства

$$(1 + \varepsilon)r + c(\varepsilon) \omega_1(\omega) \leq r^{2b}, \quad c_1 r + c_1 \omega_1(\omega) \leq r^{2b}, \quad (7.4.37)$$

где $\omega_1(\omega)$ из (9.4.28). При этом неравенства (7.4.34) и (7.4.35) трансформируются в следующие:

$$E_i(s_0 + \delta_j) \leq r^{2b} CF_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \forall i: \left[\frac{j}{2}\right] + 1 \leq i \leq j, \quad (7.4.38)$$

$$h_i(s_0 + \delta_j) \leq r^{2b} CF_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \forall i: \left[\frac{j}{2}\right] + 1 \leq i \leq j. \quad (7.4.39)$$

Возвращаемся теперь к системе (7.4.30), (7.4.31). При $s = s_0 + \delta_j$ из этой системы в силу (7.4.33) следуют соотношения

$$\begin{aligned} h_i(s_0 + 2\delta_j) &\leq (1 + \varepsilon)h_{i-1}(s_0 + \delta_j) + c(\varepsilon)E_i(s_0 + \delta_j)\omega_1(w), \\ E_i(s_0 + 2\delta_j) &\leq c_1h_{i-1}(s_0 + \delta_j) + c_2E_i(s_0 + \delta_j)\omega_1(w). \end{aligned}$$

Из этих неравенств в силу (7.4.38)–(7.4.39) вытекает

$$\begin{aligned} E_i(s_0 + 2\delta_j) &\leq Cr^{2b}(c_1F_0(t_{i-1}) + c_2\omega_1(\omega)F_0(t_i)) \leq (\text{в силу (7.4.21)}) \\ &\leq Cr^{2b}F_0(t_i)(c_1r + c_2\omega_1(\omega)) \leq (\text{в силу (7.4.37)}) \leq Cr^{4b}F_0(t_i) \\ &\forall j \geq 2, \quad \forall i : \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 2 \leq i \leq j; \end{aligned}$$

$$h_i(s_0 + 2\delta_j) \leq Cr^{4b}F_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \quad \forall i : \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 2 \leq i \leq j.$$

При следующей итерации, учитывая последние неравенства, получаем

$$\begin{aligned} E_i(s_0 + 3\delta_j) &\leq c_1h_{i-1}(s_0 + 2\delta_j) + c_2E_i(s_0 + 2\delta_j)\omega_1(\omega) \\ &\leq Cr^{2b}(c_1F_0(t_{i-1}) + c_2\omega_1(\omega)F_0(t_i)) \leq Cr^{6b}F_0(t_i), \\ h_i(s_0 + 3\delta_j) &\leq Cr^{6b}F_0(t_i) \quad \forall j \geq 2, \quad \forall i : \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 3 \leq i \leq j, \end{aligned} \quad (7.4.40)$$

Так как $\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor = j \quad \forall j \in \mathbb{N}$, то проделывая описанную выше процедуру итеративного оценивания $\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor$ раз, приходим к

$$\begin{aligned} E_j(s_0 + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor \delta_j) &\leq Cr^{2b\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor} F_0(t_j) \quad \forall j \geq 2, \\ h_j(s_0 + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor \delta_j) &\leq Cr^{2b\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor} F_0(t_j) \quad \forall j \geq 2. \end{aligned} \quad (7.4.41)$$

В силу (7.4.21) имеем

$$r^{2b\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor} F_0(t_j) = r^{2b\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - j} F_0(0) \leq r^{-j(1-b)} F_0(0). \quad (7.4.42)$$

Кроме того, в силу (7.4.27) получаем следующую оценку для смещений δ_j из определения (7.4.29):

$$\delta_j \leq 2l^{\frac{1}{l+1}} k^{-\frac{l}{l+1}} \omega^{-\frac{1}{l+1}} w^{\frac{l}{l+1}} j^{-1} \quad \forall j \geq 2, \quad l = m(p+1) - 1.$$

Поэтому

$$\left[\frac{j+1}{2} \right] \delta_j \leq k_2 \omega^{-\frac{1}{l+1}} w^{\frac{l}{l+1}} \quad \forall j \geq 2, \quad k_2 = l^{\frac{1}{l+1}} k^{-\frac{l}{l+1}}. \quad (7.4.43)$$

Из оценок (7.4.41) в силу (7.4.42), (7.4.43) следует

$$\begin{aligned} E_j(s_1) &\leq C r^{-j(1-b)} F_0(0), \quad s_1 = s_0 + K_1 w^{\frac{l}{l+1}}, \quad K_1 = k_2 \omega^{-\frac{1}{l+1}}, \\ h_j(s_1) &\leq C F_0(0) r^{-j(1-b)}, \quad \forall j \geq 2. \end{aligned} \quad (7.4.44)$$

В силу (7.4.19) и (7.4.21) имеем

$$E_1(s_1) \leq E_1(s_0) \leq C F_0(t_1) = C r^{-1} F_0(0). \quad (7.4.45)$$

Суммируя первые неравенства из (7.4.44) от $j = 2$ до $j = i$ и прибавляя неравенство (7.4.45), получаем

$$E(t_i, s_1) \leq C B_i F_0(0) r^{-(1-b)i} \quad \forall i \geq 1, \quad (7.4.46)$$

где

$$\begin{aligned} B_i &= r^{-1+(1-b)i} + \frac{r^{-(1-b)}(1 - r^{(1-b)(i-1)})}{r^{-(1-b)} - 1} \\ &\leq r^{-b} + (1 - r^{(1-b)})^{-1} := B \quad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

В силу (7.4.21) из оценки (7.4.45) следует

$$E(t_i, s_1) \leq C F_0(0)^b B F_0(t_i)^{1-b} \quad \forall i \geq 1.$$

Отсюда в силу монотонности по t функции $E(t, s_1)$ вытекает, что

$$E(t, s_1) \leq C K_2 F_0(0)^b F_0(t)^{1-b} \quad \forall t > 0, \quad K_2 = B r^{-(1-b)}. \quad (7.4.47)$$

Вспоминая определение (7.2.3) функций $h_j(s)$, из второй оценки (7.4.44) легко выводим, что

$$h(t, s_1) \leq C K_2 F_0(0)^b F_0(t)^{1-b} \quad \forall t > 0. \quad (7.4.48)$$

Тем самым получены необходимые оценки (7.4.20) с K_2 из (7.4.47) и K_1 из (7.4.44). $\square$

Теперь переходим непосредственно к доказательству теоремы 7.4.1. Будем итеративно использовать лемму 7.4.2. Применение этой леммы с

оценками (7.4.47), (7.4.48) в качестве начальных вместо (7.4.19) приводит к соотношениям второй итерации:

$$\begin{aligned} E(t, s_2) &\leq CK_2 F_0(0)^b K_2 F_1(0)^b F_1(t)^{1-b} \quad \forall t > 0, \\ h(t, s_2) &\leq CK_2 F_0(0)^b K_2 F_1(0)^b F_1(t)^{1-b} \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (7.4.49)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(t) &= F_0(t)^{1-b} = \exp[w_1(T-t)^{-\frac{1}{l}}], \quad w_1 = (1-b)w, \\ s_2 &= s_1 + K_1 w_1^{\frac{l}{l+1}} = s_1 + K_1(1-b)^{\frac{l}{l+1}} w^{\frac{l}{l+1}}. \end{aligned}$$

Полученные оценки (7.4.49) используем вместо (7.4.19) для следующего использования леммы 7.4.2. В итоге после j таких итераций леммы 7.4.2 приходим к

$$\max\{E(t, s_j), h(t, s_j)\} \leq CK_2^j \prod_{i=0}^{j-1} F_i(0)^b F_j(t) \quad \forall t > 0, \quad (7.4.50)$$

$$F_j(t) := \exp[(1-b)^j w(T-t)^{-\frac{1}{l}}].$$

Оптимизируем теперь оценку (7.4.50), выбирая количество итераций так, чтобы минимизировать правую часть этой оценки. Положим это оптимальное значение j_0 так, чтобы было выполнено соотношение:

$$(1-b)^{j_0+1} \leq \left(\frac{T-t}{T}\right)^{\frac{1}{l}} < (1-b)^{j_0} \implies j_0 \leq \frac{\ln T - \ln(T-t)}{l \ln(1-b)^{-1}}.$$

При этом $(1-b)^{j_0} \leq \frac{(T-t)^{\frac{1}{l}}}{T^{1/l}(1-b)}$ и из оценки (7.4.50) следует

$$\begin{aligned} E(t, s_\infty) + h(t, s_\infty) &\leq 2C \exp[\ln K_2 \cdot j_0 + \frac{w}{T^{1/l}b}] \\ &\times \exp[(1-b)^{j_0} w(T-t)^{-\frac{1}{l}}] \leq A_1 (T-t)^{-A} \quad \forall t > 0, \\ A_1 &= \exp \left[\ln K_2 \cdot \frac{\ln T}{l \ln(1-b)^{-1}} + \frac{w}{T^{1/l}(1-b)b} \right], \\ A &= l^{-1} (\ln(1-b)^{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (7.4.51)$$

где $s_\infty := \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 1 + K_3 w^{\frac{l}{l+1}}$, $K_3 = k_2 \omega^{-\frac{l}{l+1}} (1 - (1-b)^{\frac{l}{l+1}})^{-1}$. Сингулярный режим, задаваемый оценкой (7.4.51), является уже не экспоненциальным, а степенным, то есть "пологим" в смысле леммы 7.4.1. Применение этой леммы и заканчивает доказательство. $\square$

7.4.1. О точности предельного S -режима, определяемого теоремой 7.4.1. Рассмотрим следующую модельную задачу Коши-Дирихле для одномерного линейного параболического уравнения порядка $2m$, $m > 1$ (см. [43]).

$$u_t + (-1)^m D_x^{2m} u = 0 \quad (t, x) \in (0, T) \times R_1^+, \quad (7.4.52)$$

$$u(t, 0) = f(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow T, \quad (7.4.53)$$

$$u(t, 0) = \dots = D_x^{m-1} u(t, 0) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (7.4.54)$$

$$u(0, x) = 0. \quad (7.4.55)$$

Решение этой линейной задачи выписывается явно:

$$u(t, x) = 2(-1)^m \int_0^t f(\tau) \cdot D_x^{2m-1} \varphi(t - \tau, x) d\tau, \quad (7.4.56)$$

где $\varphi(t, x)$ – фундаментальное автомодельное решение уравнения (7.4.52):

$$\varphi(t, x) = t^{-\frac{1}{2m}} \Phi(y), \quad y = \frac{x}{t^{1/2m}}. \quad (7.4.57)$$

Здесь $\Phi(y)$ – единственное симметрическое ($\Phi(y) = \Phi(-y)$) решение линейного ОДУ:

$$(-1)^{m+1} \Phi^{(2m)}(y) + (2m)^{-1} (\Phi(y)y)' = 0 \text{ в } \mathbb{R}^1 \quad (7.4.58)$$

с нормировкой $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) dy = 1$. Ясно, что асимптотические свойства решения u из (7.4.56) определяются асимптотическими свойствами при $y \rightarrow \pm\infty$ ядра $\Phi(y)$ из (7.4.57). Установим некоторые такие свойства. Во-первых, используя простейшие свойства преобразования Фурье

$$F : \Phi(y) \rightarrow G(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \exp(-izy) dy,$$

выводим из (7.4.58), что $G(z)$ удовлетворяет следующему ОДУ:

$$z^{2m} G(z) + \frac{1}{2m} z G(z)' = 0. \quad (7.4.59)$$

Условие нормировки для $\Phi(y)$ приводит к равенству $G(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, учитывая которое при решении уравнения (7.4.59), получаем:

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^{2m}).$$

Следовательно, проводя обратное преобразование Фурье и учитывая симметричность функции $G(z) : G(z) = G(-z)$, получаем выражение для $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-z^{2m}) \cos(yz) dz. \quad (7.4.60)$$

Непосредственный анализ асимптотических свойств функции $\Phi(y)$, определяемой (7.4.60) представляется весьма затруднительным. Поэтому построим асимптотическое разложение при $|y| \rightarrow \infty$ функции $\Phi(y)$ как решения уравнения (7.4.58). Для этого, следуя методам стандартного асимптотического анализа, найдем сначала общее комплексное решение $\tilde{\Phi}(y)$ уравнения (7.4.58) в виде асимптотического разложения:

$$\Phi(y) A \exp(-a|y|^\alpha)(1 + g(y)), \quad g(y) \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty. \quad (7.4.61)$$

Очевидно, что

$$(y\Phi(y))' = A(-a\alpha)|y|^\alpha \exp(-a|y|^\alpha)(1 + g_1(y)),$$

$$\tilde{g}_1(y) \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty;$$

$$\Phi^{2m}(y) A(-a\alpha)^{2m}|y|^{2m(\alpha-1)} \exp(-a|y|^\alpha)(1 + \tilde{g}_2(y)),$$

$$\tilde{g}_2(y) \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу уравнения (7.4.58):

$$\alpha = 2m(\alpha - 1) \iff \alpha = \frac{2m}{(2m - 1)} \in (1, 2), \quad (7.4.62)$$

а также

$$(-1)^{m+1}(-a\alpha)^{2m} + \frac{1}{2m}(-a\alpha) = 0 \iff (-1)^m(a\alpha)^{2m-1} + 1/2m = 0. \quad (7.4.63)$$

Подставляя (7.4.62) в (7.4.63), получаем, что

$$a^{2m-1} = (-1)^{m-1}(2m)^{-1} \cdot \left(\frac{2m-1}{2m} \right)^{2m-1}.$$

Это алгебраическое уравнение $(2m-1)$ степени имеет $(2m-1)$ корней:

$$a_k = (2m-1)(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}} \left(\cos \frac{\pi(k-1)}{2m-1} + i \sin \frac{\pi(k-1)}{2m-1} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, 2m-1.$$

Ясно, что корень с $\max_{1 \leq k \leq 2m-1} \operatorname{Re} a_k < 0$, то есть a_m , определяет старший член в асимптотическом разложении произвольного комплексного решения $\tilde{\Phi}(y)$. Следовательно, существуют постоянные $A_1 = A_1(m)$, $A_2 = A_2(m)$ такие, что решение $\Phi(y)$ из (7.4.60) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= A_1 \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(y) + A_2 \operatorname{Im} \tilde{\Phi}(y) \\ &= \exp(-a_{m,1}|y|^\alpha) [A_1 \cos(a_{m,2}|y|^\alpha) + A_2 \sin(a_{m,2}|y|^\alpha)] \cdot (1 + g(y)), \\ g(y) &\rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty, \quad a_{m,1} := (2m-1)(2m)^{-\alpha} \cos\left(\frac{\pi(m-1)}{2m-1}\right), \\ a_{m,2} &:= (2m-1)(2m)^{-\alpha} \sin\left(\frac{\pi(m-1)}{2m-1}\right).\end{aligned}\tag{7.4.64}$$

Дифференцируя это разложение $(2m-1)$ раз и учитывая, что $(2m-1)(\alpha-1) = 1$, приходим к следующему асимптотическому равенству:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2m-1)}(y) &= y \exp(-a_{m,1}|y|^\alpha) [B_1 \cos(a_{m,2}|y|^\alpha) \\ &\quad + B_2 \sin(a_{m,2}|y|^\alpha)] (1 + \bar{g}(y)) \quad \forall y \geq 0,\end{aligned}\tag{7.4.65}$$

где $\bar{g}(y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$; $B_1 = B_1(m)$, $B_2 = B_2(m)$: $B_1^2 + B_2^2 := B^2 \neq 0$. Рассмотрим теперь решение $u(t, x)$ задачи (7.4.52)–(7.4.55) с граничным режимом:

$$f(t) = \exp((T-t)^{-\frac{1}{2m-1}})\tag{7.4.66}$$

В силу представления (7.4.56) и равенства (7.4.65) главный член $\tilde{u}(t, x)$ асимптотического разложения этого решения при $t \rightarrow T$ имеет вид:

$$\tilde{u}(t, x) = B_3 x I_x(t) + B_4 x J_x(t), \quad B_3^2 + B_4^2 \neq 0,\tag{7.4.67}$$

$$\begin{aligned}I_x(t) &:= \int_0^t \exp[(T-\tau)^{-\gamma} - a_{m,1}x^\alpha(t-\tau)^{-\gamma}] \cos(a_{m,2}x^\alpha(t-\tau)^{-\gamma}) \\ &\quad \cdot (t-\tau)^{-\frac{1}{2m}} d\tau;\end{aligned}$$

$$J_x(t) := \int_0^t \exp[(T-\tau)^{-\gamma} - a_{m,1}x^\alpha(t-\tau)^{-\gamma}] \sin(a_{m,2}x^\alpha(t-\tau)^{-\gamma}) (t-\tau)^{-\frac{1}{2m}} d\tau.$$

Рассмотрим вопрос об условиях сходимости (расходимости) при $t \rightarrow T$ осцилляционных интегралов, определяющих функции $I_x(t)$, $J_x(t)$. Сделаем в интеграле из $I_x(t)$ замену переменной интегрирования:

$$v = (T-t)^{\frac{\alpha}{2m}} \cdot (t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2m}} \implies (T-\tau) = (T-t)(1 + v^{-\frac{2m}{\alpha}}).$$

В результате стандартных вычислений приходим к

$$I_x(t) = \frac{2m}{\alpha} (T-t)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{v_0}^{\infty} \exp \left[(T-t)^{-\frac{\alpha}{2m}} \left(\frac{v}{(1+v^{\frac{2m}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{2m}}} - a_{m,1} x^{\alpha} v \right) \right] \\ \times \cos(a_{m,2} x^{\alpha} (T-t)^{-\frac{\alpha}{2m}} v) v^{-(2m-\alpha^{-1})} dv, \quad v_0 = (T-t)^{\frac{\alpha}{2m}} t^{-\frac{\alpha}{2m}}.$$

Произведем теперь замену параметров в выражении для $I_x(t)$:

$$k := a_{m,1} x^{\alpha} \implies x = x(k) := \left(\frac{k}{a_{m,1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad s := (T-t)^{-\frac{\alpha}{2m}} \\ \implies t = t(s) := T - s^{-\frac{2m}{\alpha}}, \quad v_0(t(s)) := \bar{v}_0(s) = (Ts^{\frac{2m}{\alpha}} - 1)^{-\frac{\alpha}{2m}}. \quad (7.4.68)$$

При этом имеем новую энергетическую функцию:

$$\bar{I}_k(s) := I_{x(k)}(t(s)) = \frac{2m}{\alpha} s^{-\frac{2m}{\alpha^2}} \\ \times \int_{\bar{v}_0(s)}^{\infty} \exp[s\psi_k(v)] \cos(\beta k v s) v^{-(2m-\alpha^{-1})} dv. \quad (7.4.69)$$

где $\beta = a_{m,2} a_{m,1}^{-1}$, $\psi_k(v) = \frac{v}{(1+v^{\frac{2m}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{2m}}} - kv$, параметр s изменяется в интервале $(T^{-\frac{\alpha}{2m}}, \infty)$, $\bar{v}_0(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала случай:

$$k > 1 \iff x > a_{m,1}^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.4.70)$$

При этом, очевидно, что $\psi_k(v) < c_0 = c_0(k) < 0 \quad \forall v > \bar{v}_0$. Кроме того очевидно, что на всем интервале интегрирования в (7.4.69) имеет место:

$$v^{-(2m-\alpha^{-1})} \leq \bar{v}_0(s)^{-(2m-\alpha^{-1})} = (Ts^{\frac{2m}{\alpha}} - 1)^{\frac{\alpha(2m-\alpha^{-1})}{2m}}.$$

В силу этих неравенств вытекает равномерная ограниченность при $s \rightarrow \infty$ интеграла в (7.4.69). Следовательно, при условии (7.4.70) имеет место равномерная ограниченность функции $I_x(t)$ при $t \rightarrow T$. Аналогично показывается, что и для $J_x(t)$ имеется также равномерная ограниченность. Поэтому из (7.4.67) вытекает справедливость следующего включения множества сингулярности $\Omega_s(u)$ решения и задачи (7.4.52)–(7.4.55), (7.4.66):

$$\Omega_s(u) \subset \left\{ x : x \leq a_{m,1}^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

Теперь нашей основной задачей является проверка того, что

$$\Omega_s(u) \cap \{x : 0 < x < a_{m,1}^{-\frac{1}{\alpha}}\} \neq \emptyset. \quad (7.4.71)$$

Итак, зафиксируем точку x :

$$0 < x < a_{m,1}^{-\frac{1}{\alpha}} \iff k = k(x) < 1 \quad (k \text{ из (7.4.68)}). \quad (7.4.72)$$

При этом, как не сложно проверить,

$$\psi_k(v) > 0 \quad \forall v \in (0, v_1), \quad v_1 = \left(k^{-\frac{2m}{\alpha}} - 1\right)^{\frac{\alpha}{2m}}. \quad (7.4.73)$$

Причем $\psi_k(v_1) = 0$ и $\psi_k(v) < 0 \quad \forall v > v_1$. На интервале $(0, v_1)$ функция ψ_k достигает максимальное значение в точке $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \left(k^{-\frac{2m}{\alpha+2m}} - 1\right)^{\frac{\alpha}{2m}}, \quad \psi_k(v_{\max}) = k \left(k^{-\frac{2m}{\alpha+2m}} - 1\right)^{\frac{\alpha+2m}{2m}}. \quad (7.4.74)$$

Запишем теперь интеграл из (7.4.69) в виде:

$$\bar{I}_k(s) = \frac{2m}{\alpha} s^{-\frac{2m}{\alpha^2}} E_k(s), \quad E_k(s) := \int_{\bar{v}_0(s)}^{\infty} \exp[s\psi_{k,s}(v)] \cos(\beta k v s) dv, \quad (7.4.75)$$

$$\psi_{k,s}(v) := \psi_k(v) - s^{-1}(2m - \alpha^{-1}) \ln v.$$

Очевидно, что для всех $v > \bar{v}_0(s)$:

$$-s^{-1} \ln v \leq -s^{-1} \ln \bar{v}_0 = s^{-1} \frac{\alpha}{2m} \ln(T s^{\frac{2m}{\alpha}} - 1) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (7.4.76)$$

Поэтому функция $\psi_{k,s}(v)$ на интервале $(\bar{v}_0(s), \infty)$ достигает максимум в единственной точке

$$v_{\max}^{(s)} = v_{\max}^{(s)}(k) = v_{\max} + \omega_1(s). \quad (7.4.77)$$

где $v_{\max} = v_{\max}(k)$ из (7.4.74), а $\omega_1(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Очевидно также, что

$$\psi_{k,s}(v_{\max}^{(s)}) = \psi_k(v_{\max}) + \omega_2(s), \quad (7.4.78)$$

где $\psi_k(v_{\max})$ из (7.4.74), и $\omega_2(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Кроме того

$$\psi_{k,s}''(v_{\max}^{(s)}) = \psi_k''(v_{\max}) + \omega_3(s), \quad (7.4.79)$$

где $\psi_k''(v_{\max}) = -\frac{\alpha + 2m}{\alpha} v_{\max}^{\frac{2m-\alpha}{\alpha}} \left(1 + v_{\max}^{\frac{2m}{\alpha}}\right)^{-\frac{\alpha+4m}{2m}}$, $\omega_3(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Разлагая теперь функцию $\psi_{k,s}(v)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $v = v_{\max}^{(s)}$, запишем функцию $E_k(s)$ из (7.4.75) в виде:

$$E_k(s) = \int_{\bar{v}_0(s)}^{\infty} \exp[s(\psi_{k,s}(v_{\max}^{(s)}) + 2^{-1}\psi_{k,s}''(v_{\max}^{(s)})(1 + \mu_s(v - v_{\max}^{(s)})) \times (v - v_{\max}^{(s)})^2] \cos(\beta k(v - v_{\max}^{(s)})s + \beta k v_{\max}^{(s)}s) dv, \quad (7.4.80)$$

где $\mu_s(\tau)$ – семейство непрерывных функций, обладающее свойством:

$$|\mu_s(\tau)| < c(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1, \quad \forall s > s_0, \quad c = \text{const} < \infty. \quad (7.4.81)$$

Так как непрерывная функция $g(s) := s v_{\max}^{(s)} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то существует неограниченное множество S точек s таких, что

$$\beta k s v_{\max}^{(s)} = 2n(s)\pi, \quad \text{где } n(s) \in \mathbb{N}. \quad (7.4.82)$$

Сделаем теперь в интеграле из (7.4.80) замену переменной интегрирования: $v \rightarrow v + v_{\max}^{(s)}$, получим с учетом (7.4.82):

$$E_k(s) = E_k^{(s)}(s), \quad E_k^{(\tau)}(s) := \exp(s\psi_{k,\tau}(v_{\max}^{(\tau)})) \int_{\bar{v}_0(s) - v_{\max}^{(\tau)}}^{\infty} \exp[2^{-1}s\psi_{k,\tau}''(v_{\max}^{(\tau)}) \times (1 + \mu_{\tau}(v))v^2] \cos(\beta k v s) dv \quad \forall s \in S, \quad \forall \tau \in S. \quad (7.4.83)$$

С учетом свойств (7.4.77), (7.4.78), (7.4.79) имеем:

$$E_k^{(\infty)}(s) = \exp(s\psi_k(v_{\max})) \int_{\bar{v}_0(s) - v_{\max}}^{\infty} \exp[2^{-1}s\psi_k''(v_{\max}) \times (1 + \mu_{\infty}(v))v^2] \cos(\beta k v s) dv, \quad (7.4.84)$$

где функция μ_{∞} удовлетворяет оценке (7.4.81). Асимптотические свойства функции $E_k^{(\infty)}(s)$ будем связывать с поведением при $s \rightarrow \infty$ следующей модельной функции:

$$\bar{E}_k^{(\infty)}(s) := \exp(s\psi_k(v_{\max})) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2^{-1}\psi_k''(v_{\max})sv^2) \times \cos(\beta k v s) dv \quad \forall s > 0. \quad (7.4.85)$$

Лемма 7.4.3. *Функция $\bar{E}_k^{(\infty)}(s)$ имеет следующее явное представление:*

$$\bar{E}_k^{(\infty)}(s) = A s^{-1/2} \exp(sR(k)), \quad A = \text{const} > 0,$$

причем существует значение $\bar{k} = \bar{k}(m) : 0 < \bar{k} < 1$, такое, что $R(k) > 0$ при $0 < k < \bar{k}$, $R(\bar{k}) = 0$, $R(k) < 0$ при $k > \bar{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вводя в интеграле (7.4.85) новую переменную интегрирования:

$$-2^{-1}\psi_k''(v_{\max})sv^2 = z^2 \implies v = \frac{z}{(-2^{-1}\psi_k''(v_{\max})s)^{1/2}},$$

перепишем этот интеграл в виде:

$$(as)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^2) \cos(bs^{1/2}z) dz := (as)^{-\frac{1}{2}} f(s)^{1/2}, \quad (7.4.86)$$

где $a = -2^{-1}\psi_k''(v_{\max})$, $b = \beta ka^{-1/2}$. Покажем, что функция $f(s)$ из (7.4.86) удовлетворяет некоторому ОДУ. Действительно, легко проверить, что

$$\begin{aligned} f'(s) &= -b \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) \sin(bsz) z dz \\ &= 2^{-1}b \int_{-\infty}^{\infty} \sin(bsz) \frac{d}{dz} (\exp(-z^2)) dz. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, выводим:

$$f'(s) + 2^{-1}b^2 s f(s) = 0. \quad (7.4.87)$$

Решая это уравнение, получаем с учетом 7.4.86:

$$f(s) = d \exp\left(-\frac{b^2}{4}s^2\right), \quad d = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \pi^{1/2}. \quad (7.4.88)$$

Возвращаясь к определению (7.4.85), выводим с учетом (7.4.86), (7.4.88):

$$\bar{E}_k^{(\infty)}(s) = (as)^{\frac{1}{2}} \exp(s\psi_k(v_{\max})) f(s^{1/2}) = \frac{2^{1/2}\pi^{1/2}s^{-\frac{1}{2}}}{(-\psi_k''(v_{\max}))^{1/2}} \exp(sR(k)), \quad (7.4.89)$$

$$R(k) := \psi_k(v_{\max}) - \frac{\beta^2 k^2}{2(-\psi_k''(v_{\max}))}.$$

Используя значение $\psi_k(v_{\max})$ из (7.4.74) и $\psi_k''(v_{\max})$ из (7.4.79), получаем в результате простых вычислений:

$$R(k) = \frac{2(\alpha + 2m)(1 - k^{\frac{2m}{\alpha+2m}})^2 - \alpha\beta^2 k^{\frac{2m}{\alpha+2m}}}{2(\alpha + 2m)(1 - k^{\frac{2m}{\alpha+2m}})^{\frac{2m-\alpha}{2m}}}. \quad (7.4.90)$$

Учитывая, что $\alpha + 2m = 2m\alpha$, имеем:

$$R(k) = \frac{4m(1 - k^{\frac{1}{\alpha}})^2 - \beta^2 k^{\frac{1}{\alpha}}}{4m(1 - k^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{2m-2}{2m-1}}}.$$

Отсюда просто следует, что и $R(k) < 0$ при $k > \bar{k}$ и

$$R(k) > 0, \text{ если } k < \bar{k} = \left[1 - \frac{\beta}{4m} \left(\left(1 + \frac{8m}{\beta}\right)^{1/2} - 1 \right)\right]^2 < 1 \quad (7.4.91)$$

Лемма 7.4.3 доказана. $\square$

Справедливость следующего общего условного утверждения о точности предельного локализованного S -режима (7.4.66) в задаче (7.4.52)–(7.4.55), а следовательно, и общего S -режима, определяемого в теореме 7.4.1 вытекает из леммы 7.4.3.

Предложение 7.4.1. *Предположим, что справедлива следующая гипотеза:*

Н) *при всех $k \in (0, 1)$ определяемые в (7.4.83) и (7.4.85) функции $E_k^{(s)}(s)$ и $\bar{E}_k^{(\infty)}(s)$ имеют одинаковый главный член в асимптотическом разложении при $s \rightarrow \infty$.*

Пусть $\bar{k} \in (0, 1)$ — число, определяемое в (7.4.91). Тогда множество сингулярности $\Omega_s(u)$ решения и задачи (7.4.52)–(7.4.55) содержит множество $\{x : |x| < (\bar{k}a_{m,1}^{-1})^{1/\alpha}\}$.

ГЛАВА 8

НЕЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕЖИМЫ С СИНГУЛЯРНЫМ ОБОСТРЕНИЕМ

8.1. Распространение волны сингулярности

Переходим к изучению нелокализованных граничных режимов. Для таких режимов множество сингулярности $\Omega_s(u)$ произвольного решения u совпадает со всей исходной областью Ω задачи. Поэтому для описания степени сингулярности таких режимов необходимо вводить дополнительные характеристики поведения соответствующих решений в окрестности времени обострения.

Хорошее представление о таких характеристиках дает семейство явных решений (7.3.76) модельного уравнения (7.3.74). При произвольном $l > (p-1)^{-1}$ граничный режим (7.3.81), порождающий решение (7.3.76), очевидно является нелокализованным граничным режимом с обострением. Причем, как это следует из теорем 7.3.2, 7.3.3,

$$u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) : x \geq a(T-t)^{-\beta} \quad \forall t < T, \quad (8.1.1)$$

и при любом $\varepsilon > 0$:

$$u(t, (a-\varepsilon)(T-t)^{-\beta}) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (8.1.2)$$

где $a = \text{const} < \infty$ – определяемая в теореме 7.3.2 граница носителя решения $v(y)$ эллиптической задачи (7.3.77), (7.3.78). Следовательно происходит волнообразное неограниченное расширение носителя решения и задачи (7.3.74), (7.3.81) и аналогичное распространение зоны сингулярного роста решения.

Понятно, что свойство конечности скорости распространения носителя решения (8.1.1) имеет место только в случае финитности начальной функции u_0 (у решения $u(t, x)$ из (7.3.76) $u_0(x) = T^{-l}v(xT^{-\beta})$). В общей же ситуации, когда u_0 не является финитной функцией, естественно ожидать, что вместо (8.1.1) имеет место следующее свойство: существует постоянная $L < \infty$, зависящая только от u_0 такая, что

$$u(t, x) \leq L \quad \forall (t, x) : x \geq a(T-t)^{-\beta} \quad \forall t < T. \quad (8.1.3)$$

С учетом свойств (8.1.2), (8.1.3) введем следующую характеристику произвольного нелокализованного граничного режима.

Определение 8.1.1. *Непрерывная функция $\chi_L(t)$ называется эффективной длиной распространения волны сингулярности непрерывного решения и некоторой задачи с нелокализованным граничным режимом, если*

$$u(t, x) \leq L \quad \forall (t, x) \in \{t < T, |x| \geq \chi_L(t)\}; \quad L = \text{const} < \infty.$$

Достаточно полная классификация нелокализованных граничных режимов в терминах функции эффективной длины распространения волны сингулярности имеется для различных модельных квазилинейных параболических уравнений второго порядка (см. [109] гл. 3, 6). Для энергетических решений общих дивергентных квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка структуры (7.1.1) адекватное определение функции эффективной длины распространения волны сингулярности было введено в [44]. При этом в [44], [45] установлены точные по порядку оценки сверху распространения этой волны при некоторых конкретных сингулярных граничных режимах.

В настоящей главе изучается распространение волны сингулярности при произвольных нелокализованных (в том числе, как угодно сильно сингулярных) граничных режимах, устанавливаются точные по порядку оценки сверху соответствующей функции $\chi_L(t)$. Ясно, что возможность изучения распространения волны сингулярности при $t \rightarrow T$ в случае нелокализованного граничного режима имеется только при неограниченности исходной области Ω . Поэтому в настоящей главе в отличие от предыдущей рассматриваются решения $u(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.9) в неограниченной области Ω с границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$.

Замечание 8.1.1. В случае произвольной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существование обобщенного энергетического решения $u \in L_{p+1}(0, T, W(\Omega))$, где $W(\Omega) = \{v : \|v\|_{W(\Omega)} := \|v\|_{L_{p+1}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L_{p+1}(\Omega)} < \infty\}$, однородной ($f = 0$) задачи (7.1.5)–(7.1.7) для неоднородного уравнения (7.1.1) (т.е. уравнения P) из замечания 7.1.1) следует из результатов работы [15] при выполнении условия (7.1.4) и потенциальности оператора A , то есть при существовании функции $F(t, x, \xi)$ такой, что $a_\alpha(t, x, \xi) = \frac{\partial F(t, x, \xi)}{\partial \xi_\alpha} \quad \forall \alpha : |\alpha| = m$.

8.2. Оценки волны сингулярности для уравнения типа медленной диффузии

Рассматриваем в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ начально-краевую задачу (7.1.1)–(7.1.7) при $p > q > 0$ с сингулярно обостряющимся граничным режимом, характеризуемым функцией $F(t)$ из определения 7.1.10.

Будем допускать к рассмотрению как угодно сильно обостряющиеся граничные режимы, то есть будем предполагать выполненным противоположное к условию (7.3.1) из теоремы 7.3.1 неравенство

$$\ln(F(t)) := g(T-t) \geq \frac{q+1}{p-q} \ln(T-t)^{-1} := g_s(T-t) \quad \forall t : 0 \leq t_0 \leq t < T. \quad (8.2.1)$$

Очевидно, без ограничения общности рассмотрения можем полагать, что $t_0 = 0$. Для изучаемых энергетических обобщенных решений определение функции $\chi_L(t)$ распространения волны сингулярности естественно трансформируется в следующее определение, оперирующее только с энергетическими функциями, связанными с решением.

Определение 8.2.1. При произвольной постоянной $L \gg 1$ эффективной глубиной распространения волны сингулярности, связанной с решением $u(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.10), называем непрерывную функцию $\chi_L(t)$, определяемую равенством

$$\sup_{0 < \tau < t} \int_{\{|x| > \chi_L(t)\}} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\{|x| > \chi_L(t)\}} |D_x^m u(\tau, x)|^{p+1} d\tau dx = L. \quad (8.2.2)$$

Определение 8.2.2. Будем говорить, что некоторая непрерывная монотонно убывающая на интервале $(0, T]$ функция $g(\tau) : g(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$, является правильно убывающей, если найдутся постоянные $k_0 > 0$ и $v_0 \geq g(T)$ такие, что при любом $k > k_0$ и некотором $\delta = \delta(k) : 0 \leq \delta < 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{p-q}{q+1}w\right) [g^{-1}(w-k) - g^{-1}(w)] \\ & \geq (1-\delta) \exp\left(\frac{p-q}{q+1}v\right) [g^{-1}(v-k) - g^{-1}(v)] \quad \forall w > v > v_0 + k. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

В настоящем разделе мы устанавливаем общие точные по порядку оценки сверху распространения волны сингулярности $\chi_L(t)$ в терминах произвольной правильно убывающей (в смысле определения 8.2.2) мажоранты $g_0(\tau)$ функции $g(\tau)$ из (8.2.1). Отметим, что в силу (8.2.1) для произвольной мажоранты $g_0(\tau)$ справедлива оценка

$$g_0(\tau) \geq \frac{q+1}{p-q} \ln \tau^{-1} \quad \forall \tau \in (0, T), \quad (8.2.4)$$

и, следовательно, для обратной функции $g_0^{-1}(v)$ имеет место оценка

$$g_0^{-1}(v) \geq \exp\left(-\frac{(p-q)}{(q+1)}v\right) \quad \forall v \geq g_0(T). \quad (8.2.5)$$

Для произвольного $k > 0$ определим функции

$$G_k(v) := \exp\left(\frac{p-q}{q+1}v\right)[g_0^{-1}(v-k) - g_0^{-1}(v)] \quad \forall v > g_0(T) + k, \quad (8.2.6)$$

и минимальную монотонно неубывающую мажоранту функции $G_k(v)$

$$\bar{G}_k(v) := \max_{v_0^{(0)} \leq \bar{v} < v} G_k(\bar{v}) \quad \forall v > v_0^{(0)} := g_0(T) + k. \quad (8.2.7)$$

Отметим, что множество правильно убывающих мажорант $g_0(\tau)$, удовлетворяющих оценке (8.2.4), порождает множество функций $G_k(v)$ из (8.2.6), удовлетворяющих неравенствам:

$$G_k(w) \geq (1-\delta)G_k(v) \quad \forall w > v > v_0 + k, \quad (8.2.8)$$

$$0 < c_1 \leq G_k(v) < c_2 \exp\left(\frac{p-q}{q+1}v\right) \quad \forall v > v_0 + k. \quad (8.2.9)$$

Ясно, что любая функция, удовлетворяющая оценкам (8.2.8), (8.2.9), попадает в один из двух следующих классов:

А) существует постоянная $\beta : 0 < \beta < \frac{p-q}{q+1}$ и последовательность $\{v\}$, $v_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такие, что

$$G_k(v_i) \geq \exp(\beta v_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad 0 < \beta < \frac{p-q}{q+1}. \quad (8.2.10)$$

В) для любого числа $\beta > 0$ найдется конечное число v_β такое, что

$$G_k(v) \leq \exp(\beta v) \quad \forall v \geq v_\beta. \quad (8.2.11)$$

Легко видеть, что в класс А) попадают, в частности, все функции, порождаемые сильно сингулярными граничными режимами $g_0(\tau)$, т.е. режимами, удовлетворяющими:

$$g_0(\tau)(\ln \tau^{-1})^{-1} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0.$$

В класс В) попадают функции $G_k(v)$, порождаемые слабо сингулярными режимами, то есть такими функциями $g_0(\tau)$, что

$$\frac{g_0(\tau)}{g_s(\tau)} := \frac{(p-q)g_0(\tau)}{(q+1)\ln \tau^{-1}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0.$$

Введем также следующий подкласс функций класса А):

$\bar{A})$ существуют постоянные $\beta : 0 < \beta < \frac{p-q}{q+1}$ и $v_0 > 0$ такие, что

$$G_k(v) \geq \exp(\beta v) \quad \forall v \geq v_0. \quad (8.2.12)$$

Приведем теперь вывод оценок распространения волны сингулярности. Результат этих вычислений сформулируем в итоге в виде двух основных лемм 8.2.2, 8.2.1 для режимов из классов $A)$ и $B)$ соответственно.

Итак, в силу леммы 7.2.1 имеем следующую глобальную энергетическую оценку рассматриваемого решения u :

$$h(t, 1) + E(t, 1) \leq C_0 F_0(t) := C_0 \exp(g_0(T - t)) \quad \forall t > 0, C_0 = \text{const} < \infty. \quad (8.2.13)$$

В соответствии с формулой (7.3.45) определим последовательность $\{t_i\}$ рекуррентным соотношением

$$F_0(t_j) := r^{-1} F_0(t_{j-1}) \quad \forall j > 1, \\ 0 \leq t_0 < F_0^{-1}(r^{-1} F_0(0)) = T - g_0^{-1}(g_0(T) + \ln r^{-1}) := t_1^{(0)}. \quad (8.2.14)$$

Как следствие, получаем

$$\Delta_j = t_j - t_{j-1} = g_0^{-1}(g_0(T - t_j) - \ln r^{-1}) - (T - t_j), \quad j \geq 1. \quad (8.2.15)$$

Обозначив $v_j := g_0(T - t_j)$, запишем (8.2.15) в виде

$$\Delta_j = g_0^{-1}(v_j - k) - g_0^{-1}(v_j), \quad k = \ln r^{-1}. \quad (8.2.16)$$

Теперь смещения $\bar{\delta}_i$ из (7.3.46) могут быть записаны в виде

$$\bar{\delta}_j = (C'_0 \bar{G}_k(v_j))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}, \quad k = \ln r^{-1}, \quad j \geq 1, \quad \bar{C}'_0 = C'_0 \frac{p-q}{q+1}, \quad (8.2.17)$$

где $\bar{G}_k(v)$ – функция из определения (8.2.7). В силу монотонности функции $\bar{G}_k(v)$ следует монотонное неубывание последовательности $\{\bar{\delta}_i\}$, а, значит, и применимость в рассматриваемой ситуации леммы 7.3.2. В силу этой леммы для энергетических функций рассматриваемого решения справедливы оценки (7.3.47), которые с учетом (8.2.13), (8.2.17) принимают вид

$$E_j(1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_j)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \leq C_0 r^{jb} F_0(t_j) \\ = C_0 r^{-(1-b)j} F_0(t_0) = C_0 F_0(t_0)^b F_0(t_j)^{1-b} \\ = C_0 \exp[b g_0(T - t_0)] \exp((1 - b) g_0(T - t_j)) \quad j = 1, 2, \dots, \\ h_j(1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_j)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\ \leq C_0 \exp[b g_0(T - t_0)] \exp((1 - b) g_0(T - t_j)), \quad (8.2.18)$$

где $k = \ln r^{-1}$. Суммируя оценки (8.2.18) для E_j по j от $j = 1$ до $j = i$, получаем с учетом монотонности функции $\bar{G}_k(v)$ следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
& E(t_i, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_i)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& \leq c_1 C_0 \exp((1 - b)g_0(T - t_i)) + E(t_0, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_i)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& \leq c_1 C_0 \exp[(1 - b)g_0(T - t_i)] + E(t_1^{(0)}, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_1^{(0)})))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& \leq c_1 C_0 \exp[(1 - b)g_0(T - t_i)] + C_0 \exp[bg_0(T)] \exp[(1 - b)g_0(T - t_1^{(0)})] \\
& \leq (1 + c_1) C_0 \exp[(1 - b)g_0(T - t_i)] \quad \forall i \geq 1, \tag{8.2.19}
\end{aligned}$$

где $c_1 = (1 - r^{1-b})^{-1} \exp[bg_0(T - t_0)]$. Из оценки (8.2.18) в силу монотонности функции $g_0(T - t)$ следует также, что

$$\begin{aligned}
& h(t_i, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_i)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& = \max\left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_0} h(t, 1 + c_0 \bar{C}_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_i)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}, \right. \\
& \quad \left. \max_{1 \leq j \leq i} h_j(1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t_i)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \right\}, \\
& \leq C_0 \max\{\exp[bg_0(T)] \exp[(1 - b)g_0(T - t_1^{(0)})], \\
& \quad \exp[bg_0(T - t_0)] \exp[(1 - b)g_0(T - t_i)]\} \\
& \leq C_0 \exp[(1 - b)g_0(T - t_i)] \exp[bg_0(T - t_0)] \\
& \leq c_2 C_0 \exp((1 - b)g_0(T - t_i)) \quad \forall i \geq 1, \quad c_2 = F_0(t_0)^b = \exp[bg_0(T - t_0)] \tag{8.2.20}
\end{aligned}$$

Варьируя $t_0 \in [0, t_1^{(0)}]$, где $t_1^{(0)}$ из (8.2.14), выводим из (8.2.19), (8.2.20) следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& E(t, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& \leq c_3 C_0 \exp[(1 - b)g_0(T - t)] \quad \forall t \in [t_1^{(0)}, T), \\
& h(t, 1 + c_0(C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}) \\
& \leq c_4 C_0 \exp((1 - b)g_0(T - t)), \quad \forall t \in [t_1^{(0)}, T), \tag{8.2.21}
\end{aligned}$$

где $c_3 = 2(1 - r^{1-b})^{-1}r^{-b} \exp(bg_0(T))$, $c_4 = 2^{-1}(1 - r^{1-b})c_3 < c_3$. Кроме того выводим из (8.2.13):

$$\begin{aligned} h(t, 1) + E(t, 1) &\leq C_0 \exp(bg_0(T - t)) \exp((1 - b)g_0(T - t)) \\ &\leq C_0 r^{-b} \exp(bg_0(T)) \exp((1 - b)g_0(T - t)) \quad \forall t \in [0, t_1^{(0)}]. \end{aligned} \quad (8.2.22)$$

Зафиксируем теперь произвольное число $\bar{t} < T$ и запишем следующие следствия оценок (8.2.21), (8.2.22):

$$\begin{aligned} \max\{h(t, 1 + s_0(\bar{t})), E(t, 1 + s_0(\bar{t}))\} &\leq \min\{C_0 F_0(t), C_1 F_0^{(1)}(t)\} \\ &\leq C_1 F_0^{(1)}(t) \quad \forall t \in (0, \bar{t}], \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

где $F_0^{(1)}(t) = \exp(g_1(T - t))$, $g_1(T - t) = (1 - b)g_0(T - t)$, $C_1 = 2C_0 \exp(bg_0(T)) \cdot r^{-b}(1 - r^{1-b})^{-1}$,

$$s_0(t) := \begin{cases} c_0 (C'_0 \bar{G}_k(g_0(T - t)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} & \forall t \in [t_1^{(0)}, T), \\ 0 & \forall t \in (0, t_1^{(0)}]. \end{cases} \quad (8.2.24)$$

Оценки (8.2.23) заканчивают первый цикл оценивания энергетических функций $h(t, s)$ и $E(t, s)$. Отметим, что новый сингулярный режим, определяемый установленной оценкой (8.2.23), является более пологим, чем исходный режим $F_0(t)$. В частности, может оказаться выполненным неравенство

$$\min\{C_0 F_0(t), C_1 F_0^{(1)}(t)\} \leq \omega_0 \exp(g_s(T - t)) \quad \forall t \in (0, \bar{t}), \quad (8.2.25)$$

где $g_s(\tau)$ из (8.2.1), $0 < \omega_0 = \text{const}$ не зависит от $\bar{t}$. При этом мы оказываемся в условиях применимости теоремы 7.3.1. В силу этой теоремы существуют постоянные c и $\bar{R}$, зависящие только от известных параметров и не зависящие от $\bar{t}$ такие, что

$$E(\bar{t}, 1 + s_0(\bar{t}) + \bar{s}) + h(\bar{t}, 1 + s_0(\bar{t}) + \bar{s}) \leq \bar{R} \quad \forall \bar{t} < T, \quad \bar{s} = c\omega_0^{\frac{p-q}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}}.$$

Это неравенство эквивалентно следующей оценке распространения волны сингулярности:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + s_0(\bar{t}) + \bar{s} \quad L = \bar{R}, \quad (8.2.26)$$

которая и является финальной оценкой волны сингулярности в случае (8.2.25). Покажем теперь, что оценка (8.2.25) и, следовательно, (8.2.26) справедлива для режимов $g_0(\tau)$, которым соответствуют функции $G_k(v)$,

принадлежащие классу B). В случае такой принадлежности из (8.2.11) вытекает:

$$\begin{aligned} \varphi_0(v-k) - \varphi_0(v) &\leq \exp\left(-\left(\frac{p-q}{q+1} - \beta\right)v\right) \quad \forall v > v_\beta, \\ \forall \beta : 0 < \beta < \frac{p-q}{q+1}, \quad \varphi_0(v) &:= g_0^{-1}(v). \end{aligned} \quad (8.2.27)$$

Отсюда непосредственно следует оценка:

$$\begin{aligned} \varphi_0(v) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_0(v+ik) - \varphi_0(v+(i+1)k)) \leq L_2 \exp(-\Gamma v) \\ \forall v \geq v_\beta, \quad \Gamma &:= \frac{p-q}{q+1} - \beta, \quad L_2 = \frac{\exp(\Gamma k)}{\exp(\Gamma k) - 1}, \end{aligned} \quad (8.2.28)$$

и, как следствие,

$$g_0(T-t) \leq \Gamma^{-1} \ln(L_2(T-t)^{-1}) = L_3 + \bar{g}_0(T-t) \quad \forall t \in [t_\beta, T), \quad (8.2.29)$$

где

$$\begin{aligned} t_\beta &:= T - g_0^{-1}(v_\beta), \quad \bar{g}_0(\tau) := \frac{(q+1) \ln \tau^{-1}}{(p-q) - \beta(q+1)}, \\ L_3 &= \Gamma^{-1} \ln L_2 = (q+1)(p-q - \beta(q+1))^{-1} \ln L_2. \end{aligned}$$

Зафиксируем теперь произвольное число $\rho : (1-b) < \rho < 1$, затем положим

$$\beta = \bar{\beta} := \rho^{-1}(q+1)^{-1}(p-q)(\rho-1+b). \quad (8.2.30)$$

Теперь с учетом (8.2.29) несложно проверить, что $g_1(\tau) := (1-b)g_0(\tau) = (1-b)L_3 + \rho g_s(\tau)$, $g_s(\tau)$ из (8.2.1). Поэтому имеем:

$$C_1 F_0^{(1)}(t) \leq \omega_0 \exp(\rho g_s(T-t)) \quad \forall t \in (t_{\bar{\beta}}, T), \quad \rho < 1, \quad (8.2.31)$$

где $\omega_0 = C_1 \exp((1-b)L_3)$. С учетом этого неравенства из (8.2.23) в силу леммы 7.3.1 вытекает следующая равномерная по $\bar{t} < T$ оценка:

$$J(t, 1 + s_0(\bar{t}) + \delta) \leq K(\delta) \quad \forall \delta > 0, \quad \forall t < \bar{t} < T, \quad (8.2.32)$$

где $K(\delta)$ – функция из (7.3.8), (7.3.33), соответствующая постоянным $C = \omega_0$ из (8.2.31) и $\gamma = (1-\rho)\frac{(q+1)}{p-q}$. Рассуждая теперь также как при выводе оценки (7.3.73) из неравенства (7.3.72) в концовке доказательства теоремы 7.3.1, выводим из (8.2.32) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} h(t, 1 + s_0(\bar{t}) + \delta) + k_1 E(t, 1 + s_0(\bar{t}) + \delta) &\leq (1+\varepsilon)\bar{h}_0 \\ + c(\varepsilon) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-m(p+1)} K\left(\frac{\delta}{2}\right) &\quad \forall t < \bar{t} < T, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \end{aligned} \quad (8.2.33)$$

где $\bar{h}_0$ из (7.1.5), постоянная $c = c(\varepsilon)$ не зависит от t , $\bar{t} < T$. Зафиксировав $\delta = \delta_0 > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, получаем из (8.2.33):

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + s_0(\bar{t}) + \delta_0 \quad \forall \bar{t} < T, \quad (8.2.34)$$

где

$$L = (1 + \varepsilon)\bar{h}_0 + c(\varepsilon_0) \left(\frac{\delta_0}{2} \right)^{-m(p+1)} K \left(\frac{\delta_0}{2} \right).$$

То есть, получена конкретизация оценки (8.2.26) в случае мажоранты $g_0(\tau)$ из класса В) и тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 8.2.1. Пусть монотонно невозрастающая на $[0, T)$ функция $g(\tau)$ определяется в (7.1.10), (8.2.1) сингулярным граничным режимом $f(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.7), а $g_0(\tau)$ – правильно убывающая в смысле определения 8.2.2., принадлежащая классу В) (см. (8.2.11)) мажоранта функции $g(\tau)$. Тогда при произвольных постоянных $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ для волны сингулярности произвольного решения рассматриваемой задачи справедлива оценка (8.2.34), где функция $K(s)$ определяется в (7.3.8), (7.3.33), а функция $s_0(t)$ из (8.2.24).

Снова возвращаемся к оценке (8.2.23). Мы рассмотрели случай, когда правая часть этой оценки удовлетворяет соотношению (8.2.25). Рассмотрим теперь ситуацию, когда (8.2.25) не выполняется, то есть, существует непустое множество $\sigma \subset (t_1^{(0)}, \bar{t})$ такое, что

$$C_1 F_0^{(1)}(t) \geq \omega_0 \exp(g_s(T - t)) \quad \forall t \in \sigma,$$

Проведем теперь новый цикл итеративного оценивания функций $h(t, s)$, $E(t, s)$. В этом цикле будем использовать оценку (8.2.23), как стартовую вместо оценок (8.2.13), использовавшихся в первом цикле. Соответственно, введем новую последовательность $\{t_i^{(1)}\}$ вместо последовательности (8.2.14):

$$F_0^{(1)}(t_j^{(1)}) := r^{-1} F_0^{(1)}(t_{j-1}^{(1)}) \quad \forall j \geq 1, \quad t_0^{(1)} \in [0, t_2^{(0)}], \quad (8.2.35)$$

где $F_0^{(1)}(t) := \exp[g_1(T - t)]$, а $t_2^{(0)}$ определяется по аналогии с $t_1^{(0)}$:

$$g_1(T - t_2^{(0)}) := g_1(T) + k \iff g_0(T - t_2^{(0)}) := g_0(T) + (1 - b)^{-1}k, \quad k = \ln r^{-1}. \quad (8.2.36)$$

Как следствие (8.2.35), (8.2.36), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_j^{(1)} &:= t_j^{(1)} - t_{j-1}^{(1)} = g_1^{-1}(g_1(T - t_j^{(1)}) - k) - (T - t_j^{(1)}) \\ &= g_0^{-1}\left(g_0(T - t_j^{(1)}) - \frac{k}{1 - b}\right) - (T - t_j^{(1)}), \quad \forall j \geq 1. \end{aligned} \quad (8.2.37)$$

Обозначив, $v_j^{(1)} := g_0(T - t_j^{(1)})$, получаем

$$\Delta_j^{(1)} = g_0^{-1} \left(v_j^{(1)} - \frac{k}{1-b} \right) - g_0^{-1}(v_j^{(1)}) \quad \forall j \geq 1. \quad (8.2.38)$$

Теперь, учитывая соотношения (8.2.37), (8.2.38), замечаем, что аналогом функции $G_k(v)$ из первого цикла в новом цикле является функция

$$G_k^{(1)}(v) := \exp \left(\frac{(p-q)(1-b)}{q+1} v \right) \left[g_0^{-1} \left(v - \frac{k}{1-b} \right) - g_0^{-1}(v) \right] \\ \forall v \geq g_0(T) + \frac{k}{1-b} := v_0^{(1)}. \quad (8.2.39)$$

То есть монотонно неубывающая последовательность смещений $\{\bar{\delta}_j^{(1)}\}$ может быть определена так:

$$\bar{\delta}_j^{(1)} := (C_1' \bar{G}_k^{(1)}(v_j^{(1)}))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}, \quad C_1' = C_1^{\frac{p-q}{q+1}}, \quad C_1 \text{ из (8.2.23)}, \\ \bar{G}_k^{(1)}(v) := \max_{v_0^{(1)} \leq \bar{v} \leq v} G_k^{(1)}(\bar{v}), \quad v_0^{(1)} = g_0(T) + \frac{k}{1-b}. \quad (8.2.40)$$

Введем теперь энергетические функции $E_j^{(1)}(s)$ и $h_j^{(1)}(s)$, соответствующие новой последовательности $\{t_j^{(1)}\}$. В силу леммы 7.3.2 из неравенства (8.2.23) вытекают следующие оценки этих новых энергетических функций, аналогичные оценкам (8.2.18) из первого цикла:

$$E_j^{(1)}(1 + s_0(\bar{t}) + s_1(t_j^{(1)})) \leq C_1 r^{jb} F_0^{(1)}(t_j^{(1)}) \\ = C_1 \exp \left[b g_1(T - t_0^{(1)}) \right] \exp \left[(1-b) g_1(T - t_j^{(1)}) \right] \quad \forall j : t_j^{(1)} \leq \bar{t}, \\ h_j^{(1)}(1 + s_0(\bar{t}) + s_1(t_j^{(1)})) \\ \leq C_1 \exp \left[b g_1(T - t_0^{(1)}) \right] \exp \left[(1-b) g_1(T - t_j^{(1)}) \right] \quad \forall j : t_j^{(1)} \leq \bar{t}, \quad (8.2.41)$$

где

$$s_1(t) = \begin{cases} c_0 (C_1' \bar{G}_k^{(1)}(g_0(T - t)))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} & \forall t \in [t_2^{(0)}, T) \\ 0 & \forall t \in [0, t_2^{(0)}]. \end{cases}$$

Кроме того, обозначая $g_2(T - t) := (1 - b)g_1(T - t)$, легко выводим из (8.2.23):

$$\begin{aligned} & \max\{h(t, 1 + s_0(\bar{t})), E(t, 1 + s_0(\bar{t}))\} \\ & \leq C_1 \exp(bg_1(T - t)) \exp((1 - b)g_1(T - t)) \\ & \leq C_1 r^{-b} \exp(bg_1(T)) \exp(g_2(T - t)) \quad \forall t \in (0, t_2^{(0)}). \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения, рассуждая также, как при выводе оценок (8.2.23) на основе (8.2.18), (8.2.22), выводим из неравенств (8.2.41):

$$\begin{aligned} & \max\{h(t, 1 + s_0(\bar{t}) + s_1(\bar{t})), E(t, 1 + s_0(\bar{t}) + s_1(\bar{t}))\} \\ & \leq \min\{C_0 F_0(t), C_1 F_0^{(1)}(t), C_2 F_0^{(2)}(t)\} \leq C_2 F_0^{(2)}(t) \quad \forall t \in (0, \bar{t}) \end{aligned} \quad (8.2.42)$$

где

$$C_2 = 2C_1 \exp(bg_1(T)(1 - r^{1-b})^{-1})r^{-b}, \quad F_0^{(2)}(t) = \exp(g_2(T - t)).$$

Сингулярный режим, определяемый оценкой (8.2.42), может оказаться достаточно пологим в том смысле, что выполняется оценка, аналогичная (8.2.25):

$$\min\{C_0 F_0(t), C_1 F_0^{(1)}(t), C_2 F_0^{(2)}(t)\} \leq \omega_0 \exp(g_s(T - t)) \quad \forall t < \bar{t}. \quad (8.2.43)$$

При этом применение теоремы 7.3.1 приводит к финальной оценке аналогичной (8.2.26):

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + s_0(\bar{t}) + s_1(\bar{t}) + \bar{s}, \quad L = \bar{R}. \quad (8.2.44)$$

Если же неравенство (8.2.43) не выполняется, то используем оценку (8.2.42) как стартовую оценку для следующего третьего цикла оценивания энергетических функций. В результате i таких циклов получаем:

$$\begin{aligned} & \max\left\{h(t, 1 + \sum_{j=0}^{i-1} s_j(\bar{t})), E(t, 1 + \sum_{j=0}^{i-1} s_j(\bar{t}))\right\} \\ & \leq \min\{C_0 F_0(t), C_1 F_0^{(1)}(t), \dots, C_i F_0^{(i)}(t)\} \\ & \leq C_i F_0^{(i)}(t) \quad \forall t \in (0, \bar{t}], \quad F_0^{(i)}(t) := \exp(g_i(T - t)), \end{aligned} \quad (8.2.45)$$

где $g_i(T - t) = (1 - b)^i g_0(T - t)$, коэффициенты C_i вычисляются при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{2C_{i-1} \exp[b g_{i-1}(T)]}{(1 - r^{1-b})r^b} = \frac{2C_{i-1} \exp[b(1 - b)^{i-1} g_0(T)]}{(1 - r^{1-b})r^b} \\ &\leq D_0 C_{i-1} \quad \forall i \geq 1, D_0 := 2(1 - r^{1-b})^{-1} r^{-b} \exp[b g_0(T)]; \end{aligned} \quad (8.2.46)$$

функции $s_j(t)$ в (8.2.45) определяются соотношением

$$s_j(t) := \begin{cases} c_0 C_j^{\frac{p-q}{\kappa(p+1)(q+1)}} \bar{G}_k^{(j)}(g_0(T-t))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} & \forall t \in [t_j^{(0)}, \bar{t}) \\ 0 & \forall t \in (0, t_j^{(0)}], \end{cases} \quad (8.2.47)$$

где числа $t_j^{(0)}$ определяются равенством:

$$g_0(T - t_j^{(0)}) := g_0(T) + k(1-b)^{-j}, \quad (8.2.48)$$

а функция $\bar{G}_k^{(j)}(v)$ — это минимальная монотонно неубывающая мажоранта функции $G_k^{(j)}(v)$,

$$\bar{G}_k^{(j)}(v) := \max_{v_0^{(j)} \leq v' \leq v} G_k^{(j)}(v'), \quad v_0^{(j)} = g_0(T) + \frac{k}{(1-b)^j}, \quad (8.2.49)$$

определяемой равенством

$$G_k^{(j)}(v) := \exp\left(\frac{p-q}{q+1}(1-b)^j v\right) \left[g_0^{-1}\left(v - \frac{k}{(1-b)^j}\right) - g_0^{-1}(v) \right] \quad (8.2.50)$$

$$\forall v \geq g_0(T) + \frac{k}{(1-b)^j} = v_0^{(j)} = g_0(T - t_{j+1}^{(0)}).$$

Теперь о максимально допустимом числе $i_0 = i_0(\bar{t})$ описанных выше циклов. Оценим сверху и снизу это число. Для этого, варьируя начальную точку $t_0 = t_0(\bar{t}) \in [0, t_1^{(0)})$, обеспечиваем выполнение равенства

$$t_{i_0(\bar{t})}^{(0)} = \bar{t} \quad (8.2.51)$$

При этом в силу (8.2.48) имеем

$$g_0(T - \bar{t}) = g_0(T - t_{i_0}^{(0)}) = g_0(T - t_0) + k(1-b)^{-(i_0-1)}. \quad (8.2.52)$$

Учитывая, что $g_0(T) \leq g_0(T - t_0) \leq g_0(T) + k$, из (8.2.52) получаем

$$g_0(T) + k(1-b)^{-(i_0-1)} \leq g_0(T - \bar{t}),$$

$$g_0(T) + k + k(1-b)^{-(i_0-1)} \geq g_0(T - \bar{t}).$$

Из этих неравенств, очевидно, следуют оценки для i_0

$$\frac{\ln[g_0(T - \bar{t}) - g_0(T)] - \ln k}{\ln(1-b)^{-1}} \geq i_0 - 1$$

$$\geq \frac{\ln[g_0(T - \bar{t}) - g_0(T) - k] - \ln k}{\ln(1-b)^{-1}}. \quad (8.2.53)$$

Ясно, что реальное число необходимых итераций может оказаться меньшим, чем $i_0(\bar{t})$, так как при некотором $i < i_0(\bar{t})$ соответствующий промежуточный сингулярный режим может уже оказаться локализованным, то есть режимом, к которому применима теорема 7.3.1 (см. неравенства (8.2.25), (8.2.43)). Обозначим это реальное оптимальное число итераций $i_{\text{оп}} = i_{\text{оп}}(\bar{t})$ и найдем точную оценку сверху для функции

$$S_{\text{оп}}(\bar{t}) := \sum_{j=0}^{i_{\text{оп}}-1} s_j(\bar{t}) = c_0 \sum_{j=0}^{i_{\text{оп}}-1} C_j^{\frac{p-q}{\kappa(p+1)(q+1)}} \bar{G}_k^{(j)}(g_0(T-\bar{t}))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}, \quad (8.2.54)$$

где $\bar{G}_k^{(0)}(v) := \bar{G}_k(v)$. В силу (8.2.46), определения (8.2.49) и неравенства $\bar{G}_k(\bar{v}) \geq G_k(\bar{v})$ имеем:

$$S_{\text{оп}}(\bar{t}) \leq s_0(\bar{t}) \left(1 + \sum_{j=1}^{i_{\text{оп}}-1} D_1^j H_j^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} \right), \quad (8.2.55)$$

где $s_0(t)$ из (8.2.24),

$$D_1 = D_0^{\frac{p-q}{\kappa(p+1)(q+1)}}, \quad H_j = H_j(\bar{v}) := G_k^{(j)}(v^{(j)})(G_k^{(0)}(\bar{v}))^{-1}.$$

Здесь $\bar{v} = g_0(T-\bar{t})$, $v^{(j)}$ – минимальное число из интервала $(v_0^{(j)}, \bar{v}]$, $v_0^{(j)} = g_0(T) + k(1-b)^{-j}$ такое, что $\bar{G}_k^{(j)}(\bar{v}) = G_k^{(j)}(v^{(j)})$. Обозначим

$$(1-b)^{-j} = J + \xi; \quad J = [(1-b)^{-j}], \quad 0 \leq \xi < 1.$$

Оценим теперь H_j сверху. В силу правильного убывания (определение 8.2.2) функции g_0 имеем

$$\begin{aligned} & \varphi_0(v^{(j)} - (1-b)^{-j}k) - \varphi_0(v^{(j)}) = \varphi_0(v^{(j)} - \xi k) - \varphi_0(v^{(j)}) \\ & + \sum_{l=1}^J [\varphi_0(v^{(j)} - (l-1)k - \xi k - k) - \varphi_0(v^{(j)} - (l-1)k - \xi k)] \\ & \leq \varphi_0(v^{(j)} - k) - \varphi_0(v^{(j)}) + (1-\delta)^{-1}(\varphi_0(v^{(j)} - k) - \varphi_0(v^{(j)})) \cdot \\ & \cdot \sum_{l=1}^J \exp\left(\frac{p-q}{q+1}(l-1)k\right) \exp\left(\frac{p-q}{q+1}\xi k\right) \\ & \leq (1-\delta)^{-1} A_k(\varphi_0(v^{(j)} - k) - \varphi_0(v^{(j)})) \cdot \exp\left[\frac{p-q}{q+1}(1-b)^{-j}k\right], \\ & A_k := \left(\exp\left(\frac{p-q}{q+1}k\right) - 1 \right)^{-1} + (1-\delta). \end{aligned} \quad (8.2.56)$$

В силу (8.2.56) можем оценить H_j следующим способом:

$$\begin{aligned} H_j &= H_j(\bar{v}) = G_k^{(j)}(v^{(j)}) \cdot G_k^{(0)}(v^{(j)})^{-1} \cdot G_k^{(0)}(v^{(j)}) \cdot G_k^{(0)}(\bar{v})^{-1} \\ &\leq (1 - \delta)^{-1} A_k \exp \left[-\frac{p-q}{q+1} (v^{(j)} - (1-b)^j v^{(j)} - (1-b)^{-j} k) \right] \\ &\quad \times G_k^{(0)}(v^{(j)}) G_k^{(0)}(\bar{v})^{-1}. \end{aligned} \quad (8.2.57)$$

Отметим теперь, что относительно расположения точек $v^{(j)}$ в интервалах $[v_0^{(j)}, \bar{v}]$ может реализоваться только одна из двух возможностей. Либо

$$v^{(j)} \geq 2b^{-1}(1-b)^{-j}k, \quad j = 1, 2, \dots, i_0, \quad (8.2.58)$$

либо найдется такой номер $j_1 < i_0$ (i_0 из (8.2.53)), что при всех $j < j_1$ выполняется неравенство (8.2.58), причем

$$v^{(j_1)} < 2b^{-1}(1-b)^{-j_1}k. \quad (8.2.59)$$

В первом случае, то есть при выполнении (8.2.58) получаем, продолжая оценку (8.2.57),

$$\begin{aligned} H_j &\leq (1 - \delta)^{-1} A_k \exp \left[-\frac{(p-q)b}{(q+1)2} v^{(j)} \right] G_k^{(0)}(v^{(j)}) G_k^{(0)}(\bar{v})^{-1} \leq (1 - \delta)^{-2} A_k \\ &\exp \left[-\frac{(p-q)b}{(q+1)2} v_0^{(j)} \right] \leq B_k \exp \left[-\frac{(p-q)b}{(q+1)2} (1-b)^{-j} \right] \quad \forall j \geq 1, \end{aligned} \quad (8.2.60)$$

где

$$B_k = (1 - \delta)^{-2} A_k \exp \left[\frac{(p-q)b}{(q+1)2} g_0(T) \right].$$

При этом, в силу (8.2.60) имеем

$$\sum_{j=1}^{i_{\text{op}}-1} D_1^j H_j^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} \leq B_k^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} \sum_{j=1}^{\infty} D_1^j \mu^{(1-b)^{-j}} = B_k^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} D_2, \quad (8.2.61)$$

где

$$\mu = \exp \left(-\frac{(p-q)b}{2\varkappa(q+1)(p+1)} \right) < 1, \quad D_2 = D_2(D_1, b) < \infty.$$

Тем самым в случае (8.2.58) в силу (8.2.61) из (8.2.55) вытекает следующая оценка:

$$S_{\text{op}}(\bar{t}) \leq S_{\text{op}}^{(1)}(\bar{t}) := D_3 s_0(\bar{t}), \quad D_3 = (1 + D_2 B_k^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}}). \quad (8.2.62)$$

При этом из неравенств (8.2.45) с учетом оценки (8.2.62) и (8.2.53) выведем следующую оценку:

$$h(\bar{t}, 1 + S_{\text{оп}}^{(1)}(\bar{t})) + E(\bar{t}, 1 + S_{\text{оп}}^{(1)}(\bar{t})) \leq C_0 D_0^{1 + \frac{\ln k}{\ln(1-b)}} (g_0(T - \bar{t}) - g_0(T))^{-\frac{\ln D_0}{\ln(1-b)}} \\ \times \exp \left[\frac{k g_0(T - \bar{t})}{b(g_0(T - \bar{t}) - g_0(T))} \right] \leq C_{10} g_0(T - \bar{t})^{m_1}, \quad (8.2.63)$$

где

$$m_1 = \frac{\ln D_0}{\ln(1-b)^{-1}}, \quad C_{10} = C_0 D_0^{1 + \frac{\ln k}{\ln(1-b)}} \exp \left[\frac{g_0(T) + k}{b} \right].$$

Рассмотрим теперь второй возможный вариант расположения точек $v^{(j)}$, то есть ситуацию, когда существует номер $j_1 < i_0$ такой, что выполнено неравенство (8.2.59). При этом, очевидно, справедлива оценка:

$$G_k^{(j_1)}(v^{(j_1)}) \leq \exp \left(\frac{2(p-q)}{b(q+1)} \right) \varphi_0 \left(v_0^{(j_1)} - \frac{k}{(1-b)^{j_1}} \right) \\ = T \exp \left(\frac{2(p-q)}{b(q+1)} \right) := L_1, \quad (8.2.64)$$

и, как следствие, величина $H_{j_1}(\bar{v})$ из (8.2.57) оценивается следующим образом:

$$H_{j_1}(\bar{v}) \leq L_1 G_k^{(0)}(\bar{v})^{-1}. \quad (8.2.65)$$

Предположим теперь, что рассматриваемый граничный режим $g_0(T - t)$ принадлежит классу А), то есть с некоторой положительной постоянной $\beta < \frac{p-q}{q+1}$ выполнено неравенство (8.2.10). Положим теперь $\bar{v}$ совпадающим с некоторым v_i из последовательности, фигурирующей в (8.2.10). Тогда из (8.2.65) следует:

$$H_{j_1}(\bar{v}) \leq L_1 \exp(-\beta \bar{v}) \leq L_1 \exp(-\beta v_0^{(j_1)}) \\ = L_1 \exp(-\beta g_0(T)) \exp(-\beta k(1-b)^{-j_1}).$$

При этом в силу (8.2.65)

$$D_1^{j_1} H_{j_1}^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} \leq M_1^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} D_1^{j_1} \bar{\mu}^{(1-b)^{-j_1}}, \quad (8.2.66)$$

где

$$M_1 = L_1 \exp(-\beta g_0(T)), \quad \bar{\mu} = \exp\left(\frac{-\beta k}{\kappa(p+1)}\right) < 1.$$

Учитывая (8.2.66), получаем аналогично (8.2.61), (8.2.62):

$$S_{\text{оп}}(\bar{t}) \leq S_{\text{оп}}^{(2)}(\bar{t}) := \bar{D}_3 s_0(\bar{t}), \quad \bar{t} = t_i := T - g_0^{-1}(v_i) = T - g_0^{-1}(\bar{v}), \quad (8.2.67)$$

$$\bar{D}_3 = \bar{D}_3(D_1, \beta).$$

Тем самым доказана

Лемма 8.2.2. Пусть $g(\tau) > 0$, — монотонно невозрастающая на интервале $[0, T)$ функция ($g(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$), определяемая в (7.1.10), (8.2.1) сингулярным граничным режимом $f(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.7). Пусть $g_0(\tau)$ — произвольная правильно убывающая в смысле определения 8.2.2 мажоранта функции $g(\tau)$. Пусть определяемая по g_0 в (8.2.6) функция G_k принадлежит классу A) (см. (8.2.10)). Тогда справедлива следующая оценка энергетических функций, связанных с решением и рассматриваемой граничной задачи:

$$\begin{aligned} h(t_i, 1 + S(t_i)) + E(t_i, 1 + S(t_i)) &\leq C_{10} F_{10}(t_i) \\ &:= C_{10} \exp(g_{10}(T - t_i)) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad g_{10}(\tau) := m_1 \ln g_0(\tau), \end{aligned} \quad (8.2.68)$$

где $t_i := T - g_0^{-1}(v_i)$, $\{v_i\}$ — последовательность из определения класса A) (см. (8.2.10));

$$S(t) := D s_0(t), \quad D = \max\{D_3, \bar{D}_3\}, \quad s_0(t) \text{ из (8.2.24),} \quad (8.2.69)$$

$D_3, \bar{D}_3$ из (8.2.62), (8.2.67); постоянные m_1, C_{10} определены в (8.2.63).

Адекватное использование лемм 8.2.2, 8.2.1 позволяет устанавливать в определенном смысле точные оценки сверху распространения волны сингулярности при произвольных нелокализованных сингулярных граничных режимах. Приведем ряд примеров.

Пример 1.

$$g(\tau) \leq g_0(\tau) = \left(\frac{\xi + q + 1}{p - q} \right) \ln \tau^{-1} \quad \forall \tau > 0, \quad \xi = \text{const} > 0. \quad (8.2.70)$$

При этом $g_0^{-1}(v) = \exp\left(-\frac{(p-q)v}{\xi+q+1}\right)$. Кроме того,

$$g_0^{-1}(v - k) - g_0^{-1}(v) = c_k \exp\left(-\frac{(p-q)v}{\xi+q+1}\right), \quad c_k = \exp\left(\frac{(p-q)k}{\xi+q+1}\right) - 1,$$

поэтому

$$G_k(v) = \bar{G}_k(v) = c_k \exp\left(\frac{(p-q)\xi v}{(q+1)(\xi+q+1)}\right). \quad (8.2.71)$$

Следовательно, определяемая режимом (8.2.70) функция $G_k(v)$ принадлежит классу A с постоянной

$$\beta = \frac{\xi(p-q)}{(q+1)(\xi+q+1)} < \frac{p-q}{q+1}.$$

Рассмотрим результат применения леммы 8.2.2. В силу (8.2.68) имеем:

$$h(t, 1 + S^{(0)}(\bar{t})) + E(t, 1 + S^{(0)}(\bar{t})) \leq C_{10} F_{10}(t) \quad \forall t < \bar{t} < T, \quad (8.2.72)$$

где

$$S^{(0)}(\bar{t}) = DG_k(g_0(T - \bar{t}))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} = K(T - \bar{t})^{-\frac{\xi}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}}, \quad K = Dc_k^{\frac{1}{\kappa(p+1)}},$$

$$D \text{ из (8.2.69), } c_k \text{ из (8.2.71), } F_{10}(t) = \left(\frac{(\xi+q+1)}{p-q} \ln(T-t)^{-1} \right)^{m_1}.$$

При произвольном $\bar{t} < T$ оценка (8.2.72) определяет в точке $s_0 = 1 + S^{(0)}(\bar{t})$ слабо сингулярный граничный режим, удовлетворяющий условию (7.3.1) из теоремы 7.3.1. Поэтому в силу этой теоремы получаем следующую оценку волны сингулярности:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + K(T - t)^{-\frac{\xi}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} + \delta \quad \forall \bar{t} < T, \quad \forall \delta > 0, \quad (8.2.73)$$

где $L = L(C_{10}, \delta) = \text{const} < \infty$. Оценка (8.2.73) при $m > 1$ получена в [45], там же показана ее точность. В [45] установлена также оценка сверху волны сингулярности в случае следующего модельного граничного режима.

Пример 2.

$$g(\tau) \leq g_0(\tau) := \lambda \tau^{-\eta} \quad \forall \tau > 0, \quad \eta = \text{const} > 0, \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (8.2.74)$$

Очевидно, что $\varphi_0(v) := g_0^{-1}(v) = v^{-\frac{1}{\eta}} \lambda^{\frac{1}{\eta}}$ и, следовательно, в силу выпуклости этой функции:

$$\varphi_0(v - k) - \varphi_0(v) \geq -k \varphi'_0(v) = k \lambda^{\frac{1}{\eta}} \eta^{-1} v^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \quad (8.2.75)$$

$$\geq \exp\left(- (1 - \nu) \frac{p-q}{q+1} \nu\right) \quad \forall \nu : 0 < \nu < 1,$$

$$\forall k > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \forall v > v_0 = v_0(k, \eta, \lambda).$$

Отсюда следует, что с произвольным $\beta = \nu \frac{p-q}{q+1} : 0 < \beta < \frac{p-q}{q+1}$, выполняется условие (8.2.10) для произвольной последовательности $v_i \rightarrow \infty$.

Тем самым порождаемая режимом (8.2.74) функция $G_k(v)$ принадлежит к классу A). Отметим также, что из выпуклости функции $\varphi_0(v)$ следует:

$$\varphi_0(v - k) - \varphi_0(v) \leq -k\varphi'_0(v - k) = k\lambda^{\frac{1}{\eta}}\eta^{-1}(v - k)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}.$$

Поэтому имеем следующую оценку:

$$G_k(v) \leq \hat{G}_k(v) := 2^{\frac{1+\eta}{\eta}} k\eta^{-1} \lambda^{\frac{1}{\eta}} v^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \exp\left(\frac{p-q}{q+1}v\right), \quad \forall v > \bar{v}_0 := 2k.$$

Легко проверить, что

$$\min_{v>0} \hat{G}_k(v) = G_k(v_{\min}), \quad v_{\min} = \frac{(1+\eta)(q+1)}{\eta(p-q)},$$

причем $\hat{G}_k(v)$ является монотонно растущей функцией при $v \geq v_{\min}$: $\hat{G}_k(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$. Если

$$v_0^{(0)} := g_0(T) + k = \lambda T^{-\eta} + k,$$

то определим значение v_1 :

$$v_1 > v_{\min} : \hat{G}_k(v_1) := \hat{G}_k(v_0^{(0)}). \quad (8.2.76)$$

Тогда очевидно, что $\hat{G}_k(v) \geq \bar{G}_k(v) \forall v > v_1$, где $\bar{G}_k(v)$ из определения (8.2.24). При этом в силу леммы 8.2.2 имеем:

$$\begin{aligned} h(t, 1 + S^{(0)}(\bar{t})) + E(t, 1 + S^{(0)}(\bar{t})) \\ \leq C_{10} \exp(g_{10}(T - t)) \quad \forall t : t_1 < t < \bar{t}, \quad \forall \bar{t} < T, \end{aligned} \quad (8.2.77)$$

где $t_1 = T - \varphi_0(v_1)$, $S^{(0)}(t) = D\hat{G}_k(g_0(T - t))^{\frac{1}{\eta(p+1)}}$, D из (8.2.69); функция $g_{10}(\tau) := m_1\eta \ln \tau^{-1}$ удовлетворяет условию (8.2.70) с $\xi = \xi_0 > 0$, определяемым соотношением:

$$m_1\lambda = \frac{\xi_0 + q + 1}{p - q} \implies \xi_0 = m_1\lambda(p - q) - q - 1.$$

Следовательно, при любом $\bar{t} < T$ оценка (8.2.77) определяет промежуточный сингулярный граничный режим, охватываемый примером 1. Поэтому в силу (8.2.77) имеем:

$$\begin{aligned} \chi_L(\bar{t}) \leq 1 + S^{(0)}(\bar{t}) + K(T - \bar{t})^{-\frac{\xi_0}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} + \delta \\ \forall \bar{t} \in (t_1, T) \quad \forall \delta > 0, \quad L = L(\delta). \end{aligned} \quad (8.2.78)$$

Из принадлежности функций $G_k(v)$, а следовательно, и $\hat{G}_k(v)$ к классу А) легко следует, что

$$S^{(0)}(t)(T-t)^{\frac{\xi_0}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T$$

Поэтому из (8.2.78) вытекает:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + (1 + \omega(\bar{t}))S^{(0)}(\bar{t}) \quad \forall \bar{t} \in (t_1, T),$$

где $\omega(\bar{t}) \rightarrow 0$ при $\bar{t} \rightarrow T$. Из этой оценки, используя выражение для $S^{(0)}(t)$ из (8.2.77), получаем для всех $t < T$ оценку:

$$\chi_{L_1}(t) \leq 1 + K_1 \lambda^{-\frac{1}{\kappa(p+1)}} (T-t)^{\frac{(1+\eta)}{\kappa(p+1)}} \exp \left[\frac{\lambda(p-q)}{\kappa(q+1)} (T-t)^{-\eta} \right], \quad (8.2.79)$$

где $L_1 < \infty$, $K_1 < \infty$ зависят только от известных параметров задачи.

Описанная в примере 2 и основанная на лемме 8.2.2 процедура поэтапного оценивания волны сингулярности применима к общим сильно сингулярным граничным режимам.

Теорема 8.2.1. Пусть $g(\tau) > 0 : g(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, — монотонно невозрастающая на интервале $(0, T)$ функция, определяемая в (8.2.1), (7.1.10) сингулярным граничным режимом $f(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.7). Пусть $g_0(\tau)$ — произвольная правильно убывающая в смысле определения 8.2.2 мажоранта функции $g(\tau)$, а определяемая по $g_0(\tau)$ в (8.2.6) функция $G_k(v)$ принадлежит подклассу А) (см. (8.2.12)). Тогда существуют постоянные k , K , L , зависящие только от известных параметров задачи, такие, что для волны сингулярности произвольного решения и рассматриваемой задачи справедлива оценка

$$\chi_L(\bar{t}) \leq 1 + K G_k(g_0(T - \bar{t}))^{\frac{1}{\kappa(p+1)}} \quad \forall \bar{t} < T, \quad \text{и из (7.2.12)}. \quad (8.2.80)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу принадлежности G_k классу А) из установленной в лемме 8.2.2 оценки (8.2.68) вытекает неравенство

$$h(t, 1 + Ds_0(\bar{t})) + E(t, 1 + Ds_0(\bar{t})) \leq C_{10} F_{10}(t) \quad \forall t : 0 < t < \bar{t} < T, \quad (8.2.81)$$

где функция $s_0(t)$ из (8.2.24). Если режим $F_{10}(t)$ из (8.2.81) удовлетворяют условию (7.3.1) из теоремы 7.3.1, то в силу этой теоремы из (8.2.81) вытекает справедливость оценки (8.2.80). Если же для $F_{10}(t)$ соотношение (7.3.1) не выполняется, то воспользуемся оценкой (8.2.81) как стартовой вместо (8.2.13) в цикле вычислений из леммы 8.2.2, приведших к

оценке (8.2.6). При этом результатом i -циклов таких вычислений, как несложно проверить, является

$$\begin{aligned} h(\bar{t}, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \sum_{j=0}^{i-1} s_{1j}(\bar{t})) + E(\bar{t}, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \sum_{j=0}^{i-1} s_{1j}(\bar{t})) \\ \leq C_{10} D_0^i F_{1,0}^{(i)}(\bar{t}) := C_{10} D_0^i \exp((1-b)^i g_{10}(T - \bar{t})) \quad \forall \bar{t} < T, \end{aligned} \quad (8.2.82)$$

где

$$s_{1j}(t) = c_0 C_{10}^{\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}} D_0^{\frac{j(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \bar{G}_{k1}^{(j)}(g_{10}(T-t))^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}},$$

$\bar{G}_{k1}(v)$ – минимальная монотонно неубывающая мажоранта функции

$$G_{k1}^{(j)}(v) := \exp\left(\frac{p-q}{p+1}(1-b)^j v\right) \left(g_{10}^{-1}\left(v - \frac{k}{(1-b)^j}\right) - g_{10}^{-1}(v)\right).$$

В соответствии с (8.2.53) для любого $\bar{t} < T$ определим натуральное число $i_{10} = i_{10}(\bar{t})$ неравенствами

$$\frac{\ln(g_{10}(T - \bar{t}) - g_{10}(T)) - \ln k}{\ln(1-b)^{-1}} \geq i_{10} - 1 \geq \frac{\ln(g_{10}(T - \bar{t}) - g_{10}(T) - k) - \ln k}{\ln(1-b)^{-1}} \quad (8.2.83)$$

и положим в (8.2.82) $i = i_{10}(\bar{t})$. При этом, как и в (8.2.63), получаем

$$\begin{aligned} h(\bar{t}, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \sum_{j=0}^{i_{10}-1} s_{1j}(\bar{t})) + E(\bar{t}, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \sum_{j=0}^{i_{10}-1} s_{1j}(\bar{t})) \\ \leq C_{20} \exp(g_{20}(T - \bar{t})) \quad \forall \bar{t} < T, \end{aligned} \quad (8.2.84)$$

где $g_{20}(\tau) = m_1 \ln g_{10}(\tau)$, $C_{20} = C_{10} D_{01} = C_0 D_{01}^2$, $D_{01} := D_0^{1 + \frac{\ln k}{\ln(1-b)}}$ $\exp\left(\frac{g_0(T)+k}{b}\right)$. Очевидна оценка:

$$s_{1j}(\bar{t}) \leq \bar{C}_{10} \exp\left(\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}(j \ln D_0 + (1-b)^j m_1 \ln g_0(T - \bar{t}))\right),$$

где

$$\bar{C}_{10} = c_0 C_{10}^{\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}} T^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}}.$$

Поэтому несложные вычисления приводят к:

$$\sum_{j=0}^{i_{10}-1} s_{1j}(\bar{t}) \leq \bar{C}_{10} \exp(\bar{m}_1 \ln g_0(T - \bar{t})) (1 + \varphi_1(\bar{t})), \quad (8.2.85)$$

где $\bar{m}_1 = \frac{m_1(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)}$,

$$\varphi_1(\bar{t}) = \frac{\exp \left[-\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)} (bm_1 \ln g_0(T-\bar{t}) - \frac{\ln D_0}{\ln(1-b)^{-1}} \ln g_{10}(T-\bar{t})) \right]}{\exp \left[\frac{(p-q) \ln D_0}{\varkappa(p+1)(q+1)} \right] - 1}.$$

Очевидно, что $\varphi_1(\bar{t}) \rightarrow 0$ при $\bar{t} \rightarrow T$. Отметим также, что в силу принадлежности функции $G_k^{(0)}(v)$ к классу $\bar{A}$) имеем:

$$s_0(\bar{t}) \geq c_0 C_0^{\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \exp \left[\frac{\beta(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)} g_0(T-\bar{t}) \right]. \quad (8.2.86)$$

С учетом (8.2.85) из (8.2.84) следует соотношение:

$$h(t, 1 + S_1(\bar{t})) + E(t, 1 + S_1(\bar{t})) \leq C_{20} F_{20}(t) \quad \forall t < \bar{t} < T, \quad (8.2.87)$$

где

$$F_{20}(t) := \exp(g_{20}(T-t)) = \exp(m_1 \ln(m_1 \ln g_0(T-t))),$$

$$S_1(t) := Ds_0(t) + \bar{C}_{10} \exp(\bar{m}_1 \ln g_0(T-t))(1 + \varphi_1(t)) = Ds_0(t) + \bar{S}_1(t)$$

Неравенство (8.2.87) можем переписать в виде:

$$h(t, 1 + S_1(\bar{t})) + E(t, 1 + S_1(\bar{t})) \leq \omega(t) g_s(T-t), \quad \forall t < \bar{t} < T, \quad (8.2.88)$$

где

$$\omega(t) = C_{20} \exp \left[m_1 \ln(m_1 \ln g_0(T-t)) - \frac{q+1}{p-q} \ln(T-t)^{-1} \right],$$

а $g_s(\tau)$ определено в (8.2.1). В силу теоремы 7.3.1 из (8.2.88) следует существование постоянных C, K , зависящих только от известных параметров задачи и не зависящих от $t, \bar{t}$ таких, что

$$\begin{aligned} & h(t, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \bar{S}_1(\bar{t}) + C\omega(\bar{t})^{\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}}) \\ & + E(t, 1 + Ds_0(\bar{t}) + \bar{S}_1(\bar{t}) + C\omega(\bar{t})^{\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}}) \leq K \quad \forall t < \bar{t} < T. \end{aligned} \quad (8.2.89)$$

С учетом (8.2.86) просто проверяются следующие свойства функций $s_0(t), \bar{S}_1(t), \omega(t)$:

$$\bar{S}_1(\bar{t}) \cdot \omega(\bar{t})^{-\frac{p-q}{\varkappa(p+1)(q+1)}} \rightarrow \infty \text{ при } \bar{t} \rightarrow T, \quad s_0(\bar{t}) \bar{S}_1(\bar{t})^{-1} \rightarrow \infty \text{ при } \bar{t} \rightarrow T.$$

Поэтому из (8.2.89) стандартно следует оценка волны сингулярности:

$$\chi_L(t) \leq (D + \delta) s_0(t) \quad \forall t < T, \quad \forall \delta > 0, \quad L = L(K, \delta),$$

которая соответствует необходимой оценке (8.2.80).

Пример 3.

$$g(\tau) \leq g_{0,l}(\tau) := a_l \exp(a_{l-1} \exp(\dots a_1 \exp \tau^{-1} \dots)), \quad a_i > 0, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (8.2.90)$$

При этом, как несложно проверить,

$$\varphi_{0,l}(v) := g_{0,l}^{-1}(v) = \left[\ln(a_1^{-1} \ln(a_2^{-1} \ln(a_3^{-1} \dots \ln(a_l^{-1} v) \dots)) \right]^{-1} := (f_l^{(1)}(v))^{-1}. \quad (8.2.91)$$

Полагая $f_l^{(j)}(v) := \ln(a_j^{-1} \ln(a_{j+1}^{-1} \dots \ln\left(\frac{v}{a_l}\right) \dots)$, просто проверяем, что

$$\varphi'_{0,l}(v) := \frac{d\varphi_{0,l}(v)}{dv} = -v^{-1} (f_l^{(1)}(v))^{-1} \left(\prod_{j=1}^l f_l^{(j)}(v) \right)^{-1}. \quad (8.2.92)$$

В силу очевидной выпуклости функции $\varphi_{0,l}(v)$ имеем:

$$-k\varphi'_{0,l}(v) \leq \varphi_{0,l}(v-k) - \varphi_{0,l}(v) \leq -k\varphi'_{0,l}(v-k).$$

Отсюда следует принадлежность функции $G_k(v) = \exp(\frac{p-q}{q+1}v)(\varphi_{0,l}(v-k) - \varphi_{0,l}(v))$ классу $\bar{A}$ и, в силу теоремы 8.2.1, следующая оценка волны сингулярности:

$$\begin{aligned} \chi_L(t) &\leq 1 + K \exp \left[\frac{(p-q)}{\varkappa(p+1)(q+1)} g_{0,l}(T-t) \right] \\ &\quad \times (T-t)^{\frac{1}{\varkappa(p+1)}} \left(\prod_{j=1}^l f_l^{(j)}(g_{0,l}(T-t)) \right)^{-\frac{1}{\varkappa(p+1)}}. \end{aligned}$$

В частности, при $l=1$ $g_{0,1}(\tau) = a_1 \exp \tau^{-1}$, и оценка имеет вид:

$$\chi_L(t) \leq 1 + K \exp \left[\frac{(p-q)a_1}{\varkappa(p+1)(q+1)} \exp(T-t)^{-1} \right] \cdot (T-t)^{\frac{2}{\varkappa(p+1)}}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров нелокализованных сингулярных режимов, являющихся возмущением предельного локализованного S -режима

$$F_s(t) = \exp \left(\frac{q+1}{p-q} \ln(T-t)^{-1} \right) = \exp(g_s(T-t)),$$

то есть класс режимов структуры:

$$g(\tau) = g_s(\tau)(1 + \omega(\tau)), \quad \omega(\tau) > 0, \quad (8.2.93)$$

где $\omega(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, но $\varphi(\tau) := g_s(\tau)\omega(\tau) \rightarrow \infty$ монотонно при $\tau \rightarrow 0$. Очевидно, что для режимов (8.2.93) справедливо:

$$g(\tau) \leq g_s(\tau)(1 + \omega_0(\tau_0)) \quad \forall \tau < \tau_0, \quad \omega_0(\tau_0) := \max_{0 < \tau < \tau_0} \omega(\tau).$$

Поэтому

$$g^{-1}(v) \leq \exp\left(-\frac{v}{a(1 + \omega_0)}\right) \quad \forall v > v_0 = g(\tau_0), \quad a = \frac{q + 1}{p - q}.$$

Следовательно, соответствующая функция $G_k(v) = \exp(a^{-1}v)(\varphi_{0,l}(v - k) - \varphi_{0,l}(v))$ принадлежит классу В). В силу теоремы о среднем:

$$g^{-1}(v - k) - g^{-1}(v) = -(g^{-1})'(\bar{v})k, \quad \bar{v} = v - k\xi, \quad 0 < \xi = \xi(v) \leq 1. \quad (8.2.94)$$

В силу (8.2.93) имеем также:

$$g'(\tau) = a\tau^{-1}(1 + \omega(\tau) - \tau \ln \tau^{-1}\omega'(\tau)) := -a\tau^{-1}(1 + \omega_1(\tau)).$$

Следовательно,

$$(g^{-1})'(\bar{v}) = -\frac{\tau(\bar{v})}{a(1 + \omega_1(\tau(\bar{v})))} := -\frac{g^{-1}(\bar{v})}{a(1 + \omega_1(g^{-1}(\bar{v})))}.$$

Кроме того запишем (8.2.93) в виде:

$$v = a \ln \tau^{-1}(1 + \omega(\tau)) \iff \exp\left(\frac{v}{a}\right) = \tau^{-(1 + \omega(\tau))}.$$

Учитывая последние соотношения, получаем

$$G_k(v) = -k \exp\left(\frac{v}{a}\right) (g^{-1})'(\bar{v}) = k \tau^{-(1 + \omega(\tau))} \bar{\tau} a^{-1} (1 + \omega_1(\bar{\tau}))^{-1},$$

где $\bar{\tau} := \tau(\bar{v}) = \tau(v - k\xi)$. Следовательно,

$$G_k(v) = k a^{-1} \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right) \tau^{-\omega(\tau)} (1 + \omega_1(\bar{\tau}))^{-1}. \quad (8.2.95)$$

Покажем теперь, что

$$\frac{\bar{\tau}}{\tau} = \frac{\bar{\tau}(v)}{\tau(v)} := l = l(v) \leq \exp\left(\frac{\xi k}{a}\right) \quad \forall v < \infty. \quad (8.2.96)$$

Действительно, запишем равенства, определяющие значения $\tau = \tau(v)$ и $\bar{\tau} = \bar{\tau}(v)$:

$$v := a \ln \tau^{-1} + \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) := a\omega(\tau) \ln \tau^{-1};$$

$$\bar{v} = v - k\xi := a \ln \bar{\tau}^{-1} + \varphi(\bar{\tau}) = a \ln(l\tau)^{-1} + \varphi(l\tau).$$

Вычтем из первого соотношения второе, получим $k\xi \geq a \ln l + \varphi(\tau) - \varphi(l\tau)$. Отсюда в предположении, что $l > 1$, выводим в силу монотонности функции $\varphi(\tau)$:

$$k\xi \geq a \ln l \iff l \leq \exp\left(\frac{k\xi}{a}\right),$$

что и доказывает (8.2.96). Наконец, оценим сверху величину $(1 + \omega_1(\bar{\tau}))^{-1}$ из (8.2.95). Несложно проверить, что $\omega_1(\tau) = -\tau\varphi'(\tau) > 0$ в силу монотонности функции $\varphi(\tau)$. Кроме того в силу монотонности функции $\omega(\tau)$:

$$\omega_1(\tau) = \omega(\tau) - \tau \ln \bar{\tau}^{-1} \omega'(\tau) \leq \omega(\tau) < \omega_0(\tau_0) = \sup_{0 < \tau < \tau_0} \omega(\tau).$$

Теперь в силу (8.2.96) и установленных свойств функции $\omega_1(\tau)$ выводим из (8.2.95)

$$G_k(g(T-t)) \leq K(T-t)^{-\omega(T-t)} \quad \forall t < T, \quad K = Ka^{-1} \exp\left(\frac{\xi k}{a}\right)$$

и, следовательно, в силу леммы 8.2.1 имеем

$$\chi_L(t) \leq 1 + K_1(T-t)^{-\frac{\omega(T-t)}{\kappa(p+1)}} \quad \forall t < T. \quad (8.2.97)$$

Приведем несколько конкретных примеров, иллюстрирующих оценку (8.2.97).

Пример 4. $g(\tau) = \frac{q+1}{p-q} \ln \tau^{-1} (1 + (\ln \tau^{-1})^{-\beta})$, $0 < \beta < 1$. Следовательно $\omega(\tau) = (\ln \tau^{-1})^{-\beta}$. Тогда в силу (8.2.97)

$$\chi_L(t) \leq 1 + K_2 \exp \left[\frac{(\ln(T-t)^{-1})^{1-\beta}}{\kappa(p+1)} \right] \quad \forall t < T. \quad (8.2.98)$$

Пример 5. $g(\tau) = \frac{q+1}{p-q} \ln \tau^{-1} (1 + \omega_l(\tau))$, где

$$\omega_l(\tau) = \underbrace{\ln(1 + \ln(1 + \dots + \ln \tau^{-1})) \dots}_l \times (\ln \tau^{-1})^{-1}.$$

Тогда в силу (8.2.97)

$$\chi_L(t) \leq 1 + K_3 \underbrace{(1 + \ln(1 + \ln(1 + \dots + \ln(T-t)^{-1}) \dots))}_{N-1}^{\frac{1}{\kappa(p+1)}}. \quad (8.2.99)$$

8.3. Волна сингулярности в квазиоднородных параболических уравнениях

Оценим теперь распространение волны сингулярности решения в случае $p = q > 0$. Как и в разделе 8.2 техника оценивания этой волны состоит в итеративной процедуре. Но если в разделе 8.2 аналитической основой для соответствующих итераций были оценки из леммы 7.3.2, то при $p = q$ такой основой будет обобщение леммы 7.4.2 на случай произвольных граничных режимов $F(t)$, удовлетворяющих противоположной к (7.4.1) оценке:

$$F(t) \geq \exp \left[w(T-t)^{-\frac{1}{m(p+1)-1}} \right] \quad \forall t < T, \quad w = \text{const} > 0,$$

или иначе

$$g(\tau) := \ln F(T-\tau) \geq w\tau^{-\frac{1}{m(p+1)-1}}, \quad 0 < \tau < T. \quad (8.3.1)$$

В рассматриваемом сейчас случае $p = q$ определение 8.2.2 правильной монотонности трансформируется в следующее.

Определение 8.3.1. Будем говорить, что некоторая непрерывная монотонно убывающая на (v_0, ∞) , $v_0 > 0$, функция $\varphi(v)$, ($\varphi(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$) является правильно убывающей, если найдется число $\lambda \in (0, 1)$, а также числа $k_0 = k_0(\lambda) > 0$, $\delta = \delta(\lambda) \in [0, 1)$ такие, что при любом $k > k_0$ выполняются соотношения:

$$v_2 (\varphi(v_2 - k) - \varphi(v_2))^{\frac{1}{m(p+1)}} \geq (1 - \delta) v_1 (\varphi(v_1 - k) - \varphi(v_1))^{\frac{1}{m(p+1)}} \\ \forall v_2, v_1 : \lambda^{-1} v_1 \geq v_2 > v_1 \geq \max\{k + v_0, \lambda^{-1} k\}. \quad (8.3.2)$$

Лемма 8.3.1. Пусть при некотором $s' \geq 1$ для энергетических функций, соответствующих решению $u(t, x)$ задачи (7.1.1)–(7.1.7), выполняется следующее неравенство:

$$h(t, s') + E(t, s') \leq CF_0(t) := C \exp(g_0(T-t)) \quad \forall t < T, \quad (8.3.3)$$

где функция $g_0(\tau) > 0$ такова, что обратная к ней функция $\varphi_0(v)$ для всех $v > v_0 = g_0(T)$ является правильно монотонной функцией в смысле определения 8.3.1. Тогда для произвольного числа $b \in (0, 2^{-1})$, существуют положительные постоянные $K_1 = K_1(b)$, $K_2 = K_2(b)$ и $k = k(b)$ такие, что справедливы оценки

$$\max\{h(t, s' + K_1 \bar{U}_k^{(0)}(g_0(T-t))), E(t, s' + K_1 \bar{U}_k^{(0)}(g_0(T-t)))\} \\ \leq CK_2 F_0(0)^b F_0(t)^{1-b} \quad \forall t : t_1^{(0)} < t < T, \quad (8.3.4)$$

где

$$t_1^{(0)} = T - \varphi_0(v_0^{(0)}), \quad v_0^{(0)} := g_0(T) + k, \quad \bar{U}_k^{(0)}(v) := \max_{v_0^{(0)} \leq \bar{v} \leq v} U_k^{(0)}(\bar{v}),$$

$$U_k^{(0)}(v) := (v - v_0^{(0)})(\varphi_0(v - k) - \varphi_0(v))^{\frac{1}{m(p+1)}} \quad \forall v > v_0^{(0)}.$$

Доказательство как и в лемме 7.4.2 проведем, изучая свойства функциональной системы (7.4.17), (7.4.18). Как и ранее, определим последовательность $\{t_i\}$ рекуррентным соотношением

$$F_0(t_j) := r^{-1} F_0(t_{j-1}) \quad \forall j \geq 1, \quad 0 \leq t_0 < T - \varphi_0(g_0(T) + k), \quad (8.3.5)$$

где $k = \ln r^{-1}$, $r > 0$ – постоянная, определяемая в дальнейшем. Следствием этого определения является соотношение

$$\Delta_j = t_j - t_{j-1} = \varphi_0(v_j - k) - \varphi_0(v_j) = \varphi_0(v_0 + k(j-1)) - \varphi_0(v_0 + kj), \quad (8.3.6)$$

где $v_j := g_0(T - t_j)$. Пусть $\lambda \in (0, 1)$ – число из определения правильной монотонности функции $\varphi_0(v)$. Тогда, очевидно

$$\frac{v_j}{v_i} = \frac{v_0 + kj}{v_0 + ki} < \frac{j}{i} \leq \lambda^{-1} \quad \forall i : [\lambda j] + 1 \leq i \leq j.$$

Используя это неравенство, выводим из условия (8.3.2) для $\varphi_0(v)$:

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_j} = \frac{\varphi_0(v_i - k) - \varphi_0(v_i)}{\varphi_0(v_j - k) - \varphi_0(v_j)} \leq \left(\frac{v_j}{v_i} \right)^{m(p+1)} (1 - \delta)^{-1}$$

$$\leq A_1 := (\lambda(1 - \delta))^{-m(p+1)} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall i : [\lambda j] + 1 \leq i \leq j. \quad (8.3.7)$$

Зафиксируем теперь номер $j \in \mathbb{N}$ и определим смещение δ_j формулой (7.4.29), где $\omega > 0$ – свободный параметр, который будет зафиксирован ниже. При этом получаем j пар неравенств (7.4.30), (7.4.31). Для анализа этой системы оценим величину $G(\Delta_i, \delta_j) \quad \forall i \leq j$. В силу (8.3.7) имеем

$$\Delta_i \delta_j^{-m(p+1)} = \Delta_j \delta_j^{-m(p+1)} \frac{\Delta_i}{\Delta_j} \leq \omega A_1 \quad \forall i : [\lambda j] + 1 \leq i \leq j.$$

Поэтому справедлива оценка

$$G(\Delta_i, \delta_j) \leq \omega_1(\omega) = (\omega A_1)^{\frac{1}{p}} + (A_1 \omega)^{\frac{1}{m(p+1)-1}}, \quad [\lambda j] + 1 \leq i \leq j. \quad (8.3.8)$$

Теперь из анализируемой системы функциональных неравенств следует в силу (8.3.3) и определения (8.3.5):

$$\begin{aligned} E_i(s' + \delta_j) &\leq c_1 CF_0(t_{i-1}) + c_2 \omega_1(\omega) CF_0(t_i) \\ &\leq (c_1 r + c_2 \omega_1(\omega)) CF_0(t_i) \quad \forall i \geq [\lambda j] + 1, \end{aligned}$$

и аналогично,

$$h_i(s' + \delta_j) \leq ((1 + \varepsilon)r + c(\varepsilon)\omega_1(\omega)) CF_0(t_i) \quad \forall i \geq [\lambda j] + 1.$$

Фиксируем теперь b_0 : $0 < b_0 < 2^{-1}$, затем $\varepsilon = \varepsilon(b_0)$, $\omega = \omega(b_0)$ и $r = r(b_0)$ столь малыми, чтобы выполнялись соотношения (7.4.36), (7.4.37). В результате получаем

$$\begin{aligned} E_i(s' + \delta_j) &\leq r^{2b_0} CF_0(t_i) \quad \forall i \geq [\lambda j] + 1, \\ h_i(s' + \delta_j) &\leq r^{2b_0} CF_0(t_i) \quad \forall i \geq [\lambda j] + 1. \end{aligned}$$

Используя эти оценки как стартовые вместо (8.3.3), приходим после второго цикла вычислений, аналогичного соответствующему циклу в доказательстве леммы 7.4.2, к неравенствам

$$E_i(s' + 2\delta_j) \leq r^{4b_0} CF_0(t_i), \quad h_i(s' + 2\delta_j) \leq r^{4b_0} CF_0(t_i) \quad \forall i : 2 + [\lambda j] \leq i \leq j.$$

Продолжая оценивать таким же способом, приходим после $[(1 - \lambda)j]$ циклов к:

$$\begin{aligned} E_j(s' + (1 - \lambda)j \delta_j) &\leq Cr^{-1} r^{-j(1-2b_0(1-\lambda))} F_0(t_0), \\ h_j(s' + (1 - \lambda)j \delta_j) &\leq Cr^{-1} F_0(t_i)^{1-2b_0(1-\lambda)} F_0(t_0)^{2b_0(1-\lambda)}. \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

Из определения (8.3.5), очевидно, следует

$$g_0(T - t_i) = ik g_0(T - t_0) \implies i = k^{-1}(g_0(T - t_i) - g_0(T - t_0)) \quad \forall i \leq j. \tag{8.3.10}$$

Поэтому с учетом (8.3.6) имеем

$$\begin{aligned} j \delta_j &= \omega^{-\frac{1}{m(p+1)}} j \Delta_j^{\frac{1}{m(p+1)}} = \omega^{-\frac{1}{m(p+1)}} k^{-1}(g_0(T - t_j) - g_0(T - t_0)) \\ &\times \left(\varphi_0(g_0(T - t_j) - k) - \varphi_0(g_0(T - t_j)) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}} = k^{-1} \omega^{-\frac{1}{m(p+1)}} \cdot S_k^{(0)}(g_0(T - t_j)). \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

С учетом этого соотношения выводим из (8.3.9)

$$\begin{aligned} & \max\{h_j(s' + (1 - \lambda)k^{-1}\omega^{-\frac{1}{m(p+1)}}U_k^{(0)}(g_0(T - t_j))), \\ & E_j(s' + (1 - \lambda)k^{-1}\omega^{-\frac{1}{m(p+1)}}U_k^{(0)}(g_0(T - t_j)))\} \\ & \leq CF_0(t_j)^{1-b}F_0(t_0)^b, \quad (8.3.12) \end{aligned}$$

где $b = 2b_0(1 - \lambda)$. Стартуя с (8.3.12) и проводя вычисления, аналогичные (8.2.19), (8.2.20), приходим к:

$$\begin{aligned} & \max\{h(t_i, s' + c_0\bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - t_i))), E(t_i, s' + c_0\bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - t_i)))\} \\ & \leq (1 + c_1)CF_0(t_0)^b \cdot F_0(t_j)^{1-b} \quad \forall i \geq 1, \quad (8.3.13) \end{aligned}$$

где $c_0 = (1 - \lambda)k^{-1}\omega^{-\frac{1}{m(p+1)}}$, $c_1 = (1 - r^{1-b})^{-1}$. Из этих оценок стандартно следуют необходимые оценки (8.3.4) с $K_1 = c_0$ и $K_2 = (1 + c_1)r^{-1-b}$. $\square$

Лемма 8.3.2. В условиях леммы 8.3.1 существуют постоянные K_3 , C_{10} , m_1 , зависящие только от известных параметров задачи (включая b из (8.3.4), δ из (8.3.2)) и не зависящие от $\bar{t} < T$ такие, что справедливы следующие энергетические оценки:

$$\begin{aligned} & \max\{h(\bar{t}, s' + K_3\bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t}))), E(\bar{t}, s' + K_3\bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t})))\} \\ & \leq C_{10}(\ln F_0(\bar{t}))^{m_1} := C_{10}F_{1,0}(\bar{t}) \quad \forall \bar{t} < T, \quad (8.3.14) \end{aligned}$$

где функции $U_k^{(0)}(v)$, $\bar{U}_k^{(0)}(v)$ из (8.3.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится при помощи итеративной процедуры. В силу леммы 8.3.1 при произвольном $\bar{t} < T$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \max\{h(t, s' + s_0(\bar{t})), E(t, 1 + s_0(\bar{t}))\} \leq \min(CF_0(t), C_1F_0^{(1)}(t)) \\ & \leq C_1F_0^{(1)}(t) \quad \forall t: 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad (8.3.15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_0(\bar{t}) &= K_1\bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t})), & F_0^{(1)}(t) &= \exp(g_1(T - t)), \\ g_1(\tau) &= (1 - b)g_0(\tau), & C_1 &= K_2F_0(0)^bC. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\varphi_1(w) := g_1^{-1}(w) = g_0^{-1}\left(\frac{w}{1-b}\right) := g_0^{-1}(v) = \varphi_0(v), \quad \frac{w}{1-b} = v.$$

Поэтому очевидна эквивалентность следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} \alpha_0) \quad & v_2 \left(\varphi_0 \left(v_2 - \frac{k}{1-b} \right) - \varphi_0(v_2) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}} \\ & \geq (1-\delta)v_1 \left(\varphi_0 \left(v_1 - \frac{k}{1-b} \right) - \varphi_0(v_1) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}} \quad \forall v_1, v_2 : \\ & \bar{v} = g_0(T - \bar{t}) \geq \lambda^{-1}v_1 \geq v_2 > v_1 \geq \max \left\{ \frac{k}{1-b} + v_0, \frac{\lambda^{-1}k}{1-b} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1) \quad & w_2(\varphi_1(w_2 - k) - \varphi_1(w_2))^{\frac{1}{m(p+1)}} \geq (1-\delta)w_1(\varphi_1(w_1 - k) - \varphi_1(w_1))^{\frac{1}{m(p+1)}} \\ & \forall w_1, w_2 : \bar{w} := g_1(T - \bar{t}) \geq \lambda^{-1}w_1 := \lambda^{-1}(1-b)v_1 \geq w_2 \geq w_1 \\ & \geq \max \left\{ k + w_0, \frac{k}{\lambda} \right\}, \quad w_0 := (1-b)v_0. \end{aligned}$$

Так как $\varphi_0(v)$ удовлетворяет условию (8.3.2), то неравенство $\alpha_0)$ выполняется для всех $v_1 < v_2$ из указанного интервала, причем этот интервал не пуст, если

$$\bar{v} := g_0(T - \bar{t}) > \max \left\{ \frac{k}{1-b} + v_0, \frac{k}{\lambda(1-b)} \right\}. \quad (8.3.16)$$

При этом в силу $\alpha_1)$ функция $\varphi_1(w)$ при тех же значениях параметров δ, k, λ , что и $\varphi_0(v)$, удовлетворяет условию (8.3.2) на соответствующем непустом множестве значений $w_1 < w_2$. Поэтому, используя оценку (8.3.15) в качестве начальной вместо (8.3.3), получаем в силу леммы 8.3.1 следующее соотношение

$$\begin{aligned} & \max\{h(t, s' + s_0(\bar{t}) + s_1(\bar{t})), E(t, 1 + s_0(\bar{t}) + s_1(\bar{t}))\} \\ & \leq \min(CF_0(t), C_1F_0^{(1)}(t), C_2F_0^{(2)}(t)) \leq C_2F_0^{(2)}(t) \quad \forall t : 0 \leq t \leq \bar{t}, \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

где

$$\begin{aligned} F_0^{(2)}(t) &:= \exp(g_2(T - t)), \quad g_2(\tau) = (1-b)g_1(\tau) = (1-b)^2g_0(\tau), \\ C_2 &= K_2F_0^{(2)}(0)^b C_1, \quad s_1(\bar{t}) = K_1\bar{U}_k^{(1)}(g_0(T - \bar{t})), \end{aligned}$$

$$\bar{U}_k^{(1)}(v) := \max_{v_0^{(1)} \leq v' \leq v} U_k^{(1)}(v'),$$

$$U_k^{(1)}(v) := (1-b)(v - v_0^{(1)}) \left(\varphi_0 \left(v - \frac{k}{1-b} \right) - \varphi_0(v) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}},$$

$$v_0^{(1)} := g_0(T) + \frac{k}{1-b}.$$

При выполнении следующего аналога неравенства (8.3.16):

$$\bar{v} = g_0(T - \bar{t}) \geq \max \left\{ \frac{k}{(1-b)^2} + v_0, \frac{k}{\lambda(1-b)^2} \right\}$$

оценку (8.3.17) можно использовать как стартовую для следующего итеративного использования леммы 8.3.1. Соответственно, при выполнении соотношения

$$\bar{v} := g_0(T - \bar{t}) \geq \max \left\{ \frac{k}{(1-b)^{i-1}} + v_0, \frac{k}{\lambda(1-b)^{i-1}} \right\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (8.3.18)$$

можно провести i таких итераций, результатом чего является следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ h \left(t, s' + \sum_{j=0}^{i-1} s_j(t) \right), E \left(t, s' + \sum_{j=0}^{i-1} s_j(\bar{t}) \right) \right\} \\ & \leq C_i F_0^{(i)}(t) = C_i \exp((1-b)^i g_0(T-t)) \quad 0 < t \leq \bar{t}. \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

Здесь

$$C_j \leq D_0 C_{j-1} \quad \forall j \leq i, \quad D_0 = \text{const} = K_2 F_0(0)^b, \quad (8.3.20)$$

$$s_j(t) := \begin{cases} K_1 \bar{U}_k^{(j)}(g_0(T-t)) & \forall t \in [t_j^{(0)}, \bar{t}), \\ 0 & \forall t < t_j^{(0)}, \end{cases}$$

где $t_j^{(0)}$ определено в (8.2.48), $\bar{U}_k^{(j)}(v) := \max_{v_0^{(j)} \leq v' \leq v} U_k^{(j)}(v')$,

$$U_k^{(j)}(v) := (1-b)^j (v - v_0^{(j)}) \left(\varphi_0 \left(v - \frac{k}{(1-b)^j} \right) - \varphi_0(v) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}},$$

$$v_0^{(j)} := g_0(T) + k(1-b)^{-j} = g_0(t_j^{(0)}).$$

Так как соотношение (8.3.18) должно быть выполненным для любого допустимого числа итераций, то при достаточно больших значениях $\bar{v}$ максимальное допустимое число итераций $i_{\text{оп}} = i_{\text{оп}}(\bar{t})$ определяется следующими неравенствами:

$$\frac{k}{\lambda(1-b)^{i_{\text{оп}}}} > \bar{v} \geq \frac{k}{\lambda(1-b)^{i_{\text{оп}}-1}}.$$

Следовательно,

$$i_0 = \left\lceil \frac{\ln \bar{v} - \ln \lambda^{-1} - \ln k}{\ln(1-b)^{-1}} \right\rceil,$$

откуда с учетом (8.3.20) вытекает неравенство

$$C_{i_{\text{оп}}} \exp((1-b)^{i_{\text{оп}}} g_0(T-\bar{t})) \leq C_{10} (g_0(T-\bar{t}))^{\frac{\ln D_0}{\ln(1-b)^{-1}}}, \quad (8.3.21)$$

где

$$C_{10} := C_0 \exp\left(\frac{k}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{\ln D_0 (\ln \lambda^{-1} + \ln k)}{\ln(1-b)^{-1}}\right).$$

Оценим теперь сверху величину $S_{\text{оп}}(\bar{t}) := \sum_{j=0}^{i_{\text{оп}}-1} s_j(\bar{t})$. В силу условия (8.3.2) имеем:

$$S_{\text{оп}}(\bar{t}) \leq (1-\delta)^{-1} K_1 \sum_{j=0}^{i_{\text{оп}}-1} (1-b)^j (\bar{v} - v_0^{(0)}) \left(\varphi_0\left(\bar{v} - \frac{k}{(1-b)^j}\right) - \varphi_0(\bar{v}) \right)^{\frac{1}{m(p+1)}},$$

где $\bar{v} = g_0(T-\bar{t})$. Из этого неравенства следует:

$$S_{\text{оп}}(\bar{t}) \leq (1-\delta)^{-1} K_1 U_k^{(0)}(\bar{v}) \left(1 + \sum_{j=1}^{i_{\text{оп}}-1} H_j \right),$$

$$H_j = (1-b)^j \left(\frac{\varphi_0(\bar{v} - \frac{k}{(1-b)^j}) - \varphi_0(\bar{v})}{\varphi_0(\bar{v} - k) - \varphi_0(\bar{v})} \right)^{\frac{1}{m(p+1)}}.$$

Оценим теперь H_j . Обозначая $d = [(1-b)^{-j}]$, с использованием условия (8.3.2) получаем

$$\varphi_0(\bar{v} - lk) - \varphi_0(\bar{v}) = \sum_{i=1}^d (\varphi_0(\bar{v} - (i-1)k - k) - \varphi_0(\bar{v} - (i-1)k)) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq (1-\delta)^{-m(p+1)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v} - (i-1)k} \right)^{m(p+1)} \cdot (\varphi_0(\bar{v} - k) - \varphi_0(\bar{v})) \leq \\ &\leq \frac{d}{(1-\delta)^{m(p+1)} \lambda^{m(p+1)}} (\varphi_0(\bar{v} - k) - \varphi_0(\bar{v})) \leq A_1 (1-b)^{-j} (\varphi_0(\bar{v} - k) - \varphi_0(\bar{v})), \end{aligned}$$

где A_1 из (8.3.7). Из последнего неравенства вытекает, что

$$H_j \leq A_1^{\frac{1}{m(p+1)}} \cdot (1-b)^{j\gamma} \quad \forall j \leq i_{\text{op}}, \quad \gamma = (l+1)^{-1}, \quad l = m(p+1) - 1,$$

что приводит к оценке:

$$S_{\text{op}}(\bar{t}) \leq \frac{A_1^{\frac{1}{m(p+1)}} K_1}{(1-\delta)(1-(1-b)^\gamma)} U_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t})) := S_{\text{op}}^{(0)}(\bar{t}). \quad (8.3.22)$$

Отсюда с учетом (8.3.21) получаем:

$$\begin{aligned} \max\{h(\bar{t}, s' + S_{\text{op}}^{(0)}(\bar{t})), E(\bar{t}, s' + S_{\text{op}}^{(0)}(\bar{t}))\} &\leq C_{10} F_{1,0}(\bar{t}) \quad \forall \bar{t} < T, \\ F_{1,0}(t) &= \exp(g_{10}(T - t)), \quad g_{10}(\tau) = m_1 \ln g_0(\tau), \\ m_1 &= \ln D_0 (\ln(1-b)^{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

что и доказывает необходимую оценку (8.3.14). $\square$

Как и в случае $p > g$ множество всех сингулярных граничных режимов удобно разбить на два класса:

A₁) существует постоянная $\beta > 0$ и последовательность $\{v_i\} : v_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такие, что

$$\varphi_0(v_i - k) - \varphi_0(v_i) := g_0^{-1}(v_i - k) - g_0^{-1}(v_i) \geq v_i^{-m(p+1)(1-\beta)} \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (8.3.24)$$

B₁) для любого $\beta : 0 < \beta < \beta_0 := \frac{m(p+1)-1}{m(p+1)}$ найдется $v_0 = v_0(\beta) \geq g_0(T) + k$ такое, что

$$\varphi_0(v - k) - \varphi_0(v) \leq v^{-m(p+1)(1-\beta)} \quad \forall v \geq v_0. \quad (8.3.25)$$

Кроме того введем подкласс A₁) режимов, удовлетворяющих равномерно оценке (8.3.24):

$\bar{A}_1$) существуют $\beta > 0$, $v_0 > 0$ такие, что

$$\varphi_0(v - k) - \varphi_0(v) \geq v^{-m(p+1)(1-\beta)} \quad \forall v \geq v_0 \quad (8.3.26)$$

а также следующий более широкий, чем B_1) класс:

$\bar{B}_1$) существует $\beta \in (0, \beta_0)$ и $v_0 \geq g_0(T) + k$ такие, что выполнена оценка (8.3.25).

Отметим, что классы A_1), $\bar{A}_1$) содержат как угодно сильно сингулярные режимы $g_0(r)$, а класс B_1) – слабо сингулярные нелокализованные режимы, являющиеся возмущением предельного локализованного режима

$$g_0(\tau) = \tau^{-\frac{1}{m(p+1)-1}} \quad (\varphi_0(v) := g_0^{-1}(v) = v^{-m(p+1)+1}).$$

Основываясь на леммах 8.3.1, 8.3.2, выведем оценки сверху волны сингулярности для режимов из классов $\bar{A}_1$), B_1). Сначала рассмотрим случай $\varphi_0(v) \in \bar{B}_1$). Зафиксируем соответствующее $\beta \in (0, \beta_0)$. При этом из определения класса $\bar{B}_1$) следует:

$$\varphi_0(v) = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_0(v + lk) - \varphi_0(v + (l+1)k)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} (v + lk)^{-\alpha_0} \quad \forall v \geq v_0,$$

где $\alpha_0 = m(p+1)(1-\beta) > 1$. Поэтому, продолжая последнее неравенство, приходим после простых вычислений к оценке

$$\varphi_0(v) \leq c_0 v^{-d_0+1} \quad \forall v > v_0, \quad c_0 = c_0(k, \beta).$$

Отсюда следует, что

$$g_0(\tau) \leq c_0^{-\frac{1}{\alpha_0-1}} \cdot \tau^{-\frac{1}{\alpha_0-1}} := c_1 \tau^{-\frac{1}{m(p+1)(1-\beta)-1}} \quad \forall \tau < \tau_0 := \varphi_0(v_0). \quad (8.3.27)$$

Используя лемму 8.3.2 получаем теперь с учетом неравенства (8.3.27):

$$\begin{aligned} & \max\{h(t, s' + K_3 \bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t}))), E(\bar{t}, s' + K_3 \bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t})))\} \\ & \leq C_{10} c_1^{m_1} (T - t)^{-\frac{m_1}{m(p+1)(1-\beta)-1}} \quad \forall t < \bar{t} < T. \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

Оценка (8.3.28) для любого $\bar{t} < T$ определяет при всех $t < \bar{t}$ промежуточный режим с обострением, удовлетворяющий условию (7.4.3) из леммы 7.4.1. Поэтому в силу этой леммы получаем с учетом условия (8.3.2) следующую оценку сверху для волны сингулярности рассматриваемого решения:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq s' + (1 - \delta)^{-1} K_3 \bar{U}_k^{(0)}(g_0(T - \bar{t})) + \gamma, \quad \forall \bar{t} < T, \quad \forall \gamma > 0, \quad (8.3.29)$$

где $L = L(\gamma)$ зависит также и от других известных параметров, фигурирующих в правой части оценки (8.3.28), но не зависит от $\bar{t} < T$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\varphi_0(v) \in \bar{A}_1$. Снова стартуем с оценки (8.3.14), установленной в лемме 8.3.2, которую запишем в виде:

$$\begin{aligned} \max\{h(t, s' + K_3(1-\delta)^{-1}U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t})), E(t, s' + K_3(1-\delta)^{-1}U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t})))\} \\ \leq C_{10} \exp[W(\bar{t})(T-t)^{-\frac{1}{m(p+1)-1}}] \quad \forall t < \bar{t} < T, \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

где

$$W(\bar{t}) = \max_{0 < t < \bar{t}} w(t), \quad w(t) = m_1 \ln g_0(T-t) (T-t)^{\frac{1}{m(p+1)-1}}.$$

Из (8.3.30) в силу теоремы 7.4.1 вытекает следующее соотношение для волны сингулярности $\chi_L(\bar{t})$:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq s' + U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t})) \left(K_3(1-\delta)^{-1} + \frac{KW(\bar{t})^{\frac{m(p+1)-1}{m(p+1)}}}{U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t}))} \right),$$

где K – постоянная из (7.4.2), $L < \infty$ зависит только от известных параметров. Из определения функции $U_k^{(0)}(v)$ и условия (8.3.26) принадлежности к классу $\bar{A}_1$ следует, что

$$U_k^{(0)}(v) \geq v^\beta \quad \forall v > v_0.$$

Поэтому несложно заметить, что

$$W(\bar{t})^{\frac{m(p+1)-1}{m(p+1)}} (U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t})))^{-1} \leq c = c(\beta) \quad \forall \bar{t} < T.$$

Продолжая теперь выведенные выше соотношение для $\chi_L(\bar{t})$ с учетом последнего неравенства, получаем:

$$\chi_L(\bar{t}) \leq s' + K_4 U_k^{(0)}(g_0(T-\bar{t})) \quad \forall \bar{t} < T, \quad (8.3.31)$$

где K_4 – постоянная зависящая только от известных параметров.

Доказанные оценки (8.3.29), (8.3.31) показывает, что справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 8.3.1. Пусть в задаче (7.1.1)–(7.1.7) $p = q > 0$ и $g(\tau) > 0 : g(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$, — монотонно невозрастающая функция, определяемая в (8.3.1), (7.1.10) сингулярным граничным режимом $f(t, x)$ из (7.1.6). Пусть $g_0(\tau)$ — произвольная мажоранта функции $g(\tau)$ такая, что

а) обратная к $g_0(\tau)$ функция $g_0^{-1}(v) := \varphi_0(v)$ является правильно убывающей в смысле определения 8.3.1,

b) $\varphi_0(v)$ принадлежит по крайней мере одному из классов $\bar{A}_1$) (см. (8.3.26)) или $\bar{B}_1$) (см. (8.3.25)).

Тогда существуют постоянные K, L , зависящие только от известных параметров задачи, такие, что для волны сингулярности произвольного решения и рассматриваемой краевой задачи справедлива оценка:

$$\chi_L(t) \leq 1 + KU_k(g_0(T-t)) \quad \forall t < T,$$

где

$$U_k(v) := v(\varphi_0(v-k) - \varphi_0(v))^{\frac{1}{m(p+1)}}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров иллюстрирующих общий результат, сформулированный в теореме 8.3.1.

Пример 6. $g(\tau) = w\tau^{-\frac{1}{l}}, 0 < l < l_0 := m(p+1) - 1$.

При этом положим $g_0(\tau) := g(\tau)$, следовательно, $\varphi_0(v) = (\frac{v}{w})^{-l}$ и также как в примере 2 из раздела 8.2 имеем

$$\begin{aligned} klw^l v^{-(l+1)} &= -k\varphi'_0(v) \leq \varphi_0(v-k) - \varphi_0(v) \\ &\leq -k\varphi'_0(v-k) = klw^l(v-k)^{-(l+1)} \quad \forall v > k. \end{aligned} \quad (8.3.32)$$

Используя эти соотношения, при помощи простых вычислений проверяем выполнение условия (8.3.2) с произвольными $k_0 > 0, \lambda \in (0, 1)$ при $\delta \in \left(1 - (1-\lambda)^{\frac{l+1}{l_0+1}}, 1\right)$. При помощи (8.3.32) легко проверяется принадлежность $\varphi_0(v)$ классу $\bar{A}_1$ с произвольным $\beta \in (0, \frac{l_0-l}{l_0+1})$ и некоторым $v_0 = v_0(k, w, l)$. Также просто проверяется и принадлежность $\varphi_0(v)$ к классу $\bar{B}_1$ с произвольным $\beta \in (\frac{l_0-l}{l_0+1}, \frac{l_0}{l_0+1})$ при некотором $v_0 = v_0(k, w, l)$. Поэтому в силу теоремы 8.3.1 имеем

$$\chi_L(t) \leq 1 + K'w^{\frac{l_0}{l_0+1}}(T-t)^{-\frac{l_0-l}{l(l_0+1)}} \quad \forall t < T, \quad (8.3.33)$$

где $K' < \infty$ не зависит от w и t . Эта оценка при $m > 1$ была впервые получена в [44], там же установлены оценки волны сингулярности и для следующих двух модельных режимов с обострением.

Пример 7. $g(\tau) = w \exp \tau^{-\alpha}, \alpha > 0, w = \text{const} > 0$. Полагаем снова $g_0(\tau) = g(\tau)$. Следовательно,

$$\varphi_0(v) = g_0^{-1}(v) = \left(\ln \frac{v}{w}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \forall v > w.$$

В силу выпуклости функции $\varphi_0(v)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\alpha v \left(\ln \frac{v}{w}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} &= -k\varphi'_0(v) \leq \varphi_0(v-k) - \varphi_0(v) \leq -k\varphi'_0(v-k) \\ &= \frac{k}{\alpha(v-k) \left(\ln \left(\frac{v-k}{w}\right)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \quad \forall v > k+w. \end{aligned} \quad (8.3.34)$$

С использованием соотношений (8.3.34) легко проверяется выполнение условия (8.3.2) с произвольными $k_0 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ при $v_0 = (1 - \lambda)^{-2}w$, $\delta \in (1 - 2^{-1}(1 - \lambda)^{\frac{1}{l_0+1}}, 1)$. Также просто проверяется принадлежность $\varphi_0(v)$ из (8.3.34) классу $\bar{A}_1$) с произвольным $\beta \in (0, \frac{l_0}{l_0+1})$ при соответствующем $v_0 = v_0(k, \alpha, \beta)$. Поэтому в силу теоремы 8.3.1 имеем в результате простых вычислений:

$$\chi_L(t) \leq 1 + K' \alpha_0^{-\frac{1}{l_0+1}} w^{\frac{l_0}{l_0+1}} (T - t)^{\frac{\alpha+1}{l_0+1}} \exp\left(\frac{l_0}{l_0+1}(T - t)^{-\alpha}\right) \quad \forall t < T, \quad (8.3.35)$$

где $K' < \infty$ зависит только от известных параметров задачи, но не зависит от w , α , t . В [44] оценка (8.3.35) получена при $\alpha = 1$.

Следующим является пример режима с сингулярным обострением, являющимся возмущением режима из примера 6, не допускающим явного выражения для обратной функции $\varphi_0(v)$.

Пример 8. $g(\tau) = g_0(\tau) = w\tau^{-\frac{1}{l}}(\ln \tau^{-1})^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Обозначая $\tau = \varphi_0(v) = g_0^{-1}(v)$, $v = g_0(\tau)$, можем переписать определение функции $g(\tau)$ в виде:

$$\varphi_0(v) = \left(\frac{w}{v}\right)^l (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l}. \quad (8.3.36)$$

Дифференцируя это равенство по v , приходим к

$$\frac{d\varphi_0}{dv} \left(1 + \frac{\alpha l w^l (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l - 1}}{v^l \varphi_0(v)}\right) = -\frac{lw^l}{v^{l+1}} (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l}.$$

Выражая $v^l \varphi_0(v)$ из (8.3.36) и подставляя в последнее соотношение, получаем:

$$\frac{d\varphi_0}{dv} \left(1 + \frac{\alpha l}{\ln \varphi_0(v)^{-1}}\right) = -\frac{lw^l}{v^{l+1}} (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l}.$$

Учитывая, что $\varphi_0(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$, для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можем найти $v_0 = v_0(\varepsilon, \alpha)$ такое, что из последнего соотношения вытекает

$$\frac{-(1 + \varepsilon)lw^l}{v^{l+1}} (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l} \leq \frac{d\varphi_0}{dv} \leq \frac{-(1 - \varepsilon)lw^l}{v^{l+1}} (\ln \varphi_0(v)^{-1})^{\alpha l} \quad \forall v > v_0. \quad (8.3.37)$$

С помощью (8.3.37) стандартно проверяется выполнение условия (8.3.2), а также принадлежность $\varphi_0(v)$ классу $\bar{A}_1$). Следовательно, теорема 8.3.1 дает оценку:

$$\chi_L(t) \leq 1 + K' w^{\frac{l_0}{l_0+1}} (\ln(T - t)^{-1})^{\frac{\alpha l_0}{l_0+1}} (T - t)^{-\frac{l_0-l}{l(l_0+1)}} \quad \forall t < T. \quad (8.3.38)$$

Пример 9. Наконец, оценим при $p = q > 0$ волну сингулярности, порождаемую суперсингулярным режимом $g_0(\tau) := g_{0,l}(\tau)$ (8.2.90) из примера 3. При этом соответствующая обратная функция $\varphi_0(v) := \varphi_{0,l}(v)$ (см. (8.2.90)), как несложно проверить, принадлежит классу $\bar{A}_1$) (см. (8.3.26)) с произвольным $\beta \in (0, \frac{m(p+1)-1}{m(p+1)})$. Поэтому с учетом (8.2.92) в силу теоремы 8.3.1 имеем:

$$\begin{aligned} \chi_L(t) \leqslant & 1 + K g_{0,l}(T-t)^{\frac{m(p+1)-1}{m(p+1)}} (T-t)^{\frac{1}{m(p+1)}} \\ & \times \left(\prod_{j=1}^l f_l^{(j)}(g_{0,l}(T-t)) \right)^{-\frac{1}{m(p+1)}} \quad \forall t < T, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где постоянная $K < \infty$ не зависит также и от l .

ГЛАВА 9

ПРИЛОЖЕНИЕ: ФОРМУЛИРОВКИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

9.1. Интерполяционные неравенства

Предложение 9.1.1. (см. [39]) Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с C^1 -гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда

1) существует постоянная $k_0 > 0$, зависящая только от Ω , такая, что

$$\|v\|_{L_1(\partial\Omega)} \leq k_0 \|v\|_{W_1^1(\Omega)} \quad \forall v \in W_1^1(\Omega);$$

2) для произвольных чисел $q, p : 0 < q \leq p < \infty$, существуют постоянные k_1 и k_2 , зависящие от p, q и Ω , такие, что для произвольной функции $v \in W_{p+1}^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{L_{p+1}(\partial\Omega)} \leq k_1 \|Dv\|_{L_{p+1}(\Omega)}^\theta \|v\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{1-\theta} + k_2 \|v\|_{L_{q+1}(\Omega)}, \quad (9.1.1)$$

где $\theta = [n(p-q) + (q+1)(p+1)]^{-1}(n(p-q) + q+1)$.

Предложение 9.1.2. ([41],[101], см. также предложение A.1 из [36]) Пусть числа $1 \leq r \leq \infty$, $p > 0$, $q \in (0, p)$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ и $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < m$, такие, что

$$\frac{1}{r} - \frac{m-j}{N} < \frac{1}{p}.$$

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной областью с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, то существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , зависящие только от Ω, r, m, q, j и N такие, что для любой $u \in L_q(\Omega)$ с $D^m u \in L_r(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|D^j u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_1 \|D^m u\|_{L_r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L_q(\Omega)}^{1-\theta} + c_2 \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad (9.1.2)$$

где $\theta = \left(\frac{j}{N} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{q} + \frac{m}{N} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$.

Дополнительно, существует положительная постоянная c , зависящая только от r, j, m, q и N (и не зависящая от Ω) такая, что

- 1) если $\Omega = K(\lambda)$ — N -мерный куб со стороной длины λ , то неравенство (9.1.2) справедливо с $c_1 = c$, $c_2 = c\lambda^{-j-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}$;
- 2) если $\Omega = \mathbb{R}^N$, то неравенство (9.1.2) справедливо с $c_2 = 0$;
- 3) если $N > 1$ и $\Omega = B(0, r_2) \setminus B(0, r_1)$ ($B(0, r) := \{|x| < r\}$), где $0 < r_1 < r_2$ и $2r_1 > r_2$, то неравенство (9.1.2) имеет место с $c_1 = c$ и $c_2 = c(r_2 - r_1)^{-j-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}$.

9.2. Системы дифференциальных неравенств

Лемма 9.2.1. Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{U_i(s)\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет следующей системе дифференциальных неравенств:

$$U_i(s) \leq \lambda U_{i-1}(s) + k(-U'_i(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \gamma > 0, \quad (9.2.1)$$

$$U_i(0) \leq K_i \quad i = 1, 2, \dots; \quad k = \text{const} > 0, \quad U_0(s) := 0, \quad (9.2.2)$$

где $\{K_i\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Тогда для указанных функций $U_i(s)$ справедливы следующие оценки:

$$U_i(s) \leq M_i(s) := a_1 k^{-\frac{1}{\gamma}} \left[a_2 (k K_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \forall i \leq j, \quad (9.2.3)$$

где

$$a_1 = (1-\lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}, \quad a_2 = \gamma^{-1}(1+\gamma)(1-\lambda)^{-\frac{1}{1+\gamma}}, \quad f(s)_+ := \max(0, f(s)).$$

В частности, $\text{supp } U_i \in [1, b_i]$, $b_i = a_2 (k K_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанные функции $M_i(s)$ являются, как несложно проверить, решениями следующей вспомогательной задачи Коши:

$$M_i(s) = \lambda M_i(s) + k(-M'_i(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \quad (9.2.4)$$

$$M_i(0) = K_i, \quad i = 1, 2, \dots, j. \quad (9.2.5)$$

Доказываем теперь оценку (9.2.3) по индукции. При $i = 1$ эта оценка проверяется непосредственно интегрированием неравенства (9.2.1) при

$i = 1$. Предположим, что оценка (9.2.3) уже доказана для всех $i \leq l - 1$, то есть

$$0 \leq U_i(s) \leq M_i(s) \quad \forall s > 0, \quad \forall i \leq l - 1,$$

и докажем, что

$$U_l(s) \leq M_l(s) \quad \forall s > 0. \quad (9.2.6)$$

Предположим, что это не так, то есть, что существует такой интервал (s_1, s_2) , $0 \leq s_1$, что

$$U_l(s_1) = M_l(s_1) \quad U_l(s) > M_l(s) > 0 \quad \forall s \in (s_1, s_2). \quad (9.2.7)$$

В силу монотонности последовательности $\{K_i\}$ и предположения индукции выполняются следующие неравенства:

$$M_l(s) \geq M_{l-1}(s) \geq U_{l-1}(s) \quad \forall s \geq 0.$$

Отсюда в силу (9.2.7) вытекает, что $U_l(s) \geq U_{l-1}(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2)$. Значит, функция $U_l(s)$ является решением следующей задачи:

$$U_l(s) \leq \lambda U_l(s) + k(-U'_l(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (s_1, s_2),$$

$$U_l(s_1) = M_l(s_1).$$

Интегрируя это неравенство, получаем оценку

$$U_l(s) \leq M_l(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2),$$

что противоречит сделанному допущению (9.2.7). $\square$

Рассмотрим "задачу Коши" для следующего дифференциального неравенства:

$$M(s) \leq \max \{k_1(-M'(s))^{1+\gamma_1}, k_2(-M'(s))^{1+\gamma_2}\} \quad \forall s > 0, \quad (9.2.8)$$

$$M(0) \leq K; \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad K > 0. \quad (9.2.9)$$

Лемма 9.2.2. Пусть $\gamma_2 > \gamma_1$. Тогда для произвольной неотрицательной невозрастающей абсолютно непрерывной функции $M(s)$, удовлетворяющей при почти всех $s > 0$ неравенствам (9.2.8) и (9.2.9), справедлива оценка

$$1) \text{ если } K \leq \tilde{K} = \tilde{K}(k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2) := k_1^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}} k_2^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}}, \text{ то}$$

$$M(s) \leq \overline{M}(s) := a_1^{(1)} k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_2^{(1)} (k_1 K^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \quad \forall s > 0, \quad (9.2.10)$$

$$\text{где } a_1^{(1)} = \left(\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}, \quad a_2^{(1)} = \gamma_1^{-1}(1+\gamma_1);$$

2) если $K > \tilde{K}$, то

$$M(s) \leq \bar{M}(s) := \begin{cases} a_1^{(2)} k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_2^{(2)} (k_2 K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - s \right]^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall s : 0 < s < \tilde{s}, \\ a_1^{(1)} k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_2^{(1)} (k_1 \tilde{K}^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}} + \tilde{s} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall s > \tilde{s}, \end{cases} \quad (9.2.11)$$

$$\text{где } a_1^{(2)} = \left(\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2} \right)^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}}, \quad a_2^{(2)} = \gamma_2^{-1}(1+\gamma_2), \quad \text{а } \tilde{s} \text{ определяется равенством}$$

$$a_1^{(2)} k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_2^{(2)} (k_2 K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - \tilde{s} \right]^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} = \tilde{K} \iff \tilde{s} = a_2^{(2)} k_2^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \left[K^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - \tilde{K}^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} \right].$$

Замечание 9.2.1. Из (9.2.10) и (9.2.11) следует, в частности, что

$$M(s) = 0 \quad \forall s \geq \bar{s}_0, \quad (9.2.12)$$

где

$$\bar{s}_0 = \begin{cases} a_2^{(1)} (k_1 K^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}}, & \text{если } K \leq \tilde{K}, \\ a_2^{(2)} (k_2 K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2} \left(\frac{k_1^{\gamma_2}}{k_2^{\gamma_1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}}, & \text{если } K > \tilde{K}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что неравенство (9.2.8) может быть записано в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} M'(s) &\leq -\min \left\{ \left(\frac{M(s)}{k_1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}}, \left(\frac{M(s)}{k_2} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \right\} \\ &= - \begin{cases} (k_2^{-1} M(s))^{\frac{1}{1+\gamma_2}} & \text{при } M \geq \tilde{M} = k_1^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} k_2^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ (k_1^{-1} M(s))^{\frac{1}{1+\gamma_1}} & \text{при } M < \tilde{M}. \end{cases} \quad \forall s > 0 \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Отсюда заключение леммы 9.2.2 следует непосредственным вычислением, так как функция $\bar{M}(s)$ из (9.2.10), (9.2.11) является максимальным решением задачи (9.2.13), (9.2.9). $\square$

Замечание 9.2.2. Несложно убедиться, что функция $\bar{M}(s)$, определяемая (9.2.10) и (9.2.11), может быть записана также в форме

$$\bar{M}(s) = \max(\bar{M}_1(s), \bar{M}_2(s)), \quad (9.2.14)$$

где

$$\overline{M}_2(s) = a_1^{(2)} k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_2^{(2)} (k_2 K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}}, \quad \overline{M}_1(s) = a_1^{(1)} k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} [\bar{s}_0 - s]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}},$$

а $\bar{s}_0$ из (9.2.12).

Рассмотрим теперь последовательность задач Коши

$$\begin{aligned} \overline{M}'_j(s) = -f_j(\overline{M}_j(s)) &:= -\min \left\{ \left(\frac{\overline{M}_j(s)}{k_{j,1}} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}}, \left(\frac{\overline{M}_j(s)}{k_{j,2}} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \right\} \quad \forall s > 0, \\ \overline{M}_j(0) &= K_j, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

где

$$k_{j,1} = c_1 \varepsilon_j^{\gamma_1}, \quad k_{j,2} = c_2 \varepsilon_j^{\gamma_2}, \quad K_j = c_3 \varepsilon_j^{-(1-\delta)}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$\{\varepsilon_j\}$ – произвольная монотонно убывающая последовательность: $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left(k_{j,1} K_j^{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}} &= \left(c_1 c_3^{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}} \varepsilon_j^{\frac{\delta \gamma_1}{1+\gamma_1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \\ \left(k_{j,2} K_j^{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} &= \left(c_2 c_3^{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \varepsilon_j^{\frac{\delta \gamma_2}{1+\gamma_2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \\ \tilde{K}_j &= \left(k_{j,1}^{1+\gamma_2} k_{j,2}^{-(1+\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} = \left(c_1^{1+\gamma_2} c_2^{-(1+\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} \varepsilon_j^{-1}. \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

Поэтому неравенство

$$K_j \geq \tilde{K}_j \iff c_3 \varepsilon_j^{-1+\delta} \geq \left(c_1^{1+\gamma_2} c_2^{-(1+\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} \varepsilon_j^{-1}$$

выполняется только для

$$j \leq j_0 = \max \left\{ j : \varepsilon_j \geq c_3^{-\frac{1}{\delta}} \left(c_1^{1+\gamma_2} c_2^{-(1+\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{\delta(\gamma_2-\gamma_1)}} := C_0 \right\}. \quad (9.2.17)$$

Отметим также, что

$$\left(\frac{k_{j,1}^{\gamma_2}}{k_{j,2}^{\gamma_1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} = \left(\frac{c_1^{\gamma_2}}{c_2^{\gamma_1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} = \text{const}. \quad (9.2.18)$$

В силу леммы 9.2.2 и соотношений (9.2.16)–(9.2.18) (произвольное решение задачи (9.2.15) может быть записано в виде:

$$\overline{M}_j(s) := \begin{cases} r_{11}\varepsilon_j^{-1}[r_{12}\varepsilon_j^{\frac{\delta\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall s > 0, \forall j \geq j_0, \\ r_{11}\varepsilon_j^{-1}[r_{22} + r_{23}\varepsilon_j^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall j < j_0, \forall s \geq \tilde{s}_j, \\ r_{31}\varepsilon_j^{-1}[r_{23}\varepsilon_j^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall j < j_0, \forall s : 0 < s < \tilde{s}_j, \end{cases} \quad (9.2.19)$$

где

$$r_{11} = a_1^{(1)} c_1^{-\frac{1}{\gamma_1}}, \quad r_{12} = a_2^{(1)} (c_1 c_3^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}}, \quad r_{22} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2} \left(\frac{c_1^{\gamma_2}}{c_2^{\gamma_1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}},$$

$$r_{23} = a_2^{(2)} (c_2 c_3^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}}, \quad r_{31} = a_1^{(2)} c_2^{-\frac{1}{\gamma_2}},$$

$$\tilde{s}_j = a_2^{(2)} k_{j,2}^{\frac{1}{1+\gamma_2}} (K_j^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - \tilde{K}^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}) = r_{23} \left[\varepsilon_j^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - C_0^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} \right],$$

а C_0 из (9.2.17). Отметим еще следующее простое свойство, вытекающее из представления (9.2.19) решения $\overline{M}_j$ задачи (9.2.15):

$$\text{supp } \overline{M}_j = [0, \overline{s}_j], \quad \overline{s}_{j_1} < \overline{s}_{j_2} \quad \forall j_1 > j_2; \quad \overline{s}_j \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (9.2.20)$$

Лемма 9.2.3. Для произвольных номеров $j_1 > j_2$ функция $\overline{M}_{j_1}(s) - \overline{M}_{j_2}(s)$ является строго монотонно убывающей на интервале $[0, \overline{s}_{j_1}]$ и, как следствие, существует только одна точка $s_{j_1, j_2} \in (0, \overline{s}_{j_1})$, такая, что

$$\overline{M}_{j_1}(s_{j_1, j_2}) = \overline{M}_{j_2}(s_{j_1, j_2}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим обратные к $\overline{M}_j(s)$ функции $\overline{s}_j(M) \forall j \in \mathbb{N}$. Очевидно, что эти функции, в силу (9.2.15) удовлетворяют соотношениям

$$\overline{s}_j'(M) = -(f_j(M))^{-1} := -g_j(M) \quad 0 < M < \overline{M}_j(0) = K_j,$$

$$\overline{s}_j(K_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность функций $g_j(M)$ строго монотонно убывает при $j \rightarrow \infty$, то

$$\overline{s}_{j_1}'(M) - \overline{s}_{j_2}'(M) = g_{j_2}(M) - g_{j_1}(M) > 0 \quad \forall M < \overline{M}_{j_2}(0).$$

Отсюда, очевидно, следует заключение леммы. $\square$

Теперь по последовательности $\{\overline{M}_j(s)\}$ построим монотонную последовательность $\widetilde{M}_j(s)$:

$$\widetilde{M}_j(s) = \max_{1 \leq i \leq j} \{\overline{M}_i(s)\} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s > 0. \quad (9.2.21)$$

В силу леммы 9.2.3 для любого номера $j \in \mathbb{N}$ существует конечное число l_j точек $s_l^{(j)}$, $l = 1, 2, \dots, l_j$, таких, что $s_1^{(j)} > s_2^{(j)} > \dots > s_{l_j}^{(j)} > 0$ и

$$\widetilde{M}_j(s) = \overline{M}_{i_l}(s) \quad \forall s \in [s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)}) \quad \forall l \leq l_j, \quad s_{l_j+1}^{(j)} = 0. \quad (9.2.22)$$

Лемма 9.2.4. *Последовательность i_l , $l = 1, 2, \dots, l_j$, определенная в (9.2.22), является монотонно возрастающей: $i_{l+1} > i_l \quad \forall l \leq l_j$ и, следовательно, для чисел l_j справедлива оценка*

$$l_j \leq j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (9.2.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного. Пусть для некоторого $l < l_j$ имеем

$$i_{l+1} < i_l. \quad (9.2.24)$$

Рассмотрим соответствующие кривые

$$\overline{\gamma}_{l+1} := (s, \overline{M}_{i_{l+1}}(s)), \quad \overline{\gamma}_l := (s, \overline{M}_{i_l}(s))$$

в квадранте $(s, M) \in \mathbb{R}^2 : s > 0, M > 0$. В силу свойства (9.2.20) и предположения (9.2.24)

$$\overline{M}_{i_{l+1}}(\overline{s}_{i_l}) > \overline{M}_{i_l}(\overline{s}_{i_l}) = 0.$$

С другой стороны, из определения (9.2.22) следует, что

$$\overline{M}_{i_l}(s_l^{(j)}) \geq \overline{M}_{i_{l+1}}(s_l^{(j)}). \quad (9.2.25)$$

Из двух последних неравенств следует, что кривые $\overline{\gamma}_{l+1}$ и $\overline{\gamma}_l$ обязательно имеют точку пересечения на интервале $[s_l^{(j)}, \overline{s}_{i_l}]$. Теперь заметим, что в силу (9.2.22)

$$\overline{M}_{i_{l+1}}(s_{l+1}^{(j)}) \geq \overline{M}_{i_l}(s_{l+1}^{(j)}),$$

что вместе с (9.2.25) гарантирует существование точки пересечения кривых $\overline{\gamma}_{l+1}$ и $\overline{\gamma}_l$ на интервале $[s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)})$. Тем самым найдено две различные точки пересечения кривых $\overline{\gamma}_l$ и $\overline{\gamma}_{l+1}$, что противоречит лемме 9.2.3. $\square$

Лемма 9.2.5. Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{M_j(s)\}$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяет следующей системе дифференциальных неравенств:

$$M_j(s) \leq \lambda M_{j-1}(s) + (1 - \lambda) \max \left\{ k_{j,1}(-M'_j(s))^{1+\gamma_1}, k_{j,2}(-M'_j(s))^{1+\gamma_2} \right\} \\ \forall s > 0, \quad M_j(0) \leq K_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad M_0(s) := 0, \quad (9.2.26)$$

где $0 < \lambda < 1$, а постоянные $k_{j,1}$, $k_{j,2}$ и K_j из (9.2.15). Тогда для произвольного $j \in \mathbb{N}$ справедлива следующая равномерная оценка:

$$M_i(s) \leq \widetilde{M}_j(s) \quad \forall i \leq j, \quad \forall s > 0, \quad (9.2.27)$$

где функции $\widetilde{M}_j(s)$ определены в (9.2.21).

Доказательство проведем по индукции. При $j = 1$ оценка (9.2.27) проверяется непосредственно. Предположив, что имеет место

$$M_i(s) \leq \widetilde{M}_{j-1}(s) \quad \forall i \leq j-1, \quad \forall s > 0, \quad (9.2.28)$$

докажем справедливость оценки (9.2.27). Предположим, что это неверно, то есть, существует интервал (a, b) , $a > 0$, такой, что

$$M_j(s) > \widetilde{M}_j(s) \quad \forall s \in (a, b); \quad M_j(s) \leq \widetilde{M}_j(s) \quad \forall s \leq a, \quad M_j(a) = \widetilde{M}_j(a). \quad (9.2.29)$$

Предположим, что

$$a \in [s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)}], \quad l \leq l_j, \quad (9.2.30)$$

где l_j из (9.2.22). В силу (9.2.22)

$$\widetilde{M}_j(s) = \overline{M}_{i_l}(s) \quad \forall s \in [a, s_l^{(j)}]. \quad (9.2.31)$$

В силу предположения индукции (9.2.28), монотонного неубывания последовательности $\widetilde{M}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$, и предположения (9.2.29) имеем

$$M_{j-1}(s) \leq \widetilde{M}_{j-1}(s) \leq \widetilde{M}_j(s) < M_j(s) \quad \forall s \in [a, s_l^{(j)}]. \quad (9.2.32)$$

Теперь из дифференциального неравенства (9.2.26) и соотношения (9.2.32) вытекает неравенство

$$M_j(s) \leq \max \{ k_{j,1}(-M'_j(s))^{1+\gamma_1}, k_{j,2}(-M'_j(s))^{1+\gamma_2} \} \quad \forall s \in [a, s_l^{(j)}].$$

Из этого неравенства в силу монотонного убывания последовательностей $\{k_{j,1}\}$ и $\{k_{j,2}\}$ следует, что

$$M_j(s) \leq \max\{k_{i,1}(-M'_j(s))^{1+\gamma_1}, k_{i,2}(-M'_j(s))^{1+\gamma_2}\} \quad \forall s \in [a, s_l^{(j)}]. \quad (9.2.33)$$

Кроме того, из предположения (9.2.29) и свойства (9.2.31) вытекает неравенство

$$M_j(a) = \overline{M}_{i_l}(a). \quad (9.2.34)$$

Из (9.2.33) и (9.2.34) в силу леммы 9.2.2 получается оценка

$$M_j(s) \leq \overline{M}_{i_l}(s) \quad \forall s \in [a, s_l^{(j)}],$$

которая противоречит сделанному допущению (9.2.29). $\square$

Лемма 9.2.6. В условиях леммы 9.2.5 для функций $M_j(s)$, удовлетворяющих системе (9.2.26), справедлива следующая универсальная априорная оценка:

$$M_j(s) = \max\{D_1 s^{-\frac{(1+\gamma_1)(1-\delta)}{\delta\gamma_1}}, D_2\} \quad \forall s > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (9.2.35)$$

где постоянные D_1 и D_2 зависят только от известных параметров системы (9.2.26) и не зависят от $j \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим более широкое, чем $\{\overline{M}_j(s)\}$ из (9.2.19), семейство функций $\overline{N}_\tau(s)$, зависящее от непрерывного параметра τ :

$$\overline{N}_\tau(s) := \begin{cases} r_{11}\tau^{-1}[r_{12}\tau^{\frac{\delta\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall s > 0, \quad \forall \tau \leq C_0, \\ r_{11}\tau^{-1}[r_{22} + r_{23}\tau^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall \tau > C_0, \\ r_{31}\tau^{-1}[r_{23}\tau^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall s \geq r_{23}(\tau^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - C_0^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}}), \\ & \forall \tau > C_0, \\ & \forall s : 0 < s < r_{23}(\tau^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}} - C_0^{\frac{\delta\gamma_2}{1+\gamma_2}}) \end{cases} \quad (9.2.36)$$

где C_0 из (9.2.17), а постоянные r_{11} , r_{12} , r_{22} , r_{31} и r_{23} из (9.2.19). Очевидно, что $\overline{N}_{\varepsilon_j}(s) = \overline{M}_j(s) \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{i \leq j} \{\overline{M}_i(s)\} &\leq \max_{\tau \geq s_j} \{\overline{N}_\tau(s)\} \leq \max_{\tau > 0} \{\overline{N}_\tau(s)\} \\ &\leq \max\{\max_{\tau < C_0} \overline{N}_\tau(s), \max_{\tau > C_0} \overline{N}_\tau(s)\} \\ &\leq \max\{\max_{\tau < C_0} \overline{N}_\tau^{(1)}(s), C_1\}, \quad C_1 := \overline{N}_{C_0}^{(1)}(0) = r_{11}r_{12}^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} C_0^{-(1-\delta)}, \end{aligned} \quad (9.2.37)$$

где

$$\overline{N}_\tau^{(1)}(s) = r_{11}\tau^{-1}[r_{12}\tau^{\frac{\delta\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s]^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \quad \forall s > 0.$$

Найдем теперь огибающую $N(s)$ семейства кривых $\overline{N}_\tau^{(1)}(s)$. Для этого, как хорошо известно, нужно исключить параметр τ из системы

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \overline{N}_\tau^{(1)}(s) = 0, \quad N - \overline{N}_\tau^{(1)}(s) = 0.$$

В результате стандартных вычислений получаем

$$N(s) = C_2 s^{-\frac{(1+\gamma_1)(1-\delta)}{\delta\gamma_1}}, \quad C_2 = r_{11}r_{12}^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \delta^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} (1-\delta)^{\frac{(1+\gamma_1)(1-\delta)}{\delta\gamma_1}}. \quad (9.2.38)$$

Покажем теперь, что

$$\overline{N}_\tau^{(1)}(s) \leq N(s) \quad \forall \tau > 0, \quad \forall s > 0. \quad (9.2.39)$$

Так как $\overline{N}_\tau^{(1)}(s) \geq 0$ и $N(s) > 0$, то для справедливости (9.2.39) достаточно показать, что

$$\varphi(s) := N(s)^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} - (\overline{N}_\tau^{(1)}(s))^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} \geq 0 \quad \forall \tau > 0, \quad \forall s > 0. \quad (9.2.40)$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\varphi'(s) = 0 \quad \text{только при} \quad s = s_c := r_{12}^\delta (1-\delta) \tau^{\frac{\delta\gamma_1}{1+\gamma_1}} \quad \forall \tau > 0.$$

Просто проверяется, что $\varphi(s_c) = 0$. Отсюда, очевидно, следует (9.2.40), а значит, и (9.2.39). Поэтому оценка (9.2.37) может быть продолжена так:

$$\max_{i \leq j} \{\overline{M}_i(s)\} \leq \max\{N(s), C_1\} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (9.2.41)$$

Отсюда в силу (9.2.5) и определения (9.2.21) следует заключение леммы с постоянными $D_1 = C_2$, где C_2 из (9.2.38) и $D_2 = C_1$, где C_1 из (9.2.37). $\square$

Лемма 9.2.7. Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{U_i(s)\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет следующей системе дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} M_i(s) &\leq \lambda M_{i-1}(s) + (1-\lambda)k_i(-M_j'(s)) \quad \forall s > 1, \quad H_0(s) = 0, \\ M_i(1) &\leq D_1 \exp(D_2 k_i^{-1}) \quad i = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1, \end{aligned} \quad (9.2.42)$$

где $\{k_i\}$ — монотонно убывающая последовательность: $k_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, $D_1 < \infty$ и $D_2 < \infty$. Тогда для функций $M_i(s)$ справедливы следующие оценки сверху:

$$M_i(s) \leq \bar{M}_i(s) = D_1 \exp[k_i^{-1}(D_2 + 1 - s)] \\ \forall s : 1 < s < s_0 = 1 + D_2, \quad \forall i \geq 1. \quad (9.2.43)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко убедиться, что функции $\bar{M}_i(s)$ являются решением задачи

$$\bar{M}_i(s) = k_i(-\bar{M}_i'(s)) \quad \forall s > 1, \\ \bar{M}_i(1) = D_1 \exp(D_2 k_i^{-1}).$$

Очевидно, что последовательность $\{\bar{M}_i(s)\}$ является строго монотонно возрастающей на интервале $[1, s_0)$, $s_0 = 1 + D_2$. Поэтому дальнейшее доказательство леммы проводится по индукции, аналогично доказательству леммы 9.2.1. $\square$

Лемма 9.2.8. Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{M_j(s)\}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$M_j(s) \leq \lambda M_{j-1}(s) + (1 - \lambda)k_j(-M_j'(s)) \quad \forall s > \bar{s}, \quad M_0(s) = 0, \\ M_j(\bar{s}) \leq \exp K_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda = \text{const} < 1, \quad (9.2.44)$$

где последовательности $\{k_j\}$, $\{K_j^{-1}\}$ и $\{r_j := k_j K_j\}$ стремятся монотонно к нулю при $j \rightarrow \infty$. Тогда функции $M_i(s)$ удовлетворяют следующей равномерной оценке сверху:

$$M_i(s) \leq \widetilde{M}_j(s) := \max_{l \leq j} \{\bar{M}_l(s)\} \leq \widetilde{M}(s) := \max_{l \in \mathbb{N}} \{\bar{M}_l(s)\} \quad (9.2.45)$$

$$\forall i \leq j, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s : \bar{s} < s \leq \bar{s} + k_1 K_1,$$

где $\bar{M}_l(s) := \exp[k_l^{-1}(K_l k_l + \bar{s} - s)]$ является решением задачи

$$\bar{M}_l(s) = -k_l \bar{M}_l'(s) \quad \forall s \geq \bar{s}; \quad \bar{M}_l(\bar{s}) = \exp K_l. \quad (9.2.46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о опускаем, поскольку практически оно повторяет доказательство леммы 9.2.5. $\square$

Лемма 9.2.9. Пусть в условиях леммы 9.2.8 дополнительно $K_i = f(k_i) \forall i \in \mathbb{N}$, где $f(s)$, $s > 0$ – произвольная непрерывно дифференцируемая монотонно убывающая функция. Тогда для функции $\widetilde{M}(s)$ из (9.2.45) справедлива оценка

$$\widetilde{M}(s) \leq \widetilde{N}(s) \quad \forall s > 0,$$

где $\widetilde{N}(s)$ – огибающая семейства кривых $\overline{N}_\tau(s): \overline{N}_{k_i}(s) = \overline{M}_i(s), \forall i \in \mathbb{N}$, а k_i из (9.2.44).

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.2.6 и мы также опускаем его. $\square$

Следствие 9.2.1. Если в условиях леммы 9.2.9 $f(s) = r + g \ln s^{-1}$, то

$$\widetilde{N}(s) = \exp((r + g)g^g(s - \bar{s})^{-g}) \quad \forall s \geq \bar{s}.$$

9.3. Функциональные неравенства

Лемма 9.3.1. (см. [125]) Пусть неотрицательные невозрастающие на $(0, \infty)$ функции $A(s), H(s), B(s)$ и $D(s)$ удовлетворяют следующему функциональному неравенству:

$$\begin{aligned} A(s + \delta) + H(s + \delta) \\ \leq \varepsilon H(s) + c(\varepsilon) \sum_{i=1}^l \delta^{-\alpha_i} (B(s) - B(s + \delta)) B(s)^{\beta_i} + D(s) \\ \forall s > 0, \forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

где $c(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для функций $A(s), H(s)$ имеет место следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} A(s + \delta) + H(s + \delta) \\ \leq (1 + \varepsilon) D(s) + c_1(\varepsilon) (B(s) - B(s + \delta)) \sum_{i=1}^l \frac{B(s)^{\beta_i}}{\delta^{\alpha_i}}, \\ \forall s > 0, \forall \delta > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0 := \min_{i \leq l} 2^{-\alpha_i}, \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

где $c_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (9.3.1) вытекает справедливость следующей серии неравенств:

$$A\left(s + \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) + H\left(s + \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) \leq \varepsilon H\left(s + \frac{\delta}{2^j}\right) + D\left(s + \frac{\delta}{2^j}\right) + c(\varepsilon) \sum_{i=1}^l \left(\frac{2^j}{\delta}\right)^{\alpha_i} B\left(s + \frac{\delta}{2^j}\right)^{\beta_i} \left(B\left(s + \frac{\delta}{2^j}\right) - B\left(s + \frac{\delta}{2^{j-1}}\right)\right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (9.3.3)$$

Стартуем теперь с неравенства (9.3.3) при $j = 1$. Оцениваем член $H(s + \frac{\delta}{2})$ в правой части этого неравенства при помощи неравенства (9.3.3) с $j = 2$, затем слагаемое $H(s + \frac{\delta}{4})$ в правой части полученного соотношения при помощи (9.3.3) с $j = 3$ и так далее. Повторив описанную процедуру k раз, приходим к соотношению

$$A(s + \delta) + H(s + \delta) \leq \varepsilon^k H\left(s + \frac{\delta}{2^k}\right) + \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r D\left(s + \frac{\delta}{2^{r+1}}\right) + c(\varepsilon) \sum_{i=1}^l \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{2^{1+r}}{\delta}\right)^{\alpha_i} \varepsilon^r B\left(s + \frac{\delta}{2^{r+1}}\right)^{\beta_i} \left(B\left(s + \frac{\delta}{2^{r+1}}\right) - B\left(s + \frac{\delta}{2^r}\right)\right).$$

Отсюда в силу монотонности функций $D(s)$ и $B(s)$ следует, что

$$A(s + \delta) + H(s + \delta) \leq \varepsilon^k H\left(s + \frac{\delta}{2^k}\right) + D\left(s + \frac{\delta}{2^k}\right) \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r + c(\varepsilon) \sum_{i=1}^l \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\alpha_i} B\left(s + \frac{\delta}{2^k}\right)^{\beta_i} \left(B\left(s + \frac{\delta}{2^k}\right) - B(s + \delta)\right) \sum_{r=0}^{k-1} (2^{\alpha_i \varepsilon})^r. \quad (9.3.4)$$

Полагая в (9.3.4) $\varepsilon < \varepsilon_0 := \min_{i \leq l} 2^{-\alpha_i}$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$A(s + \delta) + H(s + \delta) \leq \frac{D(s)}{1 - \varepsilon} + c(\varepsilon) K_1 (B(s) - B(s + \delta)) \sum_{i=1}^l \frac{B(s)^{\beta_i}}{\delta^{\alpha_i}},$$

где

$$K_1 = \max_{i \leq l} \{2^{\alpha_i} (1 - \varepsilon 2^{\alpha_i})^{-1}\}.$$

Последнее неравенство эквивалентно оценке (9.3.2). $\square$

Лемма 9.3.2. ([126]). Пусть некоторая непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет соотношению:

$$f(s + \delta) \leq a \delta^{-\alpha} f(s)^\theta \quad \forall s > 0, \delta > 0;$$

где числа $a > 0$, $\alpha > 0$, $\theta > 0$. Тогда для функции f справедлива следующая универсальная априорная оценка:

- 1) если $\theta < 1$: $f(s) \leq 2^{\frac{\alpha}{\theta(1-\theta)^2}} a^{\frac{1}{1-\theta}} s^{-\frac{\alpha}{1-\theta}} \quad \forall s > 0$;
- 2) если $\theta = 1$: $f(s) \leq f(0) \exp(1 - s/(ae)^{1/\alpha})$;
- 3) если $\theta > 1$: $f(s_0) = 0$, $s_0 = 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} (af(0)^{\beta-1})^{\frac{1}{\alpha}}$.

Лемма 9.3.3. Пусть некоторая непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет соотношению

$$f(s + \delta) \leq a \delta^{-\alpha} f(s)^\theta + R \quad \forall s > 0, \delta > 0, \quad (9.3.5)$$

где $0 < \theta < 1$, $a > 0$, $\alpha > 0$, $R = \text{const} < \infty$. Тогда для функции f справедлива следующая априорная оценка:

$$f(s) \leq \max \left\{ 2R, 2^{\frac{\alpha}{\theta(1-\theta)^2}} (2a)^{\frac{1}{1-\theta}} \cdot s^{-\frac{\alpha}{1-\theta}} \right\} \quad \forall s > 0.$$

Доказательство. Соотношение (9.3.5), очевидно, эквивалентно неравенству

$$f(s) \leq a \delta^{-\alpha} f(s - \delta)^\theta + R \quad \forall s > 0, \quad \forall \delta : 0 < \delta < s. \quad (9.3.6)$$

Очевидно, что из (9.3.6) вытекает также следующее неравенство:

$$f(s) \leq 2a \delta^{-\alpha} f(s - \delta)^\theta \quad \forall s : f(s) \geq 2R, \quad \forall \delta < s.$$

Отсюда в силу монотонности функции $f(s)$ и леммы 9.3.2 вытекает справедливость доказываемого утверждения. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aizenman M., Simon B. Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger operators // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1982. – **35**, № 2. – P. 209–273.
- [2] Акулов В.Ф., Шишков А.Е. Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // *Матем. сб.* – 1991. – **182**, № 8. – С.1200–1210; англ. пер.: Akulov V.F., Shishkov A.E. Asymptotic properties of solutions of mixed problems for quasilinear parabolic equations in unbounded domains // *Math. USSR-Sb.* – 1992. – **73**, № 2. – P. 557–567.
- [3] Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // *Math. Z.* – 1983. – **183**, № 3. – P. 311–341.
- [4] Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., Trombetti G. Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity // *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*. – 2003. – **182**, № 1. – P. 53–79.
- [5] Alvino A., Ferone V., Trombetti G. Nonlinear elliptic equations with lower-order terms // *Differential Integral Equations*. – 2001. – **14**, № 10. – P. 1169–1180.
- [6] Антонцев С.Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // *Докл. АН СССР*. – 1981. – **260**, № 6. – С. 1289–1293.
- [7] Aronson D.G. Removable singularities for linear parabolic equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1964. – **17**. – P. 79–84.
- [8] Aronson D.G. Isolated singularities of solutions of second order parabolic equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1965. – **19**. – P. 231–238.
- [9] Aronson D.G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1967. – **25**. – P. 81–122.
- [10] Aronson D.G. The porous medium equation // *Nonlinear diffusion problems, Lectures Notes in Math.*, **1224**. – Berlin: Springer, 1986. – P. 1–46.
- [11] Aronson D.G. Regularity of flows in porous media: a survey // Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states I, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **12**. – New York: Springer, 1988. – P. 35–49.
- [12] Baras P., Pierre M. Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. – 1984. – **34**, № 1. – P. 185–206.

- [13] Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. – 1995. – **22**, № 2. – P. 241–273.
- [14] Benilan Ph., Wittbold P. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems // *Adv. Differential Equations*. – 1996. – **1**, № 6. – P. 1053–1073.
- [15] Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // *Math. Ann.* – 1988. – **279**, № 3. – P. 373–394.
- [16] Bernis F. Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // *Houston J. Math.* – 1988. – **14**, № 3. – P. 319–352.
- [17] Bertsch M. A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term // *Nonlinear Anal.* – 1983. – **7**, № 1. – P. 117–127.
- [18] Betta M.F., Del Vecchio T., Posteraro M.R. Existence and regularity results for nonlinear degenerate elliptic equations with measure data // *Ricerche Mat.* – 1998. – **47**, № 2. – P. 277–295.
- [19] Betta M.F., Mercaldo A., Murat F., Porzio M.M. Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure // *J. Math. Pures Appl. (9)*. – 2003. – **82**, № 1. – P. 90–124.
- [20] Biroli M. Schrödinger type and relaxed Dirichlet problems for the subelliptic p -Laplacian // *Potential Anal.* – 2001. – **15**, № 1–2. – P. 1–16.
- [21] Blanchard D., Murat F., Redwane H. Existence et unicité de la solution renormalisée d'un problème parabolique non linéaire assez général // *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* – 1999. – **329**, № 7. – P. 575–580.
- [22] Boccardo L., Dall'Aglio A., Orsina L. Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity // *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*. – 1998. – **46**, suppl. – P. 51–81.
- [23] Boccardo L., Gallouët T. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // *J. Funct. Anal.* – 1989. – **87**, № 1. – P. 149–169.
- [24] Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // *Comm. Partial Differential Equations*. – 1992. – **17**, № 3–4. – P. 641–655.
- [25] Boccardo L., Gallouët T. Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures // *J. Convex Anal.* – 1996. – **3**, № 2. – P. 361–365.
- [26] Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P. Anisotropic equations in L^1 // *Differential Integral Equations*. – 1996. – **9**, № 1. – P. 209–212.
- [27] Boccardo L., Gallouët T., Orsina L. Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data // *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*. – 1996. – **13**, № 5. – P. 539–551.

- [28] Boccardo L., Gallouët T., Vazquez J.L. Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restrictions on the data // *J. Differential Equations*. – 1993. – **105**, № 2. – P. 334–363.
- [29] Boccardo L., Giachetti D. Alcuni osservazioni sulla regolarità delle soluzioni di problemi fortemente non lineari e applicazioni // *Ricerche Mat.* – 1985. – **34**, № 2. – P. 309–323.
- [30] Brézis H., Friedman A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // *J. Math. Pures Appl. (9)*. – 1983. – **62**, № 1. – P. 73–97.
- [31] Brezis H., Peletier L.A., Terman D. A very singular solution of the heat equation with absorption // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1986. – **95**, № 3. – P. 185–209.
- [32] Brézis H., Véron L. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1980/81. – **75**, № 1. – P. 1–6.
- [33] Chiarenza F., Fabes E., Garofalo N. Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1986. – **98**, № 3. – P. 415–425.
- [34] Cortázar C., Elgueta M. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation // *Nonlinear Anal.* – 1989. – **13**, № 1. – P. 33–41.
- [35] Dal Maso G., Murat F., Orsina L., Prignet A. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. – 1999. – **28**, № 4. – P. 741–808.
- [36] Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A. The thin film equation with nonlinear diffusion // *Comm. Partial Differential Equations*. – 2001. – **26**, № 9–10. – P. 1509–1557.
- [37] De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*. – 1957. – **3**. – P. 25–43.
- [38] DiBenedetto E. Degenerate parabolic equations. – New York: Springer-Verlag, 1993.
- [39] Díaz J.I., Véron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1985. – **290**, № 2. – P. 787–814.
- [40] Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Part I. General theory. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [41] Gagliardo E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // *Ricerche Mat.* – 1959. – **8**. – P. 24–51.
- [42] Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности // *Матем. сб.* – 1982. – **118(160)**, № 3. – С. 291–322.

- [43] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* – 2003. – **133**, № 5. – P. 1075–1119.
- [44] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* – 2004. – **460**, № 2051. – P. 3299–3325.
- [45] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* – 2005. – **135**, № 6. – P. 1195–1227.
- [46] Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1981. – **34**, № 4. – P. 525–598.
- [47] Gilbarg D., Serrin J. On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations // *J. Analyse Math.* – 1955/56. – **4**. – P. 309–340.
- [48] Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [49] Gilding B.H., Goncerzewicz J. Localization of solutions of exterior domain problems for the porous media equation with radial symmetry // *SIAM J. Math. Anal.* – 2000. – **31**, № 4. – P. 862–893.
- [50] Gilding B.H., Herrero M.A. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction with peaking // *Math. Ann.* – 1988. – **282**, № 2. – P. 223–242.
- [51] Gmira A. On quasilinear parabolic equations involving measure data // *Asymptotic Anal.* – 1990. – **3**, № 1. – P. 43–56.
- [52] Grange O., Mignot F. Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques non linéaires // *J. Functional Analysis.* – 1972. – **11**. – P. 77–92.
- [53] Калашников А.С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* – 1967. – **7**, № 2. – С. 440–444.
- [54] Калашников А.С. Некоторые проблемы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // *УМН.* – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–177; англ. пер.: Kalashnikov A.S. Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations // *Russian Math. Surveys.* – 1987. – **42**. – P. 169–222.
- [55] Kamin S., Peletier L.A. Singular solutions of the heat equation with absorption // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1985. – **95**, № 2. – P. 205–210.
- [56] Kamin S., Peletier L.A. Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption // *Israel J. Math.* – 1985. – **50**, № 3. – P. 219–230.

- [57] Kamin S., Peletier L.A., Vázquez J.L. Classification of singular solutions of a nonlinear heat equation // *Duke Math. J.* – 1989. – **58**, № 3. – P. 601–615.
- [58] Kamin S., Vázquez J.L. Singular solutions of some nonlinear parabolic equations // *J. Anal. Math.* – 1992. – **59**. – P. 51–74.
- [59] Kilpeläinen T., Malý J. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // *Acta Math.* – 1994. – **172**, № 1. – P. 137–161.
- [60] Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. – New York: Academic Press, 1980.
- [61] Knowles J.K. On the spatial decay of solutions of the heat equation // *Z. Angew. Math. Phys.* – 1971. – **22**. – P. 1050–1056.
- [62] Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // *Матем. сб.* – 1988. – **135(177)**, № 3. – С. 346–360; англ. пер.: Kondrat'ev V.A., Landis E.M. Qualitative properties of the solutions of a second-order nonlinear equation // *Math. USSR-Sb.* – 1989. – **63**, № 2. – P. 337–350.
- [63] Kovalevsky A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1 -data // *Nonlinear Boundary Value Problems*. – 1999. – **9**. – P. 46–54.
- [64] Ковалевский А.А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями // *Изв. РАН. Сер. матем.* – 2001. – **65**, № 2. – С. 27–80; англ. пер.: Kovalevskii A.A. Entropy solutions of the Dirichlet problem for a class of non-linear elliptic fourth-order equations with right-hand sides in L^1 // *Izv. Math.* – 2001. – **65**, № 2. – P. 231–283.
- [65] Ковалевский А.А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 // *Матем. заметки*. – 2001. – **70**, № 3. – С. 375–385; англ. пер.: Kovalevskii A.A. Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1 // *Math. Notes*. – 2001. – **70**, № 3–4. – P. 337–346.
- [66] Kovalevsky A.A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1 -data // *Нелинейные граничные задачи*. – 2002. – **12**. – С. 119–127.
- [67] Ковалевский А.А. О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.* – 2003. – **67**, № 5. – С. 35–48; англ. пер.: Kovalevskii A.A. On the summability of entropy solutions for the Dirichlet problem in a class of non-linear elliptic fourth-order equations // *Izv. Math.* – 2003. – **67**, № 5. – P. 881–894.
- [68] Ковалевский А.А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов // *Матем. заметки*. – 2003. – **74**, № 5. – С. 676–685; англ. пер.: Kovalevskii A.A.

- Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from logarithmic classes // *Math. Notes*. – 2003. – **74**, № 5–6. – P. 637–646.
- [69] Ковалевский А.А. О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с L^1 -правыми частями // *Український математичний вісник*. – 2005. – **2**, № 4. – С. 502–540; англ. пер.: Kovalevsky A.A. On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1 -right-hand sides // *Ukr. Math. Bull.* – 2005. – **2**, № 4. – P. 507–545.
- [70] Kovalevsky A.A. Improvement of summability of entropy solutions for a class of nonlinear high-order equations // *Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу–2001*. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 42–49.
- [71] Kovalevsky A.A. General conditions for limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1 -data // *Nonlinear Anal.* – 2006. – **64**, № 8. – P. 1885–1895.
- [72] Ковалевский А.А. О сходимости функций из соболевского пространства, удовлетворяющих специальным интегральным оценкам // *Укр. мат. журн.* – 2006. – **58**, № 2. – С. 168–183; англ. пер.: Kovalevskii A.A. On the convergence of functions from a Sobolev space satisfying special integral estimates // *Ukrainian Math. J.* – 2006. – **58**, № 2. – P. 189–205.
- [73] Ковалевский А.А. Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными // *Современная математика. Фундаментальные направления*. – 2006. – **16**. – С. 47–67; англ. пер.: Kovalevskii A.A. A priori properties of solutions of nonlinear equations with degenerate coercivity and L^1 -data // *J. Math. Sci. (N.Y.)*. – 2008. – **149**, № 5. – P. 1517–1538.
- [74] Kovalevsky A.A. Nonlinear fourth-order equations with a strengthened ellipticity and L^1 -data // *On the notions of solution to nonlinear elliptic problems: results and developments, Quaderni di Matematica*, **23**. – Rome: Aracne editrice S.r.l., 2010. – P. 283–337.
- [75] Kovalevsky A., Nicolosi F. Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1 -data // *Nonlinear Anal.* – 2001. – **47**, № 1. – P. 435–446.
- [76] Kovalevsky A., Nicolosi F. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth-order equations with L^1 -right-hand sides // *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods*. – 2002. – **50**, № 5. – P. 581–619.
- [77] Kovalevsky A., Nicolosi F. Existence of solutions of some degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1 -data // *Appl. Anal.* – 2002. – **81**, № 4. – P. 905–914.
- [78] Kovalevsky A., Nicolosi F. Summability of solutions of Dirichlet problem // *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*.

- Proceedings of the International Conference to celebrate R.P. Gilbert's 70th birthday. Fréjus, France, 18–22 June 2002. – Singapore: World Scientific, 2002. – P. 199–206.
- [79] Kovalevsky A., Nicolosi F. Summability of solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate nonlinear high-order equations // *Appl. Anal.* – 2003. – **82**, № 2. – P. 93–101.
- [80] Kovalevsky A., Nicolosi F. Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic equations with L^1 -right-hand sides // *Nonlinear Anal.* – 2004. – **59**, № 3. – P. 347–370.
- [81] Kovalevsky A., Nicolosi F. Summability of solutions of some degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations // *Appl. Anal.* – 2005. – **84**, № 1. – P. 1–13.
- [82] Kovalevsky A.A., Nicolosi F. On multipliers characterizing summability of solutions for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1 -data // *Nonlinear Anal.* – 2008. – **69**, № 3. – P. 931–939.
- [83] Kurata K. Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order // *Indiana Univ. Math. J.* – 1994. – **43**, № 2. – P. 411–440.
- [84] Kurdyumov S.P. Nonlinear processes in dense plasma // *Proc. 2nd Int. Conf. on Plasma Theory, Kiev, 1974.* – Kiev: Naukova Dumka, 1976. – P. 278–287.
- [85] Kurdyumov S.P. Evolution and self-organization laws in complex systems // *Int. J. Mod. Phys. C* **1**. – 1990. – P. 299–327.
- [86] Kurdyumov S.P., Samarskii A.A., Zmitrenko N.V. Heat localization effects in problems of ICF (inertial confinement fusion) // *Int. J. Mod. Phys.* – 1995. – **B 9**. – P. 1797–1811.
- [87] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967.
- [88] Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973.
- [89] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [90] Liskevich V., Skrypnik I.I. Isolated singularities of solutions to quasilinear elliptic equations // *Potential Anal.* – 2008. – **28**, № 1. – P. 1–16.
- [91] Liskevich V., Skrypnik I.I. Isolated singularities of solutions to quasi-linear elliptic equations with absorption // *J. Math. Anal. Appl.* – 2008. – **338**, № 1. – P. 536–544.
- [92] Malý J., Ziemer W.P. Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations. – Providence: American Mathematical Society, 1997.
- [93] Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1961. – **14**. – P. 577–591.

- [94] Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1964. – **17**. – P. 101–134.
- [95] Moutoussamy I., Véron L. Source type positive solutions of nonlinear parabolic inequalities // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. – 1989. – **16**, № 4. – P. 527–555.
- [96] Moutoussamy I., Véron L. Isolated singularities and asymptotic behaviour of the solutions of a semi-linear heat equation // *Asymptotic Anal.* – 1994. – **9**, № 3. – P. 259–289.
- [97] Murat F. Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure // Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique. Les Karellis, France. – 1994. – P. A12–A24.
- [98] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // *Amer. J. Math.* – 1958. – **80**. – P. 931–954.
- [99] Nicolosi F., Skrypnik I.V., Skrypnik I.I. Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // *Comm. Partial Differential Equations*. – 2003. – **28**, № 3–4. – P. 677–696.
- [100] Nicolosi F., Skrypnik I.I., Skrypnik I.V. Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations // *Укр. мат. вісн.* – 2009. – **6**, № 2. – С. 208–234.
- [101] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*. – 1959. – **13**. – P. 115–162.
- [102] Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений параболических граничных задач в неограниченных областях // *УМН*. – 1976. – **31**, № 6. – С. 142–166; англ. пер.: Oleinik O.A., Iosif'jan G.A. An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains // *Russian Math. Surveys*. – 1976. – **31**, № 6. – P. 153–178.
- [103] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юйлинь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1958. – **22**, № 8. – С. 667–704.
- [104] Олейник О.А., Радкевич Е.В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // *УМН*. – 1978. – **33**, № 5. – С. 7–76.
- [105] Porretta A. Nonlinear equations with natural growth terms and measure data // Proceedings of the 2002 Fez Conference on Partial Differential Equations, *Electron. J. Differ. Equ.* – 2002. – Conf., 9. – P. 183–202.
- [106] Quirós F., Vázquez J.L. Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. – 1999. – **28**, № 2. – P. 183–227.
- [107] Rakotoson J.-M. Generalized solutions in a new type of sets for problems with measures as data // *Differential Integral Equations*. – 1993. – **6**, № 1. – P. 27–36.

- [108] Rakotoson J.-M. Uniqueness of renormalized solutions in a T -set for the L^1 -data problem and link between various formulations // *Indiana Univ. Math. J.* – 1994. – **43**, № 2. – P. 685–702.
- [109] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – Москва: Наука, 1987.
- [110] Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного вычисления температурных волн // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* – 1963. – **3**. – С. 702–719.
- [111] Segura de León S. Existence and uniqueness for L^1 data of some elliptic equations with natural growth // *Adv. Differential Equations*. – 2003. – **8**, № 11. – P. 1377–1408.
- [112] Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations // *Acta Math.* – 1964. – **111**. – P. 247–302.
- [113] Serrin J. Isolated singularities of solutions of quasi-linear equations // *Acta Math.* – 1965. – **113**. – P. 219–240.
- [114] Шишков А.Е. Динамика геометрии носителей обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболлических уравнений // *Дифференц. уравнения*. – 1993. – **29**, № 3. – С. 537–547; англ. пер.: Shishkov A.E. Dynamics of the geometry of the support of the generalized solution of a higher-order quasilinear parabolic equation in divergence form // *Differential Equations*. – 1993. – **29**, № 3. – P. 460–469.
- [115] Шишков А.Е. Эволюция носителей решений с неограниченной энергией квазилинейных вырождающихся параболических уравнений произвольного порядка // *Матем. сб.* – 1995. – **186**, № 12. – С. 151–172; англ. пер.: Shishkov A.E. Evolution of the support of a solution with unbounded energy of a quasilinear degenerate parabolic equation of arbitrary order // *Sb. Math.* – 1995. – **186**, № 12. – P. 1843–1864.
- [116] Шишков А.Е. Граничные режимы с обострением для энергетических обобщенных решений многомерных параболических уравнений // *Нелинейные граничные задачи*. – 1998. – **8**. – С. 229–237.
- [117] Шишков А.Е. Локализованные граничные режимы с обострением для общих квазилинейных дивергентных параболических уравнений произвольного порядка // *Тр. Мат. инст. им. В.А. Стеклова*. – 2002. – **236**. – С. 354–370; англ. пер.: Shishkov A.E. Localized boundary blow-up regimes for general quasilinear parabolic equations of arbitrary order in divergence form // *Proc. Steklov Inst. Math.* – 2002. – **236**, № 1. – P. 341–356.
- [118] Шишков А.Е., Щелков А.Г. Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях // *Матем. сб.* – 1999. – **190**, № 3. – С. 129–160; англ. пер.: Shishkov A.E., Shchelkov A.G. Boundary regimes with peaking for general quasilinear

- parabolic equations in multidimensional domains // *Sb. Math.* – 1999. – **190**, № 3–4. – P. 447–479.
- [119] Скрыпник И.И. Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях // *Матем. сб.* – 2003. – **194**, № 9. – С. 91–112; англ. пер.: Skrypnik I.I. On the removability of singularities of solutions of nonlinear elliptic equations on manifolds // *Sb. Math.* – 2003. – **194**, № 9–10. – P. 1361–1381.
- [120] Скрыпник И.И. Локальное поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией // *Труды ИПММ НАН Украины.* – 2004. – **9**. – С. 183–190.
- [121] Скрыпник И.И. Неравенство Гарнака для нелинейного эллиптического уравнения с коэффициентами из Като класса // *Укр. мат. вісн.* – 2005. – **2**, № 2. – С. 219–235; англ. пер.: Skrypnik I.I. Harnack inequality for a nonlinear elliptic equation with coefficients from the Kato class // *Ukr. Math. Bull.* – 2005. – **2**, № 2. – P. 223–238.
- [122] Скрыпник И.И. Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией // *Матем. сб.* – 2005. – **196**, № 11. – С. 141–160; англ. пер.: Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption // *Sb. Math.* – 2005. – **196**, № 11–12. – P. 1693–1713.
- [123] Скрыпник И.В. О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // *Дифференциальные уравнения.* – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1118; англ. пер.: Skrypnik I.V. High-order quasilinear elliptic equations with continuous generalized solutions // *Differential Equations.* – 1978. – **14**, № 6. – P. 786–795.
- [124] Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – Москва: Наука, 1990.
- [125] Солонников В.А. Дифференциальные свойства слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* – 1974. – **39**. – С. 110–119; англ. пер.: Solonnikov V.A. Differential properties of weak solutions of quasilinear elliptic equations // *J. Sov. Math.* – 1977. – **8**. – P. 79–86.
- [126] Stampacchia G. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // *Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16 (Été, 1965).* – Montreal: Les Press. Univ. Montreal, 1966.
- [127] Toupin R.A. Saint-Venant's principle // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1965. – **18**. – P. 83–96.
- [128] Vázquez J.L., Véron L. Singularities of elliptic equations with an exponential nonlinearity // *Math. Ann.* – 1984. – **269**, № 1. – P. 119–135.

- [129] Vazquez J.L., Véron L. Different kinds of singular solutions of nonlinear parabolic equations // *Nonlinear problems in applied mathematics*, SIAM, Philadelphia, PA. – 1996. – P. 240–249.
- [130] Vázquez J.L., Yarur C. Isolated singularities of the Schrödinger equation with a good potential // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1989. – **315**, № 2. – P. 711–720.
- [131] Venegas T.O. The porous medium equation with blowing up boundary data // *Adv. Nonlinear Stud.* – 2009. – **9**, № 1. – P. 1–27.
- [132] Véron L. Global behaviour and symmetry properties of singular solutions of nonlinear elliptic equations // *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*. – 1984. – **6**, № 1. – P. 1–31.
- [133] Véron L. Singularities of some quasilinear equations // *Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, II* (Berkeley, CA, 1986), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **13** – New York: Springer, 1988. – P. 333–365.
- [134] Véron L. Singularities of solutions of second order quasilinear equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, **353**. – Harlow: Longman, 1996.
- [135] Баренблатт Г.И. О некоторых неустойчивых движениях жидкости и газа в пористой среде // *Прикл. мат. мех.* – 1952. – **16**, № 2. – С. 67–78.
- [136] Баренблатт Г.И., Вишик М.И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // *Прикл. мат. мех.* – 1956. – **20**, № 3. – С. 411–417.
- [137] Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности // *Дифференциальные уравнения*. – 1980. – **16**, № 7. – С. 1196–1204.
- [138] Дубинский Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // *УМН*. – 1968. – **23**, № 1. – P. 45–90.
- [139] Зельдович Я.Б., Компанеев А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // *Сб. посвящ. 70-летию А.Ф. Иоффе*. – М.: Наука, 1950. – С. 61–71.
- [140] Лаптев Г.И. Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени // *Матем. сб.* – 2000. – **191**, № 9. – С. 43–64; англ. пер.: Laptev G.I. Evolution equations with a monotone operator and functional nonlinearity in the time derivative // *Sb. Math.* – 2000. – **191**, № 9–10. – P. 1301–1322.
- [141] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами // *ДАН СССР*. – 1979. – **247**, № 2. – С. 349–353.

- [142] Шишков А.Е. Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // *Дифференциальные уравнения*. – 1990. – **26**, № 9. – С. 1627–1633; англ. пер.: Shishkov A.E. Uniqueness classes of generalized solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded noncylindrical domains // *Differential Equations*. – 1990. – **26**, № 9. – P. 1212–1218.
- [143] Caffarelli L.A., Friedman A. Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium // *Amer. J. Math.* – 1979. – **101**, № 6. – P. 1193–1218.
- [144] Gilding B.H. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4)*. – 1989. – **16**, № 2. – P. 165–224.
- [145] Pattle R.E. Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1959. – **12**. – P. 407–409.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

ЧАСТЬ I НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С L^1 -ДАННЫМИ

Глава 1. Нелинейные эллиптические уравнения второго порядка с L^1 -данными	9
1.1. Введение	9
1.2. Общие условия предельной суммируемости решений	24
1.3. Случай принадлежности правой части уравнения логарифмическим классам	29
1.4. Об интегрально-логарифмических условиях предельной суммируемости решений	34
1.5. Случай принадлежности правой части уравнения пространствам Лебега, близким к $L^1(\Omega)$	55
1.6. О сходимости функций из $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих специальным интегральным неравенствам	64
1.7. О существовании энтропийных решений уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными	74
1.8. Априорные свойства энтропийных решений уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными	79
Глава 2. Нелинейные уравнения четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью и L^1 -данными	98
2.1. Введение	98
2.2. Множество функций $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	103
2.3. Определение и некоторые свойства энтропийных решений	110
2.4. Одна априорная оценка для энтропийных решений	115

2.5. Понятие H -решения	121
2.6. О единственности энтропийного решения	126
2.7. Теоремы существования	135
2.8. Принадлежность энтропийных решений соболевским пространствам и существование W -решений	157
2.9. О суммируемости функций из $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, подчиненных некоторым интегральным неравенствам	162
2.10. Об улучшении свойств суммируемости решений задачи (2.1.6), (2.1.7)	170
2.11. Некоторые характеристики множества функций $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	174
2.12. Множество функций $\hat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	178
2.13. Определение и априорные оценки правильных энтропийных решений	182
2.14. Существование правильных энтропийных решений	189
2.15. Связь с энтропийными решениями и теорема единственности	195
2.16. Связь с H -решениями и W -решениями	198
2.17. Свойства суммируемости правильных энтропийных решений	202
2.18. Связь с обобщенными решениями	207
2.19. Примеры относительно коэффициентов и правой части уравнения (2.1.6)	212

ЧАСТЬ II

УСТРАНИМОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Глава 3. Устранимость особенностей решений квазилинейных эллиптических уравнений	217
3.1. Введение	217
3.2. Устранимость изолированных особенностей	218

3.3.	Устранимость особенностей решений эллиптических уравнений на многообразиях	227
3.4.	Устранимость изолированных особенностей решений эллиптических уравнений с абсорбцией	246
Глава 4.	Устранимость особенностей решений квазилинейных параболических уравнений	257
4.1.	Введение	257
4.2.	Устранимость изолированных особенностей	258
4.3.	Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией	270
Глава 5.	Квазилинейные эллиптические уравнения с коэффициентами из класса Като	286
5.1.	Введение	286
5.2.	Неравенство Харнака	287
5.3.	Устранимость изолированных особенностей	300
5.4.	Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией	311

ЧАСТЬ III

ГРАНИЧНЫЕ РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Глава 6.	Энергетические методы исследования локализованных режимов с обострением для параболических уравнений второго порядка	323
6.1.	Введение: локализованные и нелокализованные сингулярные граничные режимы	323
6.2.	Достаточные условия локализации граничных режимов с обострением	332
6.3.	Точные условия эффективной локализации граничных режимов: случай медленной диффузии $p > q$	345

6.4.	Эффективная локализация сингулярных граничных режимов для квазиоднородных параболических уравнений	359
6.5.	Эффективная локализация сингулярных граничных режимов для уравнений типа нестационарной быстрой диффузии	370
Глава 7.	Метод функциональных неравенств в режимах с обострением для параболических уравнений высокого порядка	377
7.1.	Граничные режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка	377
7.2.	Энергетические функции решений и основная система функциональных неравенств	380
7.3.	Локализованные сингулярные граничные режимы: случай медленной диффузии $p > q$	387
7.4.	Локализованные граничные режимы: случай $p = q$	408
Глава 8.	Нелокализованные режимы с сингулярным обострением	426
8.1.	Распространение волны сингулярности	426
8.2.	Оценки волны сингулярности для уравнения типа медленной диффузии	427
8.3.	Волна сингулярности в квазиоднородных параболических уравнениях	450
Глава 9.	Приложение: формулировки и доказательства вспомогательных утверждений	463
9.1.	Интерполяционные неравенства	463
9.2.	Системы дифференциальных неравенств	464
9.3.	Функциональные неравенства	474

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ

«ЗАДАЧІ І МЕТОДИ:
МАТЕМАТИКА, МЕХАНІКА, КІБЕРНЕТИКА»

Том 2

**ОЛЕКСАНДР АЛЬБЕРТОВИЧ КОВАЛЕВСЬКИЙ
ІГОР ІГОРОВИЧ СКРИПНИК
АНДРІЙ ЄВГЕНОВИЧ ШИШКОВ**

**СИНГУЛЯРНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ
ЕЛІПТИЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ**

(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво «Наукова думка» НАН України», 2010

Комп'ютерна верстка М. Є. Ісакова

Підп. до друку 23.06.2010. Формат 70×100/16.
Папір офс. № 1. Гарн. Таймс. Друк. офс.
Ум. друк. арк. 31,18. Обл.-вид. арк. 33,53.
Тираж 300 прим. Зам. №

НВП «Видавництво «Наукова думка» НАН України»
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 2440 від 15.03.2006

Видруковано в типографії ТОВ «Цифрова типографія»
м. Донецьк, вул. Челюскінців, 291а

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

SERIES

«PROBLEMS AND METHODS:
MATHEMATICS, MECHANICS, CYBERNETICS»

Volume 2

A. A. Kovalevsky, I. I. Skrypnik, A. E. Shishkov

**SINGULAR SOLUTIONS OF NONLINEAR
ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS**

KYIV
NAUKOVA DUMKA
2010

In the second volume of the series «Problems and methods: mathematics, mechanics, cybernetics» several trends of investigation of singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations are covered. Results on existence and properties of weak and entropy solutions for elliptic second-order equations and some classes of fourth-order equations with L^1 -data are stated. Questions on removability of singularities and asymptotic behaviour of solutions in a neighbourhood of singularity set for general elliptic and parabolic second-order equations in divergence form are considered. Localized and nonlocalized singularly peaking boundary regimes for different classes of quasilinear parabolic second- and high-order equations in divergence form are described.

CONTENTS

Preface	3
---------------	---

PART I

NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH L^1 -DATA

Chapter 1. Nonlinear elliptic second-order equations with L^1-data	9
1.1. Introduction	9
1.2. General conditions for limit summability of solutions	24
1.3. Cases where the right-hand side of equation belongs to logarithmic classes	29
1.4. On integral-logarithmic conditions for limit summability of solutions	34
1.5. The case where the right-hand side of equation belongs to Lebesgue spaces close to $L^1(\Omega)$	55
1.6. On convergence of functions in $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ satisfying special integral inequalities	64
1.7. On existence of entropy solutions of equations with degenerate coercivity and L^1 -data	74
1.8. A priori properties of entropy solutions of equations with degenerate coercivity and L^1 -data	79
Chapter 2. Nonlinear fourth-order equations with a strengthened coercivity and L^1-data	98
2.1. Introduction	98
2.2. Functional set $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	103
2.3. Definition and some properties of entropy solutions	110
2.4. An a priori estimate for entropy solutions	115
2.5. Notion of H -solution	121
2.6. On uniqueness of entropy solution	126
2.7. Existence theorems	135

2.8. Belonging of entropy solutions to Sobolev spaces and existence of W -solutions	157
2.9. On summability of functions in $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ obeyed some integral inequalities	162
2.10. On improvement of summability properties of solutions of problem (2.1.6), (2.1.7)	170
2.11. Some characterizations of the functional set $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	174
2.12. Functional set $\widehat{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$	178
2.13. Definition and a priori estimates of proper entropy solutions	182
2.14. Existence of proper entropy solutions	189
2.15. Connection with entropy solutions and uniqueness theorem	195
2.16. Connection with H -solutions and W -solutions	198
2.17. Summability properties of proper entropy solutions	202
2.18. Connection with generalized solutions	207
2.19. Examples concerning coefficients and the right-hand side of equation (2.1.6)	212

PART II

REMOVABILITY OF SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC AND PARABOLIC SECOND-ORDER EQUATIONS

Chapter 3. Removability of singularities of solutions of quasilinear elliptic equations	217
3.1. Introduction	217
3.2. Removability of isolated singularities	218
3.3. Removability of singularities of solutions of elliptic equations on manifolds	227
3.4. Removability of isolated singularities of solutions of elliptic equations with absorption	246
Chapter 4. Removability of singularities of solutions of quasilinear parabolic equations	257
4.1. Introduction	257

4.2.	Removability of isolated singularities	258
4.3.	Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption	270
Chapter 5.	Quasilinear elliptic equations with coefficients in a Kato class	286
5.1.	Introduction	286
5.2.	Harnack's inequality	287
5.3.	Removability of isolated singularities	300
5.4.	Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear elliptic equations with absorption	311
 PART III BOUNDARY REGIMES WITH PEAKING FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS		
Chapter 6.	Energy methods of investigation of localized boundary blow-up regimes for second-order parabolic equations	323
6.1.	Introduction: localized and nonlocalized boundary regimes with peaking	323
6.2.	Sufficient conditions of localization of boundary blow-up	332
6.3.	Sharp conditions of effective localization of boundary regimes: the case of slow diffusion $p > q$	345
6.4.	Effective localization of boundary regimes with peaking for quasi-homogeneous parabolic equations	359
6.5.	Effective localization of boundary regimes with peaking for equations of nonstationary fast diffusion type	370
Chapter 7.	Method of functional inequalities in the blow-up boundary regimes for high-order parabolic equations	377
7.1.	Boundary blow-up regimes for quasilinear parabolic high-order equations	377
7.2.	Energy functions of solutions and main system of functional inequalities	380

7.3. Localized boundary blow-up regimes: the case of slow diffusion $p > q$	387
7.4. Localised boundary regimes: the case $p = q$	408
Chapter 8. Nonlocalized boundary regimes with peaking	426
8.1. Propagation of blow-up wave	426
8.2. Estimates of blow-up wave for equation of slow diffusion type	427
8.3. Blow-up wave in quasi-homogeneous parabolic equations	450
Chapter 9. Appendix: statements and proofs of auxiliary assertions	463
9.1. Interpolation inequalities	463
9.2. Systems of differential inequalities	464
9.3. Functional inequalities	474