

Том 30
Донецк, 2016

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>А.В. Агibalова, Л.Л. Оридорога</i> О разности резольвент операторов типа Дирака	3
<i>Б.В. Бондарев, М.И. Хмелина</i> Функционирование страховой компании с премиями, зависящими от текущего капитала. Модифицированная модель Кларка–Самуэльсона	9
<i>Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев</i> Исследование влияния внешней среды на состояние термоупругого изгиба изотропных пластин с теплоизолированным разрезом	20
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков</i> Новые условия голоморфности функции в единичном круге	29
<i>S.P. Degtyarev</i> On the equivalence of certain seminorms on some weighted Hölder spaces	39
<i>Д.А. Зарайский</i> О множествах, на которых функции с нулевыми интегралами по шарам допускают произвольное поведение	46
<i>Б.И. Коносеvич, Ю.Б. Коносеvич</i> Глобальная устойчивость двухтоковой модели синхронного электромотора	53
<i>Б.И. Коносеvич, Ю.Б. Коносеvич, Г.В. Мозалевская</i> Асимптотическая устойчивость в целом двухтоковой модели асинхронного электромотора	70
<i>Ю.В. Кошель</i> Прецессионно-изоконические движения тяжелого гиростата с переменным гиросtatическим моментом	80
<i>О.И. Кузнецова</i> Об интегральных средних сумм Бохнера-Рисса	91

<i>А.Н. Курганский, А.Ю. Максимова</i> Энтропия термодинамического графа	96
<i>Д.В. Лиманский</i> О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева	109
<i>А.С. Миненко</i> О минимизации одного функционала методом Ритца ...	120
<i>Д.Н. Ткаченко</i> О редукции дифференциальных уравнений движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом	132
<i>Г.М. Улитин, С.Н. Царенко</i> Поперечные колебания упругого стержня переменного сечения, моделирующего конструкции несущих опор	140

УДК 517.927.4

©2016. А. В. Агibalова, Л. Л. Оридорога

О РАЗНОСТИ РЕЗОЛВЕНТ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ДИРАКА

Рассматриваются две граничные задачи для 2×2 системы типа Дирака: с граничными условиями специального вида и с антипериодическими граничными условиями. Найдено условие, при котором разность резольвент указанных операторов одномерна.

Ключевые слова: система типа Дирака, резольвента, одномерное возмущение.

В течение последних двадцати лет одномерные возмущения самосопряженных операторов интенсивно изучались Саймоном, Дель Рио, Макаровым и многими другими авторами в связи с проблемой устойчивости точечного спектра и при изучении сингулярного непрерывного спектра (см. [1] и обзор [2]). Некоторые недавние результаты можно найти в работах [3, 4]. Для возмущений компактных самосопряженных операторов (или самосопряженных операторов с компактной резольвентой), но возмущения которых уже не самосопряженные, спектральная структура становится неожиданно богатой и сложной, как только покинуть классы, охватываемые классическими теориями (диссипативных операторов или слабых возмущений в смысле Мацаева, см. книги [5] и [6]).

Рассмотрим 2×2 систему типа Дирака

$$-iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \text{col}(y_1, y_2), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где

$$B = \text{diag}(b_1, b_2), \quad b_1 < 0 < b_2 \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix} \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{2 \times 2}). \quad (2)$$

К системе (1) присоединим граничные условия

$$U_1(y) := y_1(0) - h_0 y_2(0) = 0, \quad U_2(y) = y_1(1) - h_1 y_2(0) = 0, \quad (3)$$

где $h_0, h_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

С системой (1) естественным образом ассоциируется максимальный оператор $L = L(Q)$, действующий в пространстве $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ на области

$$\text{dom}(L) = \{y \in AC([0, 1]; \mathbb{C}^2) : Ly \in L^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)\}.$$

Обозначим через $L_{U_1, U_2} = L_{U_1, U_2}(Q)$ оператор, ассоциированный в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ с граничной задачей (1)–(3). Он определяется как сужение оператора L на область

$$\text{dom}(L_{U_1, U_2}) = \{y \in \text{dom}(L) : U_1(y) = U_2(y) = 0\}.$$

Наряду с условиями (3) рассмотрим антипериодические граничные условия

$$\tilde{U}_1(y) = y_1(0) + y_1(1) = 0, \quad \tilde{U}_2(y) = y_2(0) + y_2(1) = 0, \quad (4)$$

и обозначим через $L_{aper} = L_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}(Q)$ оператор, порожденный в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ граничной задачей (1)–(2), (4). Аналогично оператору L_{U_1, U_2} , он определяется как сужение оператора L на область

$$\text{dom}(L_{aper}) = \{y \in \text{dom}(L) : \tilde{U}_1(y) = \tilde{U}_2(y) = 0\}.$$

Отметим, что оператор L_{aper} самосопряжен.

Пусть

$$W(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x) & w_{12}(x) \\ w_{21}(x) & w_{22}(x) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная матрица системы (1), нормированная условием $W(0) = I$, и

$$W_1 := \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{pmatrix}, \quad W_2 := \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\cdot) &:= iW(1)W^{-1}(\cdot)B = (\tilde{w}_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^2, \\ \widetilde{W}_1 &:= (\tilde{w}_{11} \ \tilde{w}_{12}), \quad \widetilde{W}_2 := (\tilde{w}_{21} \ \tilde{w}_{22}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 iW(1)W^{-1}(t)B \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt &= \int_0^1 \widetilde{W}(t) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \langle \widetilde{W}_1, f \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \widetilde{W}_2, f \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \widetilde{W}_1, f \rangle \\ \langle \widetilde{W}_2, f \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\langle \widetilde{W}_i, f \rangle := \int_0^1 (\tilde{w}_{i1}(t)f_1(t) + \tilde{w}_{i2}(t)f_2(t)) dt$, $i \in \{1, 2\}$.

Далее, обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(W_1) & U_1(W_2) \\ U_2(W_1) & U_2(W_2) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_{aper} = \begin{vmatrix} \tilde{U}_1(W_1) & \tilde{U}_1(W_2) \\ \tilde{U}_2(W_1) & \tilde{U}_2(W_2) \end{vmatrix}$$

характеристические определители задач (1)–(3) и (1), (2), (4) соответственно. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta &= h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1), \\ \Delta_{aper} &= 1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + \det W(1) = 1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + e^{i(b_1+b_2)\lambda}. \end{aligned}$$

Справедливо следующее предложение.

Лемма. Пусть характеристические определители Δ и Δ_{aper} отличны от нуля. Тогда операторы L_{U_1, U_2} и L_{aper} обратимы и обратные операторы имеют вид

$$L_{U_1, U_2}^{-1}f = (C_1(x) + C_2(x))\langle \widetilde{W}_1, f \rangle + iW(x) \int_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \quad (5)$$

$$C_1(x) = \frac{h_0}{\Delta}W_1(x), \quad C_2(x) = \frac{1}{\Delta}W_2(x), \quad (6)$$

и

$$L_{aper}^{-1}f = \widetilde{C}_1(x)\langle \widetilde{W}_1, f \rangle + \widetilde{C}_2(x)\langle \widetilde{W}_2, f \rangle + iW(x) \int_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \quad (7)$$

$$\widetilde{C}_1(x) = \frac{w_{21}(1)}{\Delta_{aper}}W_2(x) - \frac{1 + w_{22}(1)}{\Delta_{aper}}W_1(x), \quad (8)$$

$$\widetilde{C}_2(x) = \frac{w_{12}(1)}{\Delta_{aper}}W_1(x) - \frac{1 + w_{11}(1)}{\Delta_{aper}}W_2(x). \quad (9)$$

Доказательство. Решение системы

$$-iB^{-1}y' + Qy = f$$

имеет вид

$$y(x) = C_1W_1(x) + C_2W_2(x) + iW(x) \int_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \quad (10)$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

(i) Найдем коэффициенты C_1 и C_2 , так, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла граничным условиям (3). Подставляя решение (10) в условия (3), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 - h_0C_2 = 0, \\ C_1w_{11}(1) + C_2(w_{12}(1) - h_1) = -\langle \widetilde{W}_1, f \rangle. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$C_1 = \frac{h_0\langle \widetilde{W}_1, f \rangle}{h_1 - h_0w_{11}(1) - w_{12}(1)}, \quad C_2 = \frac{\langle \widetilde{W}_1, f \rangle}{h_1 - h_0w_{11}(1) - w_{12}(1)}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и группируя относительно $\langle \widetilde{W}_1, f \rangle$, приходим к (5) и (6).

(ii) Решение граничной задачи (1), (2), (4) также имеет вид (10) с константами $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$. Найдем их. В этом случае получаем систему

$$\begin{cases} \tilde{C}_1(1 + w_{11}(1)) + \tilde{C}_2 w_{12}(1) = -\langle \widetilde{W}_1, f \rangle, \\ \tilde{C}_1 w_{21}(1) + \tilde{C}_2(1 + w_{22}(1)) = -\langle \widetilde{W}_2, f \rangle. \end{cases}$$

Ее решением будет

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \frac{w_{12}(1)\langle \widetilde{W}_2, f \rangle - (1 + w_{22}(1))\langle \widetilde{W}_1, f \rangle}{1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + e^{i(b_1+b_2)\lambda}}, \\ \tilde{C}_2 &= \frac{w_{21}(1)\langle \widetilde{W}_1, f \rangle - (1 + w_{11}(1))\langle \widetilde{W}_2, f \rangle}{1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + e^{i(b_1+b_2)\lambda}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в (10) и группируя выражение относительно $\langle \widetilde{W}_1, f \rangle$ и $\langle \widetilde{W}_2, f \rangle$, приходим к равенствам (7)–(9).

Напомним, что знаменатели в выражениях (6), (8) и (9) суть характеристические определители Δ и Δ_{aper} . $\square$

Следующая теорема – основной результат работы.

Теорема. Пусть $\Delta \cdot \Delta_{aper} \neq 0$ и

$$h_0 + h_1 = 0.$$

Тогда разность резольвент $L_{U_1, U_2}^{-1} - L_{aper}^{-1}$ одномерна.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \left(\frac{h_0 w_{11}(x) + w_{12}(x)}{\Delta} + \frac{(1 + w_{22}(1))w_{11}(x) - w_{21}(1)w_{12}(x)}{\Delta_{aper}} \right), \\ g_2(x) &= \left(\frac{(1 + w_{11}(1))w_{12}(x) - w_{12}(1)w_{11}(x)}{\Delta_{aper}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_0 w_{21}(x) + w_{22}(x)}{\Delta} + \frac{(1 + w_{22}(1))w_{21}(x) - w_{21}(1)w_{22}(x)}{\Delta_{aper}} \right). \end{aligned}$$

Согласно равенствам (5) и (7),

$$\begin{aligned} (L_{U_1, U_2}^{-1} - L_{aper}^{-1})f &= \left(\frac{h_0 W_1(x) + W_2(x)}{\Delta} - \frac{w_{21}W_2(x) - (1 + w_{22})W_1(x)}{\Delta_{aper}} \right) \langle \widetilde{W}_1, f \rangle - \\ &\quad - \frac{w_{21}(1)W_1(x) - (1 + w_{11}(1))W_2(x)}{\Delta_{aper}} \langle \widetilde{W}_2, f \rangle = \left[\left(\frac{h_0}{\Delta} + \frac{1 + w_{22}(1)}{\Delta_{aper}} \right) W_1(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{w_{21}(1)}{\Delta_{aper}} \right) W_2(x) \right] \langle \widetilde{W}_1, f \rangle + \left[-\frac{w_{12}(1)}{\Delta_{aper}} W_1(x) + \frac{1 + w_{11}(1)}{\Delta_{aper}} W_2(x) \right] \langle \widetilde{W}_2, f \rangle = \\ &= \langle \widetilde{W}_1, f \rangle g_1(x) + \langle \widetilde{W}_2, f \rangle g_2(x). \end{aligned}$$

Найдем условие, при котором векторы g_1 и g_2 коллинеарны. Обозначив через α коэффициент пропорциональности $g_1 = \alpha g_2$, получаем относительно h_0 и h_1 систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{h_0 w_{11}(x) + w_{12}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = \frac{[(1+w_{11}(1))w_{12}(x) - w_{12}(1)w_{11}(x)]\alpha - (1+w_{22}(1))w_{11}(x) + w_{21}(1)w_{12}(x)}{\Delta_{aper}}, \\ \frac{h_0 w_{21}(x) + w_{22}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = \frac{[(1+w_{11}(1))w_{22}(x) - w_{12}(1)w_{21}(x)]\alpha - (1+w_{22}(1))w_{21}(x) + w_{21}(1)w_{22}(x)}{\Delta_{aper}}. \end{cases}$$

Обозначив через $C_1(x)$ и $C_2(x)$ правые части первого и второго уравнений соответственно, приходим к системе более простого вида

$$\begin{cases} \frac{h_0 w_{11}(x) + w_{12}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = C_1(x), \\ \frac{h_0 w_{21}(x) + w_{22}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = C_2(x). \end{cases}$$

Группируем слагаемые при h_0 и h_1 :

$$\begin{cases} -h_0(w_{11}(x) + w_{11}(1)C_1(x)) + h_1 C_1(x) = w_{12}(1)C_1(x) + w_{12}(x), \\ -h_0(w_{21}(x) + w_{11}(1)C_2(x)) + h_1 C_2(x) = w_{12}(1)C_2(x) + w_{22}(x), \end{cases}$$

и решаем систему методом Крамера. Ее решением будут

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x)}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)}, \\ h_1 &= w_{12}(1) - \frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda} + w_{11}(1)(C_1(x)w_{22}(x) - C_2(x)w_{12}(x))}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)}. \end{aligned}$$

Найдем сумму h_0 и h_1 :

$$h_0 + h_1 = \frac{(1 + w_{11}(1))(C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x)) - e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)} + w_{12}(1). \quad (11)$$

Возвращаясь к обозначениям $C_1(x)$ и $C_2(x)$, упрощаем числитель и знаменатель в (11):

$$\begin{aligned} C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x) &= \frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{\Delta_{aper}}(\alpha w_{12}(1) + w_{22}(1) + 1), \\ C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x) &= -\frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{\Delta_{aper}}(\alpha(1 + w_{11}(1)) + w_{21}(1)). \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (11), получаем искомое условие:

$$h_0 + h_1 = 0.$$

□

1. *Del Rio R., Makarov N., Simon B.* Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators // Comm. Math. Phys. – 1994. – **165** (1). – P. 59–67.
2. *Simon B.* Spectral analysis of rank one perturbations and applications // CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – **8**. – P. 109–149.
3. *Liaw C., Treil S.* Rank one perturbations and singular integral operators // J. Funct. Anal. – 2009. – **257** (6). – P. 1947–1975.
4. *Albeverio S., Konstantinov A., Koshmanenko V.* Decompositions of singular continuous spectra of H.2-class rank one perturbations // Integral Equations Operator Theory. – 2005. – **52** (4). – P. 455–464.
5. *Gohberg I., Krein M.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969. – 378 p.
6. *Gohberg I., Krein M.* Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970. – 430 p.

A. V. Agibalova, L. L. Oridoroga

On resolvent difference of Dirac type operators.

We consider two boundary value problems for 2×2 Dirac type system with the special boundary conditions and with the antiperiodic boundary conditions. We indicate the condition under with the resolvent difference of the operators is one-dimensional.

Keywords: *Dirac-type system, resolvent operator, one-dimensional perturbation.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
agannette@rambler.ru
vremenny-orid@mail.ru

Получено 20.05.16

УДК 519.21

©2016. Б. В. Бондарев, М. И. Хмелина

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ПРЕМИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕКУЩЕГО КАПИТАЛА. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ КЛАРКА–САМУЭЛЬСОНА

Указан способ выведения интегро-дифференциальных уравнений для вероятности неразорения страховой компании, функционирующей на финансовом (B, S) -рынке на бесконечном и конечном интервалах времени. Рисковый актив описывается модифицированной моделью Кларка–Самуэльсона. Премии поступают со скоростью, пропорциональной величине капитала компании.

Ключевые слова: страховая компания, вероятность неразорения, финансовый (B, S) -рынок, управление, модифицированная модель Кларка–Самуэльсона.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается математическая модель функционирования страховой компании, которая имеет возможность вкладывать свои текущие средства на финансовый (B, S) -рынок, когда в качестве описания рискового актива взята модифицированная модель Кларка–Самуэльсона.

Для исследования платежеспособности страховой компании обычно рассматривают ее вероятность неразорения. Классический процесс риска и выведение уравнения для вероятности неразорения подробно изложены в [21]. В работах [1, 4–9, 26] рассматриваются случаи стохастических премий, а также задача Лундберга для некоторых частных распределений величин поступающих исков. В [3] изучается функционирование компании на (B, S) -рынке с предположением, что эволюция акций задается моделью П. Самуэльсона, основным процессом в которой взят скачкообразный процесс с независимыми приращениями. В [9] рассмотрен конечный и бесконечный промежуток времени наблюдения за деятельностью компании, а также в нескольких моделях с учетом отчисления денег на рекламу. В работе [22] освещен вопрос о дифференцируемости функции вероятности неразорения. В данной статье будет использовано предположение о том, что суммарные страховые премии, поступающие в компанию от клиентов, зависят от значения ее текущего капитала и задаются некоторой функцией [18].

В работе [13] рассмотрена несколько измененная модель Крамера–Лундберга, функционирующая на (B, S) -рынке. Здесь выведено уравнение для $\varphi(x)$ – вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени

$$\lambda\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(x-y)f(y)dy + [x(u\mu - ur + r) + c(x)]\varphi'(x) + \frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\varphi''(x). \quad (1)$$

В классической модели П. Самуэльсона «основным» процессом является винеровский процесс, приращения которого имеют нормальное распределение. Вместе с тем отмечено [20], что на интервалах времени сравнительно небольшой длины

(до 2–3 недель) приращения отличны от нормальных. Первые работы, в которых отмечено это явление, появились ещё в 1915г. Результаты очень серьезного статистического анализа, подтверждающего отличие упомянутых распределений от нормального, были опубликованы М. Кендаллом в 1953г. в [25]. Оказалось, что отмеченный феномен является всеобщим [20]: ненормальность приращений проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Отмеченная ненормальность приращений проявлялась в том, что в действительности наблюдалось заметно больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, чем их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более островершинными, чем нормальные, имея заметно более тяжёлые хвосты. Стоит отметить, что подобными свойствами обладают распределения, эксцесс которых положителен [19]. В связи с этим вместо «основного» винеровского процесса $W(t)$ П. Кларк [23, 24] предложил для описания биржевых цен использовать подчинённый винеровский процесс $W(Z(t))$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а $Z(t)$ – процесс с неубывающими траекториями, начинающимися в нуле. Если в качестве $Z(t)$ взять процесс Пуассона с параметром λ , независимый от $W(t)$, то величина $W(Z(t))$ будет иметь положительный эксцесс [10]. А это означает большую, чем у нормального, «островершинность» распределения. Отсюда, в частности, следует, что с ростом времени коэффициент эксцесса убывает, а наибольшая «островершинность» наблюдается при малых $t > 0$. Таким образом, предложенная П. Кларком модель эволюции цены рискованного актива

$$S(t) = S(0) \exp \{ ct + W(Z(t)) \} \quad (2)$$

больше соответствует реальным данным, чем модель П. Самуэльсона. В статье [10] в качестве модели, описывающей цену акции, взята модель

$$\bar{S}(t) = S(0) \exp \{ (\mu - \lambda [\sqrt{e} - 1]) t + W(Z(t)) \}. \quad (3)$$

Модель (3) отличается от модели П. Кларка тем, что параметр $\mu > 0$, как и в модели П. Самуэльсона, имеет смысл локальной доходности. В [10] установлена также безарбитражность модели (3). Вместе с тем и в модели (3) есть одно важное свойство, которое также не согласуется с реальностью. Как известно, до некоторого показательно распределённого момента τ_1 первого скачка пуассоновского процесса $Z(t)$, процесс $W(Z(t))$ будет тождественно равен нулю, т.е. до этого момента времени в модели (3) отсутствуют случайности, что не согласуется с действительностью. В работе [15] рассматривается математическая модель функционирования страховых компаний, которые имеют возможность вкладывать средства на финансовый (B, S) -рынок. В качестве модели акции была использована модифицированная модель П. Кларка. В настоящей работе рассматривается математическая модель функционирования страховой компании, которая имеет возможность вкладывать свои текущие средства на финансовый (B, S) -рынок, когда

в качестве описания рискового актива взята модифицированная модель Кларка–Самуэльсона. Как и в [15], в качестве цены рискового актива рассмотрим видоизмененную модель П. Кларка с добавленной диффузионной частью, т.е.

$$P(t) = P(0) \exp \left\{ (\mu - \lambda [\sqrt{e} - 1]) t + W(Z(t)) - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_1(t) \right\}, \quad (4)$$

где $P(0)$ – цена акции в нулевой момент времени, $W(t)$ и $W_1(t)$ – винеровские процессы, независимые между собой и от $Z(t)$ (процесса Пуассона с параметром λ). Параметр $\mu > 0$, как и в модели П. Самуэльсона, имеет смысл локальной доходности. В работе [15] доказана безарбитражность модели (4), а также показано, что эксцесс в модели (4) также является положительной величиной $\gamma_2 = \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2 t} \geq 0$, что означает большую, чем у нормального, «островершинность» распределения, а это означает, что больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Последний факт и наблюдается в действительности.

2. Основные результаты. В настоящей работе результаты, полученные в работе [13], для случая модели рискового актива П. Самуэльсона переносятся на случай модели рискового актива (4). Пусть $\xi_x(t)$ – капитал компании в момент времени t , а в начальный момент времени $\xi_x(0) = x$. Пусть $c(x)$, $x \in R_+$ – некоторая измеримая, ограниченная, строго положительная функция такая, что $\frac{1}{c(x)}$ локально интегрируема [18]. Будем предполагать, что за время t в компанию поступит $c(\xi_x(t))$ средств, т.е. премии, поступающие в страховую компанию, зависят от имеющегося капитала.

Рассмотрим функционирование страховой компании на бесконечном промежутке времени. Пусть в нулевой момент времени $t = 0$ компания распоряжается начальным капиталом $\xi_x(0) = x$, а $\xi_x(t)$ – капитал компании в момент времени t . Определим вероятность неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени $\varphi(x) = P\{\xi_x(t) \geq 0, \forall t \geq 0\}$.

Премии страховой компании при капитале x поступают со скоростью $c(x) > 0$. Страховые иски к компании будем считать стохастическими. Пусть количество поступающих исков подчиняется пуассоновскому закону распределения $Z_1(t)$. Пусть η_k – величины исков с функцией распределения $P(\eta_k < y) = F(y)$, $F(dy) = F(y + dy) - F(y)$. Суммарные иски $\sum_{k=1}^{Z_1(t)} \eta_k$, где $\sum_{k=1}^0 \eta_k = 0$, составляют сложный пуассоновский процесс с параметром λ , представимый в виде стохастического интеграла $\int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha \nu_1(d\alpha, ds)$, где $\nu_1(d\alpha, ds)$ – пуассоновская мера, $M\nu_1(d\alpha, ds) = \lambda_1 F(d\alpha) ds$, а $F(d\alpha)$ – мера интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ [22, 23]. Процесс $W(Z(t))$ – сложный процесс Пуассона, который имеет представление $W(Z(t)) = \sum_{k=1}^{Z(t)} w_k$, $\sum_{k=1}^0 w_k = 0$, w_k – независимые нормально распределённые случайные величины $N(0, 1)$, тогда справедливо представление $W(Z(t)) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha \tilde{\nu}(d\alpha, ds)$, $\tilde{\nu}(d\alpha, ds)$ – пуассоновская мера, $M\tilde{\nu}(d\alpha, ds) = 0$, $M\tilde{\nu}^2(d\alpha, ds) = \lambda \Phi(d\alpha) ds$, $\Phi(d\alpha) = 5xp \left\{ -\frac{\alpha^2}{2} \right\} d\alpha$.

Будем считать, что страховая компания размещает весь свой капитал на финансовом (B, S) -рынке, а именно, в каждый момент времени капитал компании разбивается на две части: доля $0 \leq u \leq 1$ отводится на покупку акций, доля $1 - u$ — на банковский счет под процентную ставку r . Эволюция безрискового актива задается формулой $dB(t) = rB(t)dt$, где $B(0)$ — начальный счет. С помощью формулы Ито имеем

$$dP(t) = P(t) \left(\mu dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1) \tilde{\nu}(d\gamma, dt) + \sigma dW_1(t) \right), \quad (5)$$

так как $-\lambda [\sqrt{e} - 1] + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1 - \gamma) (d\gamma) = -\lambda [\sqrt{e} - 1] + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1)(d\gamma) = -\lambda [\sqrt{e} - 1] + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^\gamma e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma - \lambda = -\lambda \sqrt{e} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{e} e^{-\frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{2}} d\gamma = 0$, откуда следует $P(t + \Delta t) = P(t) \left(1 + \mu \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1) \tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma \Delta W_1(t) \right)$.

Пусть $u\xi_x(t)/P(t)$ — это количество акций, которое можно купить на сумму $u\xi_x(t)$ по цене $P(t)$ за акцию, отсюда цена рискованного актива к моменту времени $(t + \Delta t)$ примет вид $u\xi_x(t) \left[1 + \mu \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1) \tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma \Delta W_1(t) \right]$.

Тогда эволюция капитала компании будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_x(t + \Delta t) = & c(\xi_x(t)) \Delta t - \int_0^{+\infty} \alpha \nu_1(d\alpha, \Delta t) + (1 - u) \xi_x(t) (1 + r \Delta t) + \\ & + u \xi_x(t) \left[1 + \mu \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1) \tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma \Delta W_1(t) \right]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ в последнем выражении, получим

$$\begin{aligned} d\xi_x(t) = & \xi_x(t) (u\mu - ur + r - u\lambda [\sqrt{e} - 1]) dt + u\sigma \xi_x(t) dW_1(t) + \\ & + c(\xi_x(t)) dt - \int_0^{+\infty} \alpha \nu_1(d\alpha, dt) + u \xi_x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\gamma - 1) \tilde{\nu}(d\gamma, dt). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть первый скачок капитала происходит в момент времени $\tau = s$, а его величина равна y . До этого момента уравнение эволюции капитала очевидно имеет вид

$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_x(s) = & \bar{\xi}_x(s) (u\mu - ur + r - u\lambda [\sqrt{e} - 1]) ds + \\ & + c(\bar{\xi}_x(s)) ds + u\sigma \bar{\xi}_x(s) dW_1(s), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{\xi}_x(0) = x, s \geq 0.$$

Пусть τ_1 — первый скачек процесса $Z(t)$, β_1 — момент первого иска. В силу определения процессов эти моменты времени показательно распределены соответственно с параметрами $\lambda > 0$ и $\lambda_1 > 0$.

Приведем следующие рассуждения [15, 22]. Распределение величины $\min(\tau_1, \beta_1)$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda + \lambda_1$. Действительно, $P\{\min(\tau_1, \beta_1) > t\} = P\{\tau_1 > t\} P\{\beta_1 > t\} = e^{-(\lambda + \lambda_1)t}$. Далее, нетрудно проверить, что $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} P\{\tau_1 \in [s, \Delta s) / \min(\tau_1, \beta_1) \in [s, \Delta s)\} = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}$. Аналогично $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} P\{\beta_1 \in [s, \Delta s) / \min(\tau_1, \beta_1) \in [s, \Delta s)\} = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$.

Пусть $\bar{P}(x, s, A) = P\{\bar{\xi}_x(s) \in A\}$, $\bar{\xi}_x(s)$ решение уравнения (7). Если на отрезке времени $[0, t]$ скачка нет, то вероятность этого события равна $P\{\min(\tau_1, \beta_1) > t\} = P\{\tau_1 > t\}P\{\beta_1 > t\} = e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$.

Вероятность скачка на временном интервале $[s, s + \Delta s]$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $(\lambda + \lambda_1) \exp\{-(\lambda + \lambda_1)s\} \Delta s$. Умножив последнее на условную вероятность $P\{\tau_1 \in [s, \Delta s] / \min(\tau_1, \beta_1) \in [s, \Delta s]\}$, будем иметь: вероятность того, что первый скачек произойдёт на интервале $[s, s + ds]$ и он будет осуществлён за счёт процесса $W(Z(v))$, будет равна $\lambda \exp\{-(\lambda + \lambda_1)s\} ds$. Аналогично, вероятность того, что первый скачек произойдёт на интервале $[s, s + ds]$ и он будет осуществлён за счёт процесса иска, будет равна $\lambda_1 \exp\{-(\lambda + \lambda_1)s\} ds$.

С помощью формулы полной вероятности составим уравнение для вероятности неразорения страховой компании для балансового уравнения на конечном интервале времени $[0, t]$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s} \int_0^{+\infty} \bar{P}(x, s, dz) \left(\lambda_1 \int_0^z \varphi(z-y, t-s) dF(y) + \right. \\ \left. + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi((z + uz[e^y - 1]), t-s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) ds + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}, \end{aligned} \quad (8)$$

Действительно, в случае, если первый скачек $\bar{\xi}_x(\rho)$ происходит в момент времени $0 < s < t$ за счёт поступления иска, то за оставшееся время $t - s$ не наступит разорение, если величина иска не будет превышать величины $\bar{\xi}_x(s - 0)$, что в наших обозначениях не превысит $z > 0$ – данный случай описывает первое слагаемое (8). Далее, если первый скачек $\bar{\xi}_x(\rho)$ происходит в момент времени $0 < s < t$ за счёт скачка процесса $Z(\rho)$, то за оставшееся время $(t - s)$ вероятность неразорения, если скачек будет величиной y , а перед скачком значение $\bar{\xi}_x(s - 0) = z > 0$, очевидно, будет равна $\varphi((z + uz[e^y - 1]), t - s)$, после чего необходимо произвести усреднение по распределению величины скачка. Данный случай описывает второе слагаемое (8).

Тогда, очевидно, что уравнение для вероятности неразорения страховой компании для балансового уравнения (6) на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\lambda_1)s} \int_0^{+\infty} \bar{P}(x, s, dz) \left(\lambda_1 \int_0^z \varphi(z-y) dF(y) + \right. \\ \left. + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{P}(x, t, A) = P\{\bar{\xi}_x(t) \in A\}$ – это вероятность перехода процесса $\bar{\xi}_x(t)$ из точки x за время $t > 0$ во множество A . Основной проблемой при переходе от уравнений (8) и (9) к соответствующим интегро-дифференциальным уравнениям является доказательство определённой гладкости для вероятности неразорения [4, 8, 12–14, 22].

Предположим, что существует плотность величины исков $f(x) = F'(x)$. Пусть $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ – непрерывна, тогда взяв частные производные по z , будем иметь

$$Q_1(z, t) = \int_0^z \varphi(z - y, t) f(y) dy = \int_0^z \varphi(y, t) f(z - y) dy,$$

$$Q_1'(z, t) = \varphi(z, t) f(0) + \int_0^z \varphi(y, t) f'(z - y) dy,$$

$$Q_1''(z, t) = \varphi(z, t) f'(0) + \int_0^z \varphi(y, t) f''(z - y) dy.$$

Обозначим

$$Q_2(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1 - u) + ue^y)z, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Введя замену

$$b = ((1 - u) + ue^y)z, \quad \frac{b}{z} = (1 - u) + ue^y, \quad \frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1 = e^y, \\ y = \ln\left(\frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1\right), \quad dy = -\frac{1}{\frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1} \frac{db}{uz} = \frac{db}{b - z + uz},$$

получим

$$Q_2(z, t) = \int_{(1-u)z}^{+\infty} \frac{\varphi(b, t)}{b - (1 - u)z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)}{2}} db.$$

$$Q_2'(z, t) = \int_{(1-u)z}^{+\infty} \frac{\varphi(b, t)}{\sqrt{2\pi} (b - (1 - u)z)^2} e^{-\frac{\left[\ln\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)\right]^2}{2}} \left\{ \frac{b \ln\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)}{z} - u + 1 \right\} db,$$

то есть производная по нижнему пределу равна нулю.

Аналогично, вторая и третья частные производные от $Q_2(z, t)$ по z также существуют и обладают таким же свойством, не приведены в тексте из-за громоздкости выражений. Обозначим

$$a_t(z) = \lambda_1 \int_0^z \varphi(z - y, t) dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1 - u) + ue^y)z, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (10)$$

Введем следующую функцию $U_t(s, x)$, $0 \leq s \leq t$: $U_t(s, x) = Ma_t(\xi_x(s))$, $0 \leq s \leq t$, где $t > 0$, $x \in R$, $U_t(0, x) = a_t(x)$. По переменной z функция $a_t(z) \in C^2$ – дважды непрерывно дифференцируемая, коэффициенты обладают соответствующей гладкостью [26].

Тогда $U_t(s, x)$ удовлетворяет уравнению [17]

$$\frac{\partial U_t(s, x)}{\partial s} = \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U_t(s, x)}{\partial x^2} + \\ + [(\mu u + (1 - u)r - u\lambda[\sqrt{e} - 1])x + c(x)] \frac{\partial U_t(s, x)}{\partial x}. \quad (11)$$

$U_t(s, x)$ изначально также можно записать в виде

$$U_t(s, x) = \int_0^{+\infty} a_t(z) \bar{P}(x, s, dz), \quad (12)$$

где $\bar{P}(x, s, A)$ – вероятность перехода процесса $\bar{\xi}_x(s)$ из состояния x во множество A . Из (8) следует, что

$$\varphi(x, t) = \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s} \int_0^{+\infty} \bar{P}(x, s, dz) a_t(z) ds + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$$

либо

$$\varphi(x, t) = \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s} U_t(s, x) ds + e^{-(\lambda_2+\lambda_1)t}. \quad (13)$$

Из (13) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \int_0^t U_t(s, x) de^{-(\lambda+\lambda_1)s} + e^{-(\lambda+\lambda_1)t} = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda} [e^{-(\lambda+\lambda_1)t} U_t(t, x) - a_t(x)] + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s} \frac{\partial U_t(s, x)}{\partial s} ds + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}. \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} [-e^{-(\lambda+\lambda_1)t} U_t(t, x) + \lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y, t) dF(y)] + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \left[\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)z, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \{(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e} - 1])x + c(x)\} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right] + \\ &+ e^{-(\lambda+\lambda_1)t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) - e^{-(\lambda+\lambda_1)t} &= \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s} U_t(s, x) ds \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + (\lambda + \lambda_1) e^{-(\lambda+\lambda_1)t} = U_t(t, x) e^{-(\lambda+\lambda_1)t} \rightarrow \\ &\rightarrow U_t(t, x) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} e^{(\lambda+\lambda_1)t} + (\lambda + \lambda_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \left[-\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y, t) dF(y) \right] + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \left[\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)z, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda} \left[\frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e} - 1])x + c] \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае бесконечного времени функционирования страховой компании из (9) обозначим

$$a(z) = \lambda_1 \int_0^z \varphi(z-y) dF(y) + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (17)$$

Пусть T_s – полугруппа операторов

$$T_s a(z) = \int_0^{+\infty} \bar{P}(x, s, dz) a(z),$$

отметим, что $U(t, x) = T_t(a(x)), R_{\lambda_1+\lambda} a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda)s} T_s a(x) ds$ – резольвента.

Пусть A – инфинитезимальный оператор, тогда [16]

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (T_h a(x) - a(x)) &= Aa(x) = \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (U(h, x) - U(0, x)) = \frac{\partial U}{\partial t}(t=0) = \\ &= \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^2} + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e}-1])x + c(x)] \frac{\partial a(x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (21)$$

При наших предположениях функция $a(z)$ принадлежит области определения оператора A , резольвента $R_{\lambda_1+\lambda} a(x)$ также принадлежит области определения оператора A , тогда имеем [16]

$$AR_{\lambda_1+\lambda} a(x) = (\lambda_1 + \lambda) R_{\lambda_1+\lambda} a(x) - a(x). \quad (22)$$

Заметим, что $R_{\lambda_1+\lambda} a(x) = \varphi(x)$, откуда $AR_{\lambda_1+\lambda} a(x) = A\varphi(x)$,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda) \varphi(x) &= \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \varphi''(x) + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e}-1])x + c] \varphi'(x) + \\ &+ \lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y) dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Подводя итоги при сделанных предположениях, имеем уравнение для вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени.

Сформулируем теорему.

Теорема 1. Пусть $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ – непрерывна, тогда на конечном промежутке времени $[0, t]$ функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданной уравнением (6), $\varphi(x, t)$ – вероятность неразорения страховой компании имеет производные $\varphi'_x(x, t)$ и $\varphi''_{xx}(x, t)$ и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda) \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \\ &= d \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e}-1])x + c(x)] \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} + \\ &+ \lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y, t) dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)x, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned} \quad (23)$$

Теорема 2. Пусть $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ – непрерывна, тогда на бесконечном промежутке времени $[0, \infty)$ функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданной уравнением (6), $\varphi(x)$ – вероятность неразорения страховой компании за бесконечное время, имеет производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda)\varphi(x) = \\ & = \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x) + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e} - 1])x + c(x)]\varphi'(x) + \\ & + \lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y)dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-u) + ue^y)x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Замечание. Следует отметить, что формальным переходом при $t \rightarrow +\infty$ уравнение (24) получается из уравнения (23), однако необходимо математически строгое обоснование предела $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = 0$, что совсем не очевидно.

Выводы. Таким образом, для модели страховой компании с премиями, которые поступают со скоростью $c(x)$, где x – настоящий капитал компании функционирующей на (B, S) –рынке, был предложен метод выведения интегро-дифференциальных уравнений как на конечном, так и на бесконечном интервалах времени. Особенностью такого способа получения уравнений для вероятности неразорения является то, что на примерах он показывает существование производных вплоть до второго порядка у функции вероятности неразорения.

1. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – **47**, вып. 3. – С. 549–553.
2. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании. – Донецк: АПЕКС, 2002. – 117 с.
3. Бондарев Б.В., Смоляков А.И., Степанов Е.В. Об одной модели эволюции акции и соответствующей задаче Р.Мертона // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2004. – № 2. – С. 11–21.
4. Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В. Вероятность неразорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга и Γ –распределенных выплат // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2005. – № 1-2. – С. 54–70.
5. Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В. Ймовірність банкрутства страхової компанії для узагальненої моделі Крамера–Лундберга за умови розміщення капіталу на фінансовому ринку // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2008. – № 1-2. – С. 24–62.
6. Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В. Модель Крамера–Лундберга зі стохастичними преміями за умови розміщення капіталу на банківському депозиті // Тр. ін-та прикл. математики і механіки НАН України. – 2008. – **16**. – С. 55–62.
7. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. О вероятности неразорения для модели страховой компании с расходами на рекламу. I // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012. – № 2. – С. 47–65.

8. Бондарев Б.В., Рагулина Е.Ю. О вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени при инвестировании капитала на финансовом (B, S) -рынке // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 5. – С. 112–124.
9. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. О вероятности неразорения для модели страховой компании с расходами на рекламу. II // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2013. – № 1-2. – С. 21–39.
10. Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е. Некоторые задачи для модели Кларка. I. Оценка вероятности неразорения страховой компании // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 2. – С. 139–149.
11. Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е. Стохастическое исчисление в задачах финансовой и актуарной математики. Оценка рисков в страховании: монография. – Донецк: ДонНУ. – 2013. – 227 с.
12. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. Уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S) -рынке с учетом рекламной деятельности // Междунар. научно-техн. журнал "Проблемы управления и информатики". – 2014. – № 1. – С. 139–147.
13. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. О вероятности неразорения страховой компании, функционирующей на (B, S) -рынке. Пропорциональные страховые премии // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". – 2014. – № 6. – С. 104–123.
14. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. Вывод уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S) -рынке // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – 50, № 5. – С. 113–121.
15. Бондарев Б.В., Хмелина М.И. Модифицированная модель П. Кларка. Вероятность неразорения страховой компании, работающей на (B, S) -рынке. Модель Лундберга // Вест. Донецкого национального ун-та. Сер. А. Естественные науки. – № 1. – 2016 – С. 3–14.
16. Гихман И.И. Теория случайных процессов. – Т 2. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
17. Гихман И.И., Скороход В.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.
18. Карташов М.В., Строев О.М. Наближення Лундберга для функції ризику у майже однорідному середовищі // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – 73. – С. 63–71.
19. Корн Г., Корн Т. Справочник математика (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1968. – 720 с.
20. Королев В.Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования // Обзорение прикл. и промышленной математики. – 4, вып. 1. – 1997. – С. 86–100.
21. Леоненко М.М., Мишура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
22. Рагуліна О.Ю. Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2010. – № 1-2. – С. 82–116.
23. Clarc P.K. A Subordinated Stochastic Process Model of Cotton Futures Prices. – Ph. D. Thesis. Cambridge, Ma.: Harvard University, 1970.
24. Clarc P.K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices // Econometrica. – 1973. – 41. – P. 135–155.
25. Kendal M.G. The analysis of economic time-series. Part 1. Prices // Of the Royal Statistical Society. – 1953. – 96. – P. 11–25.
26. Pervozvansky A.A. Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Math. and Economics. – 1998. – 23, Issue 3. – P.287–295.

B. V. Bondarev, M. I. Khmelina

The functioning of the insurance company with premiums, depending on the current capital. Modified Clark-Samuelson model.

This paper shows a way of deriving integro-differential equations for the probability of the non-ruin probability insurance company, in the financial (B, S) -market on the finite and infinite time intervals. Risky asset is described by the modified Clarke-Samuelson model. The speed of the premiums arrival is proportional to the company's capital.

Keywords: *insurance company, the non-ruin probability, financial (B, S) -market, management, the modified Clarke-Samuelson model.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
grad_mariya@mail.ru

Получено 19.06.16

УДК 539.3

©2016. Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА СОСТОЯНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ

Задача термоупругого изгиба для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом сведена к системам сингулярных интегральных уравнений. Использована обобщенная теория в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Построены интегральные представления компонент возмущенного термоупругого состояния. Исследовано влияние интенсивности и характера теплообмена на максимальные по модулю значения коэффициентов интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига.

Ключевые слова: термоупругий изгиб, обобщенная теория, теплоизолированный разрез, критерий Био, коэффициенты интенсивности напряжений.

1. Введение. Проблема прочности элементов конструкций во время их длительной эксплуатации является актуальной, поскольку в процессе эксплуатации материалы стареют, теряют свои начальные технические характеристики, в их структуре появляются разные дефекты, например, трещины (опасные концентраторы напряжений). Такие изменения свойств конструкционных материалов приводят к утрате работоспособности сооружений и вызывают угрозу их разрушения. Поэтому сегодня над решением задач термомеханики разрушения интенсивно работают ученые, о чем свидетельствуют публикации [1–3]. Обзор работ в указанном направлении содержится в статье [4].

В данной статье сведение трехмерной задачи термоупругости к двумерной осуществляется с использованием обобщенной теории, основанной на разложении искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты. Преимущества данного подхода заключаются в таком:

- возможность определения компонент возмущенного термоупругого состояния, вызванного наличием трещины, с произвольной наперед заданной точностью;
- применение не только к тонким пластинам, но и к пластинам средней и большой толщины;
- рассмотрение произвольных тепловых воздействий (температура может быть задана в виде полинома любой степени);
- возможность нахождения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для поперечного и продольного сдвига, что было невозможно в рамках классической теории;

- учет произвольных теплофизических параметров пластины и разреза, в частности, произвольного теплообмена с внешней средой.

2. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . Пластина содержит теплоизолированный разрез L . Предполагаем, что длина разреза значительно меньше линейных параметров пластины, а сам разрез достаточно удален от ее краев. На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

В рамках $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место такие представления [5, 6]:

- температура $T = T_0 P_0 + T_1 P_1$, где $P_k = P_k(z/h)$ – полиномы Лежандра;
- компоненты вектора перемещений

$$u_x = u P_0 + \gamma_x h P_1, \quad u_y = v P_0 + \gamma_y h P_1, \quad u_z = w_0 P_0,$$

где u, v, w_0 – обобщенные перемещения; γ_x, γ_y – обобщенные углы поворота нормали;

- компоненты тензора напряжений

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1,$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y), \quad \sigma_z = 0,$$

где N_x, N_y, S – обобщенные мембранные усилия; M_x, M_y, H – обобщенные моменты; Q_{x0}, Q_{y0} – обобщенные перерезывающие силы.

Компоненты термоупругого состояния пластины с разрезом G^* представим в виде суммы $G^* = G^o + G$ [7], где G^o – компоненты основного термоупругого состояния (термоупругого состояния в сплошной пластине, которое считаем известным); G – компоненты возмущенного термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Ввиду принятых предположений о размере и положении разреза возмущенное термоупругое состояние пластины локализовано в непосредственной окрестности рассматриваемого разреза.

Компоненты возмущенного термоупругого состояния G определяются из системы дифференциальных уравнений термоупругости на базе обобщенной теории для изотропных пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Данная система, записанная в безразмерной системе координат $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$, определённой с точностью до полутолщины пластины h , включает в себя [5, 6]:

- 1) первое приближение трехмерного уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0} T_0 + A_{k1} T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1)$$

$$A_{00} = -\frac{6}{\Delta_1} \{Bi^+ Bi^- + 3(Bi^+ + Bi^-)\}, \quad A_{01} = \frac{A_{10}}{3} = -\frac{15}{\Delta_1} (Bi^+ - Bi^-),$$

$$A_{11} = -\frac{30}{\Delta_1} \{Bi^+ Bi^- + 2(Bi^+ + Bi^-) + 3\}, \quad \Delta_1 = 2Bi^+ Bi^- + 9(Bi^+ + Bi^-) + 36,$$

где $Bi^\pm$ – параметры теплообмена (критерии Био) на лицевых поверхностях пластины $x_3 = \pm 1$;

2) уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$N_1 = B_0\{\partial_1 u + \nu \partial_2 v - \alpha(1 + \nu)T_0\}, \quad N_2 = B_0\{\partial_2 v + \nu \partial_1 u - \alpha(1 + \nu)T_0\},$$

$$S = \frac{1 - \nu}{2} B_0(\partial_2 u + \partial_1 v), \quad H = \frac{1 - \nu}{2} D_0(\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2),$$

$$M_1 = D_0\{\partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu)T_1\}, \quad M_2 = D_0\{\partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1 - \alpha(1 + \nu)T_1\},$$

$$Q_{j0} = \Lambda_0(\gamma_j + \partial_j w_0) \quad (j = 1, 2), \quad (2)$$

где ν, α – коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения соответственно;

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2), \quad B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}, \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1 + \nu)};$$

3) уравнения равновесия

$$\partial_1 N_1 + \partial_2 S = 0, \quad \partial_1 S + \partial_2 N_2 = 0,$$

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} = 0, \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} = 0, \quad \partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} = 0. \quad (3)$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в (2) определены с точностью до значения Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до Eh^2 .

Первые три уравнения Дюамеля–Неймана (2) и первые два уравнения равновесия (3) описывают безмоментное термоупругое состояние. Остальные уравнения (2), (3) описывают состояние термоупругого изгиба.

Граничные условия для компонент возмущенного термоупругого состояния на линии теплоизолированного разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ в предположении свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними имеют вид [8]:

- для задачи теплопроводности (1):

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L = -\left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1); \quad (4)$$

- для задачи термоупругости (2), (3)

$$N_n|_L = -N_n^o|_L, \quad S_{nt}|_L = -S_{nt}^o|_L,$$

$$M_n|_L = -M_n^o|_L, \quad H_{nt}|_L = -H_{nt}^o|_L, \quad Q_n|_L = -Q_n^o|_L, \quad (5)$$

$$N_n = n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2, \quad S_{nt} = n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S,$$

$$M_n = n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2, \quad H_{nt} = n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H,$$

$$Q_n = n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}.$$

Поскольку разрез L предполагается малым и расположенным на значительном удалении от краёв пластины, то граничные условия на внешнем граничном контуре не являются актуальными.

3. Методика решения задачи. К системе уравнений термоупругости (1)–(3) применим двумерное интегральное преобразование Фурье с учетом разрывного характера искомых функций на линии разреза L [7]:

$$F(\partial_j G) = (-i\xi_j)\tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j[G] \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $[G] = G^+ - G^-$ – скачок функции G при переходе через линию L ($G^\pm$ – граничные значения функции G в соответствии с выбранным направлением нормали $\vec{n}$); $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ – координаты точки на линии L . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью $\vec{n}$ при вращении против часовой стрелки.

Решение задачи теплопроводности (1) с граничными условиями (4) построено в статье [9]. Здесь дадим решение задачи термоупругости (2), (3), (5).

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье (6) к системе уравнений (2), (3), получим трансформанты внутренних силовых факторов

$$\tilde{P}_j^q = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{k=1}^{\kappa} \tilde{K}_{jk}^q \psi_k^q \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL, \quad (7)$$

где $\kappa = 4$ для обобщенных мембранных усилий; $\kappa = 7$ для обобщенных моментов; $\kappa = 5$ для обобщенных перерезывающих сил;

$$P_j^0 = N_j, \quad P_j^1 = M_j, \quad P_{j+3}^1 = Q_{j0} \quad (j = 1, 2), \quad P_3^0 = S, \quad P_3^1 = H,$$

$\tilde{K}_{jk}^q$ – трансформанты ядер интегральных представлений, например,

$$\tilde{K}_{44}^1 = -\frac{\Lambda_0 i \xi_2^2 (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2)}{p^2 (p^2 + 2,5)}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad (8)$$

$\psi_j^q = \psi_j^q(s)$ – неизвестные функции (s – длина дуги кривой L):

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}, \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}, \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}, \quad \psi_j^1 = \frac{d[\gamma_j]}{ds}, \quad \psi_{j+3}^1 = [\gamma_j] \quad (j = 1, 2),$$

причем функции $\psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]$, $\psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1]$ определяются при решении задачи теплопроводности (1), (4).

Методика обращения трансформант интегральных представлений (7) подробно описана в статьях [10, 11]. Она основана на формуле обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (6) и интегральном представлении специальной G -функции [12].

Например, оригинал ядра (8) имеет вид

$$K_{44}^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{\Lambda_0}{2r^4} \{ \bar{x}_1^2 A(\bar{x}_1, 3\bar{x}_2) + \bar{x}_2^2 A(-\bar{x}_1, \bar{x}_2) \} - 0,3125\Lambda_0 \times \\ \times \left\{ A(\bar{x}_1, 3\bar{x}_2) G_{1,0}(\sqrt{2,5}r) - \frac{1}{r^2} [\bar{x}_1^2 A(\bar{x}_1, 3\bar{x}_2) - \bar{x}_2^2 A(3\bar{x}_1, \bar{x}_2)] G_{2,1}(\sqrt{2,5}r) \right\}; \\ r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}, \quad A(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2, \quad \bar{x}_1 = x_1 - x'_1, \quad \bar{x}_2 = x_2 - x'_2;$$

специальная G -функция выражается через функцию Макдональда $K_\nu(z)$:

$$G_{n,\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{\nu+n}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k};$$

$$n > 0; \quad \text{Re } z > 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots$$

4. Модельная задача. Рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длины $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (9)$$

Для разреза (9) оригиналы искомых функций (7) примут вид

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\kappa} K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q ds \quad (x'_1 = ls). \quad (10)$$

Подставляя интегральные представления внутренних силовых факторов (10) в граничные условия (5), получим две системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающие

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1); \quad (11)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_{22}^1(\zeta - s) \psi_2^1(s) ds = F_2^1(\zeta), \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1, 3} \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = 1, 3; |\zeta| \leq 1),$$

где E_{jk}^1 – ядра интегральных уравнений, представляющие собой линейные комбинации специальной G -функции и ее первообразной $IG_{n,\nu}(z)$, например,

$$E_{11}^1(\zeta - s) = 1,5\Lambda_0 l^2(\zeta - s)G_{2,0}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) + 0,3\Lambda_0 \text{sign}(\zeta - s) \times \\ \times \left\{ IG_{0,0}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) - IG_{2,2}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) \right\}; \quad IG_{n,\nu}(s) = \int_0^s G_{n,\nu}(t)dt.$$

Правые части $F_j^q(\zeta)$ систем СИУ (11), (12) являются линейными комбинациями значений компонент основного термоупругого состояния на линии разреза L и интегралов вида $\int_{-1}^1 D_k^q(\zeta - s)[T_k]ds$, в которых разностные ядра $D_k^q(\zeta - s)$ представляют собой линейные комбинации специальных G -функций, зависящих от $Bi^\pm$.

Из непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза следуют дополнительные ограничения на искомые функции:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s)ds = 0 \quad (q = 0, 1). \quad (13)$$

Система СИУ (11) при ограничениях (13) может быть решена аналитически в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка $[-1; 1]$ [13]:

$$\psi_j^0(\zeta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-\zeta} F_j^0(s)ds \quad (j = 1, 2).$$

Система (12) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которая при ограничениях (13) может быть решена методом механических квадратур в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка $[-1; 1]$ [13].

Особый интерес представляет термоупругое состояние вблизи концов линии разреза L . Оно имеет сингулярный характер с особенностью вида $r^{-1/2}$ [13], что обусловлено наличием ядер Коши в интегральных представлениях (10).

При решении задач термомеханики разрушения необходимо определить КИН. Из вида правых частей систем СИУ (11), (12) следует, что КИН представимы в виде двух слагаемых, первое из которых соответствует силовым компонентам основного термоупругого состояния, а второе обусловлено возмущенным температурным полем. В данной работе предметом исследования являются вторые компоненты, поэтому для их исследования необходимо принять силовые компоненты основного термоупругого состояния равными нулю на линии разреза. Тогда с учётом представлений интегралов типа Коши в окрестностях концов линии интегрирования [14] получим КИН для поперечного (K_{II}) и продольного (K_{III}) сдвига:

$$K_{II}^\pm = \mp \frac{1}{4} \sqrt{\pi l h E} \sum_{k=0,1} P_k \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[\psi_1^k(s) \sqrt{1-s^2} \right];$$

$$K_{\text{III}}^{\pm} = \mp \frac{1}{4} \sqrt{\pi l h} E \Lambda_0 (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[\psi_3^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right].$$

Максимальные по абсолютной величине значения КИН получены с учетом свойств полиномов Лежандра. Максимум $|K_{\text{II}}^{\pm}|$ достигается на одной из лицевых поверхностей пластины $z = \pm h$, а максимум $|K_{\text{III}}^{\pm}|$ – в срединной плоскости пластины $z = 0$, причем

$$K_{\text{II}}^{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi l h} E \sum_{k=0,1} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_1^k(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\},$$

$$K_{\text{III}}^{\max} = \frac{3}{8} \sqrt{\pi l h} E \Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\}. \quad (14)$$

5. Анализ результатов. Для изотропной пластины ($\nu = 0,3$), содержащей прямолинейный теплоизолированный разрез (9), исследована зависимость максимальных по модулю значений КИН (14) от интенсивности и характера теплообмена с внешней средой. Основное температурное поле предполагалось таким, что через линию разреза проходит только поток компоненты температуры T_1^o , вызывающей состояние термоупругого изгиба:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1 = \text{const} \neq 0 \quad (|x_1| \leq l). \quad (15)$$

Результаты исследований представлены на рис. 1. Рис. 1а соответствует максимальным по абсолютной величине значениям КИН для поперечного сдвига $K_{\text{II}}^{\max}$, а рис. 1б – максимальным по модулю значениям КИН для продольного сдвига $K_{\text{III}}^{\max}$. Значения КИН даны с точностью до величины $K^* = 1/4 \alpha q_1 l E \sqrt{l h}$. Длина теплоизолированного разреза полагалась равной $2h$ (кривые 1) и $4h$ (кривые 2).

Рассматривались такие случаи теплообмена с внешней средой на лицевых поверхностях пластины:

- верхний односторонний ($Bi^+ = Bi$; $Bi^- = 0$) – сплошные линии;
- симметричный ($Bi^+ = Bi^- = Bi$) – пунктирные линии.

Заметим, что в случае симметричного теплообмена при действии основного температурного поля (15) (при условии равенства нулю внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния на линии разреза) в пластине возникает лишь состояние термоупругого изгиба.

Из рис. 1 видно, что увеличение интенсивности теплообмена при его произвольном характере приводит к уменьшению максимальных по модулю значений КИН для поперечного и продольного сдвигов. При этом вариант более благоприятного режима теплообмена (с меньшими КИН) зависит от длины разреза.

6. Выводы. Анализ результатов, представленных на рис. 1, показывает, что при температурной нагрузке, приводящей к изгибу, интенсивность и характер теплообмена с внешней средой оказывает существенное влияние на величину КИН.

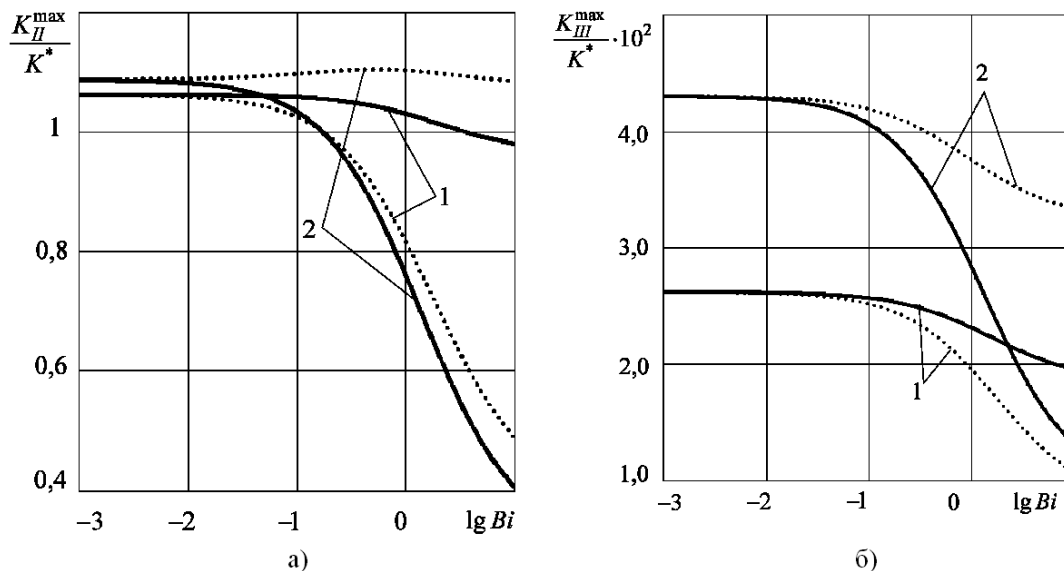


Рис. 1. Зависимость КИН от параметра теплообмена

Так, возрастание параметра теплообмена Bi приводит к убыванию максимальных по модулю значений КИН для поперечного и продольного сдвига.

Также заметим, что при действии потока T_1^o максимальные по модулю значения КИН для продольного сдвига $K_{III}^{\max}$ на два порядка меньше, чем значения $K_{II}^{\max}$. Поэтому при оценке несущей способности тонкостенных элементов конструкций при наличии тепловых потоков T_1^o можно не учитывать КИН для продольного сдвига.

1. Пискунов С.О., Гуляр О.І., Шкриль О.О. Оцінка напружено-деформованого стану і несучої здатності просторових тіл з початковими тріщинами в умовах термосилового навантаження // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць; Дніпропетр. нац. ун-т. – 2014. – **23**. – С. 207–218.
2. Покровский В.В., Сидяченко В.Г., Ежов В.Н. Расчетно-экспериментальное исследование раскрытия вершины трещины и остаточных напряжений после предварительного термосилового нагружения // Проблемы прочности. – 2011. – № 1. – С. 82–94.
3. Зеленьяк В. Термопружна взаємодія тріщини та включення у круговому диску // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології: наук. зб. – 2015. – **21**. – С. 109–116.
4. Кушнір Р.М., Дмитрах І.М. Теорія і методи розрахунку напруженого стану та міцності твердих деформівних тіл з концентраторами напружень // Вісн. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 59–70.
5. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
6. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
7. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
8. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.

9. Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2012. – 1. – С. 26–32.
10. Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2013. – 1. – С. 20–26.
11. Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене // Теор. и прикл. механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 42–52.
12. Хиженяк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
13. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
14. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev

Investigation of the influence of the environment on the state of thermoelastic bending of isotropic plates with heat-insulated cut.

The problem of thermoelastic bending for an isotropic plate with heat-insulated cut is reduced to a system of singular integral equations. The generalized theory in variant of $\{1,0\}$ -approximation is used. The integral representations for components of perturbed thermoelastic state are constructed. The influence of the intensity and character of heat exchange on the maximum modulus values for transverse and longitudinal shear stress intensity factors is investigated.

Keywords: *thermoelastic bending, generalized theory, heat-insulated cut, criterion Biot, stress intensity factors.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
bondarenko_n_s@mail.ru,
a.s.goltsev@mail.ru

Получено 10.09.16

УДК 517.5

©2016. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

НОВЫЕ УСЛОВИЯ ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИИ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Изучаются условия, при которых функция, удовлетворяющая взвешенному свойству Мореры для всех гиперболических окружностей фиксированного радиуса, является голоморфной. Показано, что одним из таких условий является ограничение на скорость убывания разности между функцией и ее интегралом типа Коши.

Ключевые слова: теоремы типа Мореры, гиперболическая плоскость, свойство Помпейю.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$. Согласно классическому результату Коши, всякая функция $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}. \quad (1)$$

Другим критерием голоморфности в $\mathbb{D}$ является теорема Мореры, в которой требуется равенство нулю интегралов от f по достаточно большому набору замкнутых контуров, лежащих в $\mathbb{D}$. Ослабления условий теоремы Мореры изучались многими авторами (см., например, [1],[2] и библиографию к этим работам).

Пусть G – группа конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$. Для множества $E \subset \mathbb{D}$ обозначим через gE образ E при отображении $g \in G$. Пусть также $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$. В работе [3] рассмотрен следующий вопрос. Верно ли, что при данном $\varrho \in (0, 1)$ и $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$ условие

$$\int_{\gamma_\varrho} f(gz) dz = 0 \quad \forall g \in G \quad (2)$$

влечет голоморфность функции f ? Оказалось, что в общем случае ответ отрицательный, однако при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является увеличение числа возможных значений ϱ в уравнении (2). В работе [3] получен следующий результат.

Теорема А. Пусть $\varrho_1, \varrho_2 \in (0, 1)$ фиксированы, и уравнения

$$P_z^{-1} \left(\frac{1 + \varrho_j^2}{1 - \varrho_j^2} \right) = 0 \quad (j = 1, 2)$$

не имеют общего решения $z \in \mathbb{C}$ (здесь и далее P_z^ν – присоединенная функция Лежандра первого рода [4]). Тогда, если функция $f \in C(\mathbb{D})$ удовлетворяет (2) для любого $g \in G$ и $\varrho = \varrho_1, \varrho_2$, то f голоморфна в $\mathbb{D}$.

Доказательство теоремы А основано на применении преобразования Фурье на группе G и теоремы Шварца о спектральном анализе [5].

В данной работе изучены точные условия, при которых функция f , удовлетворяющая (2) при одном фиксированном ϱ , обязана быть голоморфной. Показано, что одним из таких условий является ограничение на скорость убывания разности между левой и правой частями уравнения (1) при $|z| \rightarrow 1$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varrho \in (0, 1)$ фиксировано. Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Пусть $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяет (2) и

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = o\left(\sqrt{1 - |z|}\right) \quad \text{при } |z| \rightarrow 1. \quad (3)$$

Тогда f голоморфна в $\mathbb{D}$.

(ii) Существует неголоморфная функция $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, для которой выполнено условие (2) и

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = O\left(\sqrt{1 - |z|}\right) \quad \text{при } |z| \rightarrow 1.$$

Относительно других теорем типа Мореры см. [1]–[3], [6] и имеющуюся там библиографию.

2. Основные обозначения. Как известно, для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и

$$gw = \tau \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \quad (4)$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отображения (4) являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$ (см., например, [7, введение, § 4]). Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ в этой модели определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

В частности,

$$d(z, 0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = \operatorname{arth} |z| \quad \text{и} \quad |z| = \operatorname{th} d(z, 0), \quad z \in \mathbb{H}^2.$$

Расстояние d и гиперболическая мера $d\mu$ на $\mathbb{H}^2$, определенная равенством

$$d\mu(z) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge \overline{dz}}{(1 - |z|^2)^2},$$

инвариантны относительно группы G .

Для $r > 0$ символом B_r будем обозначать открытый гиперболический круг радиуса r с центром в нуле, т.е.

$$B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) < r\}.$$

Пусть также $B_\infty = \mathbb{H}^2$. Для $r \geq 0$ обозначим

$$\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) \leq r\}, \quad \partial B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) = r\}.$$

Обозначим через χ_r характеристическую функцию (индикатор) круга B_r . Обозначим через $L(\mathbb{H}^2)$ и $L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$ множества функций, соответственно интегрируемых и локально интегрируемых на $\mathbb{H}^2$ по мере $d\mu$. Пусть dg – мера Хаара на G , нормированная соотношением

$$\int_G \psi(g0) dg = \int_{\mathbb{H}^2} \psi(z) d\mu(z), \quad (5)$$

которое выполнено для любой функции $\psi \in L(\mathbb{H}^2)$ (см. [7, введение, § 4, п. 3]).

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) – множество всех функций с компактными носителями из $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $C^\infty(\mathbb{R})$) со стандартной топологией (см., например, [7, гл. 2, § 2, п. 2]). Символами $L_{\natural}(\mathbb{H}^2)$, $C_{\natural}^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ будем обозначать соответственно пространства радиальных функций из $L(\mathbb{H}^2)$, $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ с индуцированной топологией. Аналогично, символы $C_{\natural}^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{R})$ обозначают пространства четных функций из $C^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ соответственно.

Определим теперь обобщенную свертку $f_1 \diamond f_2$ двух радиальных функций $f_1, f_2 \in L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$, хотя бы одна из которых имеет компактный носитель. Положим

$$(f_1 \diamond f_2)(g0) = \int_{\mathbb{H}^2} f_1(z) f_2(g^{-1}z) \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 - z \cdot \overline{g0})^2} d\mu(z), \quad g \in G. \quad (6)$$

Равенство (6) показывает, что свертка $f_1 \diamond f_2$ является радиальной функцией класса $L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$.

Из (6) и (5) следует, что

$$(f_1 \diamond f_2)(\zeta) = \int_G f_1(g0) f_2(g^{-1}\zeta) \frac{(1 - |g0|^2)^2}{(1 - \overline{\zeta} \cdot g0)^2} dg, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

и

$$f_1 \diamond f_2 = f_2 \diamond f_1.$$

Кроме того, если $f_1, f_2, f_3 \in L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$ – радиальные функции, хотя бы две из которых имеют компактные носители, то

$$(f_1 \diamond f_2) \diamond f_3 = f_1 \diamond (f_2 \diamond f_3).$$

Как обычно, символом $\widehat{h}$ будем обозначать преобразование Фурье функции $h \in L(\mathbb{R})$, то есть

$$\widehat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Далее, пусть $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\nu = \nu(\lambda) = \frac{i\lambda - 1}{2}.$$

Положим

$$U_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{\nu+1} F(\nu + 2, \nu + 1; 2; |z|^2), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (7)$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Пусть также

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^\nu F(\nu + 2, \nu; 1; |z|^2), \quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{D}. \quad (8)$$

Пусть функция $T \in L_{\mathfrak{H}}(\mathbb{H}^2)$ имеет компактный носитель. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^2} T(z) \mathcal{H}_\lambda(z) (1 - |z|^2)^2 d\mu(z).$$

Из равенства

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-2} F\left(\frac{3 + i\lambda}{2}, \frac{3 - i\lambda}{2}; 1; \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right)$$

(см. (8) и [4, формула 2.9 (3)]) видно, что $\mathcal{F}(T)$ является четной целой функцией переменной λ . Ряд свойств преобразования $\mathcal{F}$ изучен в работе [8].

3. Вспомогательные утверждения. В данном разделе мы установим некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{z} U_\lambda(z)) = 2 \mathcal{H}_\lambda(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{D}, \quad (9)$$

где функция U_λ определена в (7).

Доказательство. В силу непрерывности в $\mathbb{D}$ обеих частей равенства (9), достаточно установить (9) при $z \neq 0$. В этом случае, полагая $\rho = |z|$, из (7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{z} U_\lambda(z)) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2(1-\rho^2)^{\nu+1} F(\nu+2, \nu+1; 2; \rho^2)).$$

Используя теперь [4, формула 2.8 (25)], из последнего равенства и (8) получаем (9).
□

Для $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(r) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\operatorname{sh}^2 r\right).$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\varphi_\lambda^{(\alpha, 1)}(r) - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} = -\frac{1}{4}(\lambda^2 + 1) \operatorname{sh}^2 r \varphi_\lambda^{(1, 1)}(r).$$

Доказательство. Полагая для краткости

$$z = -\operatorname{sh}^2 r, \quad a = \frac{1 + i\lambda}{2}, \quad b = \frac{1 - i\lambda}{2}.$$

Из определения гипергеометрической функции имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\varphi_\lambda^{(\alpha, 1)}(r) - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) b(b+1) \dots (b+n-1)}{n! \Gamma(n)} z^n = \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n) b(b+1) \dots (b+n)}{n! \Gamma(n+2)} z^n = abz F(a+1, b+1; 2; z) = \\ &= -\frac{1}{4}(\lambda^2 + 1) \operatorname{sh}^2 r F\left(\frac{3 + i\lambda}{2}, \frac{3 - i\lambda}{2}; 2; -\operatorname{sh}^2 r\right). \end{aligned}$$

Тем самым утверждение доказано. □

Следствие 1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство*

$$\mathcal{F}(\chi_r)(\lambda) = \pi \operatorname{sh}^2 r \varphi_\lambda^{(1, 1)}(r). \quad (10)$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{F}$ находим

$$\mathcal{F}(\chi_r)(\lambda) = \pi \int_0^r \operatorname{sh}(2t) \varphi_\lambda^{(0, 2)}(t) dt.$$

Далее, используя лемму 2 и [9, предложение 7.2 (ii)], получаем

$$\int_0^r \operatorname{sh}(2t) \varphi_\lambda^{(0,2)}(t) dt = -\frac{4}{\lambda^2 + 1} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\varphi_\lambda^{(\alpha,1)}(r) - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} = \operatorname{sh}^2 r \varphi_\lambda^{(1,1)}(r),$$

откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Пусть $\mathcal{Z}_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{F}(\chi_r) = 0\}$, $N(r) = \{\lambda > 0 : \mathcal{F}(\chi_r) = 0\}$. Обозначим через n_λ кратность нуля λ функции $\mathcal{F}(\chi_r)$. Свойства нулей $\mathcal{F}(\chi_r)$ содержатся в следующем утверждении.

Лемма 3. *Выполнены следующие утверждения.*

(i) $\mathcal{Z}_r \subset \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ и $n_\lambda = 1$ при всех $\lambda \in \mathcal{Z}_r$.

(ii) $|\mathcal{F}(\chi_r)'(\lambda)| > c|\lambda|^{-3/2}$ для любого $\lambda \in \mathcal{Z}_r$ и некоторой константы $c > 0$, не зависящей от λ .

Доказательство. Используя (10) и [4, формула 3.2 (7)], получаем, что

$$\mathcal{F}(\chi_r) = \pi \operatorname{thr} P_{(i\lambda-1)/2}^{-1}(\operatorname{ch} 2r).$$

Тогда утверждение леммы 3 является частным случаем лемм 2.4, 2.5 и следствия 2.2 из [2, часть 2, глава 2]. $\square$

Далее, из (10) и асимптотического разложения для функции $\varphi_\lambda^{(1,1)}(r)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ следует (см. [2, часть 2, следствие 2.2]), что $\mathcal{F}(\chi_r) \in L^2(\mathbb{R}^1)$. По теореме Пэли–Винера существует функция $\Lambda_r \in L^2(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем, такая, что $\widehat{\Lambda}_r = \mathcal{F}(\chi_r)$.

Для $f \in \mathcal{D}_{\mathfrak{H}}(\mathbb{H}^2)$, $t \in \mathbb{R}^1$ определим функцию $\mathfrak{A}(f)(t)$ равенством

$$\mathfrak{A}(f)(t) = \frac{16}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} \cos(\lambda t) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(i) \cos(it),$$

где

$$c(\lambda) = \frac{2^{3-i\lambda} \Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i\lambda+3}{2}\right)}.$$

Как показано в работе [8], $\mathfrak{A}(f) \in C_{\mathfrak{H}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ и отображение $\mathfrak{A} : \mathcal{D}_{\mathfrak{H}}(\mathbb{H}^2) \rightarrow C_{\mathfrak{H}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ продолжается до линейного гомеоморфизма пространств $C_{\mathfrak{H}}^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $C_{\mathfrak{H}}^\infty(\mathbb{R}^1)$. Кроме того, если $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t) = \cos \lambda t. \quad (11)$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [8], получаем

$$\mathfrak{A}(f \diamond \chi_r)(t) = \mathfrak{A}(f) * \Lambda_r \quad (12)$$

для любой $f \in C_{\mathfrak{H}}^\infty(\mathbb{H}^2)$.

4. Доказательство теоремы 1. Для доказательства утверждения (i) сначала рассмотрим случай $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap C^\infty(\mathbb{D})$. Пусть $r > 0$ и

$$J_f(\zeta) = \frac{1}{1 - |\zeta|^2} \int_{\partial B_r} f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}\right) dz, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \quad (13)$$

Положим

$$g_\zeta z = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

По формуле Грина имеем

$$J_f(\zeta) = - \int_{B_r} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f(g_\zeta z)) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{1 - |\zeta|^2} = 2i \int_{B_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g_\zeta z) \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 + \zeta \bar{z})^2} d\mu(z).$$

Поскольку $g_\zeta \in G$ и мера $d\mu(z)$ инвариантна относительно G , получаем

$$J_f(\zeta) = 2i \int_{g_\zeta B_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) \frac{(1 - |g_\zeta^{-1}w|^2)^2}{(1 + \zeta \overline{g_\zeta^{-1}w})^2} d\mu(w).$$

Отсюда прямым подсчетом находим

$$J_f(\zeta) = 2i \int_{g_\zeta B_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) \frac{(1 - |w|^2)^2}{(1 - w\bar{\zeta})^2} d\mu(w).$$

Ввиду определения свертки $\diamond$ имеем

$$J_f = 2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \diamond \chi_r \quad \text{в } \mathbb{H}^2. \quad (14)$$

Запишем действие элемента $g \in G$ на точку $z \in \mathbb{D}$ в виде

$$gz = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (15)$$

Положим $\zeta = g0$, $g \in G$. Из (13) и (15) имеем

$$J_f(g0) = |a|^2 \int_{\partial B_r} f\left(\frac{z + \frac{b}{\bar{a}}}{1 + \frac{\bar{b}}{a}z}\right) dz.$$

Отсюда, после замены переменной $z = \frac{a}{\bar{a}} w$, получаем

$$J_f(g0) = a^2 \int_{\partial B_r} f(gz) dz \quad \forall g \in G. \quad (16)$$

Равенства (14) и (16) показывают, что функция f удовлетворяет условию (2) в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2, \quad (17)$$

где $r = \operatorname{arth} \rho$. Введем вспомогательную функцию

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta z) d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что $u \in C^\infty(\mathbb{D})$ и удовлетворяет (2). Кроме того, при $z \neq 0$ имеем

$$u(z) = v(|z|)e^{-i \arg z}, \quad \text{где} \quad v(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(|z|e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi. \quad (19)$$

Простое вычисление показывает, что

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v'(|z|) + \frac{v(|z|)}{|z|}, \quad (20)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$. Кроме того, из (19) следует, что

$$v(0) = 0. \quad (21)$$

На основании (17) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2, \quad \text{где} \quad r = \operatorname{arth} \rho.$$

Отсюда, в силу (12),

$$\mathfrak{A} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) * \Lambda_r = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}.$$

Используя [2, часть 3, теорема 1.3] и лемму 2, получаем, что

$$\mathfrak{A} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) (t) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \cos(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

где постоянная $c_\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $|c_\lambda| = O((1 + \lambda)^{-\alpha})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ для любого фиксированного $\alpha > 0$. Тогда из оценки производных функции $\mathcal{H}_\lambda$ (см. [8, доказательство предложения 2]) вытекает, что ряд

$$\sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \mathcal{H}_\lambda$$

сходится в $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ к некоторой функции $w \in C_b^\infty(\mathbb{H}^2)$. Из равенства (22) и (11) получаем

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) = \mathfrak{A}(w).$$

Отсюда заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = w$ в $\mathbb{D}$. Из этого уравнения и определения w находим

$$v(|z|) = \frac{|z|}{2} \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda U_\lambda(|z|) \quad (23)$$

(см. (20), (21) и лемму 1). Далее, из (19) и (3) следует, что $v(|z|) = o(\sqrt{1 - |z|})$ при $|z| \rightarrow 1$. Используя теперь (23) и [7, введение, теорема 4.15], отсюда получаем $v = 0$. В силу (19) и (18), это означает, что

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

для любого $R \in (0, 1)$.

Пусть теперь $h \in G$. Используя условие (2) с функцией $f(hz)$ вместо f и условие (3) с hz вместо z , как и выше, имеем

$$\int_{\gamma_R} f(hz) dz = 0$$

для всех $R \in (0, 1)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в } \mathbb{H}^2 \quad \text{при любом } r > 0.$$

Отсюда, в силу произвольности r и определения свертки $\diamond$, следует голоморфность f . Общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (см., например, [2, часть 1, гл. 3]).

Для доказательства утверждения (ii) положим $f(z) = \bar{z} U_\lambda(z)$, где $\lambda \in N(r)$ и $r = \text{arth } \rho$. Тогда согласно лемме 1, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2 \mathcal{H}_\lambda,$$

то есть f не голоморфна в $\mathbb{D}$. Из доказательства леммы 2 в [8] и (10) получаем, что f удовлетворяет (2) при всех $g \in G$. Кроме того, из [7, введение, теорема 4.15] следует, что выполнено условие (3). Таким образом, теорема 1 полностью доказана. $\square$

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al). – Dordrecht: Kluwer, 1992. – P. 185–194.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
3. *Berenstein C.A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk // Israel J. Math. – 1994. – **86**. – P. 61–106.
4. *Бейтмен Г., Эрде́йи А.* Высшие трансцендентные функции. – **1, 2**. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296 с.
5. *Schwartz L.* Theorie générale des fonctions moyenne-periodiqué // Ann. Math. – 1947. – **48**. – P. 857–928.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
7. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
8. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Гомеоморфизмы с трансмутационным свойством относительно взвешенной свертки // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2015. – **29**. – С. 29–40.
9. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

New conditions for the holomorphy of a function in the unit disk.

We study the conditions under which a function satisfying a weighted Morera property for all hyperbolic circles of a fixed radius is holomorphic. We show that one of such conditions is the restriction on a speed of decrease of a difference between the function and its Cauchy type integral.

Keywords: *Morera type theorems, hyperbolic plane, Pompeiu property.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com

Получено 05.05.16

UDK 517.9

©2016. S. P. Degtyarev

ON THE EQUIVALENCE OF CERTAIN SEMINORMS ON SOME WEIGHTED HÖLDER SPACES

The present paper is devoted to studying of some weighted Hölder spaces. These spaces are designed in the way to serve as a framework for studying different statements for the thin film equations in weighted classes of smooth functions in the multidimensional setting. These spaces can serve also for considering of other equations with the degeneration on the boundary of the domain of definition. We prove the equivalence of certain metrics on these spaces.

Keywords: *weighted Hölder spaces, degenerate parabolic equations, equivalent metrics.*

The present paper is devoted to studying of some weighted Hölder spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$. These spaces were introduced in [1] and they are designed in the way to serve as a framework for consideration of different statements for the thin film equations in weighted classes of smooth functions in the multidimensional setting. These spaces can serve also for considering of other equations with the degeneration on the boundary of the domain of definition, for example, in the spirit of [2].

The literature on the subject of the thin film equations is very numerous but almost all results with sufficient regularity are devoted to the case of one spatial variable. As a possible target for an application of the spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ we only mention the papers [3]–[17].

The spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ arise at the considering linearised version of the thin film equations. Let us explain this on the example for the thin film equation in the case of partial wetting (see, for example, [3] for the accurate statement). Consider the thin film equation of fourth order for an unknown function $h(x, t)$ (compare [18])

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h^n \nabla \Delta h - \beta \nabla h) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

where $n > 0$ is fixed, Ω is a half space $\Omega = \{(x, t) : x = (x', x_N) \in R^N, x_N > 0, t > 0\}$. Consider also partial wetting conditions at $x_N = 0$

$$h(x', 0, t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_N}(x', 0, t) = 1 \quad (2)$$

and an initial condition

$$h(x, 0) = w(x). \quad (3)$$

From (2) it follows that we must have for $w(x)$

$$w(x', 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_N}(x', 0) = 1. \quad (4)$$

Consequently, we have

$$w(x) \sim x_N, \quad x_N \rightarrow 0. \quad (5)$$

The linearization of equation (1) at the initial datum $w(x)$ means that we denote in (1) $h = w + u$ and extract linear with respect to u part (we also drop lower order terms). Formally, one can just replace h^n by w^n in (1) and replace h by u in other places of this equation. Taking into account (5) and replacing w by just x_N , we arrive at

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(x_N^n \nabla \Delta u - \beta \nabla u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega. \quad (6)$$

For second order equations this procedure is described in details in, for example, [19], [20], [2], and for fourth order see [17], [3], [4] formula (13), [5] formula (7).

If we are going to consider equations (6) (and correspondingly (1)) in classes of Hölder functions we have to consider $f(x, t)$ in (6) from some (may be weighted) Hölder class. This leads to the consideration of $\nabla(x_N^n \nabla \Delta u)$ from the same weighted Hölder class. In our definition below this will be the class $C_{n, (n/4)\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$. In the case of second order equations such classes were used in fact in [21]–[23], [2], where the papers [21]–[23] are based on the Carnot–Carathéodory metric and the paper [2] is based on classes $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$. Note that we consider the framework of classes $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ as an alternative for considering the Carnot–Carathéodory metric for studying degenerate equations in classes of smooth functions – [21]–[23], [17]. Therefor, in this paper we are going to prove the equivalence of the Carnot–Carathéodory metric in spaces $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ to some another weighted metric in these spaces.

Note that in the case of elliptic equations more simple weighted Hölder classes with unweighted Hölder constants can be used – [24], [25]. The reason is that in the elliptic case no agreement between smoothness in x -variables and t -variable is needed.

Let us turn now to exact definitions and to the main results.

Denote $H = \{x = (x', x_N) \in R^N : x_N > 0\}$, $Q = \{(x, t) : x \in H, -\infty < t < \infty\}$. And we note at once that all the reasoning and statement below are valid in evident way also for $Q^+ = \{(x, t) : x \in H, t \geq 0\}$ instead of Q . Let m be a positive integer and let n be a positive number, $n < m$. Denote

$$\omega = n/m < 1.$$

Let $C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})$, $\gamma \in (0, 1)$, be the weighted Hölder space of continuous functions $u(x)$ with the finite norm

$$|u|_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \equiv \|u\|_{C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})} \equiv |u|_{\overline{H}}^{(0)} + \langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}, \quad (7)$$

where

$$|u|_{\overline{H}}^{(0)} = \max_{x \in \overline{H}} |u(x)|, \quad \langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \bar{x} \in \overline{H}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \bar{x}_N\}. \quad (8)$$

Thus $\langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}$ represents a weighted Hölder constant of the function $u(x)$. We suppose that

$$n < m, \quad , \text{ if } n \text{ is a noninteger} \quad (1 - \omega)\gamma = \gamma \left(1 - \frac{n}{m}\right) < \min(\{n\}, 1 - \{n\}), \quad (9)$$

where for a real number a , $\{a\}$ is the fractional part of a , $[a]$ is the integer part of a . This assumption is technical and it allows us, for example, to consider the functions x_N^{n-j} as elements of $C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})$ for all integer $j < n$.

In the similar way we define the Hölder seminorms with respect to each variable separately

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{h^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \overline{x}_N\}, i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

where $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_N)$, $h > 0$.

In the standard way we denote by $\langle u \rangle_{x_i, \overline{H}}^{(\gamma)}$, $\langle u \rangle_{x', \overline{H}}^{(\gamma)}$, and $\langle u \rangle_{x, \overline{H}}^{(\gamma)}$ usual unweighted Hölder seminorms with respect to each variable separately, with respect to $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ or with respect to all x -variables.

Note that in terms of the Carnot-Carathéodory metric seminorm (8) is equivalent to

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \simeq \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{s(x, \overline{x})^\gamma},$$

where the Carnot-Carathéodory distance is defined as

$$s(x, \overline{x}) = \frac{|x - \overline{x}|}{|x - \overline{x}|^\omega + x_N^\omega + \overline{x}_N^\omega}. \quad (11)$$

In the case of $m = 2$, $n \in (0, 1)$ this was proved in [2] and in the general case we have the following theorem which is the main result of the present paper.

Denote

$$[u]_s^{(\gamma)} \equiv \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{s(x, \overline{x})^\gamma}, \quad (12)$$

where $s(x, \overline{x})$ is defined in (11)

Theorem. *Seminorm (10) is equivalent to seminorm (12). This means that there are constants C_1 and C_2 with the property*

$$[f]_s^{(\gamma)} \leq C_1 \langle f \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \leq C_2 [f]_s^{(\gamma)} \quad (13)$$

for any continuous in $\overline{H}$ function $f(x)$.

Proof. Let the seminorm $[f]_s^{(\gamma)}$ is finite. We show, that then

$$\langle f \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \leq C [f]_s^{(\gamma)}. \quad (14)$$

Let $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ is small and fixed. Let $x = (x', x_N)$ and let first

$$|x' - \bar{x}'| \geq \varepsilon_0 x_N. \quad (15)$$

Then the more

$$|x - \bar{x}| \geq |x' - \bar{x}'| \geq \varepsilon_0 x_N. \quad (16)$$

Under this condition

$$\begin{aligned} s(x, \bar{x}) &= \frac{|x - \bar{x}|}{x_N^\omega + \bar{x}_N^\omega + |x' - \bar{x}'|^\omega} \leq \\ &\leq C \frac{|x - \bar{x}|}{|x - \bar{x}|^\omega + \bar{x}_N^\omega + |x' - \bar{x}'|^\omega} \leq C |x - \bar{x}|^{1-\omega}. \end{aligned}$$

Therefore, denoting $\beta = \gamma(1 - \omega)$,

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\beta} \leq C \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C [u]_s^{(\gamma)}. \quad (17)$$

Besides, because of (16), and then of (17),

$$x_N^{\gamma\omega} \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\gamma} \leq \frac{x_N^{\gamma\omega}}{(\varepsilon_0 x_N)^{\gamma\omega}} \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^{\gamma(1-\omega)}} \leq C [u]_s^{(\gamma)}. \quad (18)$$

Let now

$$|x' - \bar{x}'| \leq \varepsilon_0 x_N. \quad (19)$$

Under this condition, as it easy to see,

$$s(x, \bar{x}) \sim C x_N^{-\omega} |x - \bar{x}|. \quad (20)$$

Consequently,

$$x_N^{\gamma\omega} \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\gamma} \leq C \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C [u]_s^{(\gamma)}. \quad (21)$$

We estimate now the unweighted Hölder constant of the function f with the exponent β .

To estimate it we consider the two cases.

If

$$|x_N - \bar{x}_N| \geq \varepsilon_0 x_N,$$

then

$$|x - \bar{x}| \geq |x_N - \bar{x}_N| \geq \varepsilon_0 x_N$$

and therefore, as it was above,

$$s(x, \bar{x}) \leq \frac{|x - \bar{x}|}{(|x - \bar{x}|/\varepsilon_0)^\omega} \leq C |x - \bar{x}|^{1-\omega},$$

so that, as above,

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\beta} \leq C \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C[u]_s^{(\gamma)}. \quad (22)$$

If now, under the condition (19), we have

$$|x_N - \bar{x}_N| \leq \varepsilon_0 x_N, \quad (23)$$

then in this case

$$|x - \bar{x}| \leq |x' - \bar{x}'| + |x_N - \bar{x}_N| \leq 2\varepsilon_0 x_N. \quad (24)$$

Therefore, in the force of (20),

$$\begin{aligned} s(x, \bar{x}) &\leq C x_N^{-\omega} |x - \bar{x}| \leq \\ &\leq C x_N^{-\omega} (2\varepsilon_0 x_N)^\omega |x - \bar{x}|^{1-\omega} = C |x - \bar{x}|^{1-\omega}. \end{aligned} \quad (25)$$

Consequently, in this case

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\beta} \leq C \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C[u]_s^{(\gamma)}. \quad (26)$$

The estimate (14) follows now from (17), (18), (21), (22) and (26).

Further, let now the seminorm $\langle f \rangle_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}$ is finite. Let us prove the following estimate

$$[f]_s^{(\gamma)} \leq C \langle f \rangle_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (27)$$

Let first

$$|x' - \bar{x}'| \leq \varepsilon_0 x_N, \quad x_N > 0. \quad (28)$$

Then

$$s(x, \bar{x}) \geq \nu \frac{|x - \bar{x}|}{x_N^\omega},$$

and consequently

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C x_N^{\gamma\omega} \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\gamma} \leq C \langle f \rangle_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (29)$$

In the particular case $x_N = 0$ we have $\bar{x}_N = 0$ and therefore

$$s(x, \bar{x}) = |x' - \bar{x}'|^{1-\omega} = |x - \bar{x}|^{1-\omega},$$

and so again

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} = \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\beta} \leq C \langle f \rangle_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (30)$$

Let now we have

$$|x' - \bar{x}'| \geq \varepsilon_0 x_N. \quad (31)$$

Then

$$s(x, \bar{x}) \geq \nu \frac{|x - \bar{x}|}{|x' - \bar{x}'|^\omega} \geq \nu |x - \bar{x}|^{1-\omega}, \quad (32)$$

and consequently,

$$\frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{s(x, \bar{x})^\gamma} \leq C \frac{|f(x, t) - f(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\beta} \leq C \langle f \rangle_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (33)$$

Thus, (27) follows from (29), (30), (32). And so the theorem is proved. $\square$

1. *Degtyarev S.P.* On some weighted Holder spaces as a possible functional framework for the thin film equation and other parabolic equations with a degeneration at the boundary of a domain // ArXiv.org, <http://arxiv.org/abs/1507.01106>.
2. *Degtyarev S.P.* Classical solvability of multidimensional two-phase Stefan problem for degenerate parabolic equations and Schauder's estimates for a degenerate parabolic problem with dynamic boundary conditions // Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA). – 2015. – **22**, № 2. – P. 185–237.
3. *Knüpfer H.* Well-posedness for the Navier slip thin-film equation in the case of partial wetting // Comm. Pure Appl. Math. – 2011. – **64**, – № 9. – P. 1263–1296.
4. *Giacomelli L., Knüpfer H., Otto F.* Smooth zero-contact-angle solutions to a thin-film equation around the steady state // J. Differential Equations. – 2008. – **245**, № 6. – P. 1454–1506.
5. *Giacomelli L., Knüpfer H.* A free boundary problem of fourth order: classical solutions in weighted Hölder spaces // Commun. Partial Differ. Equations. – 2010. – **35**, № 10–12. – P. 2059–2091.
6. *Giacomelli L., Gnann M.V., Knüpfer H., Otto F.* Well-posedness for the Navier-slip thin-film equation in the case of complete wetting // J. Differ. Equations. – 2014. – **257**, № 1. – P. 15–81.
7. *Giacomelli L., Gnann M.V., Otto F.* Regularity of source-type solutions to the thin-film equation with zero contact angle and mobility exponent between 3/2 and 3 // Eur. J. Appl. Math. – 2013. – **24**, № 5. – P. 735–760.
8. *Boutat M., Hilout S., Rakotoson J.-E., Rakotoson J.-M.* A generalized thin-film equation in multidimensional space // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**, № 4. – P. 1268–1286.
9. *Bertsch M., Giacomelli L., Karali G.* Thin-film equations with "partial wetting" energy: existence of weak solutions // Phys. D. – 2005. – **209**, № 1–4. – P. 17–27.
10. *Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* On a fourth-order degenerate parabolic equation: global entropy estimates, existence, and qualitative behavior of solutions // SIAM J. Math. Anal. – 1998. – № 2. – P. 321–342.
11. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Commun. Partial Differ. Equations. – 2001. – **26**, № 9–10. – P. 1509–1557.
12. *Giacomelli L., Shishkov A.* Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow // Indiana Univ. Math. J. – 2005. – **54**, № 4. – P. 1181–1215.
13. *Novick-Cohen A., Shishkov A.* The thin film equation with backwards second order diffusion // Interfaces Free Bound. – 2010. – **12**, № 4. – P. 463–496.
14. *Liang, B.* Mathematical analysis to a nonlinear fourth-order partial differential equation // Nonlinear Anal. – 2011. – **74**, № 11. – P. 3815–3828.
15. *Liu C., Tian Y.* Weak solutions for a sixth-order thin film equation // Rocky Mt. J. Math. – 2011. – **41**, № 5. – P. 1547–1565.
16. *Liu C.* Qualitative properties for a sixth-order thin film equation // Math. Model. Anal. – 2010. – **15**, № 4. – P. 457–471.
17. *Dominik John* On Uniqueness of Weak Solutions for the Thin-Film Equation // ArXiv: <http://arxiv.org/abs/1310.6222> (2013).
18. *Degtyarev S.P.* Liouville Property for Solutions of the Linearized Degenerate Thin Film Equation of Fourth Order in a Halfspace // Results in Mathematics. – 2015. – DOI 10.1007/s00025-015-0467-x.

19. *Bazalii B.V., Degtyarev S.P.* On classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid // *Math. USSR Sb.* – 1988. – **60**, № 1. – P. 1–17.
20. *Bizhanova G.I., Solonnikov V.A.* On problems with free boundaries for second-order parabolic equations // *St. Petersburg Math. J.* – 2001. – **12**, № 6. – P. 949–981.
21. *Daskalopoulos P., Hamilton R.* Regularity of the free boundary for the porous medium equation // *J.Amer.Math.Soc.* – 1998. – **11**, № 4. – P. 899–965.
22. *Sunghoon Kim, Ki-Ahm Lee* Smooth solution for the porous medium equation in a bounded domain // *J.Differ.Equations.* – **247**, № 4. – P. 1064–1095.
23. *Bazalij B.V., Krasnoshchek N.V.* Regularity of solution to a multidimensional free boundary problem for an equation of a porous medium // *Siberian Advances in Mathematics.* – 2003. – **13**, № 3. – P. 1–53.
24. *Goulaouic C., Shimakura N.* Regularite holderienne de certains problemes aux limites elliptiques degeneres// *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa.* – 1983. – **X**, № 1. – P. 79–108.
25. *Bazaliy B.V., Degtyarev S.P.* A boundary value problem for elliptic equations that degenerate on the boundary in weighted Hölder spaces // *Sb. Math.* – 2013. – **204**, № 7–8. – P. 958–978.

С. П. Дегтярев

Об эквивалентности некоторых полунорм в весовых пространствах Гельдера.

Данная статья посвящена изучению некоторых весовых пространств Гельдера. Эти пространства являются естественными классами гладких функций для изучения уравнений типа уравнений тонких пленок в многомерном случае. Эти классы могут быть применены также для изучения других уравнений с вырождением на границе области определения. Мы доказываем эквивалентность некоторых различных метрик в этих пространствах.

Ключевые слова: *весовые пространства Гельдера, вырождающиеся параболические уравнения, эквивалентные метрики.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», г.Донецк
degtyar@i.ua

Received 17.05.16

УДК 517.5

©2016. Д. А. Зарайский

О МНОЖЕСТВАХ, НА КОТОРЫХ ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ ДОПУСКАЮТ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Доказано, что произвольная интегрируемая в квадрате функция, определенная на замкнутом множестве диаметра $\leq 2r$ отличном от шара радиуса r , продолжается до функции с нулевыми интегралами по шарам радиуса r , определенной на всем $\mathbb{R}^n$. Если внутренность множества содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, такое продолжение может не иметь места. Получен аналогичный результат для функций с нулевыми интегралами по сферам радиуса r .

Ключевые слова: функции с нулевыми интегралами по шарам, периодичность в среднем.

1. Введение. Пусть $B_r(a)$ – открытый шар радиуса r с центром в a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем обозначать $V_r(U)$ множество всех локально интегрируемых функций, определенных на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , лежащим в U . По-другому класс V_r может быть определен как множество решений уравнения свертки:

$$V_r(U) = \{ f \in L_{\text{loc}}(U) : f * \chi_{B_r} = 0 \},$$

где χ_{B_r} – индикатор шара $B_r = B_r(0)$. Класс V_r изучался многими авторами, см., например, [1].

Пусть U – выпуклое открытое множество, не содержащее ни одного замкнутого шара радиуса r . В этом случае, по определению, $V_r(U)$ совпадает с $L_{\text{loc}}(U)$. Тогда, согласно аппроксимационной теореме Хермандера – Мальгранжа, [2, т. 16.4.1], примененной к случаю уравнения $f * \chi_{B_r} = 0$, любая бесконечно дифференцируемая функция из $V_r(U)$ может быть аппроксимирована в $C^\infty(U)$ функциями из $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ (точнее, линейными комбинациями принадлежащих $V_r(\mathbb{R}^n)$ функций вида $e^{i\langle \cdot, y \rangle}$, $y \in \mathbb{R}^n$).

Отсюда с помощью сглаживания нетрудно вывести, что если A – компактное выпуклое множество, не содержащее ни одного шара радиуса r , то множество ограничений на A всех функций из $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^p(A)$, $p \in [1, \infty)$.

В настоящей работе мы уточняем этот результат в следующем смысле: устанавливаем при каких условиях на выпуклое множество A для произвольной функции $f_A \in L^2(A)$ найдется $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r , ограничение которой на множество A совпадает с f_A .

2. Формулировки основных результатов.

Теорема 1. Пусть диаметр измеримого множества A не превосходит $2r$, $r > 0$, и функция f_A принадлежит $L^2(A)$. Если множество A является замкнутым шаром радиуса r , из которого выброшено множество лебеговой меры 0, то

пусть, кроме того,

$$\int_A f_A(x) dx = 0.$$

Тогда f_A продолжается до функции $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r .

Дополнительное требование в условии теоремы в случае, когда A – шар, является, очевидно, необходимым. Для выпуклых множеств A положительной меры (последнее эквивалентно тому, что A не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$) значение $2r$ в теореме 1 является точным, см. следствие 1 ниже.

Теорема 2. Если внутренность измеримого множества содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, и a – середина отрезка, соединяющего эти точки, то существует непрерывная функция на A , не продолжаемая до функции из $V_r(B_{r+\varepsilon}(a))$ ни для какого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что, как следует из теоремы 2, возможна ситуация (например, если A – достаточно вытянутая фигура), когда множество ограничений на A всех функций из $(V_r \cap L^2_{\text{loc}})(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(A)$, но не совпадает с ним.

Следствие 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество всех ограничений $f|_A$, где f пробегает пространство локально интегрируемых в квадрате функций на $\mathbb{R}^n$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r , совпадает с $L^2(A)$ тогда и только тогда, когда диаметр A не превосходит $2r$ и A не содержит ни одного шара $B_r(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Имеет место аналогичный результат для класса локально интегрируемых функций с нулевыми интегралами по почти всем сферам радиуса r , лежащим в области определения функции (впервые такие функции рассматривались Ф. Йоном, [2]). Будем обозначать этот класс U_r . Он также может быть определен как множество решений уравнения свертки:

$$U_r(\mathcal{U}) = \{ f \in L_{\text{loc}}(\mathcal{U}) : f * \mu_{S_r} = 0 \},$$

где μ_{S_r} – поверхностная мера сферы $S_r = \{|x| = r\}$.

Теорема 3. Если диаметр измеримого множества A не превосходит $2r$, $r > 0$, то произвольная $f_A \in L^2(A)$ продолжается до функции из $(U_r \cap L^2_{\text{loc}})(\mathbb{R}^n)$.

Если же внутренность множества A содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, и a – середина отрезка, соединяющего эти точки, то существует непрерывная функция на A , не продолжимая до функции из $U_r(B_{r+\varepsilon}(a))$.

Заметим, что в случае, когда A – замкнутый шар радиуса r , на функцию f_A не налагается никакого условия, аналогичного условию равенства нулю интеграла f_A в теореме 1.

Следствие 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество всех ограничений $f|_A$, где f пробегает пространство $(U_r \cap L^2_{\text{loc}})(\mathbb{R}^n)$, совпадает с $L^2(A)$ тогда и только тогда, когда диаметр A не превосходит $2r$.

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Нам потребуются распределения $\chi_+^s \in D'(\mathbb{R})$, однородные степени $s \in \mathbb{C}$, определяемые формулой $\chi_+^s = x_+^s / \Gamma(s+1)$ ($x_+^s = x^s$ при $x \geq 0$, и $x_+^s = 0$ при $x < 0$, Γ – гамма-функция) при $\operatorname{Re} s > -1$ и аналитическим продолжением по s для остальных значений s . Как известно, $\chi_+^p * \chi_+^q = \chi_+^{p+q+1}$, $\chi_+^{s'} = \chi_+^{s-1}$, $x\chi_+^s(x) = (s+1)\chi_+^{s+1}(x)$, $\chi_+^{(-1-j)} = \delta_0^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, где δ_0 – дельта-функция Дирака [3, § 3.2]. Обозначим также $x_+^s = \Gamma(s+1)\chi_+^s$ при $s \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, $\chi_-^s = \check{\chi}_+^s$, $x_-^s = \check{x}_+^s$, $H = ((x+i0)^{-1} + (x-i0)^{-1})/2$ – распределение Гильберта.

Положим для удобства при $j \in \mathbb{Z}$

$$H_j = H^{(-j-1)} \text{ при } j \leq -1 \text{ и } H_j(x) = \frac{x^j}{j!} \ln |x| \text{ при } j \in \mathbb{Z}_+,$$

тогда $H'_j \equiv H_{j-1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$; $xH_j(x) = (j+1)H_{j+1}(x)$, $j \neq -1$, $xH_{-1} = 1$.

Если $q \notin \mathbb{Z}$, то, как нетрудно видеть,

$$\chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv c_1 \chi_+^{p+q+1} + c_2 \chi_-^{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \text{ при } p+q \notin \mathbb{Z}, \quad (1)$$

$$\chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv c_1 \chi_+^{p+q+1} + c_2 H_{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \text{ при } p+q \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где $c_1 = c_1(p, q)$, $c_2 = c_2(p, q)$, константы c_1, c_2 не зависят от срезающей функции $\psi \in D(\mathbb{R})$, равной 1 в окрестности 0, и $c_2 \neq 0$, т.к. $(\psi \chi_+^{-2-p}) * \chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv \chi_-^q \not\equiv c_1 \chi_+^q \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$ при $q \notin \mathbb{Z}$.

Заметим, что $\chi_+^s \in C^m \Leftrightarrow \operatorname{Re} s > m$, $H_j \in C^m \Leftrightarrow j > m$. Кроме того, при $s \leq m$, $s \notin \mathbb{Z}$ распределения χ_+^{s-j} , χ_-^{s-j} , $j \in \mathbb{Z}_+$ (а также распределения χ_+^{m-j} , H_{m-j} , $j \in \mathbb{Z}_+$) линейно независимы $\pmod{C^m(\mathbb{R})}$. Поэтому, если $s \notin \mathbb{Z}$, для того, чтобы распределение f на интервале $(\alpha, \beta) \ni 0$ имело вид

$$f \equiv a(\cdot)x_+^s + b(\cdot)x_-^s \pmod{C^\infty(\alpha, \beta)} \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы для сколь угодно больших $N \in \mathbb{N}$ имело место сравнение $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]} (a_j \chi_+^{s+j} + b_j \chi_-^{s+j}) \pmod{C^N(\alpha, \beta)}$; если все $b_j = 0$, то и $b(\cdot)$ в (3) можно выбрать нулевой. Необходимость следует из разложения $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ по формуле Тейлора в нуле, достаточность – из существования для произвольных $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ функций $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которых $a^{(j)}(0) = a_j j! / \Gamma(s+j+1)$, $b^{(j)}(0) = (-1)^j b_j j! / \Gamma(s+j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, [3, т. 1.2.6]. Аналогично, если $s \in \mathbb{Z}$, то

$$f \equiv \left(\sum_{j=0}^{-s-1} a_j \delta_0^{(-s-1-j)} + a(\cdot)x_+^{\max\{s,0\}} + \sum_{j=0}^{-s-1} b_j H^{(-s-1-j)} + b(x)x^{\max\{s,0\}} \ln |x| \right) \pmod{C^\infty(\alpha, \beta)}, \quad (4)$$

тогда и только тогда, когда $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]} (a_j \chi_+^{s+j} + b_j H_{s+j}) \pmod{C^N(\alpha, \beta)}$ для сколь угодно больших $N \in \mathbb{N}$; если $b_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, то в (4) можно взять $b(\cdot) = 0$.

Лемма 1. *Существует и единственно распределение $K \in D'(\mathbb{R}^n)$, равное*

$\delta_0 - \frac{1}{\text{mes } B_r}$ на шаре B_{2r} и удовлетворяющее уравнению свертки $K * \chi_{B_r} = 0$.

Для произвольной функции $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем свертка $f_0 * K$ принадлежит $(L^2_{\text{loc}} \cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Такое распределение K построено в [4, леммы 3, 4] (единственность вытекает из теоремы единственности для уравнения свертки). Для $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем $(f_0 * K) * \chi_{B_r} = f_0 * (K * \chi_{B_r}) = 0$, поэтому достаточно доказать принадлежность $f_0 * K$ пространству $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Вне начала координат $K|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = u(|x|)$ (здесь $u(|x|)$ понимается как обратный образ $\rho^* u$ распределения u при отображении $\rho(x) = |x|$), где $u \in D'((0, \infty))$ принадлежит C^∞ на $(0, \infty) \setminus 2r\mathbb{Z}$ и в окрестности точки $2rl$, $l \in \mathbb{N}$ распределение u имеет следующий вид, [4, лемма 4]:

$$u = \tau_{2lr} \left(\sum_{j=0}^{(n-1)/2} a_{l,j} \delta_0^{((n-1)/2-j)} + a_l(\cdot) \chi_+^0 + c_l(\cdot) \right), a_l, c_l \in C^\infty, \text{ если } n \text{ четно,}$$

$$u = \tau_{2lr} (a_l(\cdot) \chi_+^{-(n+1)/2} + b_l(\cdot) \chi_-^{-(n+1)/2} + c_l(\cdot)), a_l, b_l, c_l \in C^\infty, \text{ если } n \text{ нечетно,}$$

откуда с учетом нижеследующего вытекает, что $f_0 * K \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $s \geq -(n+1)/2$, $a > 0$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset (-a, a)$, тогда преобразование Фурье распределений $\rho^* \tau_a(\psi \chi_\pm^s)$ ограничены: $(\rho^* \tau_a(\psi \chi_\pm^s))^\wedge \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. См., например, [4, лемма 5]. $\square$

Лемма 3. *Существует и единственно распределение $K \in D'(\mathbb{R}^n)$, равное δ_0 на шаре B_{2r} и удовлетворяющее уравнению свертки $K * \mu_{S_r} = 0$. Для произвольной функции $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем свертка $f_0 * K$ принадлежит $(L^2_{\text{loc}} \cap U_r)(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Построение K следует той же схеме, что построение аналогичного распределения для класса V_r в леммах 3 и 4 работы [4].

Пусть T – прямой образ распределения μ_{S_r} при отображении $\text{pr}_1 = \langle \cdot, e_1 \rangle$. При $m \geq 2$, $T(t) = C(1 - |t|^2)^{(n-3)/2}$.

Для распределения $F_0 \in D'(\mathbb{R})$, задаваемого следующим образом

$$F_0 = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1} \pi^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta_0^{(n-1)}, \text{ если } n \text{ нечетно,} \quad (5)$$

$$F_0 = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} H^{(n-1)}, \text{ если } n \text{ четно,} \quad (6)$$

имеет место равенство $(F_0(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\sharp} = \delta_0$, см., например, [6, гл. II, § 11].

Поскольку $\delta_0 * \mu_{S_r} = \mu_{S_r} = 0$ на B_r и F четно, отсюда вытекает, что $F_0 * T = 0$ на $(-r, r)$. Пусть $\psi \in D(\mathbb{R})$ – четная функция, равная 1 в окрестности отрезка $[-r, r]$. Тогда распределение $(\psi F_0) * T$ четно и равно 0 в окрестности 0, поэтому $(\psi F_0) * T = G^{\sharp} = (G + \check{G})/2$, для некоторого $G \in D'(\mathbb{R})$, $\text{supp } G \subset (0, \infty)$.

Согласно [5, Л. 2], распределение T имеет фундаментальное решение E с носителем содержащимся в $[r, \infty)$, гладкое на $\mathbb{R} \setminus (2r\mathbb{Z}_+ + 1)$, такое, что $E(\cdot - (2rk + 1))$ имеет вид (3) с $s = -(n + 1)/2$.

Распределение $F = \psi F_0 - (G * E)^{\sharp}$ удовлетворяет уравнению $F * T = 0$ на всей вещественной оси и совпадает с F_0 в окрестности отрезка $[-r, r]$. Поэтому для распределения $K = (F(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\sharp} \in D'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $K * \mu_{S_r} = 0$ и $K = \delta_0$ в окрестности замкнутого шара $\overline{B_r}$. Поскольку $\delta_0 * \mu_{S_r} = 0$ на B_r , по теореме единственности отсюда следует, что $K = \delta_0$ на B_{2r} . Кроме того, очевидно, F гладко вне $2r\mathbb{Z}$ и в точках $2rk$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет вид (4) с $s = -n$. Поэтому вне начала координат $K = u(|x|)$, где распределение $u \in D'((0, \infty))$ гладко на $(0, \infty) \setminus 2r\mathbb{N}$ и $u(\cdot - 2kr)$, $k \in \mathbb{N}$, имеет вид (3) с $s = -(n + 1)/2$ (см. [5, лемма 1]). Последнее утверждение доказываемой леммы следует теперь из леммы 2. $\square$

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай, когда A – замкнутое выпуклое множество. При этом предположении, за исключением случая, когда A содержится в некоторой гиперплоскости, в котором утверждение теоремы тривиально, A отличается от своей внутренности $\mathring{A}$ на множество меры 0.

Пусть $g \in L^2(A)$, продолжим g до функции $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ нулем вне множества A и положим $g_1 = g_0 - \int_A g_0(x) dx / \text{mes } B_r$, и возьмем K из леммы 1. Поскольку K совпадает с $\delta_0 - 1/\text{mes } B_r$ на B_{2r} ,

$$\text{supp}(g_0 * K - g_1) = \text{supp}(g_0 * (K - \delta_0 + 1/\text{mes } B_r)) \subset \text{supp } g_0 + (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}). \quad (7)$$

Но, так как диаметр множества A не превосходит $2r$, правая часть (7) содержится в дополнении к $\mathring{A}$, и потому $g_0 * K$ совпадает с $g - \int_A g(x) dx / \text{mes } B_r$ на $\mathring{A}$. Поэтому, если $\int_A g(x) dx = 0$, g продолжается до функции из $(L^2_{\text{loc}} \cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Беря же в качестве g постоянную функцию, имеем: $\chi_A * K = 1 - \text{mes } A / \text{mes } B_r$ на $\mathring{A}$. Согласно изодиаметрическому неравенству Бибербаха (см., например, [7, Сл. 2.10.33], [8, § 9.13]), лебегова мера измеримого множества A диаметра $\leq 2r$ не превосходит $\text{mes } B_r$. Кроме того, известно, что для замкнутых выпуклых множеств равенство достигается только в случае, когда A – замкнутый шар радиуса r , [9, § 6.1]. Поэтому, если A не является шаром радиуса r , функция $\chi_A * K$ совпадает с ненулевой постоянной на $\mathring{A}$, и, значит, в этом случае любая функция $f_A \in L^2(A)$, являясь суммой функции, имеющей нулевой интеграл, и постоянной, продолжается до функции из $(L^2_{\text{loc}} \cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку замкнутая выпуклая оболочка множества имеет диаметр, равный диаметру исходного множества, случай произвольного измеримого множества A диаметра $\leq 2r$ сводится к уже рассмотренному, необходимо заметить только, что,

если эта оболочка есть $\overline{B}_r(a)$ и $\text{mes}(\overline{B}_r(a) \setminus A) > 0$, произвольную $f_A \in L^2(A)$ можно продолжить до функции $f_{\overline{B}_r(a)} \in L^2(\overline{B}_r(a))$, имеющей нулевой интеграл. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $x = a - y$, $x' = a + y$ – точки из условия теоремы, $|y| = r$. Возьмем в качестве f_A непрерывную функцию с носителем, содержащемся в пересечении внутренности множества A и шара $B_r(x')$, такую, что пара (x', y) принадлежит $WF(f_A)$ – гладкому волновому фронту функции f_A .

Предположим, что $f \in V_r(B_{r+\varepsilon}(a))$ совпадает с f_A на $A \cap B_{r+\varepsilon}(a)$. Тогда, так как x, x' принадлежат внутренности $A \cap B_{r+\varepsilon}(a)$, то $(x, y), (x, -y) \notin WF(f)$ (т.к. f равна 0 в окрестности x). По лемме 3 работы [10] отсюда вытекает, что $(x', y) \notin WF(f)$, что невозможно, поскольку f совпадает с f_A в окрестности точки x' . $\square$

Отметим, что как видно из доказательства, продолжение невозможно даже в смысле теории распределений: не существует распределения $f \in D'(B_{r+\varepsilon}(a))$ удовлетворяющего уравнению свертки $V_r(U) = \{f \in L_{\text{loc}}(U) : f * \chi_{B_r} = 0\}$ и совпадающего с построенной f_A в окрестностях точек x и x' .

Доказательство следствия 1. Если теперь диаметр A не превосходит $2r$, то применима теорема 1. Пусть теперь диаметр множества A больше $2r$. Тогда в нем найдутся точки x' и x'' , удаленные больше чем на $2r$. Будем считать, что множество A не содержится ни в какой гиперплоскости (в противном же случае наше утверждение тривиально). Тогда A содержит некоторый открытый шар $B_\varepsilon(y)$, и в силу выпуклости A , оно содержит также шары $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(\lambda x' + (1-\lambda)y)$ и $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(\lambda x'' + (1-\lambda)y)$, где $\lambda = 2r/|x'' - x'|$, центры которых находятся на расстоянии $2r$, и потому удовлетворяет условиям теоремы 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Первое утверждение теоремы, так же как и в теореме 1, достаточно доказать в предположении, что A – выпуклое замкнутое множество. Произвольную $g \in L^2(A)$ можно продолжить g до функции $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ нулем вне множества A .

Тогда для K из леммы 3, т.к. $K = \delta_0$ на B_{2r} ,

$$\text{supp}(g_0 * K - g_0) = \text{supp}(g_0 * (K - \delta_0)) \subset \text{supp } g_0 + (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}).$$

Поэтому, если диаметр A не превосходит $2r$, $g_0 * K \in (L^2_{\text{loc}} \cap U_r)(\mathbb{R}^n)$ совпадает с g на $\overset{\circ}{A}$.

Второе утверждение теоремы доказывается так же как и теорема 2, только вместо леммы 3 работы [10] нужно воспользоваться аналогично доказываемым утверждением для классов U_r , либо же применить результат [11] для аналитических (а не гладких, как в указанной лемме) волновых фронтов и интегралов по геодезическим сферам. $\square$

Следствие 2 доказывается совершенно аналогично следствию 1.

1. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. – 454 p.
2. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 159с.

3. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
4. Зарайский Д.А. О продолжении функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – 14. – С. 83–88.
5. Зарайский Д.А. Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свертки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – 12. – С. 69–75.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
8. Берже М. Геометрия. – 1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.
9. Eggleston H.G. Convexity. – London: CUP, 1958. – viii+136 p.
10. Зарайский Д.А. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 25. – С. 77–83.
11. Quinto E.T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Isr. J. Math. – 1993. – 84. – P. 353–363.

D. A. Zaraisky

On sets on which function with zero integrals over balls allow an arbitrary behaviour.

It is proved that an arbitrary square-integrable function defined on an closed set of diameter $\leq 2r$, which is distinct from ball of radius r , continues to locally square-integrable function with zero integrals over balls of radius r defined on the whole $\mathbb{R}^n$. If internal of the set contains two point at the distance $2r$ such continuation may not occur. An analogous result for functions with zero integrals over spheres of radius r is obtained.

Keywords: *functions with zero integrals over balls, mean periodicity.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 12.06.16

УДК 531.36, 531.31

©2016. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

В основу исследования положена двухтоковая модель синхронного электромотора. Предполагается, что момент нагрузки является линейным диссипативным. Получено эффективное достаточное условие, при котором любое движение синхронного электромотора с течением времени стремится к стационарному вращению.

Ключевые слова: синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

Введение. В зависимости от конструкции динамика синхронного электромотора описывается различными системами дифференциальных уравнений высокого порядка, которые определяют изменение электрических токов в обмотках ротора и изменение переменной γ – угла рассогласования между вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора. Такие системы уравнений периодичны по переменной γ , в связи с чем они имеют счетный набор стационарных решений, соответствующих рабочему режиму равномерного вращения ротора с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре.

Практически важной задачей является установление достаточных условий, при которых любое решение системы дифференциальных уравнений движения синхронного электромотора с течением времени стремится к одному из стационарных решений. Если при этом на периоде изменения угла γ существует только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение, то систему называют глобально устойчивой. В [1, 2] для широкого класса синхронных машин предложен подход, названный методом сведения и позволяющий вывести свойство глобальной устойчивости многомерной системы из свойства глобальной устойчивости для одного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Для этого уравнения условие глобальной устойчивости найдено Ф. Трикоми [3]. Получаемые таким путем критерии глобальной устойчивости электромотора включают неопределенные математические параметры и требуют также проверки свойства дихотомичности и частотных неравенств.

В настоящей работе принята двухтоковая модель синхронного электромотора [4]. Вместо часто используемого предположения о постоянстве момента нагрузки этот момент считается диссипативным, линейным по отношению к угловой скорости вращения ротора. Получено достаточное условие глобальной устойчивости двухтоковой модели, которое не требует проверки свойства дихотомичности и частотных неравенств, а сводится только к условию Трикоми для дифференциального уравнения второго порядка, которое не содержит неопределенных параметров.

1. Двухтоковая модель синхронного электромотора. В данной работе принята упрощенная *двухтоковая модель* синхронного электромотора, когда в роторе имеются две одинаковые перпендикулярные друг другу обмотки, имеющие вид прямоугольных рамок. Эта модель дана в [4] и приведена в [5]. Она описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M, \\ Li_1\dot{} &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma + u, \\ Li_2\dot{} &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, i_1\dot{}, i_2\dot{}$ – производные компонент фазового вектора $(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2)$ по времени t ,

$\gamma = \varphi - \omega t$ – угол рассогласования между векторами магнитных полей статора и ротора,

φ – угол поворота ротора относительно статора,

ω – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре ($\omega > 0$),

i_1, i_2 – токи в обмотке возбуждения и в демпферной обмотке,

$u > 0$ – постоянное напряжение в обмотке возбуждения,

M – момент сил сопротивления относительно оси ротора (момент нагрузки),

C – осевой момент инерции ротора,

L и R – индуктивность и сопротивление обеих рамок,

B – напряженность магнитного поля в статоре,

S – площадь каждой из рамок,

$\beta > 0$ – коэффициент пропорциональности.

В [1, 2] момент нагрузки предполагается отрицательной постоянной величиной, и с учетом этого в (1) вместо M сразу берется $-M$, где $M > 0$ – постоянная. На практике этот момент можно считать постоянным только в отдельных случаях, например, при работе подъемного крана, но чаще он зависит от угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$. В данной работе рассматривается случай линейного диссипативного момента $M = -k\dot{\varphi}$, $k > 0$ – постоянная. Поскольку $\dot{\varphi} = \dot{\gamma} + \omega$, получаем для этого момента выражение

$$M = -k\dot{\gamma} - k\omega, \quad (2)$$

которое содержит постоянный отрицательный член $-k\omega$.

2. Простейшая модель синхронного электромотора. В литературе часто используется *простейшая модель* синхронного электромотора, которая формально получается из уравнений (1) в предположении $L = 0$. С учетом (2) она описывается дифференциальным уравнением

$$C\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (3)$$

где

$$a_0 = k + \frac{\beta S^2 B^2}{R}, \quad b_0 = \beta \frac{SBu}{R}, \quad c_0 = k\omega. \quad (4)$$

Простейшую модель синхронного электромотора, которая получается указанным способом и описывается уравнением (3) с коэффициентами (4), будем называть *собственной* по отношению к исходной модели (1). В литературе используются простейшие модели синхронного электромотора, которые определяются техникой доказательства тех или иных результатов и также описываются уравнением вида (3), но отличаются от собственной модели значениями коэффициента a_0 . Такие несобственные модели используются ниже в п. 5 и далее.

Уравнение вида (3) с положительными коэффициентами a_0, b_0, c_0 детально изучено [1, 3, 6]. Приведем основные результаты исследования такого уравнения.

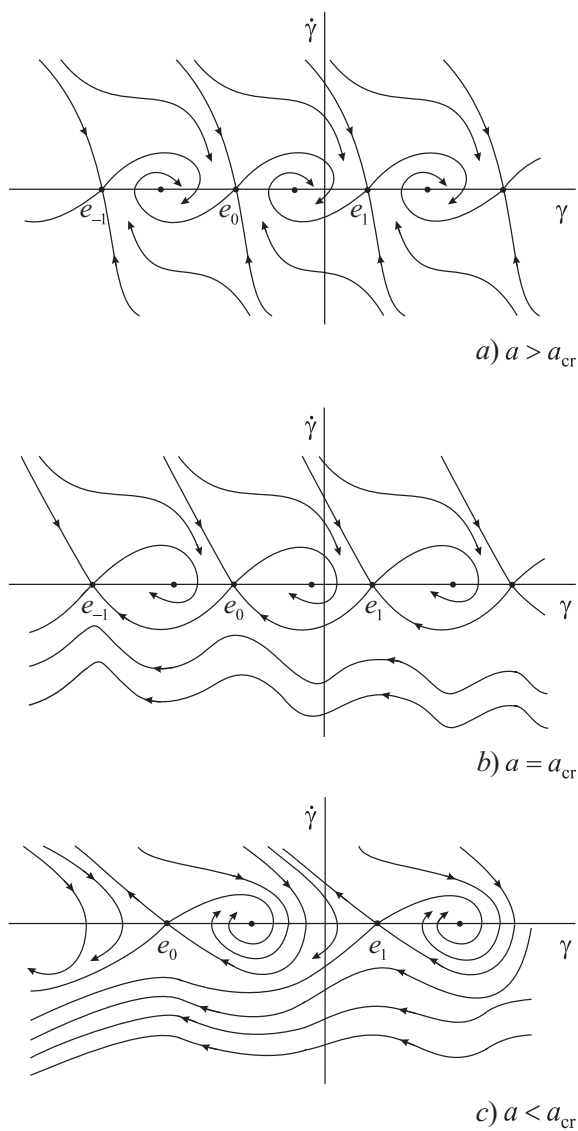


Рис. 1. Фазовые портреты простейшей модели синхронного электромотора

Режимы равномерного вращения ротора с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$ соответствуют стационарным решениям $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$, $\gamma^0 = \text{const}$, уравнения (3). Они определяются тригонометрическим уравнением

$$b_0 \sin \gamma^0 = -c_0 \quad (5)$$

и существуют при $c_0/b_0 \leq 1$. Опуская особый случай, когда $c_0/b_0 = 1$, будем всюду далее предполагать, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) имеет два счетных семейства стационарных решений при значениях γ^0 , равных

$$d_n = \gamma^{(0)} + 2\pi n, \quad e_n = \gamma^{(1)} + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7)$$

Здесь

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (8)$$

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_n, 0)$ являются для уравнения (3) асимптотически устойчивыми особыми точками типа "фокус" или "узел", а точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_n, 0)$ — это неустойчивые особые точки типа "седло".

Глобальный анализ уравнения (3), проведенный Ф. Трикоми [3], показывает, что оно может иметь три качественно различных типа фазовых портретов, изображенных на рис. 1. Введя безразмерные параметры

$$a = a_0/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0, \quad (9)$$

Ф. Трикоми установил, что существует критическое значение параметра a , которое является непрерывной функцией $a_{\text{cr}}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает следующими свойствами (см. [6]).

- В случае $a > a_{\text{cr}}$ каждое решение уравнения (3) стремится к одной из его стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 1, а).
- При $a \leq a_{\text{cr}}$ кроме решений, стремящихся к стационарным точкам, существуют решения, вдоль которых угол γ неограниченно убывает с течением времени. Поэтому при $a \leq a_{\text{cr}}$ множество стационарных точек уравнения электромотора уже не является глобально притягивающим (рис. 1, б, в). При $a = a_{\text{cr}}$ существуют сепаратрисы, соединяющие соседние седловые точки.

Для функции $a_{\text{cr}}(c)$ не существует явного выражения, но разными авторами получены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [6, с. 122-123]). При выводе этих оценок вместо угла γ используют угол $\theta = -\gamma$ и, вводя независимую переменную $\tau = t\sqrt{b_0/C}$, приводят уравнение (3) к виду $d^2\theta/d\tau^2 = -a d\theta/d\tau - \sin \theta + c$ с двумя параметрами (9). Тогда указанному в (8) главному стационарному значению $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ угла γ соответствует значение $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ угла θ . Так как

$\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin \theta_0$, и величину $a_{cr}(c)$ можно рассматривать как функцию $a_{cr}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. В [7] путем вычислений на компьютере построен график функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ и показано, что линейная и синусоидальная аппроксимации $a_{crL} = 0.76 \cdot \theta_0$ и $a_{crS} = 2.766222 \cdot \sin(0.2838860 \cdot \theta_0)$ обеспечивают вычисление $a_{cr}(\theta_0)$ с абсолютной погрешностью не больше, чем $1.5 \cdot 10^{-2}$ и $3.4 \cdot 10^{-5}$ соответственно.

3. Энергетические соотношения и устойчивость стационарных режимов. Нормальным режимом работы синхронного электромотора является равномерное вращение его ротора относительно статора с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Этот режим соответствует стационарному решению системы (1), то есть решению вида

$$\gamma = \gamma^0, \quad \dot{\gamma} = 0 \quad i_1 = i_1^0, \quad i_2 = i_2^0 \quad (\gamma^0, i_1^0, i_2^0 = \text{const}). \quad (10)$$

Чтобы найти условия существования такого решения и определить постоянные γ^0, i_1^0, i_2^0 , подставим выражения (10) в систему уравнений (1), где момент M выражается по формуле (2). Тогда последние два уравнения этой системы дадут стационарные значения токов

$$i_1^0 = u/R, \quad i_2^0 = 0, \quad (11)$$

а первое сведется к уравнению (5) для γ^0 . В предположении (6) оно имеет два счетных набора решений, которые соответствуют указанным в (7), (8) значениям γ^0 . Таким образом, система (1) имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2) = (d_n, 0, u/R, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2) = (e_n, 0, u/R, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (13)$$

где d_n, e_n определены формулами (7), (8).

Во всех стационарных режимах (12), (13), равномерного вращения ротора синхронного электромотора токи i_1, i_2 принимают одни и те же значения (11). Введем возмущения j_1, j_2 токов i_1, i_2 по формулам

$$i_1 = j_1 + u/R, \quad i_2 = j_2.$$

Подставим эти выражения в систему уравнений (1), в которой момент M определен формулой (2). В результате уравнения двухтоковой модели записываются в виде преобразованной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(j_1 \sin \gamma + j_2 \cos \gamma) - k\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ Lj_1' &= -Rj_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Lj_2' &= -Rj_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma \end{aligned} \quad (14)$$

с фазовым вектором $(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2)$. Она имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = (d_n, 0, 0, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = (e_n, 0, 0, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

где d_n, e_n определены формулами (7), (8).

Рассмотрим следующие три функции фазовых переменных системы (14)

$$\begin{aligned} W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) &= \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\beta L(j_1^2 + j_2^2), \\ U(\gamma) &= \int_0^\gamma (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma, \\ V(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) &= W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + U(\gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

Производная функции W по времени в силу системы уравнений (14) равна

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2) - \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0). \quad (18)$$

С учетом этого имеем

$$\dot{V}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2). \quad (19)$$

Функция W определенно положительна по отношению к переменным $\dot{\gamma}, j_1, j_2$. Ее можно интерпретировать как кинетическую энергию изучаемой системы, а функцию U – как ее потенциальную энергию. Тогда функция V является полной энергией системы, а формула (19) выражает теорему об изменении энергии.

При условии (6) значения d_n, e_n , определенные формулами (7), (8), являются, соответственно, точками локальных минимумов и максимумов функции $U(\gamma)$. Воспользовавшись в теоремах 5.2 и 6.3 из [8] функциями Ляпунова $V_{1n} = V - U(d_n)$ и $V_{2n} = V - U(e_n)$, приходим, с учетом (19), к следующему выводу.

Теорема 1. *Стационарные решения (15) системы (14) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (16) – неустойчивы.*

4. О принципе инвариантности Ла–Салля. Цель данной работы состоит в том, чтобы вывести достаточное условие, при котором любое решение системы уравнений (14) с течением времени стремится к одному из ее стационарных решений (15), (16). Существование функции V со знакопостоянной отрицательной производной (19) указывает на потенциальную возможность использовать для этой цели принцип инвариантности Ла–Салля. Рассмотрим вопрос о том, какие вспомогательные результаты для этого нужны. Воспользуемся формулировкой принципа Ла–Салля в виде теоремы VIII из книги [9].

Теорема 2 (Ла–Салль). *Пусть задана автономная система*

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0. \quad (20)$$

Пусть $V(x)$ – скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x . Предположим, что выполнены следующие условия:

- а) $V(x) > 0$ при всех $x \neq 0$;
- б) $\dot{V}(x) \leq 0$ во всем пространстве.

Обозначим через M_0 множество всех точек пространства, в которых $\dot{V}(x) = 0$, а через M – максимальное положительно инвариантное множество, содержащееся в M_0 .

Тогда каждое решение системы (20), остающееся ограниченным при $t \geq 0$, неограниченно приближается к M при $t \rightarrow \infty$.

Сделаем два комментария по поводу этой формулировки.

Во-первых, условие $X(0) = 0$ является излишним, так как точка $x = 0$ ничем не выделяется среди других возможных положений равновесия рассматриваемой системы.

Во-вторых, по этой же причине, вместо условия а) $V(x) > 0 (x \neq 0)$ достаточно предположить, что функция $V(x)$ ограничена снизу при всех x . Тогда, вычитая из этой функции нижнюю грань ее значений, получим функцию, удовлетворяющую неравенству $V(x) \geq 0$ при всех x .

Для рассматриваемой в данной работе задачи "кандидатом" на роль функции Ляпунова в теореме Ла–Салля выступает функция V , указанная в (17). Однако она не является ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция U , которая, согласно (17), содержит линейный по γ член $c_0\gamma$. Поэтому для исследования нелокальной динамики синхронного электромотора нельзя непосредственно применить принцип Ла–Салля с функцией Ляпунова V вида (17). Такая трудность, связанная с неограниченностью функции Ляпунова по угловой переменной, является характерной в теории фазовых систем [2, 4].

Чтобы преодолеть ее, заметим, что в доказательстве принципа Ла–Салля используется ограниченность функции V не во всем фазовом пространстве, а только на решениях изучаемой системы. Поэтому для применимости в рассматриваемом случае функции V вида (17) достаточно, чтобы угол γ был ограничен снизу на всех решениях системы (14).

Таким образом, для того, чтобы найти условия глобального притяжения стационарных решений системы (14) при помощи принципа Ла–Салля, достаточно получить следующие результаты:

- 1) вывести условия ограниченности угла γ снизу на решениях системы (14);
- 2) установить ограниченность всех фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2$ на решениях этой системы;
- 3) доказать, что притягивающее множество M точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий решений, определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$, совпадает с множеством стационарных точек системы (14), причем расстояния между любыми двумя стационарными точками ограничены снизу положительной постоянной.

5. Условия ограниченности угла γ . Для получения условий ограниченности угла γ воспользуемся подходом, изложенным в п. 4.4.2 [2].

Теорема 3. Если существуют значения постоянных параметров $\lambda, \varepsilon \geq 0$ такие, что

1) любое решение дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (21)$$

где b_0, c_0 определены в (4), ограничено при $t \geq 0$,

2) при всех значениях фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2$ выполнено неравенство

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) + 2\lambda W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) \leq 0, \quad (22)$$

то в любом решении

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), j_1(t), j_2(t) \quad (23)$$

системы (14) функция $\gamma(t)$ ограничена на полуоси $t \geq 0$.

Доказательство.

1. *Определение и свойства функций $F_n(\gamma)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).* Согласно изложенным в п. 2 результатам Ф. Трикоми, предположение 1) теоремы 2 означает, что для уравнения (21) имеет место случай $a > a_{\text{cr}}$ (рис. 1, a). Он характерен тем, что через каждую седловую точку $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_n, 0)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) этого уравнения проходит интегральная кривая $\dot{\gamma} = F_n(\gamma)$, которая не имеет других точек пересечения с осью абсцисс, кроме данной седловой точки, и уходит на плюс или минус бесконечность при стремлении γ к минус или плюс бесконечности:

$$F_n(\gamma) \rightarrow \pm\infty \quad (\gamma \rightarrow \mp\infty). \quad (24)$$

Вследствие 2π -периодичности уравнения (21) по γ график функции $F_n(\gamma)$ получается из графика функции $F_0(\gamma)$ параллельным сдвигом на $2\pi n$ вдоль оси абсцисс. Поэтому при любом γ выполняются соотношения

$$F_n(\gamma + 2\pi n) = F_0(\gamma) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Полагая здесь $\sigma = \gamma + 2\pi n$, приходим к равенству $F_n(\sigma) = F_0(\sigma - 2\pi n)$. Заменив в нем букву σ буквой γ , получаем

$$F_n(\gamma) = F_0(\gamma - 2\pi n) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (25)$$

Согласно определению функций $F_n(\gamma)$, они являются решениями уравнения

$$C\dot{\gamma} \frac{d\dot{\gamma}}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0$$

интегральных кривых $\dot{\gamma}(\gamma)$ уравнения (21), то есть они обращают уравнение интегральных кривых в тождество по γ :

$$CF_n(\gamma) \frac{dF_n(\gamma)}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n(\gamma) - b_0 \sin \gamma - c_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26)$$

Подставив сюда вместо γ функцию $\gamma(t)$ из решения (23) системы (14), получим тождество по t .

2. Функции V_n и неравенство $\dot{V}_n + 2\lambda V_n \leq 0$. Рассмотрим набор функций

$$V_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = W(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) - \frac{1}{2}CF_n^2(\gamma) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (27)$$

Покажем, что во всем фазовом пространстве для любого номера n выполняется неравенство

$$\dot{V}_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) + 2\lambda V_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq 0, \quad (28)$$

где $\dot{V}_n$ – производная функции V_n по t в силу системы (14).

Обозначая штрихом дифференцирование по γ и пользуясь формулой (26), получаем из (27) следующее выражение для этой производной

$$\dot{V}_n = \dot{W} - \dot{\gamma}CF_nF'_n = \dot{W} + \dot{\gamma}(2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n + b_0 \sin \gamma + c_0).$$

Поэтому с учетом (27) имеем

$$\dot{V}_n + 2\lambda V_n = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n - \lambda CF_n^2. \quad (29)$$

Так как $\lambda, \varepsilon \geq 0$, то

$$\varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n + \lambda CF_n^2 = C^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\dot{\gamma} - \sqrt{\lambda}CF_n)^2 \geq 0,$$

и поэтому

$$2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n - \lambda CF_n^2 \leq \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) и (22) следует, что

$$\dot{V}_n + 2\lambda V_n = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 \leq 0.$$

Неравенство (28) доказано.

3. *Ограниченность переменной γ снизу.* Докажем, что при условиях теоремы 2 в любом решении системы (14) функция $\gamma(t)$ ограничена снизу при $t \geq 0$. Допустим, что эта система имеет решение (23), в котором функция $\gamma(t)$ неограничена снизу на полуоси $t \geq 0$. Так как γ – угловая переменная, без ограничения общности будем предполагать, что начальное значение $\gamma_0 = \gamma(0)$ принадлежит промежутку $(e_0, e_1]$ длины 2π . Тогда в рассматриваемом решении непрерывная функция $\gamma(t)$ при $t \geq 0$ принимает все значения e_n с номерами $n \leq 0$. Для каждого номера $n \leq 0$ обозначим через t_n момент времени, когда функция $\gamma(t)$ в первый раз принимает значение e_n . Функция $F_n(\gamma(t))$ в этот момент времени обращается в ноль:

$$F_n(\gamma(t_n)) = F_n(e_n) = 0 \quad (n = 0, -1, -2, \dots). \quad (31)$$

В начальный момент $t = 0$ функция $F_n(\gamma(t))$ принимает значение $F_n(\gamma_0)$. Из формулы (25), получаем равенство $F_n(\gamma_0) = F_0(\gamma_0 - 2\pi n)$. Его правая часть, согласно (24), стремится к $-\infty$ при $\gamma_0 - 2\pi n \rightarrow +\infty$, то есть при $n \rightarrow -\infty$. Таким образом,

$$F_n(\gamma_0) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow -\infty). \quad (32)$$

Рассмотрим формулы (27), (28) на выбранном решении с неограниченной снизу функцией $\gamma(t)$. Воспользовавшись свойством (32), выберем номер $n = n_0 \leq 0$ так, чтобы правая часть формулы (27) оказалась отрицательной при $t = 0$, то есть чтобы для функции $V_{n_0}(t)$ выполнялось неравенство $V_{n_0}(0) < 0$. Тогда из неравенства (28): $V_{n_0}(t) + 2\lambda V_{n_0}(t) \leq 0$, согласно лемме 4.3.1 из [2] следует, что

$$V_{n_0}(t) < 0, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

С другой стороны, полагая $n = n_0$ в (31), имеем $F_{n_0}(\gamma(t_{n_0})) = F_{n_0}(e_{n_0}) = 0$. Отсюда с учетом определения (27) функций V_n следует, что $V_{n_0}(t_{n_0}) = W_{n_0}(t_{n_0})$. Но функция W неотрицательна согласно ее определению (17). Поэтому справедливо неравенство $V_{n_0}(t_{n_0}) \geq 0$, которое противоречит (33). Полученное противоречие означает, что допущение о неограниченности функции $\gamma(t)$ снизу неверно.

4. *Ограниченность переменной γ сверху.* Чтобы доказать ограниченность функции $\gamma(t)$ сверху в любом решении системы (14), допустим противное, то есть что у этой системы существует решение с функцией $\gamma(t)$, неограниченной сверху при $t \geq 0$. Далее по той же схеме, что и выше, устанавливаем, что при условиях теоремы 2 это допущение приводит к противоречию. $\square$

6. Область изменения математических параметров в теореме об ограниченности угла γ . В этом и следующем пункте рассмотрен вопрос о существовании значений параметров λ, ε , при которых выполняются условия 1, 2 теоремы 3. В п. 6 построена область изменения параметров λ, ε , в которой гарантируется выполнение условия 2. В п. 7 в указанной области однозначно выбраны значения этих параметров, при которых легче всего удовлетворить условию 1.

Условием 2 теоремы 3 является неравенство (22). После подстановки в него выражений (17), (18) функций $W, \dot{W}$ оно принимает вид

$$(-k + \lambda C + \varepsilon C^{-1})\dot{\gamma}^2 + \beta(-R + \lambda L)(j_1^2 + j_2^2) \leq 0.$$

Для его выполнения при всех $\dot{\gamma}, j_1, j_2$ необходимо и достаточно, чтобы параметры λ, ε удовлетворяли двум неравенствам

$$-k + \lambda C + \varepsilon C^{-1} \leq 0, \quad -R + \lambda L \leq 0. \quad (34)$$

Второе из них дает для λ ограничение $\lambda \leq R/L$. При каждом значении λ , удовлетворяющем этому ограничению, первое неравенство (34) определяет верхнюю границу $\varepsilon \leq kC - \lambda C^2$ для ε . Так как допустимы только неотрицательные значения $\varepsilon \geq 0$, эта граница должна быть неотрицательной, то есть $k - \lambda C \geq 0$. Отсюда следует второе ограничение на λ : $\lambda \leq k/C$. Итак, множество D значений $\lambda, \varepsilon \geq 0$, удовлетворяющих второму условию теоремы 3, определено неравенствами

$$0 \leq \lambda \leq \min(R/L, k/C), \quad 0 \leq \varepsilon \leq kC - \lambda C^2. \quad (35)$$

Изобразим множество D на плоскости (λ, ε) . С учетом правого неравенства во втором условии (35) ему принадлежат точки первого квадранта этой плоскости,

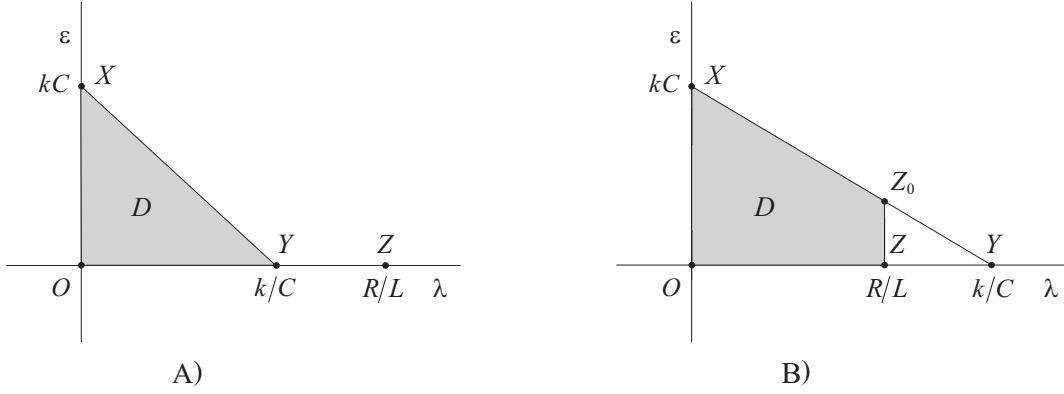


Рис. 2. Область D допустимых значений параметров λ, ε в случаях А) $R/L \geq k/C$, В) $R/L < k/C$

лежащие на прямой $\varepsilon = kC - \lambda C^2$ и ниже ее. Данная прямая пересекает координатные оси $O\varepsilon$ и $O\lambda$ в точках $X = (0, kC)$ и $Y = (k/C, 0)$. Возможны два случая.

Случай А: $R/L \geq k/C$. В этом случае, согласно первому условию (35), параметр λ изменяется в диапазоне $0 \leq \lambda \leq k/C$. Под соответствующим отрезком XY прямой $\varepsilon = kC - \lambda C^2$ лежат точки первого квадранта, образующие треугольник OXY (рис. 2, А), который и является допустимым множеством D в данном случае.

Случай В: $R/L < k/C$. В этом случае, согласно первому условию (35), параметр λ изменяется в диапазоне $0 \leq \lambda \leq R/L$. Таким образом, данное условие определяет на плоскости (λ, ε) полосу между двумя вертикальными прямыми, проходящими через точки $O = (0, 0)$ и $Z = (R/L, 0)$ на оси абсцисс. Прямая $\varepsilon = kC - \lambda C^2$ пересекает вторую из этих вертикальных прямых в точке $Z_0 = (R/L, kC - RC^2/L)$, расположенной выше оси абсцисс. Под отрезком XZ_0 этой прямой лежат точки первого квадранта, образующие трапецию $OXYZ_0Z$. Следовательно, в случае В множество D представляет собой трапецию OXZ_0Z , включая ее стороны (рис. 2, В).

В результате приходим к такому выводу.

Лемма 1. Множество D значений $\lambda, \varepsilon \geq 0$, удовлетворяющих второму условию теоремы 3, определено неравенствами (35). В случае А, когда $R/L \geq k/C$, множество D изображается на плоскости (λ, ε) треугольником OXY (рис. 2, А), включая его стороны. В случае В, когда $R/L < k/C$, множество D изображается на плоскости (λ, ε) в виде трапеции OXZ_0Z (рис. 2, В), включая ее стороны.

Лемма 1 позволяет упростить формулировку теоремы 3, заменив в ней предположение о существовании значений параметров λ, ε , обеспечивающих выполнение условия 2 этой теоремы, конкретным указанием области изменения этих параметров, в которой гарантировано выполнение данного условия. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть в замкнутой области D изменения параметров λ, ε , определенной неравенствами (34) и неравенствами $\lambda, \varepsilon \geq 0$, выбраны некоторые значения этих параметров, и пусть при этих значениях все решения дифференци-

ального уравнения (21) ограничены на полуоси $t \geq 0$.

Тогда в любом решении (23) системы (14) функция $\gamma(t)$ ограничена при $t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При постоянном моменте нагрузки M , кроме нулевых, не существуют значения $\lambda, \varepsilon \geq 0$, для которых выполняется условие 2 теоремы 3.

Это следует из того, что при постоянном M данное условие эквивалентно двум неравенствам $\lambda C + \varepsilon C^{-1} \leq 0$, $-R + \lambda L \leq 0$, которые получаются из (34) при $k = 0$. Первому из них не удовлетворяют никакие положительные значения λ, ε .

7. Выбор параметров в теореме об ограниченности угла γ . Уравнение сравнения (21) отличается от уравнения (3) тем, что в нем в качестве коэффициента демпфирования вместо a_0 выступает величина

$$d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}. \quad (36)$$

Поэтому определение (9) параметров Трикоми для уравнения (21) принимает вид

$$a = d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0.$$

Согласно изложенным в п. 2 результатам, условие ограниченности решений уравнения (21) в теоремах 3, 4 означает, что для этого уравнения имеет место случай $a > a_{\text{кр}}(c)$ (рис. 1, а), то есть выполнено неравенство

$$d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{кр}}(c).$$

Этому неравенству тем легче удовлетворить, чем больше величина $d(\lambda, \varepsilon)$. Поэтому наилучшим является такой выбор математических параметров λ, ε , при котором величина $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает свое максимальное значение d_{max} в области D изменения этих параметров. Найдем значение d_{max} .

Вдоль любого луча $\varepsilon = K\lambda$ ($\lambda \in [0, +\infty)$, $K = \text{const} > 0$), идущего на плоскости (λ, ε) из начала координат в первый квадрант, функция $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ строго монотонно возрастает. Поэтому свое максимальное значение d_{max} в области D функция (36) принимает на "северо-восточной" границе этой области, то есть на отрезке XU в случае А и на ломаной XZ_0Z в случае В (рис. 2). Но в случае В функция $d(\lambda, \varepsilon)$ на вертикальном отрезке ZZ_0 становится монотонно возрастающей функцией $d(R/L, \varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon R/L}$ одной переменной ε . Поэтому в случае В функция $d(\lambda, \varepsilon)$ не может достигать своего максимума d_{max} внутри отрезка ZZ_0 . Следовательно, в обоих случаях А и В максимум функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в допустимой области D достигается на прямой $\varepsilon = kC - \lambda C^2$, а точнее, на отрезке XU этой прямой в случае А и на отрезке XZ_0 в случае В.

На отрезке XU функция $d(\lambda, \varepsilon)$ становится функцией

$$d_0(\lambda) = 2\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}, \quad \lambda \in [0, k/C], \quad (37)$$

одной переменной λ . Производная функции (37) по λ равна

$$d'_0(\lambda) = C \frac{k - 2\lambda C}{\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}}.$$

Она обращается в ноль при значении

$$\lambda = \lambda_0 = k/2C. \quad (38)$$

При этом слева от точки $\lambda = \lambda_0$ производная $d'_0(\lambda)$ положительна, а справа – отрицательна.

В случае А значение λ_0 принадлежит области определения $[0, k/C]$ параметра λ . Следовательно, это значение соответствует точке максимума функции $d_0(\lambda)$ при $\lambda \in [0, k/C]$, а значит, и точке максимума функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в допустимой области D . Подставив (38) в (37), находим максимум функции $d_0(\lambda)$, равный максимуму $d_{\max}$ функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в случае А: $d_{\max} = k$.

В случае В возможны два подслучая B_1, B_2 в зависимости от того, принадлежит ли значение (38) области определения $[0, R/L]$ параметра λ или не принадлежит. В подслучае B_1 , когда $\lambda_0 \in [0, R/L]$, максимум $d_{\max}$ функции $d(\lambda, \varepsilon)$ остается равным k , как и в случае А. В подслучае B_2 значение $\lambda_0 = k/2C$ аргумента функции $d_0(\lambda)$, соответствующее точке ее абсолютного максимума, строго больше правой границы допустимого промежутка $[0, R/L]$. Поэтому максимум функции $d_0(\lambda)$ по допустимому промежутку достигается в его правой граничной точке $\lambda = R/L$, и этот максимум $d_{\max} = 2\sqrt{\frac{R}{L} \left(\frac{k}{C} - \frac{R}{L} \right)}$ меньше абсолютного максимума этой функции, равного k .

Резюмируя, приходим к такому выводу.

Лемма 2. Для функции $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, являющейся коэффициентом демпфирования в уравнении (21), ее максимум в допустимой области D равен

$$d_{\max} = \begin{cases} k, & R/L \geq k/C; \\ k, & R/L < k/C, \quad k/(2C) \leq R/L; \\ 2\sqrt{\frac{R}{L} \left(\frac{k}{C} - \frac{R}{L} \right)} < k, & R/L < k/C, \quad k/(2C) > R/L. \end{cases} \quad (39)$$

Замечание 2. Согласно лемме 2, максимальное значение $d_{\max}$ коэффициента демпфирования $d(\lambda, \varepsilon)$ в уравнении сравнения (21) не превосходит k . Поэтому оно всегда меньше определенного в (4) значения коэффициента демпфирования a_0 для уравнения собственной модели (3), которое всегда больше k .

Пользуясь леммой 2, получаем из теоремы 3 достаточный критерий ограниченности угла γ , в котором вместо коэффициента демпфирования $d(\lambda, \varepsilon)$, зависящего от двух параметров, используется его максимальное возможное значение $d_{\max}$.

Теорема 5. Пусть все решения дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (40)$$

где $b_0, c_0, d_{\max}$ определены по формулам (4), (39), ограничены при $t \geq 0$.

Тогда

- 1) в любом решении (23) уравнений (14) функция $\gamma(t)$ ограничена при $t \geq 0$;

2) величина $d_{\max}$ является максимально возможным коэффициентом демпфирования для уравнения вида (21) с коэффициентом демпфирования $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$.

Используемая в данной работе двухтоковая модель синхронного электромотора описывается системой уравнений (1) или (14). Эта модель содержит механические параметры C, k и электротехнические параметры $\beta, S, L, R, B, \omega, u$. Предполагая параметры C, k, β, S, ω фиксированными, укажем способ выбора параметров L, R, B, u , при котором обеспечивается выполнение условия теоремы 5.

Согласно изложенным в п. 2 результатам, это условие означает, что параметры Трикоми a, c для уравнения (40) удовлетворяют неравенству $a > a_{\text{cr}}$, где $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(c)$ – критическое значение параметра a . В уравнении (3) коэффициент демпфирования обозначен через a_0 , и параметры Трикоми для него определяются по формулам (9). В уравнении (40) коэффициентом демпфирования является величина $d_{\max}$. Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$k/C < R/L,$$

соответствующее практически интересному случаю А (рис. 2, А). Тогда $d_{\max} = k$ согласно (39), и формулы (9) для уравнения (40) принимают вид

$$a = k/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0. \quad (41)$$

Здесь величины b_0, c_0 выражаются через исходные параметры по формулам (4).

Существование стационарных решений систем уравнений (1), (14) и уравнения сравнения (40) обеспечивается неравенством $c < 1$. Так как $c = c_0/b_0$, выполнения этого неравенства можно добиться путем увеличения коэффициента b_0 , например, за счет увеличения B, u . Благодаря увеличению коэффициента b_0 величина c может быть сделана сколь угодно малой. Покажем, что отношение $a(c)/a_{\text{cr}}(c)$ стремится к $+\infty$ при $c \rightarrow +0$. Тогда при c достаточно малом выполняется неравенство $a/a_{\text{cr}} > 1$, эквивалентное условию теоремы 5.

Для критического значения a_{cr} разными авторами найдены аналитические оценки сверху и снизу, приведенные в [6]. Воспользуемся верхней оценкой Бёма:

$$a_{\text{cr}}(\theta_0) < a_B(\theta_0), \quad a_B(\theta_0) = 2 \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (42)$$

Здесь

$$\theta_0 = -\gamma^{(0)} = \arcsin c, \quad \theta_0 \in (0, \pi/2),$$

так что стремление величины c к нулю означает, что $\theta_0 \rightarrow +0$. Так как $\sin \theta_0 = c$, из (41) следует, что $b_0 = c_0/c = c_0/\sin \theta_0$, и параметр a выражается через параметр θ_0 по формуле

$$a = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \sqrt{c} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \sqrt{\sin \theta_0}. \quad (43)$$

В соответствии с (42), (43) имеем

$$\frac{a(\theta_0)}{a_B(\theta)} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{2 \sin \frac{\theta_0}{2}} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\theta_0}{2}}}{2 \sqrt{\sin \frac{\theta_0}{2}}}.$$

Отсюда следует, что отношение $a(\theta_0)/a_B(\theta_0)$ стремится к $+\infty$ при $\theta_0 \rightarrow +0$. Следовательно, при достаточно малых $\theta_0 > 0$ будет

$$\frac{a(\theta_0)}{a_B(\theta_0)} > 1. \quad (44)$$

Но $a_{cr}(\theta_0) < a_B(\theta_0)$ согласно (42). Поэтому из (44) следует, что при малых $\theta_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{a(\theta_0)}{a_{cr}(\theta_0)} > \frac{a(\theta_0)}{a_B(\theta_0)} > 1.$$

Это означает, что при малых значениях $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ выполняется неравенство $a > a_{cr}$, эквивалентное условию теоремы 5.

8. Ограниченность всех фазовых переменных. Докажем теперь, что для любого решения системы (14) в случае ограниченности угла γ имеет место ограниченность и остальных фазовых переменных $\dot{\gamma}, j_1, j_2$. Для обеспечения ограниченности угла γ достаточно принять условия одной из теорем 3–5. Таким образом, надо доказать следующую лемму.

Лемма 3. Пусть выполнены условия одной из теорем 3–5. Тогда любое решение (23) системы (14) ограничено по всем переменным при $t \geq 0$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 2 для функции $\gamma(t)$ получена оценка снизу: $\gamma(t) \geq e_{n_0}$ ($t \geq 0$), где e_{n_0} – значение угла γ для седловой точки уравнения сравнения (21) в теореме 2 и уравнения сравнения в одной из теорем 3, 4. Номер $n_0 \leq 0$ этой седловой точки определен в ходе доказательства теоремы 3. На фазовой плоскости уравнения (21) слева и справа от седловой точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_{n_0}, 0)$ расположены устойчивые стационарные точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_{n_0+1}, 0)$ и $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_{n_0}, 0)$. Из определения (17) функции $U(\gamma)$ следует, что значения $\gamma = e_n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют ее точкам локальных максимумов, а значения $\gamma = d_n$ – точкам локальных минимумов. При этом значение $\gamma = d_{n_0}$ является точкой минимума функции $U(\gamma)$ на всей полуоси $\gamma \geq e_{n_0}$. Поэтому функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{n_0}) = \int_{d_{n_0}}^{\gamma} (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(\cos d_{n_0} - \cos \gamma) + c_0(\gamma - d_{n_0}) \quad (45)$$

неотрицательна на этой полуоси: $\Delta U(\gamma) \geq 0$, $\gamma \geq e_{n_0}$.

Рассмотрим функцию

$$v(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \Delta U(\gamma).$$

Она лишь на константу отличается от функции $V(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2)$, определенной в (17), и поэтому имеет такую же производную (19) по t в силу системы (14):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2).$$

Поскольку $\dot{v}(\dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq 0$, на решении системы (14) функция v не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\Omega = \{(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) : W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\}, \quad (46)$$

$$v_0 = W(\dot{\gamma}(0), j_1(0), j_2(0)) + \Delta U(\gamma(0)).$$

Из неотрицательности функций $W, \Delta U$ следует, что $v_0 \geq 0$, и тогда из (46) следуют неравенства

$$W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \quad (47)$$

Согласно определению (17), функция W является определенно положительной квадратичной формой переменных $\dot{\gamma}, j_1, j_2$. Поэтому первому из неравенств (47) удовлетворяют только значения этих переменных, лежащие в шаре $\dot{\gamma}^2 + j_1^2 + j_2^2 \leq \rho^2$ конечного радиуса ρ . Второе неравенство (47) с учетом выражения (45) для ΔU приводит к еще одному доказательству ограниченности функции $\gamma(t)$ сверху. $\square$

9. Структура притягивающего множества. Перейдем к третьему пункту намеченного в конце п. 4 плана и докажем следующую лемму.

Лемма 4. Пусть функция V определена по формуле (17), и пусть M – множество точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий всех решений системы (14), определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$.

Множество M состоит только из стационарных точек системы (14), причем расстояния между любыми двумя стационарными точками ограничены снизу положительной постоянной.

Доказательство. Из формулы (19) для $\dot{V}$ следует, что множество M образовано фазовыми траекториями, для которых $\dot{\gamma} = 0$, $j_1 = j_2 = 0$, то есть оно состоит из стационарных точек $\gamma = \gamma^0$, $\dot{\gamma} = 0$, $j_1 = j_2 = 0$ системы (14). В п. 3 установлено, что при сделанном предположении $c = c_0/b_0 < 1$ множество стационарных точек данной системы состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям (7) постоянной γ^0 . Отсюда с учетом (8) следует, что расстояние между любыми двумя стационарными точками ограничено снизу величиной $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$. $\square$

10. Теорема о глобальной устойчивости. В каждой из теорем 3–5 даны условия ограниченности решений системы уравнений (2) по переменной γ . Далее, в лемме 3 установлено, что из ограниченности решений системы (2) по γ следует их ограниченность по всем переменным.

Тогда из принципа Ла-Салля (см. п. 4) с функцией Ляпунова V , определенной в (17), следует, что при выполнении условий одной из теорем 3–5 любое решение системы уравнений (14) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству M . Согласно лемме 4, множество M – это множество стационарных точек системы (14). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества M ограничены снизу положительной постоянной, то стремление решения к M означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При

этом на 2π -периоде изменения угла γ существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарная точка.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполнены условия одной из теорем 3–5. Тогда система уравнений (14), описывающая двухтоковую модель синхронного электромотора, глобально устойчива, то есть каждое ее решение с течением времени стремится к одному из двух стационарных решений, существующих на 2π -периоде изменения угла γ .

1. Леонов Г.А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // ПММ. – 1976. – 40, вып. 2. – С. 238–244.
2. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – 2, no. 2. – P. 1–20.
4. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
5. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б., Мозалевская Г.В. Асимптотическая устойчивость в целом двухтоковой модели асинхронного электромотора // См. наст. сб. – С. 70–79.
6. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
7. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2014. – 29. – С. 121–126.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука. – 1967. – 224 с.
9. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

Global stability of the two-current model of the synchronous electric motor.

This investigation is based on the two-current model of the synchronous electric motor. The load moment is assumed to be linear dissipative. Effective sufficient condition is obtained guaranteeing that any motion of the synchronous electric motor tends with time to its steady rotation.

Keywords: *synchronous electric motor, global stability, nonlocal reduction method, LaSalle invariance principle.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 15.04.16

УДК 531.36, 531.31

©2016. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч, Г. В. Мозале́вская

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ ДВУХТОКОВОЙ МОДЕЛИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

В основу исследования положена двухтоковая модель асинхронного электромотора. Предполагается, что момент нагрузки является нелинейным диссипативным. Получены неравенства для параметров системы, при выполнении которых любое движение асинхронного электромотора с течением времени стремится к режиму равномерного вращения.

Ключевые слова: асинхронный электромотор, глобальная асимптотическая устойчивость, принцип инвариантности Ла-Салля.

В статье [1] на основе двухтоковой модели показано, что при отсутствии момента нагрузки имеет место глобальная асимптотическая устойчивость стационарного режима равномерного вращения ротора электромотора. В данной работе для описания динамики асинхронного электромотора используется предложенная в [1] система дифференциальных уравнений, содержащая уравнения для двух токов в обмотках ротора. Предполагается, что момент нагрузки отличен от нуля и имеет диссипативный характер. Глобальная асимптотическая устойчивость режима равномерного вращения ротора асинхронного электромотора установлена и для этого общего случая, а именно, получены неравенства для параметров системы, при выполнении которых любое движение электромотора с течением времени стремится к равномерному вращению.

1. Двухтоковая модель синхронного и асинхронного электромотора.

Электромотор состоит из двух основных частей — статора и ротора. В статоре имеются обмотки, на которые подается переменный электрический ток. Он создает магнитное поле, вектор напряженности которого $\mathbf{B}$ постоянен по модулю и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси ротора.

Для получения магнитного поля в роторе в его пазах также размещаются обмотки, по которым идет ток. На рис. 1 показана упрощенная модель обмоток ротора *синхронного* электрического мотора. В роторе имеются две одинаковые перпендикулярные друг другу обмотки, показанные на рис. 1 в виде прямоугольных рамок. Одна из обмоток, называемая демпферной, замкнута. К другой обмотке, называемой обмоткой возбуждения, через угольные щетки подается постоянное напряжение.

Такая модель синхронного электромотора описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка [1]

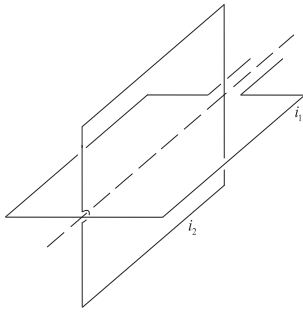


Рис. 1. Схема обмоток ротора

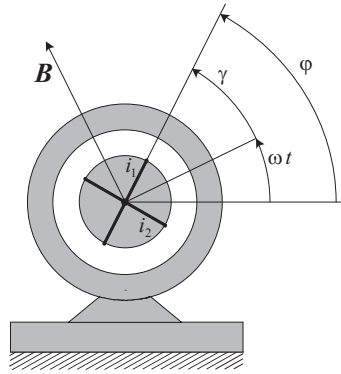


Рис. 2. Определение угла γ

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M, \\ Li_1\dot{} &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma + u, \\ Li_2\dot{} &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, i_1\dot{}, i_2\dot{}$ – производные компонент фазового вектора $(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2)$ по времени t ,
 $\gamma = \varphi - \omega t$ – угол между плоскостью рамки с током i_1 и плоскостью, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}$ напряженности магнитного поля статора (рис. 2),

φ – угол поворота ротора относительно статора,

ω – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре ($\omega > 0$),

i_1, i_2 – токи в обмотке возбуждения и демпферной обмотке,

$u > 0$ – постоянное напряжение в обмотке возбуждения,

M – момент сил сопротивления относительно оси ротора (момент нагрузки),

C – осевой момент инерции ротора,

L и R – индуктивность и сопротивление обеих рамок,

B – напряженность магнитного поля в статоре,

S – площадь каждой из рамок,

$\beta > 0$ – коэффициент пропорциональности.

В [1] момент нагрузки предполагается отрицательной постоянной величиной, и с учетом этого в (1) вместо M сразу взято $-M$, где $M > 0$ – постоянная. На практике этот момент можно считать постоянным только в отдельных случаях, например, при работе подъемного крана. В большинстве случаев момент M имеет диссипативный характер. В соответствии с таким физическим смыслом он является нечетной функцией $M = M(\dot{\varphi})$ угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$, монотонно убывающей вне малой окрестности нуля (рис. 3).

2. Понижение порядка дифференциальных уравнений двухтоковой модели асинхронного электромотора. Двухтоковая модель асинхронного электромотора описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая формально получается из системы (1) при $u = 0$ [1]:

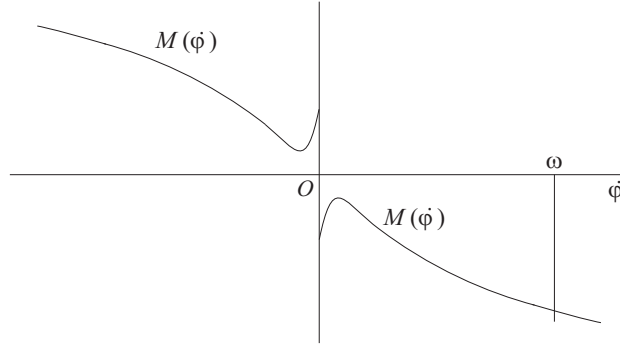


Рис. 3. График момента сил трения $M(\dot{\varphi})$

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M(\dot{\varphi}), \\ Li_1\dot{} &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Li_2\dot{} &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$. Следуя работе [1, с. 50–51], преобразуем ее к системе третьего порядка.

Вместо токов i_1, i_2 введем переменные x, y по формулам

$$x = \frac{L}{SB} (i_1 \cos \gamma - i_2 \sin \gamma), \quad y = \frac{L}{SB} (i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma). \quad (3)$$

Из второй формулы (3) находим $i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma = \frac{SB}{L}y$. Подставив это выражение в первое уравнение (2), приводим его к виду

$$C\ddot{\gamma} = -\beta \frac{(SB)^2}{L} y + M(\dot{\varphi}). \quad (4)$$

Далее из формул (3) получаем выражения токов i_1, i_2 через x, y, γ :

$$i_1 = \frac{SB}{L} (x \cos \gamma + y \sin \gamma), \quad i_2 = \frac{SB}{L} (-x \sin \gamma + y \cos \gamma). \quad (5)$$

Подставив (5) во второе и третье уравнения (2), находим выражения производных $i_1\dot{}, i_2\dot{}$ через $x, y, \gamma, \dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} Li_1\dot{} &= -\frac{RSB}{L} (x \cos \gamma + y \sin \gamma) + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Li_2\dot{} &= \frac{RSB}{L} (x \sin \gamma - y \cos \gamma) + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируя теперь (3) по t и пользуясь (3), (6), в дополнение к (4) получаем выражения для $\dot{x}, \dot{y}$. В результате замены (3) уравнения (2) преобразуются

к следующим

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta \frac{(SB)^2}{L} y + M(\dot{\varphi}), \\ \dot{x} &= -\dot{\gamma} y - \frac{R}{L} x, \\ \dot{y} &= \dot{\gamma} x - \frac{R}{L} y + \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя для краткости обозначения

$$a = \frac{\beta(SB)^2}{L}, \quad b = \frac{R}{L} \quad (a, b > 0), \quad (8)$$

записываем уравнения (7) двухтоковой модели асинхронного электромотора в виде

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -ay + M(\dot{\varphi}), \\ \dot{x} &= -bx - \dot{\gamma} y, \\ \dot{y} &= -by + \dot{\gamma}(x + 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$, их можно рассматривать как нормальную систему третьего порядка с фазовым вектором $(\dot{\gamma}, x, y)$, т.е. в результате замены (3) получена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащая переменной γ .

3. Стационарный режим равномерного вращения асинхронного электромотора. Рабочему режиму равномерного вращения ротора асинхронного электромотора соответствует стационарное решение уравнений (9)

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0, \quad x = x^0, \quad y = y^0. \quad (10)$$

Найдем условия существования такого решения. Для этого подставим (10) в (9) и получим систему трех конечных уравнений относительно неизвестных $\dot{\gamma}^0, x^0, y^0$:

$$-ay^0 + M(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0, \quad bx^0 + \dot{\gamma}^0 y^0 = 0, \quad -by^0 + \dot{\gamma}^0(x^0 + 1) = 0. \quad (11)$$

Чтобы вывести уравнение для $\dot{\gamma}^0$, выразим y^0 через $\dot{\gamma}^0$ из первого уравнения (11):

$$y^0 = \frac{1}{a} M(\omega + \dot{\gamma}^0), \quad (12)$$

и подставим во второе

$$bx^0 + \frac{1}{a} \dot{\gamma}^0 M(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0.$$

Отсюда находим x^0 через $\dot{\gamma}^0$

$$x^0 = -\frac{1}{ab} \dot{\gamma}^0 M(\omega + \dot{\gamma}^0). \quad (13)$$

Выражения (12), (13) подставим в третье уравнение (11). В результате получаем для $\dot{\gamma}^0$ уравнение

$$M(\omega + \dot{\gamma}) = \frac{ab\dot{\gamma}}{b^2 + \dot{\gamma}^2}. \quad (14)$$

Функция

$$M_a(\dot{\gamma}) = \frac{ab\dot{\gamma}}{b^2 + \dot{\gamma}^2} \quad (15)$$

называется статической характеристикой асинхронной машины (см. [1, с. 51], а также [2, с. 271]). График этой функции изображен на рис. 4.

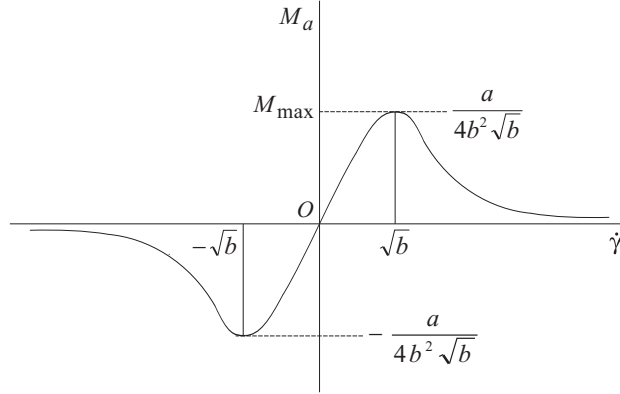


Рис. 4. График статической характеристики $M_a(\dot{\gamma})$ асинхронной машины

С ее помощью уравнение (14) для $\dot{\gamma}$ записывается в виде

$$M_a(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}). \quad (16)$$

Так как $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, то уравнение (16) эквивалентно следующему уравнению для неизвестной $\dot{\varphi}$:

$$-M_a(\dot{\varphi} - \omega) = -M(\dot{\varphi}). \quad (17)$$

Его решение $\dot{\varphi} = \omega^0 = M(\omega + \dot{\gamma})$ соответствует точке пересечения графиков функций $-M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ и $-M(\dot{\varphi})$.

График первой из них получается из изображенного на рис. 4 графика $M_a(\dot{\gamma})$ сдвигом на ω вправо и зеркальным отражением относительно оси абсцисс. График $-M(\dot{\varphi})$ получается из показанного на рис. 3 путем зеркального отражения относительно оси абсцисс (рис. 5).

Анализируя рис. 5, приходим к выводу: если в момент запуска асинхронного электромотора (т.е. при $\dot{\varphi}|_{t=0} = 0$) выполняется неравенство $-M_a(-\omega) > -M(0)$, т.е. модуль статического момента больше момента сил сопротивления, то двигатель приходит во вращение. В этом случае уравнение (17) имеет единственное решение, т.е. существует единственное значение $\dot{\varphi} = \omega^0$ ($\omega^0 < \omega$), при котором моменты $-M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ и $-M(\dot{\varphi})$ равны, и этому значению $\dot{\varphi}$ соответствует режим

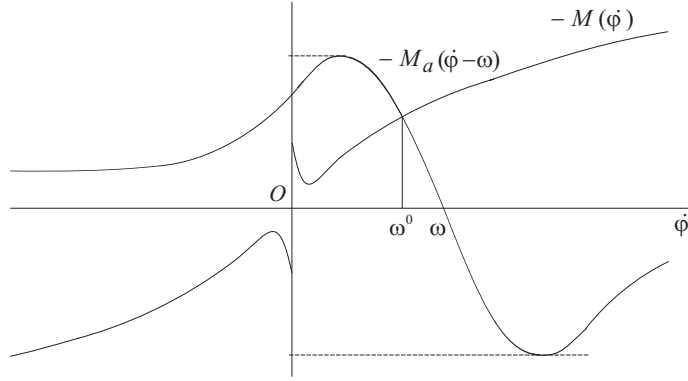


Рис. 5. Графики зависимостей $-M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ и $-M(\dot{\varphi})$ от $\dot{\varphi}$

равномерного вращения. Соответствующее значение $\dot{\gamma}$ равно $\dot{\gamma}^0 = \omega^0 - \omega < 0$. Оно является решением уравнения (14). Других решений это уравнение не имеет.

После того, как решение $\dot{\gamma}^0$ уравнения (14) найдено, стационарные значения x_0, y_0 переменных x, y определяются по формулам (12), (13).

4. Уравнения возмущенного движения асинхронного электромотора в окрестности стационарного режима. Принимая стационарное решение (10) уравнений (9) за невозмущенное, введем возмущения $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$, полагая

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0 + \dot{\gamma}_1, \quad x = x^0 + x_1, \quad y = y^0 + y_1. \quad (18)$$

Чтобы вывести дифференциальные уравнения для возмущений, подставим выражения (18) в уравнения (9), учитывая при этом соотношения (11). Получаем систему уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma}_1 &= -ay_1 + M(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M(\omega^0), \\ \dot{x}_1 &= -bx_1 - \dot{\gamma}^0 y_1 - y^0 \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1 y_1, \\ \dot{y}_1 &= -by_1 + \dot{\gamma}^0 x_1 + (x^0 + 1)\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1 x_1. \end{aligned} \quad (19)$$

5. Энергетическое соотношение. Рассмотрим следующую определенно положительную функцию возмущений

$$V(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) = C\dot{\gamma}_1^2 + ax_1^2 + ay_1^2. \quad (20)$$

Ее производная по времени, взятая в силу системы (19), равна

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) &= 2\dot{\gamma}_1[M(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M(\omega^0)] + \\ &\quad + 2a\dot{\gamma}_1(-y^0 x_1 + x^0 y_1) - 2ab(x_1^2 + y_1^2). \end{aligned} \quad (21)$$

При $\dot{\gamma}_1 = 0, x_1 = 0, y_1 = 0$ имеем $\dot{V}(0, 0, 0) = 0$.

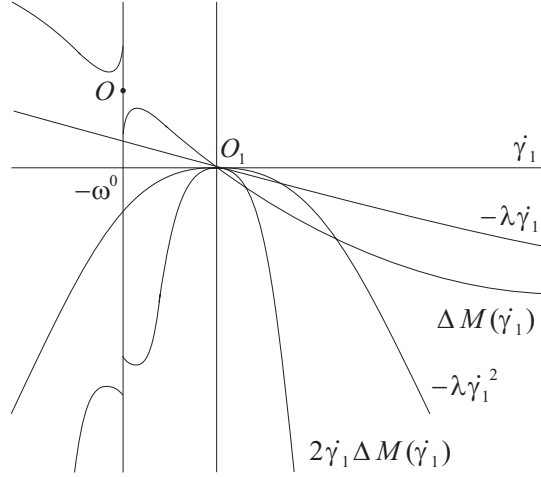


Рис. 6. Взаимное расположение графиков функций $\Delta M(\dot{\gamma}_1)$, $-\lambda \dot{\gamma}_1$ и связанных с ними функций $-\lambda \dot{\gamma}_1^2$, $2\dot{\gamma}_1 \Delta M(\dot{\gamma}_1)$

6. Устойчивость в целом равномерного вращения асинхронного электромотора. В настоящей работе момент сил трения M предполагается нелинейной функцией угловой скорости $\dot{\varphi}$ вращения ротора. Примерный вид графика этой функции показан на рис. 3 (см. также рис. 45 в [2, с. 121]). Отметим, что при значениях $\dot{\varphi}$ вне некоторой окрестности нуля функция $M(\dot{\varphi})$ является монотонно убывающей, и равновесное значение $\omega^0 > 0$ угловой скорости $\dot{\varphi}$ лежит на участке монотонного убывания этой функции.

Соответствующий график разности

$$\Delta M(\dot{\gamma}_1) = M(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M(\omega^0)$$

показан на рис. 6. Так как знак $\Delta M(\dot{\gamma}_1)$ противоположен знаку $\dot{\gamma}_1$, то график первого члена в правой части формулы (21), т.е. график функции $2\dot{\gamma}_1 \Delta M(\dot{\gamma}_1)$, имеет вид кривой типа параболы с одной точкой разрыва.

Предположим, что существует постоянная $k > 0$ такая, что выполняются неравенства

$$\Delta M(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 > 0), \quad \Delta M(\dot{\gamma}_1) > -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 < 0). \quad (22)$$

Геометрически они означают, что прямая $-k\dot{\gamma}_1$ при $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ отделяет график функции $\Delta M(\dot{\gamma}_1)$ от оси абсцисс (рис. 6). Два неравенства (22) эквивалентны одному неравенству

$$\dot{\gamma}_1 [\Delta M(\dot{\gamma}_1) + k\dot{\gamma}_1] < 0 \quad (\dot{\gamma}_1 \neq 0),$$

которое показывает, что при $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ знак функции $\Delta M(\dot{\gamma}_1) + k\dot{\gamma}_1$ противоположен знаку $\dot{\gamma}_1$. Отсюда следует, что

$$2\dot{\gamma}_1 \Delta M(\dot{\gamma}_1) < -2k\dot{\gamma}_1^2, \quad \dot{\gamma}_1 \neq 0, \quad (23)$$

т.е. при $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ график функции $2\dot{\gamma}_1 \Delta M(\dot{\gamma}_1)$ лежит ниже параболы $-2k\dot{\gamma}_1^2$ (рис. 6).

Из (21), (23) получаем для $\dot{V}$ неравенство

$$\dot{V}(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) \leq -2k\dot{\gamma}_1^2 - 2ay^0\dot{\gamma}_1x_1 + 2ax^0\dot{\gamma}_1y_1 - 2ab(x_1^2 + y_1^2).$$

Его правая часть является квадратичной формой $F(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ переменных $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$. Эта квадратичная форма определенно отрицательна, когда определенно положительна квадратичная форма

$$-F(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) = 2k\dot{\gamma}_1^2 + 2ay^0\dot{\gamma}_1x_1 - 2ax^0\dot{\gamma}_1y_1 + 2ab(x_1^2 + y_1^2).$$

Согласно критерию Сильвестра, для определенной положительности квадратичной формы $-F$ необходимо и достаточно, чтобы определитель этой формы и его главные диагональные миноры были положительны. Определитель квадратичной формы $-F$ равен

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2k & ay^0 & -ax^0 \\ ay^0 & 2ab & 0 \\ -ax^0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}, \quad (24)$$

а его главные диагональные миноры первого и второго порядков равны

$$\Delta_1 = 2k, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2k & ay^0 \\ ay^0 & 2ab \end{vmatrix}.$$

Так как $k > 0$, то всегда $\Delta_1 > 0$. Для Δ_2 получаем формулу $\Delta_2 = 4abk - a^2(y^0)^2$. Поскольку y^0 выражается здесь по формуле (12): $y^0 = \frac{1}{a}M(\omega + \dot{\gamma}^0)$, имеем

$$\Delta_2 = 4abk - [M(\omega^0)]^2.$$

Параметры a, b можно выбрать так, чтобы правая часть здесь была положительной. Действительно, величина ω^0 зависит от конкретного вида функции $M(\dot{\varphi})$ и от параметров ω, a, b , определяющих статическую характеристику (15) (см. рис. 5). Но при этом всегда выполняется неравенство $\omega > \omega^0$, а момент сил трения при $\dot{\varphi} > \omega^0$ возрастает по модулю, так что

$$[M(\omega)]^2 > [M(\omega^0)]^2. \quad (25)$$

Выберем параметры a, b так, чтобы выполнялось неравенство

$$4abk - [M(\omega)]^2 > 0. \quad (26)$$

Тогда из (25), (26) следует, что $4abk > [M(\omega)]^2 > [M(\omega^0)]^2$ и, следовательно, выполнено искомое неравенство

$$\Delta_2 = 4abk - [M(\omega^0)]^2 > 0. \quad (27)$$

Итак, для выполнения условия $\Delta_2 > 0$ достаточно выбрать параметры a, b так, чтобы выполнялось неравенство (26).

Вычислив определитель (24), получаем $\Delta_3 = 2ab\Delta_2 + 2ab(ax^0)^2$. Отсюда следует, что при условии $\Delta_2 > 0$ обязательно выполняется и условие $\Delta_3 > 0$.

Тогда определенно положительная функция $V(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$, заданная по формуле (20), имеет производную $\dot{V}(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$, ограниченную сверху определенно отрицательной функцией. Чтобы вывести отсюда заключение об устойчивости нулевого решения уравнений (19), предварительно приведем известные определения и теорему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([4, определение 12.1, с. 45]). Нулевое решение системы

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (28)$$

называется устойчивым в целом (или устойчивым при любых начальных возмущениях) если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если всякое другое решение $x(t)$ этой системы обладает свойством $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([4, с. 45]). Функция Ляпунова v называется бесконечно большой если для любого числа $A > 0$ существует число $R > 0$ такое, что вне сферы $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$ имеет место неравенство $v > A$.

Теорема 1 ([4, теорема 12.1, с. 46]). Если существует определенно положительная бесконечно большая функция v , имеющая определенно отрицательную производную во всем пространстве, то нулевое решение системы (28) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Эта теорема – частный случай более общей теоремы 12.2 из [4], являющейся одним из вариантов теоремы Барбашина–Красовского. Ее легко также получить из принципа Ла–Салля (см. теорему VIII на с. 85 книги [5]).

Функция (20) является бесконечно большой, и это, с учетом полученных выше результатов, приводит к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $\omega > 0$ – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре, ω^0 ($0 < \omega^0 < \omega$) – значение угловой скорости $\dot{\varphi}$ ротора асинхронного электромотора, соответствующее режиму его равномерного вращения. Пусть для двухтоковой модели асинхронного электромотора, описываемой уравнениями (9),

1) существует постоянная $k > 0$ такая, что для функции $\Delta M(\dot{\gamma}_1) = M(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M(\omega^0)$ переменной $\dot{\gamma}_1 = \dot{\varphi} - \omega^0$ выполнены неравенства

$$\Delta M(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 > 0), \quad \Delta M(\dot{\gamma}_1) > -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 < 0);$$

2) выполнено неравенство $4abk - [M(\omega^0)]^2 > 0$.

Тогда режим (10) равномерного вращения асинхронного электрического мотора устойчив в целом.

Неравенство (27) содержит величину ω^0 . Но при фиксированном значении $\omega > 0$ угловой скорости вращения магнитного поля в статоре и заданном моменте трения $M(\dot{\varphi})$ величина ω^0 зависит от электротехнических параметров a, b

и определяется путем решения нелинейного уравнения (17) (или (19)). Поэтому значения a, b , удовлетворяющие неравенству (26), проще подобрать, чем значения a, b , удовлетворяющие неравенству (27). При использовании компьютера нетрудно при заданных a, b вычислить $\omega^0 = \omega^0(a, b)$. Это позволяет путем вычислений подобрать значения a, b , удовлетворяющие (27), а не (26).

С учетом определения (8) параметров a, b , имеем $ab = \frac{\beta R(SB)^2}{L^2}$. Поэтому неравенства (26) и (27) записываются в виде

$$4k \frac{\beta R(SB)^2}{L^2} - [M(\omega)]^2 > 0, \quad 4k \frac{\beta R(SB)^2}{L^2} - [M(\omega^0)]^2 > 0.$$

Такая форма записи позволяет подобрать значения исходных электротехнических параметров R, L, B , обеспечивающие выполнение условий устойчивости в целом.

1. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
3. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука. – 1978. – 208 с.
4. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
5. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich, G. V. Mozalevskaya

Global stability of the two-current model of the asynchronous electric motor.

This investigation is based on the two-current model of the asynchronous electric motor. The load moment is assumed to be nonlinear dissipative. Two inequalities are obtained for system parameters which guarantee that any motion of the asynchronous electric motor tends with time to the steady rotation regime.

Keywords: *asynchronous electric motor, global asymptotic stability, LaSalle invariance principle.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 25.05.16

УДК 531.38

©2016. Ю. В. Кошель

О ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Исследованы условия существования прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата, несущего два ротора. В случае, когда гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения гиростата, получено новое решение уравнений вращения.

Ключевые слова: гиростат, прецессионные и изоконические движения.

1. Введение. В задачах динамики твердого тела и гиростата с неподвижной точкой проведены многочисленные исследования свойств движения, что дало возможность получить классификацию движений [1–4]. При этом были рассмотрены: задача о движении тяжелого твердого тела, задача о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом и задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил для случаев постоянного и переменного гиростатических моментов. В классификации движений гиростата особое место занимают прецессионные и изоконические движения. Прецессионное движение характеризуется постоянством угла между прямой, фиксированной в теле, и прямой, которая является неподвижной в пространстве [2]. Изоконические движения гиростата были выделены в процессе применения теоремы Пуансо и кинематических уравнений Харламова [5]. Они исследованы как в классической задаче [6], так и в обобщенной задаче динамики твердого тела [7, 8]. Эти движения характеризуются свойством симметричности подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Если движение гиростата обладает свойством прецессионности и изоконичности, то оно называется прецессионно-изоконическим [2]. В монографии [2] приведен обзор результатов, полученных в исследовании прецессионно-изоконических движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

В динамике твердого тела на основе уравнений П.В. Харламова [9] изучается и задача об условиях существования прецессионных и изоконических движений гиростата с учетом переменности гиростатического момента (см. например [10–13]). В данной работе исследуются прецессионно-изоконические движения тяжелого гиростата, несущего два ротора. Показано, что в случае, когда гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения гиростата, уравнения движения имеют новое решение в элементарных функциях времени.

2. Постановка задачи. Основные соотношения. Уравнения движения тяжелого гиростата, несущего два ротора, имеют вид [9]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta) \times \omega - (\dot{\lambda}_1\alpha + \dot{\lambda}_2\beta) - \nu \times s, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ – дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t .

Рассмотрим прецессионные движения гиростата относительно вертикали. Пусть третья ось подвижной системы координат направлена по единичному вектору $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, который образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда [2]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos \theta_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\nu}, \quad (3)$$

где θ_0, φ, ψ – углы эйлера.

Исследуем случай, когда кроме свойства прецессионности выполняется свойство изоконичности. В качестве условия изоконичности может быть принято равенство $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$ [2]. Тогда из второго соотношения (3) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}). \quad (4)$$

При выполнении равенств (3) уравнение Пуассона (2) интегрируется

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (5)$$

где $a'_0 = \sin \theta_0$. В скалярном виде из (4) в силу (5) получим

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}(a_0 + 1). \quad (6)$$

В базисе $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ скалярные уравнения, вытекающие из (1), имеют вид

$$\dot{\lambda}_1 - \lambda_2 [a'_0 \gamma_1 \sin \varphi + a'_0 \gamma_2 \cos \varphi + (1 + a_0) \gamma_3] \dot{\varphi} + F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}_2 + \lambda_1 [a'_0 \gamma_1 \sin \varphi + a'_0 \gamma_2 \cos \varphi + (1 + a_0) \gamma_3] \dot{\varphi} + F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (8)$$

$$\left\{ \lambda_2 [a'_0 \lambda_1 \sin \varphi + a'_0 \lambda_2 \cos \varphi + (1 + a_0) \lambda_3] - \right. \\ \left. - \lambda_1 [a'_0 \beta_1 \sin \varphi + a'_0 \beta_2 \cos \varphi + (1 + a_0) \beta_3] \right\} \dot{\varphi} + F_3(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (9)$$

где

$$F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = [d'_{1,1} \sin \varphi + d_{1,1} \cos \varphi + (1 + a_0) d_{0,1}] \ddot{\varphi} - \\ - \left\{ A_{2,1} \cos 2\varphi + A'_{2,1} \sin 2\varphi - [d'_{1,1} - (1 + a_0) A_{1,1}] \cos \varphi + \right. \\ \left. + [d_{1,1} + (1 + a_0) A'_{1,1}] \sin \varphi - \kappa_0 A_{0,1} \right\} \dot{\varphi}^2 + \delta_{1,1} \cos \varphi + \delta'_{1,1} \sin \varphi + \delta_{0,1}, \quad (10)$$

$$F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = [d'_{1,2} \sin \varphi + d_{1,2} \cos \varphi + (1 + a_0) d_{0,2}] \ddot{\varphi} - \\ - \left\{ A_{2,2} \cos 2\varphi + A'_{2,2} \sin 2\varphi - [d'_{1,2} - (1 + a_0) A_{1,2}] \cos \varphi + \right. \\ \left. + [d_{1,2} + (1 + a_0) A'_{1,2}] \sin \varphi - \kappa_0 A_{0,2} \right\} \dot{\varphi}^2 + \delta_{1,2} \cos \varphi + \delta'_{1,2} \sin \varphi + \delta_{0,2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = & [d'_{1,3} \sin \varphi + d_{1,3} \cos \varphi + (1 + a_0)d_{0,3}] \ddot{\varphi} - \\
 & - \left\{ A_{2,3} \cos 2\varphi + A'_{2,3} \sin 2\varphi - [d'_{1,3} - (1 + a_0)A_{1,3}] \cos \varphi + \right. \\
 & \left. + [d_{1,3} + (1 + a_0)A'_{1,3}] \sin \varphi - \kappa_0 A_{0,3} \right\} \dot{\varphi}^2 + \delta_{1,3} \cos \varphi + \delta'_{1,3} \sin \varphi + \delta_{0,3}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В (10)–(12) введены обозначения

$$\begin{aligned}
 d_{0,1} &= \alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}, & d'_{1,1} &= a'_0(\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}), \\
 d_{1,1} &= a'_0(\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{23}), & A_{0,1} &= \alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}, \\
 A_{1,1} &= a'_0[\alpha_1(A_{22} - A_{33}) - \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}], \\
 A'_{1,1} &= a'_0[\alpha_2(A_{33} - A_{11}) + \alpha_1 A_{12} - \alpha_3 A_{23}], \\
 A_{2,1} &= \frac{1}{2}a'^2_0(2\alpha_3 A_{12} - \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}), \\
 A'_{2,1} &= \frac{1}{2}a'^2_0[\alpha_2 A_{23} - \alpha_1 A_{13} + \alpha_3(A_{11} - A_{22})], \\
 \delta_{1,1} &= a'_0(\alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1), & \delta'_{1,1} &= a'_0(\alpha_3 s_2 - \alpha_2 s_3), \\
 \delta_{0,1} &= a_0(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2), & \kappa_0 &= \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 + 1).
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 d_{0,2} &= \beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}, & d'_{1,2} &= a'_0(\beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}), \\
 d_{1,2} &= a'_0(\beta_1 A_{12} + \beta_2 A_{22} + \beta_3 A_{23}), & A_{0,2} &= \beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}, \\
 A_{1,2} &= a'_0[\beta_1(A_{22} - A_{33}) - \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}], \\
 A'_{1,2} &= a'_0[\beta_2(A_{33} - A_{11}) + \beta_1 A_{12} - \beta_3 A_{23}], \\
 A_{2,2} &= \frac{1}{2}a'^2_0(2\beta_3 A_{12} - \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}), \\
 A'_{2,2} &= \frac{1}{2}a'^2_0[\beta_2 A_{23} - \beta_1 A_{13} + \beta_3(A_{11} - A_{22})], \\
 \delta_{1,2} &= a'_0(\beta_1 s_3 - \beta_3 s_1), & \delta'_{1,2} &= a'_0(\beta_3 s_2 - \beta_2 s_3), \\
 \delta_{0,2} &= a_0(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2).
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 d_{0,3} &= \gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}, & d'_{1,3} &= a'_0(\gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}), \\
 d_{1,3} &= a'_0(\gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} + \gamma_3 A_{23}), & A_{0,3} &= \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}, \\
 A_{1,3} &= a'_0[\gamma_1(A_{22} - A_{33}) - \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}], \\
 A'_{1,3} &= a'_0[\gamma_2(A_{33} - A_{11}) + \gamma_1 A_{12} - \gamma_3 A_{23}], \\
 A_{2,3} &= \frac{1}{2}a'^2_0(2\gamma_3 A_{12} - \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}), \\
 A'_{2,3} &= \frac{1}{2}a'^2_0[\gamma_2 A_{23} - \gamma_1 A_{13} + \gamma_3(A_{11} - A_{22})], \\
 \delta_{1,3} &= a'_0(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1), & \delta'_{1,3} &= a'_0(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3), \\
 \delta_{0,3} &= a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, прецессионно-изокопические движения (5), (6) описываются дифференциальными уравнениями (7)–(9), в которых введены обозначения (10)–

(15). Отметим, что уравнения (7), (8) являются линейными дифференциальными уравнениями относительно λ_1, λ_2 , и нелинейными относительно $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$.

3. Редукция уравнений (7)–(9). Рассмотрим уравнения (7)–(9) в предположении, что гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения. Тогда, полагая в (7)–(9)

$$\alpha = (1, 0, 0), \quad \beta = (0, 1, 0), \quad \gamma = (0, 0, 1), \quad (16)$$

получим

$$\dot{\varphi}[\lambda_1' - (1 + a_0)\lambda_2] + F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (17)$$

$$\dot{\varphi}[\lambda_2' + (1 + a_0)\lambda_1] + F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (18)$$

$$a_0'\dot{\varphi}(\lambda_2 \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) + F_3(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \quad (19)$$

где штрихом обозначена производная по переменной φ , а функции $F_i(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ имеют вид (10)–(12), в которых учтены формулы (16).

Введем вместо λ_1, λ_2 новые переменные

$$u = \lambda_2 \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi, \quad v = \lambda_2 \cos \varphi + \lambda_1 \sin \varphi. \quad (20)$$

Найдя производные u', v' из (20) и подставив значения λ_1', λ_2' из (17), (18) соответственно, получим следующие уравнения:

$$u' = -a_0 v + \frac{1}{\dot{\varphi}} [F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \cos(\varphi) - F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \sin \varphi], \quad (21)$$

$$v' = a_0 u - \frac{1}{\dot{\varphi}} [F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \sin(\varphi) + F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \cos \varphi], \quad (22)$$

$$a_0' u \dot{\varphi} + F_3(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0. \quad (23)$$

Пусть в уравнениях (21)–(23) $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \pi/2$). Введя функцию $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, из (21)–(23) имеем

$$u' = \frac{1}{f(\varphi)} [F_1(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi)) \cos \varphi - F_2(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi)) \sin \varphi], \quad (24)$$

$$v' = -\frac{1}{f(\varphi)} [F_1(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi)) \sin \varphi + F_2(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi)) \cos \varphi], \quad (25)$$

$$u f(\varphi) + F_3(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi)) = 0. \quad (26)$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной φ . При $f(\varphi) \neq 0$, из уравнения (26) следует

$$u = -\frac{F_3(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi))}{f(\varphi)}. \quad (27)$$

В силу (27) уравнение (24) принимает вид

$$(F_1 \cos(\varphi) - F_2 \sin(\varphi)) f(\varphi) + F_3' f(\varphi) - F_3 f'(\varphi) = 0. \quad (28)$$

Подставив в (28) значения F_1, F_2, F_3 из (10)–(12), в которых учтена замена $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned} & (A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi + A_{33})f''(\varphi)f^2(\varphi) + [s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi - \\ & - 2f^2(\varphi)(A_{23} \sin \varphi - A_{13} \cos \varphi)]f'(\varphi) + (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi + s_3 + \\ & + A_{33}f^2(\varphi))f(\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29) является неавтономным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $f(\varphi)$. Если зависимость $f(\varphi)$ будет задана, то уравнение (29) должно быть тождеством по переменной φ .

Рассмотрим теперь систему (21)–(23) при $a_0 \neq 0$.

$$u' = -a_0 v + \frac{1}{f(\varphi)}(F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi), \quad (30)$$

$$v' = a_0 u - \frac{1}{f(\varphi)}(F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi), \quad (31)$$

$$u = -\frac{F_3}{a_0' f(\varphi)}. \quad (32)$$

Учитывая в (32) $F_3(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi))$ из (12) найдем

$$\begin{aligned} u = & (B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi + a_0 C_1 \cos \varphi - a_0' C_1' \sin \varphi)f(\varphi) - \\ & - (C_1 \sin \varphi + C_1' \cos \varphi + (1 + a_0)C_0)f'(\varphi) + \frac{1}{f(\varphi)}(E_1 \cos \varphi - E_1' \sin \varphi). \end{aligned} \quad (33)$$

С помощью (33) из (30) определим переменную v

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{a_0}(C_1 \sin \varphi + C_1' \cos \varphi + (1 + a_0)C_0)f''(\varphi) + \\ & + \frac{2}{a_0}(C_1 \cos \varphi - C_1' \sin \varphi)f'(\varphi) + [B_2' \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi - \\ & - (1 + 2a_0)C_1' \cos \varphi - (1 + 2a_0)C_1 \sin \varphi + \frac{1}{a_0}D_0]f(\varphi) + \\ & + \frac{1}{a_0 f^2(\varphi)} \left\{ [E_0 + (1 - a_0)(E_1' \cos \varphi + E_1 \sin \varphi)]f(\varphi) + \right. \\ & \left. + (E_1 \cos \varphi - E_1' \sin \varphi)f'(\varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

В уравнениях (33), (34) введены обозначения

$$\begin{aligned} B_2 = a_0' A_{12}, \quad B_2' = \frac{a_0'}{2}(A_{11} - A_{22}), \quad C_1 = A_{13}, \quad C_1' = A_{23}, \\ C_0 = \frac{1}{a_0'} A_{33}, \quad E_1 = s_1, \quad E_2 = s_2, \quad E_0 = a_0' s_3, \\ D_0 = \frac{a_0'}{2}[(2 + a_0)A_{33} - a_0(A_{11} + A_{22})]. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставив (33), (34) в уравнение (31), получим

$$\begin{aligned} & \left\{ f'''(\varphi) [C_1 \sin \varphi + C'_1 \cos \varphi + (1 + a_0)C_0] + \right. \\ & + 3f''(\varphi)(C_1 \cos \varphi - C'_1 \sin \varphi) - f'(\varphi) [2C'_1 \cos \varphi + 2C_1 \sin \varphi - \\ & \left. - (1 + a_0)C_0] \right\} f^3(\varphi) + (E_1 \cos \varphi - E_2 \sin \varphi) [(1 - a_0)f^2(\varphi) - \\ & - 2f'^2(\varphi) + f(\varphi)f''(\varphi)] - f'(\varphi)f(\varphi)[E_0 + \\ & + (2 - a_0)(E_2 \cos \varphi + E_1 \sin \varphi)] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В отличие от уравнения (29), уравнение (36) имеет третий порядок.

4. О решениях уравнений (29), (36). Рассмотрим условия существования решения уравнения (29) в классе тригонометрических функций вида

$$f(\varphi) = l_0 + l_1 \sin \varphi. \quad (37)$$

Подставим (37) в (29)

$$\begin{aligned} & 3l_1^3 A_{23} \sin 4\varphi - 3l_1^3 A_{13} \cos 4\varphi + 12l_1^2 l_0 A_{13} \sin 3\varphi + 12l_1^2 l_0 A_{23} \cos 3\varphi - \\ & - 6l_1(l_1^2 + 2l_0^2) A_{23} \sin 2\varphi + 4l_1[(l_1^2 + 3l_0^2) A_{13} - l_1 l_0 A_{33}] \cos 2\varphi + \\ & + 4[4l_1 l_0^2 A_{33} - l_1^2 l_0 A_{13} + 2(l_1 s_3 + l_0 s_1)] \sin \varphi + 4l_0^2(2s_2 - 3l_1^2 A_{23}) \cos \varphi + \\ & + l_1(4l_0^2 - l_1^2) A_{13} + 4l_0(l_1^2 + 2l_0^2) A_{33} + 8(l_0 s_3 + l_1 s_1) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (38) должно быть тождеством по φ . Следовательно, в силу $l_1 \neq 0$, $A_{33} \neq 0$ получим равенства

$$A_{13} = A_{23} = 0, \quad l_0 = 0, \quad A_{12} \neq 0, \quad s_2 \neq 0, \quad s_1 = s_3 = 0. \quad (39)$$

Параметр l_1 может принимать произвольные значения.

Таким образом, из уравнения (37) имеем

$$\dot{\varphi} = f(\varphi) = l_1 \sin \varphi. \quad (40)$$

Подставим (40) в (25)

$$v = \frac{l_1}{4} [2A_{12} \cos 3\varphi - (A_{22} - A_{11}) \sin 3\varphi - 2A_{12} \cos \varphi - (3A_{11} + A_{22}) \sin \varphi] + k, \quad (41)$$

где $k = \text{const}$.

Значение u получим из (27) в силу (40)

$$\begin{aligned} u = & \frac{l_1}{4} [(A_{22} - A_{11}) \cos 3\varphi + 2A_{12} \sin 3\varphi + \\ & + (A_{11} - A_{22} - 4A_{33}) \cos \varphi - 2A_{12} \sin \varphi - \frac{4}{l_1^2} s_2]. \end{aligned} \quad (42)$$

После подстановки найденных значений u, v из (41), (42) в (20) найдем

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{l_1}{2} [(A_{11} + A_{33}) \cos 2\varphi - A_{12} \sin 2\varphi + \frac{2}{l_1^2} s_2 \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{2}{l_1} k \sin \varphi + (A_{33} - A_{11})], \\ \lambda_2 &= \frac{l_1}{2} [A_{12} \cos 2\varphi - (A_{22} + A_{33}) \sin 2\varphi + \frac{2}{l_1} k \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{2}{l_1^2} s_2 \sin \varphi - A_{12}].\end{aligned}\tag{43}$$

Основные переменные задачи определим из (5), (6) в силу (40)

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \sin \varphi(t), & \nu_2 &= \cos \varphi(t), & \nu_3 &= 0, \\ \omega_1 &= l_1 \sin^2 \varphi(t), & \omega_2 &= l_1 \sin \varphi(t) \cos \varphi(t), & \omega_3 &= l_1 \sin \varphi(t),\end{aligned}\tag{44}$$

Зависимость $\varphi(t)$ такова

$$\varphi(t) = \arccos \frac{1 - \chi e^{2l_1(t-t_0)}}{1 + \chi e^{2l_1(t-t_0)}}. \quad \left(\chi = \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0} \right).\tag{45}$$

Таким образом, при выполнении условий (39) уравнения (7)–(9) допускают решение (43)–(45), которое выражается через элементарные функции времени.

Перейдем к исследованию уравнения (36). Рассмотрим условия существования решения этого уравнения в классе функций (37). После подстановки (37) в (36) имеем

$$\begin{aligned}3l_1(A_{23} \cos 2\varphi + A_{13} \sin 2\varphi) + \frac{1}{2(l_0 + l_1 \sin \varphi)^3} \Big\{ l_1 l_0 (1 + a_0) s_2 \cos 2\varphi + \\ + l_1 [l_0 (1 + a_0) s_1 + l_1 a'_0 s_3] \sin 2\varphi - 2[l_0^2 (1 - a_0) s_1 - l_0 l_1 a'_0 s_3 - \\ - 2l_1^2 s_1] \cos \varphi - 2[l_1^2 a_0 s_2 - l_0^2 (1 - a_0) s_2] \sin \varphi + 3l_1 l_0 (1 - a_0) s_2 \Big\} = 0.\end{aligned}\tag{46}$$

Равенство (46) будет тождеством по φ при выполнении следующих условий:

$$A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{12} \neq 0, \quad l_0 = l_1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -\frac{1}{a'_0} s_1 (1 + a_0).\tag{47}$$

В силу (47) зависимость $\dot{\varphi}$ из (37) от φ такова

$$\dot{\varphi} = l_1 (\sin \varphi + 1).\tag{48}$$

Из (33), (34) имеем соответственно

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{4}l_1a'_0 \left\{ (A_{22} - A_{11}) \cos 3\varphi + 2A_{12} \sin 3\varphi + 4A_{12} \cos 2\varphi - \right. \\
 &- 2(A_{22} - A_{11}) \sin 2\varphi + \frac{1}{a_0^2}(1 + a_0) [(1 - a_0)(A_{11} - A_{22}) - 4A_{33}] \cos \varphi - \\
 &\quad \left. - 2A_{12} \sin \varphi \right\} + \frac{1}{l_1(\sin \varphi + 1)} s_1 \cos \varphi, \\
 v &= \frac{1}{4}l_1a'_0 \left\{ 2A_{12} \cos 3\varphi - (A_{22} - A_{11}) \sin 3\varphi - \right. \\
 &- 2(A_{22} - A_{11}) \cos 2\varphi - 4A_{12} \sin 2\varphi - 2A_{12} \cos \varphi + \\
 &+ \frac{1}{a_0^2}(1 + a_0) [(1 - a_0)(4A_{33} - 3A_{11} - A_{22}) - 4A_{33}] \sin \varphi + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a_0} 2[2A_{33}(1 + a_0) - a_0(A_{11} + A_{22})] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2l_1(\sin \varphi + 1)^2} (\cos 2\varphi - 4 \sin \varphi - 3) s_1.
 \end{aligned} \tag{49}$$

В силу (20), (49) получим

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{2}l_1a'_0 \left\{ \frac{1}{a_0^2}(1 + a_0) [(1 + a_0)A_{33} + (1 - a_0)A_{11}] \cos 2\varphi - \right. \\
 &- A_{12} \sin 2\varphi - 2A_{12} \cos \varphi + \frac{1}{a_0} 2[A_{33} + a_0(A_{33} - A_{11})] \sin \varphi + \\
 &\quad \left. + A_{33} - A_{11} \right\} + \frac{1}{2l_1(\sin \varphi + 1)^2} s_1 (\cos 2\varphi - 4 \sin \varphi - 3), \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{2}l_1a'_0 \left\{ A_{12} \cos 2\varphi - \frac{1}{a_0^2}(1 + a_0) [(1 + a_0)A_{33} + \right. \\
 &+ (1 - a_0)A_{22}] \sin 2\varphi + \frac{1}{a_0} 2[A_{33} + a_0(A_{33} - A_{22})] \cos \varphi - \\
 &\quad \left. - 2A_{12} \sin \varphi - A_{12} \right\} - \frac{1}{l_1(\sin \varphi + 1)} s_1 \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Следовательно, при выполнении условий (47) уравнения (7)–(9) допускают решение (48), (50). Основные переменные ν_i, ω_i найдем из уравнений (5), (6)

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \\
 \omega_1 &= a'_0 l_1 (\sin \varphi + 1) \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 l_1 (\sin \varphi + 1) \cos \varphi, \\
 \omega_3 &= l_1 (1 + a_0) (\sin \varphi + 1).
 \end{aligned} \tag{51}$$

Сравнивая условия (39) и (47), приходим к выводу, что условия (39) не следуют из (47), если в них полагать $a_0 = 0$. Это связано с тем, что соотношение (34) при $a_0 = 0$ теряет смысл.

5. Один случай обобщения решения (37). Решение (37) может быть обобщено на случай

$$f(\varphi) = l_0 + l_1 \sin \varphi + l'_1 \cos \varphi. \tag{52}$$

Внесем выражение (52) в уравнение (29) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по φ . Тогда получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 l_1(3l_1'^2 - l_1^2)A_{13} + l_1'(3l_1^2 - l_1'^2)A_{23} &= 0, \\
 l_1'(3l_1^2 - l_1'^2)A_{13} + l_1(l_1^2 - 3l_1'^2)A_{23} &= 0, \\
 2l_0l_1l_1'A_{13} + l_0(l_1^2 - l_1'^2)A_{23} &= 0, \quad l_0(l_1^2 - l_1'^2)A_{13} - 2l_0l_1l_1'A_{23} = 0, \\
 l_1(l_1^2 + 2l_1'^2 + 3l_0^2)A_{13} - l_1'(l_1'^2 + 2l_1^2 - 3l_0^2)A_{23} + l_0(l_1'^2 - l_1^2)A_{33} &= 0, \\
 l_1'(l_1^2 + 3l_1'^2 + 6l_0^2)A_{13} + l_1(l_1'^2 + 3l_1^2 + 6l_0^2)A_{23} - 4l_0l_1l_1'A_{33} &= 0, \\
 2l_0l_1l_1'A_{13} + 4l_0^2l_1'A_{33} - l_0(3l_1'^2 + l_1^2)A_{23} + 2(l_1's_3 + l_0s_2) &= 0, \\
 2l_0l_1l_1'A_{23} + 4l_0^2l_1A_{33} - l_0(3l_1'^2 + l_1^2)A_{13} + 2(l_1s_3 + l_0s_1) &= 0, \\
 (4l_0^2 - l_1^2 - l_1'^2)(l_1A_{13} + l_1'A_{23}) + 4l_0(l_1^2 + l_1'^2 + 2l_0)A_{33} + \\
 + 8(l_1s_1 + l_1's_2 + l_0s_3) &= 0.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Из первых двух равенств системы (53) следует, что при $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$ она допускает только тривиальное решение

$$l_1(3l_1'^2 - l_1^2) = 0, \quad l_1'(3l_1^2 - l_1'^2) = 0. \tag{54}$$

При выполнении равенств (54) функция $f(\varphi)$ из (52) принимает постоянное значение, что исключено из рассмотрения. Поэтому из (53) следуют условия на параметры

$$l_0 = 0, \quad A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{12} \neq 0, \quad s_3 = 0, \quad s_1 = -\frac{l_1'}{l_1}s_2. \tag{55}$$

В силу (52), (55) система (7)–(9) имеет решение

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left\{ [l_1(A_{11} + A_{33}) - l_1'A_{12}] \cos 2\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - [l_1'(A_{11} + A_{33}) + l_1A_{12}] \sin 2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{l_1}s_2 \cos \varphi + 2c_0 \sin \varphi + l_1(A_{33} - A_{11}) - l_1'A_{12} \right\}, \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ [l_1A_{12} - l_1'(A_{22} + A_{33})] \cos 2\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - [l_1(A_{22} + A_{33}) + l_1'A_{12}] \sin 2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + 2c_0 \cos \varphi - \frac{2}{l_1}s_2 \sin \varphi + l_1'(A_{33} - A_{22}) - l_1A_{12} \right\},
 \end{aligned} \tag{56}$$

где $c_0 = \text{const}$. Тогда основные переменные задачи выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sin \varphi, & \nu_2 &= \cos \varphi, & \nu_3 &= 0, \\ \omega_1 &= \frac{1}{2}(l_1 - l_1 \cos 2\varphi + l'_1 \sin 2\varphi), & \omega_2 &= \frac{1}{2}(l'_1 + l_1 \cos 2\varphi + l'_1 \sin 2\varphi), \\ \omega_3 &= l_1 \sin \varphi + l'_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (57)$$

Следовательно, решение (56), (57) имеет место при выполнении условий (55), в которых параметры s_1, s_2 связаны между собой линейной зависимостью. Это свойство характеризует отличие условий (39) и (55).

6. Заключение. В статье исследованы условия существования прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Показано, что варианты $a_0 = 0$ и $a_0 \neq 0$ необходимо рассматривать независимо друг от друга. Для них получены разрешающие уравнения соответственно второго и третьего порядка. Решения данных уравнений задаются в виде линейной зависимости от тригонометрических функций. Найдены два класса новых решений уравнений движения тяжелого гиростата, которые описывают прецессионно-изоконические движения.

1. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
2. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Дон-НУ, 2010. – 394 с.
3. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
6. Горр Г.В. Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 451–458.
7. Верховод Е.В., Горр Г.В. Новые случаи изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 5. – С. 25–34.
8. Верховод Е.В., Горр Г.В. Один класс изоконических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 33–38.
9. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
10. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Харьков, 2011. – С. 74–84.
11. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
12. Мазнев А.В., Котов Г.А. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – **1**. – С. 79–83.
13. Котов Г.А. Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59–66.

Yu. V. Koshel

About precessionally-isoconical motions of a heavy gyrostat with a variable gyrostatic moment.

Existence conditions of precessionally-isoconical motions of a heavy gyrostat carrying two rotors are investigated. A new solution of the equations of motion obtained in the case when the gyrostatic moment is orthogonal to the axis of proper rotation.

Keywords: *gyrostat, precessional and isoconical motions.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
yulia.koshel@mail.ru

Получено 11.07.16

УДК 517.5

©2016. О. И. Кузнецова

О НОРМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ СУММ БОХНЕРА–РИССА

В работе рассматриваются суммы Бохнера–Рисса $S_R^\alpha(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} (1 - \|k\|^2/R^2)^\alpha \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$, $\alpha > 0$, периодической функции f от m переменных и сильные интегральные средние этих сумм $\left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f, x)|^p dr \right) / R \right)^{1/p}$ при $p \geq 1$. Установлены верхние оценки роста при $R \rightarrow +\infty$ норм соответствующих операторов, т. е. величин $\sup_{|f| \leq 1} \left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f, 0)|^p dr \right) / R \right)^{1/p}$, для $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, суммы Бохнера–Рисса, сильные средние.

1. Введение. Средние Бохнера–Рисса $S_R^\alpha(f)$ порядка $\alpha > 0$ ряда Фурье функции f , суммируемой на кубе $[-\pi, \pi]^m$, имеют вид (всюду далее $k \in \mathbb{Z}^m$)

$$S_R^\alpha(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} \left(1 - \frac{\|k\|^2}{R^2} \right)^\alpha \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}, \quad \text{где } \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(u) e^{-ik \cdot u} du.$$

При $\alpha = 0$ имеем сферические частичные суммы $S_R(f) = \sum_{\|k\| \leq R} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$. Если $\alpha > \frac{m-1}{2}$, то $S_R^\alpha(f)$ сходятся равномерно к f при $R \rightarrow \infty$ для любой непрерывной периодической функции f [1] (см. также [2, гл. VII.4]). $\alpha = \frac{m-1}{2}$ – критический показатель.

Интегральными средними сумм $S_R^\alpha(f)$ назовем величины (далее $p \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$)

$$\mathcal{H}_{R,p}^\alpha(f, x) = \left(\frac{1}{R} \int_0^R |S_r^\alpha(f, x)|^p dr \right)^{1/p}.$$

Их поведение при $R \rightarrow \infty$ тесно связано с поведением норм

$$\mathcal{H}_{R,p}^\alpha = \sup_{|f| \leq 1} \mathcal{H}_{R,p}^\alpha(f, 0). \quad (1)$$

В работе [3] установлены неулучшаемые по порядку двусторонние оценки норм $\mathcal{H}_{R,p}$ интегральных средних сферических сумм Фурье

$$\mathcal{H}_{R,p}(f, x) = \left(\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x)|^p dr \right)^{1/p}.$$

Точнее, доказано, что¹

$$\mathcal{H}_{R,p} \asymp \begin{cases} R^{\frac{m-1}{2} - \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\}} & \text{при } m \geq 3, p \geq 1; \\ R^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}} \{\ln(R+1), \frac{1}{p-2}\} & \text{при } m = 2, p > 2; \\ \sqrt{\ln(R+1)} & \text{при } m = 2, p \in [1, 2]. \end{cases} \quad (2)$$

Верхние оценки в данных двусторонних неравенствах были получены ранее в [4].

В [5], ([6] при $p = 2$) при любом $p \geq 1$ доказано неравенство

$$\mathcal{H}_{R,p}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}(f) \leq c(m, p) \|f\|_{\infty}. \quad (3)$$

Наша цель – оценить сверху нормы соответствующих операторов, т.е. величины (1), при $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$.

2. Основной результат. Получим следующие верхние оценки норм $\mathcal{H}_{R,p}^{\alpha}$, используя оценки (2), (3) и применяя теорему Стейна [2, гл. V] об интерполяции аналитических семейств операторов.

Теорема. Пусть $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$. Тогда

$$\mathcal{H}_{R,p}^{\alpha} \ll \begin{cases} R^{\frac{m-2}{2} - \alpha(\frac{m-2}{m-1})} \ln R & \text{при } m \geq 3, 1 \leq p \leq 2; \\ (\ln R)^{\frac{1}{2} - \alpha} \ln \ln R & \text{при } m = 2, 1 \leq p \leq 2; \\ R^{\frac{m-1}{2} - \alpha(1 - \frac{2}{p(m-1)}) - \frac{1}{p}} \ln R & \text{при } m \geq 2, p > 2. \end{cases} \quad (4)$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. При любых $\delta > -1/2$, $p \geq 1$ и β таком, что $0 < Re \beta \leq 1$,

$$\left(\int_0^T |S_r^{\delta+\beta}(f)|^p dr \right)^{1/p} \leq \frac{c(\delta) |\beta| e^{\frac{\pi}{2}|Im \beta|}}{Re \beta} \left(\int_0^T |S_r^{\delta}(f)|^p dr \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Доказательство. При $Re \beta > 0$ и $Re(\delta + 1) > 0$ имеет место равенство (см. [2, гл. VII (5.8)])

$$S_R^{\delta+\beta}(f) = c_{\beta\delta} R^{-2\delta-2\beta} \int_0^R (R^2 - r^2)^{\beta-1} r^{2\delta+1} S_r^{\delta}(f) dr,$$

где

$$c_{\beta\delta} = \frac{2\Gamma(\delta + \beta + 1)}{\Gamma(\delta + 1)\Gamma(\beta)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \quad \text{при } Re z > 0.$$

После замены переменной $r \rightarrow r/R$ получаем, что

¹Мы пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$, если одновременно $\alpha_n = O(\beta_n)$ и $\beta_n = O(\alpha_n)$. Константы в соответствующих неравенствах, справедливых при всех n , могут зависеть лишь от размерности m .

$$|S_R^{\delta+\beta}(f)| \leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta+1} |S_{Rr}^\delta(f)| dr.$$

Возведем обе части неравенства в p -тую степень, проинтегрируем по R от нуля до T и применим к правой части обобщенное неравенство Минковского. В итоге при $\delta > -1/2$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T |S_R^{\delta+\beta}(f)|^p dR \right)^{1/p} &\leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta+1} \left(\int_0^T |S_{Rr}^\delta(f)|^p dR \right)^{1/p} dr \leq \\ &\leq |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta} dr \left(\int_0^T |S_R^\delta(f)|^p dR \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, то при $0 < Re\beta \leq 1$

$$\int_0^1 (1-r)^{Re\beta-1} r^{2\delta} dr = \frac{\Gamma(Re\beta)\Gamma(2\delta+1)}{\Gamma(1+Re\beta+2\delta)} \leq \frac{c_1(\delta)}{Re\beta}. \quad (7)$$

Оценим $|c_{\beta\delta}|$. Поскольку (см. [7, гл. VI, § 12])

$$\max_{1 \leq x \leq 2} \frac{1}{|\Gamma(x+iy)|} \leq a e^{\frac{\pi}{2}|y|},$$

где a не зависит от y , то

$$|c_{\beta\delta}| \leq \frac{2\Gamma(\delta+Re\beta+1)|\beta|}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta+1)} \leq c_2(\delta) |\beta| e^{\frac{\pi}{2}|\beta|}. \quad (8)$$

Объединяя (6), (7) и (8), получаем неравенство (5). $\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай $m \geq 3$. Пусть q – показатель сопряженный с p , $\gamma > 0$. Зафиксируем функцию $g \in L_q(0, R)$ с $\|g\|_q \leq 1$. При каждом z , принадлежащем вертикальной полосе

$$S = \{z \in C : \gamma \leq Re z \leq \frac{m-1}{2} + \gamma\},$$

рассмотрим линейный оператор

$$T_z : f \rightarrow \int_0^R g(r) S_r^z(f) dr,$$

заданный на пространстве $L_\infty(T_m)$. Функция $T_z f$ аналитична по переменной z и имеет по ней, согласно лемме, допустимый рост на S (см. также [2, гл. V, теорема 4.1]). Кроме того,

$$\|T_z f\|_\infty \leq \left\| \left(\int_0^R |S_r^z(f)|^p \right)^{1/p} \right\|_\infty.$$

Согласно оценкам (5) и (2) ($\delta = 0$; $\beta = \gamma + iy$)

$$\|T_{\gamma+iy}\|_{\infty} \leq c(m) \frac{\sqrt{\gamma^2 + y^2}}{\gamma} e^{\frac{\pi}{2}|y|} R^{\frac{m-1}{2} - \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}. \quad (9)$$

Из (5) и (3) ($\delta = \frac{m-1}{2}$ и $\beta = \gamma + iy$) следует, что

$$\left\| T_{\frac{m-1}{2} + \gamma + iy} \right\|_{\infty} \leq c(m, p) \frac{\sqrt{\gamma^2 + y^2}}{\gamma} e^{\frac{\pi}{2}|y|} R^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}. \quad (10)$$

Обозначим через $M_0(y) = M_0(m, \gamma, y, p)$ и $M_1(y) = M_1(m, \gamma, y, p)$ множители, стоящие перед $\|f\|_{\infty}$ в правых частях (9) и (10). Заметим, что $M_j(y)$, $j = 0, 1$, не зависят от f и g и удовлетворяют оценке

$$\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty$$

при любом $0 < b < \pi$.

Положим $\alpha = \gamma(1-t) + (\frac{m-1}{2} + \gamma)t = \gamma + \frac{m-1}{2}t$, $0 \leq t \leq 1$. По теореме Стейна существует постоянная M_t такая, что

$$\|T_{\alpha}f\|_{\infty} \leq M_t \|f\|_{\infty},$$

где $t = \frac{2(\alpha-\gamma)}{m-1}$, а M_t определяется равенством

$$M_t = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sin \pi t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log M_0(y)}{\operatorname{ch} \pi y - \cos \pi t} + \frac{\log M_1(y)}{\operatorname{ch} \pi y + \cos \pi t} \right\} dy \right\}.$$

Проинтегрируем данное равенство, учитывая, что ([2], гл. V. 4)

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t}{\operatorname{ch} \pi y - \cos \pi t} dy = 1 - t, \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t}{\operatorname{ch} \pi y + \cos \pi t} dy = t.$$

Будем иметь

$$M_t \leq \frac{c(m, p, \alpha)}{\gamma} R^{\left\{ \frac{m-1}{2} - \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}) + \frac{1}{p} \right\} (1-t) + \frac{t}{p}}.$$

Тогда при $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$ получаем, что

$$\|T_{\alpha}f\|_{\infty} \leq \frac{c(m, p, \alpha)}{\gamma} \begin{cases} R^{\frac{m-2}{2} + \frac{1}{p} - (\alpha-\gamma)\frac{m-2}{m-1}} \|f\|_{\infty}, & \text{при } 1 \leq p \leq 2; \\ R^{\frac{m-1}{2} - (\alpha-\gamma)(1-\frac{2}{p(m-1)})} \|f\|_{\infty}, & \text{при } p > 2. \end{cases}$$

Минимизируем данную оценку по γ . Тогда

$$\|T_{\alpha}f\|_{\infty} \leq c_1(m, p, \alpha) \begin{cases} R^{\frac{m-2}{2} - \alpha\frac{m-2}{m-1} + \frac{1}{p}} \ln R \|f\|_{\infty}, & 1 \leq p \leq 2; \\ R^{\frac{m-1}{2} - \alpha(1-\frac{2}{p(m-1)})} \ln R \|f\|_{\infty}, & p > 2. \end{cases}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от функции g , беря $\sup_{\|g\|_q \leq 1} \|T_\alpha f\|_\infty$, получаем оценку (4) для $m \geq 3$. Доказательство оценки (4) для $m = 2$ аналогично. Теорема доказана. $\square$

1. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **40:2** – P. 175–207.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
3. *Кузнецова О.И., Подкорытов А.Н.* О нормах интегральных средних сферических сумм Фурье // Мат. Заметки. – 2014. – **96:5**. – С. 701–708.
4. *Кузнецова О.И.* Сильные сферические средние кратных рядов Фурье // Изв. НАН Армении, Математика. – 2009. – **44:4**. – С. 27–40.
5. *Wang Kunyang, Gavin Brown.* Approximation by Bochner–Riesz means and Hardy summability // J. Beijing Normal Univ. (Natural Science). – 1994. – **30:2** – P. 163–169.
6. *Wang Kunyang.* Strong uniform approximation by Bochner–Riesz means. Multivariate approximation IV // Proceedings of conference of multivariate approximation theory. – Oberwolfach, West Germany, 1989. – P. 337–342.
7. *Гурвич А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 618 с.

О. И. Kuznetsova

On the norms of the integral means of Bochner–Riesz sums.

The paper deals with the Bochner–Riesz sums $S_R^\alpha(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} (1 - \|k\|^2/R^2)^\alpha \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$, $\alpha > 0$, of a periodic function f in m variables and the strong integral averages of these sums $\left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f, x)|^p dr \right) / R \right)^{1/p}$ for $p \geq 1$. We establish upper estimates for growth as $R \rightarrow +\infty$ of the norms of corresponding operators, i. e., of the quantities $\sup_{|f| \leq 1} \left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f, 0)|^p dr \right) / R \right)^{1/p}$, for $0 < \alpha < (m - 1)/2$.

Keywords: multiple Fourier series, Bochner–Riesz sums, strong averages.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
kuznets@iamm.su

Получено 12.06.16

УДК 531.38

©2016. А. Н. Курганский, А. Ю. Максимова

ЭНТРОПИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ГРАФА

В работе вводится алгоритмическая модель теплообмена на графе – термодинамический граф. Термодинамический граф является аналогом сеток в методе конечных разностей: вычисление температур осуществляется в вершинах графа, а ребра графа указывают на непосредственный теплообмен между вершинами. Рекуррентные соотношения теплообмена в графе выводятся без обращения к дифференциальным уравнениям, а только опираясь на коэффициенты теплопроводности и удельной теплоемкости. Такой подход представляется авторам одновременно более коротким и гибким с точки зрения алгоритмического моделирования термодинамического процесса, чем вывод разностных схем из дифференциальных уравнений. Далее вводится понятие энтропии термодинамического графа. Доказывается не улучшаемая в общем случае оценка длины шага по времени, при котором энтропия не убывает. Как следствие, данная оценка является одновременно точной границей устойчивости модели в общем случае.

Ключевые слова: теплоперенос теплопроводностью, теория графов, диаграмма Вороного, энтропия.

1. Введение. Математические модели физических или других процессов в форме дифференциальных уравнений, основанных на языке актуальной непрерывности и бесконечности, являются не всегда в полной мере и ясно интерпретируемыми с алгоритмической точки зрения при компьютерном моделировании, в котором речь может идти не более чем о потенциальной, конструктивной непрерывности или бесконечности. В связи с возникающими таким образом сложностями при построении алгоритмических моделей физических процессов следует понимать, что математические формулы с равенствами являются частным случаем описания алгоритмов. Формулы для дискриминанта квадратного трехчлена, разложения в ряды, дифференциальные уравнения, описывающие теплообмен, ассоциативные, коммутативные законы и т.д. и т.п. являются примерами выражений для вычислений или их эквивалентных преобразований. Другими словами, конечные алгебраические формулы, бесконечные ряды, частично-рекурсивные функции, машины Тьюринга являются, в конце концов, языками для выражения вычислений при компьютерном моделировании, являющемся во многом конечной целью исследований. Определенным недостатком языков частично-рекурсивных функций и машин Тьюринга, как понятий алгоритма, является трудность их математического анализа инструментами дифференцирования и интегрирования. Но, с точки зрения компьютерных вычислений, они имеют явные преимущества в силу своей природы. Таким образом, нет однозначных преимуществ в компьютерном моделировании теплообмена, отталкивающегося именно от дифференциальных уравнений. Это очевидно потому, что сами дифференциальные уравнения обосновываются предельным переходом в соотношениях, описывающих процессы теплообмена на элементарных объемах, а разностные схемы – есть результат об-

ратного процесса дискретизации дифференциальных уравнений, т.е. возвращения к элементарным объемам. Таким образом, путь к разностным схемам делает два лишних шага: 1) предельного перехода от дискретного описания к непрерывному и 2) обратной дискретизации от дифференциальных уравнений к разностным схемам. При компьютерном моделировании, если не ставится задача математического анализа качественных свойств процесса, достаточно остановиться по пути к алгоритмическому описанию конкретного процесса теплообмена на шаге до предельного перехода. Конечно, при ясном понимании того, что влечет за собой предельный переход, от каких моментов описываемого процесса в результате этого перехода абстрагируются, а какие новые моменты возникают уже в непрерывной форме – эти два шага дают новые знания благодаря математическому анализу. Однако, по опыту компьютерного моделирования многообразных процессов теплообмена, путь к вычислительной программе, отталкивающийся не от дифференциальных уравнений, а от того же, что и вывод самих уравнений, может оказаться короче.

Исходя из сказанного выше, в данной работе дается определение модели термодинамического графа без обращения к дифференциальным уравнениям, исследуются его свойства, связанные с понятием энтропии и сходимостью численного моделирования термодинамического графа. Метод конечных разностей с использованием явной схемы является, как показано в работе, частным случаем такой модели. Термодинамический граф служит основой для экспериментов при изучении процессов теплообмена, рассматриваемых в [1].

2. Термодинамический граф. Пусть $G = (V, E)$ – конечный, ориентированный, связный, простой граф, где V – множество вершин, $E \subseteq V \times V$ – множество дуг или, другими словами, отношение смежности на вершинах. Отношение E полагаем симметричным. Напомним, что в случае ориентированного простого графа принято говорить о дугах, т.е. об упорядоченных парах вершин (v, w) , а в случае неориентированного графа – о ребрах графа, т.е. о двухэлементных $\{v, w\}$ множествах вершин. Поскольку E является симметричным, то G можно рассматривать как неориентированный граф, но для удобства описания некоторых моментов теплообмена G определен как ориентированный граф. Иногда дуги графа мы будем называть ребрами, когда ориентация дуги не важна.

На вершинах и дугах графа определим следующие функции:

1. $u : V \times R^+ \rightarrow R$ – температура вершин (температурное поле), $[K]$, т.е. $u(v, t)$ есть температура вершины v в момент времени t ;
2. $\rho : V \rightarrow R$ – плотность вещества в вершинах графа, $[кг/м^3]$;
3. $d : V \rightarrow R$ – пространственный объем вершин, $[м^3]$;
4. $m : V \rightarrow R^+$ – масса вершин графа, $m(v) = \rho(v) \cdot d(v)$, $[кг]$;
5. $c : V \rightarrow R^+ \cup \{\infty\}$ – удельная теплоемкость, $[Дж/(кг \cdot K)]$;
6. $\mu : V \rightarrow R$ – теплота кристаллизации, $[Дж/кг]$;

7. $melting : V \rightarrow R$ – температура плавления, $[K]$;
8. $f : V \times R \rightarrow \{0, 1\}$ – фаза вершин во времени, договоримся, что $f(v, t) = 1$ означает жидкую фазу вершины v в момент времени t , $f(v, t) = 0$ – твердую;
9. $S : E \rightarrow R^+$ – площади поверхности соприкосновения элементов вещества, $[m^2]$, т.е., если $e = (v, w)$, то $S(e)$ – площадь поверхности теплообмена между вершинами v и w ;
10. $k : E \rightarrow R$ – коэффициент теплопроводности, $[Дж/(м \cdot К \cdot с)]$;
11. $\Delta x : E \rightarrow R$ – расстояние между вершинами, $[м]$, т.е., если $e = (v, w)$, то $\Delta x(e)$ является расстоянием между v и w .

Значение температур вершин в момент времени $t = 0$ назовем начальным условием. Значение температур вершин v , в которых $c(v) = \infty$, назовем граничным условием.

Пусть $v \in V$. Обозначим множество всех смежных с v вершин в графе через $E(v) = \{w | (v, w) \in E\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граф G с зафиксированными начальными и граничными условиями, а также величинами $c, \rho, \mathbf{d}, \mu, melting, f, S, k, \Delta x$, назовем графом теплообмена или термодинамическим графом. Температурным полем на графе назовем функцию u .

Геометрические параметры графа теплообмена имеют следующий смысл. При вычислительном моделировании теплообмена в некотором объеме вещества, математически представляемого некоторым ограниченным метрическим пространством I , считаем, что вершины графа соответствуют точкам пространства, в которых вычисляются температуры. Вершина графа и соответствующая ей точка пространства I отождествляются. Величина $\Delta x(v, w)$ есть расстояние между вершинами (узлами) v и w . Естественный способ привязки к вершинам геометрических величин $\mathbf{d}$ и S следует из построения диаграммы Вороного [2] множества вершин графа. А именно, считаем, что пространство I разбито на области близости (многоугольники Вороного), каждая из которых содержит ровно одну вершину графа и все точки пространства, расстояние от которых до данной вершины меньше, чем до любой другой вершины графа. Точки пространства I , лежащие на равном расстоянии от двух или более вершин графа, образуют поверхность теплообмена этих вершин. Величина $\mathbf{d}(v)$ есть мера (объем, площадь) многоугольника Вороного, построенного вокруг вершины v , а значение $S(v, w)$ есть мера поверхности соприкосновения многоугольников Вороного, построенных вокруг v и w . Иллюстрация к сказанному представлена на рис. 1.

3. Уравнение теплообмена. Рассмотрим v графа и смежную с ней вершину w в момент времени t . Количество теплоты получаемой v за время Δt в результате теплообмена с w , исходя из определения функции k , равно

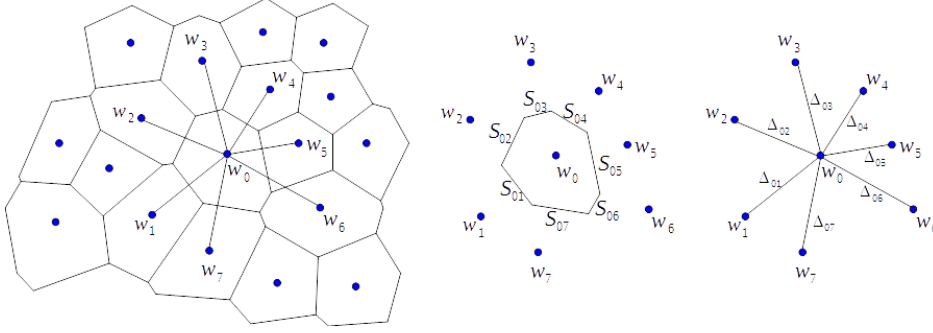


Рис. 1. Фрагмент диаграммы Вороного с указанием геометрических параметров вершин графа теплообмена

$$\Delta Q_{(v,w)} = \frac{u(w,t) - u(v,t)}{\Delta x(v,w)} k(v,w) S(v,w) \Delta t.$$

Количество теплоты получаемого вершиной v за это время в результате теплового взаимодействия со всеми смежными вершинами равно

$$\Delta Q_v = \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w,t) - u(v,t)}{\Delta x(v,w)} k(v,w) S(v,w) \Delta t.$$

Учитывая теплоту кристаллизации в случае смены фазы вершины, получаем

$$\Delta Q_v = \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w,t) - u(v,t)}{\Delta x(v,w)} k(v,w) S(v,w) \Delta t + (f(v,t) - f(v,t + \Delta t)) m(v) \mu(v).$$

С другой стороны, используя коэффициент теплоемкости $c(v)$ как связь между изменением энергии вершины и изменением ее температуры, получаем

$$\Delta Q_v = c(v) m(v) (u(v,t + \Delta t) - u(v,t)).$$

Отсюда следует схема для вычисления температуры вершины в следующий момент времени:

$$u(v,t + \Delta t) = u(v,t) + \frac{\Delta t}{c(v)m(v)} \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w,t) - u(v,t)}{\Delta x(v,w)} k(v,w) S(v,w) + (f(v,t) - f(v,t + \Delta t)) \frac{\mu(v)}{c(v)}. \quad (1)$$

При отсутствии смен фаз уравнение теплообмена примет вид

$$u(v,t + \Delta t) = u(v,t) + \frac{\Delta t}{c(v)m(v)} \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w,t) - u(v,t)}{\Delta x(v,w)} k(v,w) S(v,w).$$

Если $c(v) = \infty$, то $u(v, t + \Delta t) = u(v, t)$, т.е. v является частью граничных условий, при которых температура в v постоянна. Множество всех граничных вершин из V обозначим через ∂V .

Обозначим $Q(v, t) = c(v)m(v)u(v, t) + f(v, t)m(v)\mu(v)$. Назовем $Q(v, t)$ тепловой энергией вершины v в момент времени t , а величину

$$Q(G, t) = \sum_{v \in V \partial V} Q(v, t)$$

– тепловой энергией графа G в момент времени t . Используя выражение для тепловой энергии в уравнении теплопроводности, получаем

$$Q(v, t + \Delta t) = Q(v, t) + \Delta t \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w, t) - u(v, t)}{\Delta x(v, w)} k(v, w) S(v, w).$$

Теорема 1. *Если в графе нет граничных вершин, $\partial V = \emptyset$, то тепловая энергия $Q(G, t)$ постоянна во времени.*

Доказательство. Доказательство следует из простого факта

$$\sum_{v \in V} \sum_{w \in E(v)} \frac{u(w, t) - u(v, t)}{\Delta x(v, w)} k(v, w) S(v, w) = 0,$$

верного в силу равенств $S(v, w) = S(w, v)$, $k(v, w) = k(w, v)$, $\Delta x(v, w) = \Delta x(w, v)$.

□

Далее рассматриваем только уравнение теплообмена без смены фаз. Пронумеруем вершины V графа G числами $\{1, 2, \dots, |V|\}$. Пусть $|V| = n$. Обозначим через i вершину с номером i , а через $u_i(t)$ – температуру вершины i в момент времени t . Введем обозначение вектор-столбца:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Уравнения теплообмена без фазовых переходов являются линейным преобразованием поля u . Таким образом, мы можем записать $U(t + \Delta t) = AU(t)$, где матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

которую назовем матрицей теплообмена, обладает очевидными свойствами, сформулированными в следующей лемме.

Лемма 1. Матрица A обладает следующими свойствами:

1. $\alpha_{ij} = \frac{k(i,j)S(i,j)\Delta t}{c(i)m(i)\Delta x(i,j)} \geq 0$, если $j \in E(i)$;
2. $\alpha_{ij} = 0$, если $j \notin E(i)$ и $j \neq i$;
3. $\alpha_{ii} = 1 - \sum_{j \in E(i)} \alpha_{ij}$;
4. $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$;
5. если $c(i) < \infty$, $c(j) < \infty$, то $p(i)\alpha_{ij} = p(j)\alpha_{ji}$;
6. если i является граничной вершиной, то $\alpha_{ii} = 1$.

И справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При достаточно малых $\Delta t \geq 0$ определитель матрицы теплообмена отличен от 0 и, следовательно, она обратима.

Доказательство. При $\Delta t = 0$ матрица A является единичной. В силу непрерывности определителя как функции элементов матрицы, определитель матрицы теплообмена отличен от нуля при достаточно малых $\Delta t \geq 0$. $\square$

4. Энтропия термодинамического графа. Величину $\phi(v) = c(v)\rho(v)$ назовем плотностью теплоемкости в вершине v , а $\phi(v)\mathbf{d}(v)$ – теплоемкостью вершины v . Величину

$$\Phi(G) = \sum_{v \in V \setminus \partial V} \phi(v)\mathbf{d}(v)$$

назовем теплоемкостью графа, а величину $p(v) = (\phi(v)\mathbf{d}(v))/\Phi(G)$ – взвешенной теплоемкостью вершины v .

Средней температурного поля u и температурой графа G в момент времени t назовем величину

$$M_u(t) = \sum_{v \in V \setminus \partial V} u(v,t)p(v) = \frac{\sum_{v \in V \setminus \partial V} u(v,t)\phi(v)\mathbf{d}(v)}{\Phi(G)}.$$

Обозначим через

$$D_u(t) = \sum_{v \in V \setminus \partial V} |u(v,t) - M_u(t)|p(v) = \frac{\sum_{v \in V \setminus \partial V} |u(v,t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v)}{\Phi(G)} \quad (2)$$

средневзвешенное абсолютное отклонение температурного поля u . Заметим, что $D_u(t) = 0$ тогда и только тогда, когда тепловое поле в $V \setminus \partial V$ константное.

Величину

$$N_u(t) = \frac{D_u(t)}{M_u(t)}\Phi(G) = \frac{\sum_{v \in V \setminus \partial V} |u(v,t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v)}{M_u(t)}$$

назовем негэнтропией поля u в момент времени t , а величину

$$\Delta S_u(t) = N_u(t) - N_u(t + \Delta t)$$

– разностной формой энтропии теплового поля u в момент времени t . Если тепловое поле является константным, то $N_u(t) \equiv \Delta S_u(t) \equiv 0$ для всех t .

Следствие 1. *Негэнтропия термодинамического графа равна 0 тогда и только тогда, когда тепловое поле на не граничных вершинах графа константное.*

Теорема 3. *Для термодинамического графа выполняются неравенства*

$$0 \leq N_u(t) < 2\Phi(G).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу (2), в которой для упрощения обозначений опущен параметр t и $M = M_u$:

$$D_u = \sum_{i \in V \setminus \partial V} |u(i) - M|p(i).$$

Пусть две вершины v и w такие, что $u(v) > M$, $0 < u(w) \leq M$. Рассмотрим тепловое поле u' на графе G , которое совпадает с u во всех вершинах графа, кроме v и w . Пусть $u'(v) = u(v) + (u(w)p(w))/p(v)$ и $u'(w) = 0$. Значения u' подобраны так, что $M_{u'} = M$. Поскольку

$$\begin{aligned} (u(v) - M)p(v) + (M - u(w))p(w) &= \\ &= \left(u(v) - \frac{u(w)p(w)}{p(v)} - M \right) p(v) + Mp(w) < \\ &< \left(u(v) + \frac{u(w)p(w)}{p(v)} - M \right) p(v) + Mp(w), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} D_u &= \\ &= (u(v) - M)p(v) + (M - u(w))p(w) + \sum_{i \in V \setminus (\partial V \cup \{v, w\})} |u(i) - M_u|p(i) < \\ &< \left(u(v) + \frac{u(w)p(w)}{p(v)} - M \right) p(v) + Mp(w) + \sum_{i \in V \setminus (\partial V \cup \{v, w\})} |u(i) - M_u|p(i) = \\ &= D_{u'}. \end{aligned}$$

Таким образом, если температурное поле u графа такое, что есть вершина v , в которой температура больше 0 и меньше M , то поле можно преобразовать с сохранением средней температуры так, что негэнтропия графа увеличится.

Пусть теперь две вершины v и w такие, что $u(v) > M$, $u(w) > M$. Рассмотрим тепловое поле u' на графе G , которое совпадает с u во всех вершинах графа, кроме v и w . Пусть $u'(v) = u(v) + (u(w) - M)/(p(v))p(w)$ и $u'(w) = M$. Значения u' подобраны так, что $M_{u'} = M$. Поскольку

$$(u(v) - M)p(v) + (u(w) - M)p(w) = \left(u(v) + \frac{u(w) - M}{p(v)}p(w) - M\right)p(v) + Mp(w),$$

то

$$\begin{aligned} D_u &= (u(v) - M)p(v) + (u(w) - M)p(w) + \sum_{i \in V \setminus (\partial V \cup \{v, w\})} |u(i) - M_u|p(i) = \\ &= \left(u(v) + \frac{u(w) - M}{p(v)}p(w) - M\right)p(v) + 0p(w) + \sum_{i \in V \setminus (\partial V \cup \{v, w\})} |u(i) - M_u|p(i) = \\ &= D_{u'}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что максимальная негэнтропия графа достигается только, если температурное поле такое, что во всех вершинах, кроме одной, температура равна 0. Пусть вершина v имеет температуру $M/p(v)$, а температура во всех других вершинах равна 0. Тогда средняя температура поля равна M и

$$D_u = \left(\frac{M}{p} - M\right)p(v) + \sum_{i \in V \setminus (\partial V \cup \{v\})} Mp(i) = 2M(1 - p(v)) < 2M.$$

Отсюда $N_u(t) = (D_u(t))/(M_u(t)) \Phi(G) < 2\Phi(G)$. $\square$

Исходя из теоремы, естественно дать следующее определение энтропии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Энтропией термодинамического графа G назовем величину

$$S_u(t) = 2\Phi(G) - N_u(t).$$

Следствие 2. Справедливы неравенства: $0 < S_u(t) \leq 2\Phi(G)$.

Теорема 4. Пусть в термодинамическом графе $G = (V, E)$ средняя температура двух подмножеств его вершин V' и V'' , $V = V' \cup V''$, совпадают. Тогда энтропия графа G равна сумме энтропий его подграфов G' и G'' , образованных, соответственно, вершинами V' и V'' .

Доказательство. Достаточно доказать указанное аддитивное свойство для негэнтропии. Доказательство прямо следует из ее определения

$$N_u(t) = \frac{\sum_{v \in V \setminus \partial V} |u(v, t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v)}{M_u(t)}$$

и равенства

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V \setminus \partial V} |u(v, t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v) &= \\ &= \sum_{v \in V' \setminus \partial V} |u(v, t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v) + \sum_{v \in V'' \setminus \partial V} |u(v, t) - M_u(t)|\phi(v)\mathbf{d}(v). \end{aligned}$$

$\square$

5. Сходимость. Определение сходимости в настоящей работе отличается от данного в [3], поскольку определение термодинамического графа и соотношений теплообмена на нем не отталкивается от дифференциальных уравнений. Устойчивость модели, как непрерывная зависимость от начальных условий, следует непосредственно из сходимости модели, определяемой ниже.

Вычислительную модель графа теплообмена при шаге по времени Δt назовем сходящейся, если для любой вершины v существует $\lim_{t \rightarrow \infty} u(v, t)$. Условие сходимости в виде ограничений на Δt выводится из простого соображения, являющегося огрубленной формой второго закона термодинамики: температура в любой вершине v в следующий момент времени $t + \Delta t$ должна быть строго больше минимальной и строго меньше максимальной температур смежных с ней вершин $E(v)$ в момент времени t при отсутствии смены фазы. Это ограничение выражается неравенством $\frac{\Delta t}{c(v)m(v)} \sum_{w \in E(v)} \frac{k(v, w)S(v, w)}{\Delta x(v, w)} < 1$, для всех $v \in V$, или, что то же, $\sum_{j \in E(i)} \alpha_{ij} < 1$ для всех i . Или, другими словами,

$$\Delta t < \min_{v \in V} \frac{c(v)m(v)}{\sum_{w \in E(v)} \frac{k(v, w)S(v, w)}{\Delta x(v, w)}}. \quad (3)$$

Ниже будет доказана сходимость модели при выполнении условия (3). Заметим, что можно привести пример графа теплообмена такого, что при

$$\Delta t = \min_{v \in V} \frac{c(v)m(v)}{\sum_{w \in E(v)} \frac{k(v, w)S(v, w)}{\Delta x(v, w)}}$$

модель не сходится. В простейшей такой модели граф состоит из двух вершин, а параметры подобраны так, что $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, оценку для Δt в условии (3) для сходимости модели в общем случае нельзя улучшить.

Лемма 2. *Если верно неравенство (3), то в матрице A для всех i и j $\alpha_{ij} \geq 0$ и $\alpha_{ii} > 0$, а также значение 1 в матрице могут принимать только элементы на главной диагонали.*

Доказательство, в силу уже сказанного, очевидно. Заметим, что такая матрица, все элементы которой неотрицательные и суммы элементов каждой строки равны 1, называется стохастической или марковской.

Далее, при упоминании векторов, речь будет идти о нормированном линейном пространстве с нормой Чебышева, равной максимальному абсолютному значению компонент вектора.

Теорема 5. *Если матрица A теплообмена графа без граничных вершин является стохастической, то негэнтропия не константного теплового поля u , убывая, стремится к 0 и, следовательно, $\Delta S_u(t) \geq 0$.*

Доказательство. Требуется доказать, что $D_u(t) \geq D_u(t + \Delta t)$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D_u(t + \tau \Delta t) = 0$, где $\tau \in \mathbb{N}$. Обозначим вектор-столбец теплового поля в момент времени

t через

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $M_u(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i \alpha_{ij} u_j$. В силу свойства 5 матрицы теплообмена и ее стохастичности, имеем далее следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i \alpha_{ij} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j \alpha_{ji} u_j = \sum_{j=1}^n p_j u_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} = \sum_{j=1}^n p_j u_j = M_u(t).$$

Таким образом, $M_u(t)$ константа при условиях теоремы. Обозначим $M = M_u(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} D_u(t + \Delta t) &= \sum_{i=1}^n p_i \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j - M \right| = \sum_{i=1}^n p_i \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (u_j - M) \right| \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i \alpha_{ij} |u_j - M| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j \alpha_{ji} |u_j - M| = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_j \alpha_{ji} |u_j - M| = \sum_{j=1}^n p_j |u_j - M| \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} = \\ &= \sum_{j=1}^n p_j |u_j - M| = D_u(t). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $D_u(t + \Delta t) \geq D_u(t)$. Покажем, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D_u(t + \tau \cdot \Delta t) = 0$. Во-первых, очевидно, что $D_u(t) = 0$ тогда и только тогда, когда поле u константное, т.е. во всех вершинах значение температуры равно M . Константное поле не меняется со временем, т.е. $D_u(t + \tau \cdot \Delta t) = 0$. Предположим, что в последовательности $D_u(t + \tau \cdot \Delta t)$ нет нулевых элементов и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D_u(t + \tau \cdot \Delta t) = d > 0$.

Рассмотрим последовательность $A^\tau U$, $\tau \in N$. Заметим, что это ограниченная последовательность и оператор A непрерывен, поскольку линейный и конечномерный. Заметим также, что неподвижными точками A являются только константные тепловые поля. По известной теореме Больцано–Вейерштрасса в $A^\tau U$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, пределом которой будет тепловое поле 1) со средневзвешенным абсолютным отклонением равным d и 2) являющееся неподвижной точкой оператора A . Противоречие. $\square$

Следствие 3. Если в графе теплообмена нет граничных вершин и матрица A стохастическая, то модель сходится к константному тепловому полю.

Следствие 4. Если A является матрицей теплообмена графа без граничных вершин, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай графа с граничными вершинами.

Теорема 6. Если матрица A теплообмена на графе G с непустым множеством граничных вершин стохастическая, то модель сходится, причем $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau U$ зависит только от значений температуры в граничных вершинах.

Доказательство. Без ограничений общности положим, что подграф графа G , образованный его неграничными вершинами, является связным. В противном случае, можно рассмотреть каждую компоненту связности отдельно.

Пусть $|\partial V| = m > 0$. Также без ограничений общности для удобства считаем, что $\partial V = \{1, 2, \dots, m\}$. Заметим, что в этом случае в матрице A в первых m строках диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы этих строк равны 0. В силу того, что подграф, образованный неграничными вершинами, связный, справедливо, что через максимум $n - 1$ шагов по времени каждая неграничная вершина графа испытывает влияние всех других вершин, т.е. в матрице A^τ , $\tau \geq n - 1$, в каждой строке с номером больше m все элементы строго больше 0.

Рассмотрим пространство U -мерных векторов, в которых первые m элементов равны 0. Это пространство замкнуто относительно оператора A . Покажем, что $A^\tau = (\alpha_{ij}^\tau)$, для любого $\tau \geq n - 1$, является сжимающим отображением в U , т.е. существует $0 \leq \lambda_\tau < 1$, что для любого $V \in U$ справедливо $\|A^\tau V\| \leq \lambda_\tau \|V\|$. Под нормой понимаем норму Чебышева, т.е. максимальное абсолютное значение координат вектора. Действительно, пусть $\lambda_\tau = \max_{m < i \leq n} |\sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^\tau|$. Очевидно, что $\lambda_\tau < 1$, поскольку сумма элементов любой строки матрицы не больше 1 и все элементы рассматриваемых строк строго больше 0, а в сумме участвует только часть элементов строк. Учитывая, что первые m координат векторов из U равны 0, получаем для $V \in U$

$$\|A^\tau V\| = \max_{m < i \leq n} \left| \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^\tau v_j \right| \leq \|V\| \cdot \max_{m < i \leq n} \left| \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^\tau \right| = \lambda_\tau \|V\|.$$

Рассмотрим множество всех векторов вида $M_i = \{A^i U - A^j U | i < j\}$. Радиусом $\|M_i\|$ множества M_i векторов назовем максимальную норму среди его векторов. Заметим, что $M_{i+1} = A M_i$. В силу того, что A^{n-1} сжимающее отображение, радиус $\|M_i\|$ стремится к 0 при $i \rightarrow \infty$. Как известно, это является необходимым и достаточным условием существования $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau U$.

Представим теперь U как сумму двух векторов $U = U' + U''$ таких, что в U' первые m компонент совпадают с соответствующими компонентами U , а остальные равны 0. Другими словами, в U' — температура в граничных вершинах,

U'' – температура в остальных. Поскольку $U'' \in U$, то $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau U'' = 0$, где 0 – нулевой вектор. Таким образом, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau U = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^\tau U'$. $\square$

6. Частный случай. Если вершины графа расположить не случайным образом, а в узлах конечно-разностной сетки, диаграмма Вороного будет состоять из ячеек-прямоугольников, каждая (внутренняя – не лежащая на границе рассматриваемой области) из которых будет иметь четыре соседние ячейки. Соединим вершины соседних ячеек ребрами (рис. 2).

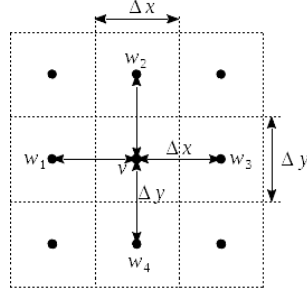


Рис. 2. Метод конечных разностей как частный случай теплообмена на графе

Обозначениям в уравнении теплообмена на графе соответствуют следующие величины:

$$\Delta x(v, w_1) = \Delta x(v, w_3) = \Delta x$$

$$\Delta x(v, w_2) = \Delta x(v, w_4) = \Delta y$$

$$\mathbf{d}(v) = \Delta x \cdot \Delta y$$

$$S(v, w_1) = S(v, w_3) = \Delta y$$

$$S(v, w_2) = S(v, w_4) = \Delta x.$$

Переписывая основное уравнение (1) в приведенных обозначениях, получим явную конечно-разностную схему:

$$u(v, t + \Delta t) = u(v, t) + \Delta t \frac{k}{c \cdot \rho} \left(\frac{u(w_1, t) - 2u(v, t) + u(w_3, t)}{\Delta x^2} + \frac{u(w_2, t) - 2u(v, t) + u(w_4, t)}{\Delta y^2} \right). \quad (4)$$

7. Заключение. В работе определена алгоритмическая модель теплообмена на графе без опоры на дифференциальные уравнения. Конечно-разностная явная схема (4) является частным случаем такой модели. Для процесса теплообмена без смены фаз доказана не улучшаемая в общем случае оценка длины шага по времени, при котором модель (1) сходится. При отсутствии граничных вершин доказательство сходимости основывается на определенном в работе понятии энтропии

термодинамического графа и его свойстве возрастать при указанном временном шаге. При наличии граничных вершин сходимость доказывается исходя из свойства матрицы теплообмена быть марковской.

Благодаря тому, что современные языки программирования, как например Python, содержат библиотеки для построения диаграмм Вороного произвольного множества точек, термодинамический граф обладает определенной гибкостью в его использовании при моделировании теплообмена в средах со сложной геометрической конфигурацией как самой среды, так и граничных условий. Более того, вместо регулярной, прямоугольной сетки узлов расчета температур, можно использовать сетку произвольной геометрии. В частности, в дальнейших работах предполагается рассмотреть сетки узлов, расположенных случайным образом с равномерной плотностью распределения, с целью проведения сравнительных численных экспериментов в прямоугольных и изотропных сетках узлов.

В дальнейшем предполагается применить термодинамический граф для компьютерного моделирования теплообмена со сменой фаз, для чего и разрабатывалась модель [4].

1. *Ivanova A.A.* Predictive Control of Water Discharge in the Secondary Cooling Zone of a Continuous Caster // *Metallurgist*. – 2013. – **57**, issue 7–8. – P. 592–599. DOI: 10.1007/s11015-013-9775-0.
2. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. – 295 с.
3. *Самарский А.А., Гудин А.В.* Устойчивость разностных схем, – М.: Наука, 1973. – 415 с.
4. *Иванова А.А., Курганский А.Н.* Математическое моделирование положения двухфазной зоны в непрерывнолитом слитке // XV Минский междунар. форум по тепломассообмену, Минск, 23–26 мая 2016. – С. 331–334.

O. Kurgansky, A. J. Maksimova

The entropy of a thermodynamic graph.

We introduce an algorithmic model of heat conduction, the thermodynamic graph. The thermodynamic graph is analogous to meshes in the finite difference method in the sense that the calculation of temperature is carried out at the vertices of the graph, and the edges indicate the direct heat exchange between the vertices. Recurrence relations of heat conduction in graph are derived without using of differential equations and based on the coefficients of thermal conductivity and heat capacity. This approach seems to be more direct and flexible from the point of view of algorithmic modeling of thermodynamic process than the derivation of difference schemes from differential equations. We introduce also the notion of entropy of thermodynamic graph. We find the maximum length of the time step at which the entropy does not decrease in the general case. As a result, this give us the accurate boundary of the model stability.

Keywords: *heat transfer by conduction, graph theory, Voronoi diagram, entropy.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
kurgansk@gmx.de

Получено 27.06.16

УДК 517.983.36

©2016. Д. В. Лиманский

О МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫХ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассматриваются минимальные дифференциальные полиномы с квазиоднородными главными частями, символы которых зависят от двух переменных. Получен критерий существования слабо коэрцитивных неквазиэллиптических операторов в анизотропных пространствах Соболева, а также построен пример широкого класса таких операторов.

Ключевые слова: дифференциальный полином, слабая коэрцитивность, квазиэллиптичность.

1. Введение. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha : l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1)$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Пусть далее $P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$ – l -главная часть оператора $P_j(x, D)$, а $P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha$ – его главный l -квазиоднородный символ. Напомним следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1, 2]. Систему дифференциальных операторов вида (1) называют l -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, эллиптической порядка l , если $l_1 = \dots = l_n = l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Система дифференциальных операторов вида (1) называется коэрцитивной в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{\dot{W}_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha : l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2)$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Хорошо известно [1–4], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω , система (1) l -квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\dot{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1; \infty$ оценка (2) для l -квазиэллиптической

системы утрачивает силу. Так, в случае $p = \infty$ М.М. Маламудом [5] было доказано, что из априорной оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega)$$

вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

для l -главных символов операторов $Q(x, D)$ и $P_j(x, D)$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами это утверждение доказано еще ранее де Лю и Миркилом [6]). Отсюда следует, что l -квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$ лишь в исключительных случаях.

Тем не менее для l -квазиэллиптической системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha|: |\alpha| < l} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3)$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [5]. Отметим также, что невозможность оценки вида (2) при $p = 1$ вытекает из результатов Орнштейна [7]. В то же время наличие оценки (3) при $p = 1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [8, 9].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [9] определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [9]. Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (3), в которой C_1 и C_2 не зависят от f .

В случае изотропного пространства Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, неравенство $|\alpha| : |\alpha| < l$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [6] показали, что при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема де Лю и Миркила [6]. При $n \geq 3$ эллиптичность дифференциального полинома порядка $l \geq 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.

Условие $n \geq 3$ в теореме существенно. Так, в [6] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В работе [10] автором и М.М. Маламудом теорема де Лю и Миркила распространена на систему операторов с постоянными коэффициентами, а также был получен ее аналог для оператора $P(x, D)$ с переменными коэффициентами. Кроме

этого, в той же работе дано полное описание слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ операторов от двух переменных и построены примеры широких классов слабо коэрцитивных, но не эллиптических операторов в шкале изотропных пространств $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.

В настоящей работе рассматривается случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l -однородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$. Ясно, что l -квазиэллиптические операторы существуют для любых l , например, $P(D) = D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}$. Изучается вопрос, при каких условиях: 1) l -квазиэллиптичность оператора от двух переменных эквивалентна его слабой коэрцитивности в анизотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, т. е. справедлив аналог теоремы де Лю и Миркила; 2) существуют слабо коэрцитивные в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, но не l -квазиэллиптические операторы. На эти вопросы в статье получены исчерпывающие ответы. Оказалось, что: 1) утверждение справедливо в том и только том случае, когда l_1 не кратно l_2 (теорема 1); 2) в случае, когда l_1 кратно l_2 , построены примеры широких классов слабо коэрцитивных в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, но не l -квазиэллиптических операторов (теорема 2).

Отметим, что часть результатов работы анонсирована (без доказательств) в работах автора и М.М. Маламуда [9, 11].

2. Обозначения и вспомогательные утверждения.

Обозначения. Пусть $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей), $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$. Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$. Пусть также $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$, $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Для натуральных чисел m, n обозначим через (m, n) их наибольший общий делитель (НОД), а через $[m, n]$ – их наименьшее общее кратное (НОК).

Через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\hat{f}(\hat{\mu})$ – преобразование Фурье (Фурье – Стильеса) функции f (меры μ); через δ – дельта-мера Дирака, а через $\chi(t)$ – функция Хевисайда в $\mathbb{R}$. Через $C^\infty(\Omega)$ обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а через $C_0^\infty(\Omega)$ – его подмножество функций, финитных (с компактным носителем) в Ω . Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha: l| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ обозначается как $\dot{W}_p^l(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [12]. Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} := \mathcal{F}f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки

$$f \mapsto T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$$

отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, финитные функции являются мультипликаторами, т. е. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

Известно полное описание алгебры $\mathcal{M}_p$ при $p = 1, 2, \infty$ (см. [12]). Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{M}$.

Предложение 1 [12]. Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье–Стилтьеса:

$$\Phi \in \mathcal{M} \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Из предложения 1 следует, что все функции $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x - h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$. Наконец, отметим, что $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ [12].

Предложение 1 также дает возможность указать примеры "элементарных" мультипликаторов в L^∞ , для которых порождающая их мера μ строится явно. Так, функция $\frac{1}{\xi_1 + i} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, поскольку является преобразованием Фурье–Стилтьеса конечной меры $\mu(t)$ на прямой с плотностью $d\mu(t) = -i\chi(t)e^{-t}dt$, где $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда:

$$\hat{\mu}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 t} d\mu(t) = -i \int_0^{+\infty} e^{it\xi_1} e^{-t} dt = -\frac{-i}{i\xi_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1 + i}.$$

Далее, для $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функция $\frac{1}{\xi_1 + \omega}$ получается из $\frac{1}{\xi_1 + i}$ суперпозицией сдвига, растяжения и отражения и, следовательно, $\frac{1}{\xi_1 + \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Наконец, функция $\frac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ как разность мультипликаторов $1 = \hat{\delta}$ и $\frac{\omega}{\xi_1 + \omega}$ (здесь δ – дельта-мера Дирака на прямой).

В работе [8] получены достаточные условия принадлежности функции $\Phi(\cdot)$ алгебре мультипликаторов $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Там же, в [8], из этого результата выведено следующее утверждение.

Предложение 2 [8]. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $P(\xi)$ – l -квазиэллиптический полином. Тогда функции

$$m_\alpha(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha}{P(\xi)}, \quad |\alpha : l| < 1$$

являются мультипликаторами в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\chi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – "срезающая" функция, $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$, $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| \leq r$ и $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| > R$, где $0 \leq r < R$.

Отметим, что "срезающая" функция $\chi(\cdot)$ в предложении 2 определена корректно, так как множество нулей $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0\}$ l -квазиэллиптического полинома $P(\xi)$ компактно (см. [8, 10]).

Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ и $l_1 > l_2$. Рассмотрим полином от двух переменных

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{\alpha_1, \alpha_2} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

с l -однородной главной частью

$$P^l(\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Пусть $d := [l_1, l_2]$ – НОК чисел l_1 и l_2 , $k := (l_1, l_2)$ – их НОД. Обозначим также

$$m_1 := \frac{d}{l_1}, \quad m_2 := \frac{d}{l_2}.$$

Ясно, что $(m_1, m_2) = 1$ и $d = km_1m_2$.

Соотношение $\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} = 1$, определяющее l -главную часть $P^l(\xi)$, можно переписать в виде $\langle \alpha, m \rangle := \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = d$. Для всех остальных мономов ξ^α , входящих в $P(\xi)$, справедливо соотношение $\langle \alpha, m \rangle \leq d - 1$. Обозначим

$$P^{l-1}(\xi) = \sum_{\langle \alpha, m \rangle = d-1} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Следующая лемма показывает, что множество $\{\alpha : \langle \alpha, m \rangle = d - 1\}$ не пусто и, значит, $P^{l-1}(\xi)$ определен корректно.

Лемма 1. Пусть $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $d = [l_1, l_2]$, $m_i = d/l_i$, $i = 1, 2$. Тогда уравнение

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = d - 1 \tag{4}$$

имеет целое неотрицательное решение.

Доказательство. При $m_1 = m_2 = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому предполагаем, что $m_1 m_2 > 1$. Так как m_1 и m_2 взаимно просты, то уравнение (4) имеет целые решения. Пусть $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ – одно из них. Тогда совокупность всех целых решений этого уравнения имеет вид

$$x_1 = x_1^0 - nm_2, \quad x_2 = x_2^0 + nm_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если x_1 и x_2 – неотрицательные целые числа, то $x_1^0 - nm_2 \geq 0$ и $x_2^0 + nm_1 \geq 0$, откуда

$$-\frac{x_2^0}{m_1} \leq n \leq \frac{x_1^0}{m_2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Т.е. уравнение (4) имеет целое неотрицательное решение, когда промежуток $\left[-\frac{x_2^0}{m_1}; \frac{x_1^0}{m_2}\right]$ содержит по крайней мере одно целое число. Длина этого промежутка

равна $\left| \frac{x_1^0}{m_2} + \frac{x_2^0}{m_1} \right| = \frac{d-1}{m_1 m_2} = k - \frac{1}{m_1 m_2}$. Если $k \geq 2$, то $k - \frac{1}{m_1 m_2} > 1$ и требуемое n найдется.

Пусть $k = 1$. Предположим противное, т.е. что

$$n < -\frac{x_2^0}{m_1} \leq \frac{x_1^0}{m_2} < n + 1$$

для некоторого целого n . Тогда $-\frac{x_2^0}{m_1} - n \geq \frac{1}{m_1}$, $n + 1 - \frac{x_1^0}{m_2} \geq \frac{1}{m_2}$ и

$$1 = (n + 1) - n \geq \frac{x_1^0}{m_2} + \frac{1}{m_2} + \frac{x_2^0}{m_1} + \frac{1}{m_1} = 1 + \frac{m_1 + m_2 - 1}{m_1 m_2} > 1.$$

Противоречие. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\alpha_i, a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим теперь, каков будет результат подстановки функций

$$\xi_i = \xi_i(t) = \alpha_i t^{m_i} + a_i, \quad t > 0, \quad i = 1, 2,$$

в полиномы $P^l(\xi)$ и $P^{l-1}(\xi)$. Применяя формулу Тейлора в точке $(\alpha_1 t^{m_1}, \alpha_2 t^{m_2})$ с приращениями a_1, a_2 , имеем

$$P^l(\alpha_1 t^{m_1} + a_1, \alpha_2 t^{m_2} + a_2) = t^d P^l(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{i=1}^2 a_i t^{d-m_i} \frac{\partial P^l}{\partial \xi_i}(\alpha_1, \alpha_2) + o(t^{d-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Аналогично

$$P^{l-1}(\alpha_1 t^{m_1} + a_1, \alpha_2 t^{m_2} + a_2) = t^{d-1} P^{l-1}(\alpha_1, \alpha_2) + o(t^{d-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Поясним написанное. В полином $P^l(\xi)$ входят мономы вида $b_\beta \xi^\beta$, для которых $\langle \beta, m \rangle = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 = d$. Поэтому

$$\begin{aligned} P^l(\alpha_1 t^{m_1}, \alpha_2 t^{m_2}) &= \sum_{\langle \beta, m \rangle = d} b_\beta (\alpha_1 t^{m_1})^{\beta_1} (\alpha_2 t^{m_2})^{\beta_2} = \\ &= \sum_{\langle \beta, m \rangle = d} b_\beta \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} t^{\langle \beta, m \rangle} = t^d P^l(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}(\alpha_1 t^{m_1}, \alpha_2 t^{m_2}) = \sum_{\langle \beta, m \rangle = d} b_\beta \beta_1 (\alpha_1 t^{m_1})^{\beta_1-1} (\alpha_2 t^{m_2})^{\beta_2} = t^{d-m_1} \frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Аналогично обосновываются формулы

$$\frac{\partial P^l}{\partial \xi_2}(\alpha_1 t^{m_1}, \alpha_2 t^{m_2}) = t^{d-m_2} \frac{\partial P^l}{\partial \xi_2}(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{и} \quad P^{l-1}(\alpha_1 t^{m_1}, \alpha_2 t^{m_2}) = t^{d-1} P^{l-1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Приведем несколько утверждений, касающихся априорных оценок в L^∞ .

Лемма Эберлейна [6]. Пусть μ – конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $c = \mu(0)$. Тогда функция $f(x) \equiv c$ равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции $M(\xi) := \hat{\mu}(\xi)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^m c_i M(\xi - \xi^i) \rightrightarrows c, \quad \text{где } c_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i = 1, \quad \xi^i \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 3 [6]. Пусть $Q(D)$ и $P(D)$ – дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

эквивалентна тождеству для их символов

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где $M(\xi)$, $N(\xi)$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 4 [5, 6]. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $Q(D)$ и $P(D)$ – дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ с l -главными символами $Q^l(\xi)$ и $P^l(\xi)$. Тогда из априорной оценки (5) вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = cP^l(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

причем $c = \mu(0)$, где μ – конечная мера, порождающая функцию $M(\xi)$ из тождества (6), т.е. $M(\xi) = \hat{\mu}(\xi)$.

3. Случай, когда l_1 не кратно l_2 .

Предложение 5. Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$ и l_1 не делится на l_2 ; $P(D)$ – оператор, слабо коэрцитивный в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Тогда его главный символ $P^l(\xi)$ не может иметь вещественных нулей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, для которых $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует точка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, такая, что $P^l(\alpha) = 0$. Выберем моном $Q(\xi) = \xi^\beta$ с условиями $\langle \beta, m \rangle = d - 1$ и $Q(\alpha) = 1$ (такой моном существует в силу леммы 1). Так как $P(D)$ слабо коэрцитивен в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, то в силу предложения 3 найдутся мультипликаторы $M(\xi)$ и $N(\xi)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что справедливо тождество

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi) = M(\xi) \left[P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots \right] + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (7)$$

Подставим в тождество (7) вектор-функцию

$$\xi = \xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) := (\alpha_1 t^{m_1} + a_1, \alpha_2 t^{m_2} + a_2), \quad t > 0, \quad (8)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. С учетом вычислений п. 2 при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$t^{d-1} = M(\xi(t)) \left[t^d P^l(\alpha) + \sum_{i=1}^2 a_i t^{d-m_i} \frac{\partial P^l}{\partial \xi_i}(\alpha) + t^{d-1} P^{l-1}(\alpha) + o(t^{d-1}) \right] + N(\xi(t)). \quad (9)$$

Проанализируем последнее тождество. По нашему предположению, $P^l(\alpha) = 0$. Так как l_1 не делится на l_2 , то $d > l_1 > l_2$, откуда $1 < m_1 < m_2$ и, значит, $d - 1 > d - m_i$, $i = 1, 2$. Поэтому выражение в (9) под знаком суммы есть $o(t^{d-1})$. Если и $P^{l-1}(\alpha) = 0$, то вся правая часть (9) есть $o(t^{d-1})$, и мы получаем противоречие. Значит, $c^{-1} := P^{l-1}(\alpha) \neq 0$, и тождество (9) принимает вид

$$t^{d-1} = M(\xi(t)) \left[c^{-1} t^{d-1} + o(t^{d-1}) \right] + N(\xi(t)). \quad (10)$$

Разделив обе части (10) на t^{d-1} и устремив $t \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M(\xi(t)) = c (\neq 0) \quad \text{для всех } \xi(t) \text{ вида (8)}. \quad (11)$$

Покажем, что последнее соотношение невозможно. В силу леммы Эберлейна, найдутся числа $m \in \mathbb{N}$, $c_i > 0$, $c_1 + \dots + c_m = 1$ и векторы $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$\left| \sum_{i=1}^m c_i M(\xi - \xi^i) \right| \leq \frac{|c|}{2} \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Подставим в это неравенство функции $\xi = \xi(t)$ вида (8). Тогда функции $\tilde{\xi}(t) := \xi(t) - \xi^i$ будут также иметь вид (8). Переходя в полученном неравенстве

$$\left| \sum_{i=1}^m c_i M(\tilde{\xi}(t)) \right| \leq \frac{|c|}{2}, \quad t > 0,$$

к пределу при $t \rightarrow +\infty$ с учетом (11), имеем $|c| \leq \frac{|c|}{2}$, что неверно при $c \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. $\square$

Предложение 6. Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$ и l_1 не делится на l_2 ; $P(D)$ – оператор, слабо коэрцитивный в $W_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Тогда его главный символ $P^l(\xi)$ не может иметь вещественных нулей вида $\alpha = (\alpha_1, 0)$ и $\alpha = (0, \alpha_2)$, $\alpha_i \neq 0$.

Доказательство. (i) Пусть, от противного, $P^l(\alpha_1, 0) = 0$ для некоторого $\alpha_1 \neq 0$. Тогда моном $\xi_1^{l_1}$ не входит в запись $P^l(\xi)$. Будем говорить, что точка $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ соответствует полиному $P(\xi)$, если в его запись входит моном ξ^β . Проведем в плоскости (α_1, α_2) вертикальную прямую $\alpha_1 = l_1 - 1$. В полуплоскости $\alpha_1 \geq l_1 - 1$ нет точек, соответствующих $P(\xi)$, кроме, возможно, точки $(l_1 - 1, 0)$. В самом деле, на прямой $\alpha_1 = l_1$ такой точкой могла быть лишь $(l_1, 0)$, но она не соответствует $P(\xi)$ по нашему предположению. Если же $\alpha_1 = l_1 - 1$ и $\alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1$, то $\alpha_2 \leq l_2/l_1$. По условию, $l_2/l_1 < 1$, поэтому $\alpha_2 = 0$.

Будем поворачивать прямую $\alpha_1 = l_1 - 1$ около точки $(l_1 - 1, 0)$ в сторону против положительного направления оси α_1 (против часовой стрелки) до тех пор, пока на ней не появится хотя бы одна точка, отличная от $(l_1 - 1, 0)$, соответствующая $P(\xi)$. Обозначим через l' вектор, соответствующий этой прямой. По построению,

эта прямая будет l' -главной для $P(\xi)$. Тогда l' -главная часть символа $P(\xi)$ имеет вид

$$P^{l'}(\xi) = a_{l_1-1,0} \xi_1^{l_1-1} + \sum_{|\beta:l'|=1, \beta \neq (l_1-1,0)} a_\beta \xi^\beta,$$

где одно из чисел a_β в сумме отлично от нуля. Ясно, что если $Q(\xi) = \xi_1^{l_1-1}$, то $Q^{l'}(\xi) = Q(\xi)$. Поскольку $Q(D)$ подчинен $P(D)$ (в смысле оценки (5)), то, согласно предложению 4, $Q^{l'}(\xi) \equiv cP^{l'}(\xi)$, т. е.

$$\xi_1^{l_1-1} \equiv c \left[a_{l_1-1,0} \xi_1^{l_1-1} + \sum_{|\beta:l'|=1, \beta \neq (l_1-1,0)} a_\beta \xi^\beta \right],$$

откуда следуют соотношения

$$ca_{l_1-1,0} \equiv 1, \quad \sum_{|\beta:l'|=1, \beta \neq (l_1-1,0)} ca_\beta \xi^\beta \equiv 0,$$

противоречивые ввиду сделанных выше предположений на числа a_β . Таким образом, $P^l(\xi)$ не может иметь нулей вида $(\alpha_1, 0)$, где $\alpha_1 \neq 0$.

(ii) Пусть теперь $P^l(0, \alpha_2) = 0$ для некоторого $\alpha_2 \neq 0$. Доказательство для этого случая совершенно аналогично и получается заменой в предыдущем рассуждении оси α_1 на ось α_2 и наоборот. Изменения этого рассуждения состоят в следующем. Прямая $\alpha_2 = l_2 - 1$ пересекает l -главную прямую в точке $(l_1/l_2, l_2 - 1)$, которая не может соответствовать символу $P(\xi)$, поскольку по условию число l_1/l_2 не целое. Выберем на прямой $\alpha_2 = l_2 - 1$ целую точку с максимальной абсциссой, соответствующую $P(\xi)$. Эта точка, как уже было отмечено, не лежит на l -главной прямой. Теперь будем поворачивать прямую $\alpha_2 = l_2 - 1$ по часовой стрелке, но не около точки $(0, l_2 - 1)$, а около выбранной точки. Далее точно так же, как в пункте (i), получаем противоречие с предложением 4. $\square$

Доказанные предложения 5 и 6 означают, что в случае, когда l_1 не кратно l_2 , l -главный символ $P^l(\xi)$ слабо коэрцитивного в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ оператора $P(D)$ обращается в нуль лишь при $\xi = 0$. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$. Если $[l_1, l_2] > l_1$, то слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ эквивалентна его l -квазиэллиптичности.

4. Случай, когда l_1 кратно l_2 .

Теорема 2. Пусть $l := (kt, k) \in \mathbb{N}^2$, $k, t \geq 2$; $l' := ((k-1)t, k-1)$, $R(D)$ – l' -квазиэллиптический оператор, $S(D_1)$ – обыкновенный дифференциальный оператор порядка t , полный символ которого невырожден, т.е. $S(\xi_1) \neq 0$ при всех $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $P(D)$ вида

$$P(D) = S(D_1)R(D)$$

слабо коэрцитивен в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Покажем, что функции

$$\Phi_\gamma(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\gamma}{P(\xi)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2), \quad \text{если } |\gamma : l| < 1. \quad (12)$$

Здесь $\chi(\xi)$ – соответствующая "срезающая" функция (см. предложение 2).

Пусть сначала $\gamma_2 < k - 1$ и $\gamma_1 \geq m$. Вместе с неравенством $\frac{\gamma_1}{km} + \frac{\gamma_2}{k} < 1$ это дает $\frac{\gamma_1 - m}{(k-1)m} + \frac{\gamma_2}{k-1} < 1$. Тогда $\Phi_\gamma \in \mathcal{M}$ как произведение мультипликаторов $m_1(\xi) := \frac{\xi_1^m}{S(\xi_1)}$ и $m_2(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi_1^{\gamma_1-m} \xi_2^{\gamma_2}}{R(\xi)}$. Действительно, так как $S_1(\xi_1) \neq 0$ при $\xi_1 \in \mathbb{R}$, т.е. $S_1(\xi_1) = A(\xi_1 - \omega_1) \dots (\xi_1 - \omega_m)$, где $A \neq 0$ и $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, то

$$m_1(\xi) = \frac{\xi_1^m}{S(\xi_1)} = \frac{1}{A} \prod_{k=1}^m \frac{\xi_1}{\xi_1 - \omega_k} \in \mathcal{M}$$

как произведение "элементарных" мультипликаторов (см. п. 2). Функция $m_2 \in \mathcal{M}$, так как $\tilde{\gamma} := (\gamma_1 - m, \gamma_2)$ удовлетворяет условию $|\tilde{\gamma} : l'| < 1$ и $R(\xi) - l'$ -квазиэллиптический полином (предложение 2). Таким образом, $\Phi_\gamma \in \mathcal{M}$ при $\gamma_1 \geq m$, $\gamma_2 < k - 1$.

Если $\gamma_2 < k - 1$ и $\gamma_1 < m$, то, аналогично предыдущему, $\Phi_\gamma \in \mathcal{M}$ как произведение двух мультипликаторов $m_1(\xi) := \frac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)}$ и $m_2(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi_2^{\gamma_2}}{R(\xi)}$.

Наконец, рассмотрим случай $\gamma_2 = k - 1$. Тогда $\gamma_1 < m$. Пусть $R(\xi) = c_0 \xi_2^{k-1} + \dots$, $c_0 \neq 0$, где многоточием обозначена сумма мономов $a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$, для которых $\alpha_2 < k - 1$. Тогда, вычитая из Φ_γ мультипликатор $m_1(\xi) := c_0^{-1} \chi(\xi) \frac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)}$, получим:

$$\Phi_\gamma(\xi) - m_1(\xi) = \chi(\xi) \frac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)} \cdot \frac{\xi_2^{k-1} - c_0^{-1} R(\xi)}{R(\xi)}.$$

Числитель последней дроби содержит ξ_2 в степени, меньшей $k - 1$, и поэтому функция $m_2(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi_2^{k-1} - c_0^{-1} R(\xi)}{R(\xi)}$ – произведение функций вида $\chi(\xi) \frac{\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}}{R(\xi)}$, для которых $|\alpha : l'| < 1$ и $\alpha_2 < k - 1$. По доказанному выше, $m_2 \in \mathcal{M}$. Поэтому $\Phi_\gamma = m_1(1 + c_0 m_2) \in \mathcal{M}$.

Теперь покажем, что из включений (12) вытекает оценка

$$\sum_{|\gamma : l| < 1} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (13)$$

означающая слабую коэрцитивность $P(D)$ в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим тождество

$$\xi^\gamma = \Phi_\gamma(\xi) P(\xi) + (1 - \chi(\xi)) \xi^\gamma, \quad |\gamma : l| < 1.$$

Функция $\Psi_\gamma(\xi) := (1 - \chi(\xi)) \xi^\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$. Тогда $\xi^\gamma = \Phi_\gamma(\xi) P(\xi) + \Psi_\gamma(\xi)$, где $\Phi_\gamma, \Psi_\gamma \in \mathcal{M}$, $|\gamma : l| < 1$. Оценка (13) вытекает теперь из предложения 3. $\square$

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Бесов О.В. О коэрцитивности в анизотропном пространстве С.Л. Соболева // Матем. сборник. – 1967. – **73** (115), № 4. – С. 585–599.
4. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Мир, 1959. – 252 с.
5. Маламуд М.М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Труды ММО. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
6. De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. – 1964. – **8**. – P. 112–124.
7. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – **11**. – P. 40–49.
8. Belinsky E.S., Dvejrin M.Z., and Malamud M.M. Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators // Russian J. of Math. Phys. – 2005. – **12**, № 1. – P. 6–16.
9. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ // ДАН. – 2004. – **397**, № 4. – С. 453–458.
10. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
11. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ // ДАН. – 2007. – **415**, № 5. – С. 583–588.
12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

D. V. Limanskii

On minimal differential polynomials in two variables weakly coercive in the anisotropic Sobolev spaces.

Minimal differential polynomials with quasihomogeneous principal parts which symbols depend on two variables are considered. The criterion of existence of weakly coercive non-quasielliptic operators in the anisotropic Sobolev spaces is obtained and also the example of a wide class of such operators is constructed.

Keywords: differential polynomial, weak coercivity, quasiellipticity.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
4125aa@gmail.com

Получено 20.07.16

УДК 517.9

©2016. А. С. Миненко

О МИНИМИЗАЦИИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДОМ РИТЦА

Исследуется вариационным методом одна нелинейная проблема, когда на свободной границе задано условие Бернулли в виде неравенства. Приводится теорема существования. Доказывается сходимость приближенного решения, основанного на методе Ритца, к точному решению в определенных метриках.

Ключевые слова: свободная граница, функционал, метод Ритца, сходимость, закон Бернулли, теорема существования.

В работах [1–6] изучается нелинейная гидродинамическая задача, когда на свободной границе задано условие типа Бернулли в виде неравенства. Анализ имеющихся результатов по этой проблеме и библиографию можно найти в работе [3]. В [7–10] изложен метод минимизации нелинейного функционала, возникающего при решении теплофизической задачи типа Стефана. В настоящей работе эти результаты получили дальнейшее развитие при решении следующей гидродинамической задачи.

1. Постановка задачи. Пусть G – область, ограниченная снизу отрезком $A = (0 \leq x \leq a, y = 0)$, по бокам вертикалями $Q_1 = (x = 0, 0 \leq y \leq c)$, $Q_2 = (x = a, 0 \leq y \leq b)$ и сверху кривой $P : y = g(x), 0 \leq x \leq a$, где $c < b$, $g(0) = c, g(a) = b$. Относительно функции $g(x)$ предполагается, что $g(x) \in C^2[0, a]$ и кривая $y = g(x)$ имеет горизонтальные участки $\Gamma_1 : y = c$ при $x \in [0, a_1]$, $\Gamma_2 : y = b$ при $x \in [a_2, a]$, где числа a_1 и a_2 такие, что $a_1 < a_2$ и, кроме того, $g(x)$ – монотонно возрастающая кривая. Пусть далее $S : y = g(x)$ при $x \in [a_1, a_2]$ и γ – достаточно гладкая кривая, расположенная в $G \cup S$. При этом одним концом γ служит точка (a_1, c) , а другим – (a_2, b) . Через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать односвязную область, ограниченную отрезками A, Q_1, Q_2 и кривой $\Gamma = \Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу со свободной границей γ . Требуется определить пару (ψ, γ) , где $\psi(x, y)$ – функция тока, по следующим условиям: функция $\psi(x, y)$ в области G_γ удовлетворяет в классическом смысле уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, (x, y) \in G_\gamma \quad (1)$$

непрерывна в $\bar{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируема в $\bar{G}_\gamma$, исключая, может быть, угловые точки, и удовлетворяет условиям

$$\psi(x, y) = 0, (x, y) \in A, \quad (2)$$

$$\psi_x(x, y) = 0, (x, y) \in Q_1 \cup Q_2, \quad (3)$$

$$\psi(x, y) = 1, (x, y) \in \Gamma; \quad \psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geq \nu^2, (x, y) \in \gamma, \quad (4)$$

(здесь $\nu = \text{const} > 0$), причем, на части γ , лежащей внутри G , всегда выполняется равенство.

Настоящая статья посвящена приближенному решению задачи (1)–(4) методом Ритца и исследованию сходимости приближений Ритца к решению задачи (1)–(4).

2. Теорема существования. Задача (1)–(4) эквивалентна проблеме минимума функционала

$$I(\psi, \gamma) = \iint_{G_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \nu^2) dx dy \quad (5)$$

на множестве R допустимых пар (ψ, γ) , удовлетворяющих следующим условиям: γ – жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки (a_1, c) и (a_2, b) , причем, все точки γ , исключая точку (a_1, c) , расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ , равна единице на Γ , нулю на отрезке, имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ , при этом $I(\psi, \gamma) < \infty$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$\nu b < 1, \quad \nu \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2} dx + \frac{a - a_2}{b} > \frac{a - a_1}{c} \quad (6)$$

и пусть $g(x) \in C^2[0, a]$, $g(x) = c$ при $x \in [0, a_1]$, $g(x) = b$ при $x \in [a_2, a]$, где $a_1 < a_2$ и, кроме того, $g(x)$ – монотонно возрастающая кривая при $x \in [0, a]$. Тогда существует пара (ψ, γ) , являющаяся решением задачи (1)–(4) и удовлетворяющая следующим условиям: $\psi(x, y)$ – функция непрерывная в $\bar{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая в $\bar{G}_\gamma$, $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ ; γ – монотонно возрастающая кривая, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G .

Доказательство. Пусть d – точная нижняя грань функционала (5) на множестве R . Используя вариационную природу задачи (1)–(4), метод симметризации Штейнера и внутренних вариаций Шиффера [11], устанавливается существование пары $(\psi, \gamma) \in R$, удовлетворяющей условиям (1)–(4) и такой, что $I(\psi, \gamma) = d$, $\psi \in C^2(G_\gamma) \cap C^1(\bar{G}_\gamma)$. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3] (см. теорему 1).

Покажем теперь, что область G_γ не может целиком совпадать с G . Предположим противное. Пусть G_γ совпадает с G . Тогда из формулы Грина следует, что

$$\iint_G \Delta \psi dx dy = \int_0^{a_1} \psi_y(x, c) dx + \int_\gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_{a_2}^a \psi_y(x, b) dx - \int_0^a \psi_y(x, 0) dx = 0.$$

Далее справедливы представления:

$$\psi(x, y) = (y - c)\alpha_1(x, y) + 1, \quad (x, y) \in \Pi_1 = \{0 \leq x \leq a_1, c - \delta_1 \leq y \leq c\},$$

$$\psi(x, y) = y\alpha(x, y), (x, y) \in \Pi = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \delta\},$$

$$\psi(x, y) = (y - b)\alpha_2(x, y) + 1, (x, y) \in \Pi_2 = \{a_2 \leq x \leq a, b - \delta_2 \leq y \leq b\},$$

где $\alpha(x, y)$, $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ – достаточно гладкие функции, а δ , δ_1 и δ_2 – некоторые малые величины. Тогда имеем

$$\int_0^{a_1} \alpha_1(x, c) dx + \nu \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2} dx + \int_{a_2}^a \alpha_2(x, b) dx = \int_0^a \alpha(x, 0) dx.$$

Применяя затем принцип максимума для гармонических функций, можно получить следующие оценки: $\alpha_1(x, c) \geq 1/c$ при $0 \leq x \leq a_1$, $\alpha_2(x, b) \geq 1/b$ при $a_2 \leq x \leq a$ и $\alpha(x, 0) \leq 1/c$ при $0 \leq x \leq a$. Действительно, имеем: $\psi(x, y) - \psi_0(x, y) \leq 0$ при $(x, y) \in \Pi_0 = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq c\}$, где $\psi_0(x, y) = y/c$. Тогда $\psi(x, y) - \psi_0(x, y) = (y - c)\alpha_1(x, y) + 1 - y/c$ при $x \in [0; a_1]$. Откуда следует, что $\alpha_1(x, c) \geq 1/c$ при $0 \leq x \leq a_1$. Аналогичным образом получим другие оценки. Отсюда следует неравенство $a_1/c + \nu \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2} dx + (a - a_2)/b \leq a/c$, которое противоречит второму неравенству в (6).

Наконец, используя метод внутренних вариаций Шиффера [11], аналогично тому как это сделано в работе [16] (см. теорему 2), устанавливается аналитичность свободной границы γ . Построенное решение (ψ, γ) является единственным в силу [12] в классе функций $\psi_y > 0$ в G_γ . Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим случай $a_1 = 0$, $a_2 = a$, тогда второе неравенство в (6) запишется в таком виде

$$\nu c \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2} dx > a.$$

Решив теперь неравенство

$$\nu c [g(a) - g(0)] > a$$

относительно c , заключаем, что если величины $(a - a_2)$ и a_1 достаточно малы, а параметры a и c выбираются из условий

$$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a}{\nu}} < c < \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a}{\nu}}, \quad \nu b^2 \geq 4a,$$

тогда второе неравенство в (6) будет всегда удовлетворяться.

3. Приближенное решение задачи (1)–(4). Согласно известной методике Фридрихса [12] представим функционал (5) в классе функций $\psi_\gamma > 0$ в G_γ следующим образом:

$$I_1(z) = \iint_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right)^2 + \frac{1}{g^2} + \nu^2 z_\varphi^2 \right] \frac{g}{z_\varphi} dx d\varphi, \quad (7)$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$, а $z(x, \varphi)$ – решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (7) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \left\{ z : z \in C^1(\bar{\Delta}), z(a, 1) = 1, z(x, 0) = 0, \min_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_\varphi > 0 \right\}. \quad (8)$$

Далее, пусть $z_0(x, \varphi)$ – функция соответствующая классическому решению (ψ, γ) задачи (1)–(4). Очевидно, что $z_0 \in D_z$ и $z_0(x, \varphi) \in W_2^1(\Delta)$.

Лемма 1. *Элемент $z_0(x, \varphi)$ доставляет наименьшее значение функционалу (7) на множестве (8).*

Доказательство. Из формулы Фридрихса [12] следует, что

$$I_1(z) = I_1(z_0) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(z_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1 - \varepsilon) \frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon, \quad (9)$$

где

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 2 \iint_{\Delta} \left\{ \left[z_{0\varphi} \left(\delta z_x + \frac{g_x}{g} \delta z \right) - \delta z_\varphi \left(z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0 \right) \right]^2 + \frac{\delta z_\varphi^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{\varepsilon\varphi}^3} dx d\varphi, \quad (10)$$

z – произвольный элемент из D_z , $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Второе слагаемое справа в (9), являющееся первой вариацией функционала (7), вычисленной на элементе z_0 , неотрицательно согласно [3]. Следовательно, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу (7) на множестве (8), так как $d^2 I_1(z_\varepsilon)/d\varepsilon^2$ – положительно определенный функционал на вариациях $\delta\varepsilon = z - z_0$. Лемма доказана.

В терминах функции $z(x, \varphi)$ задача (1)–(4) перепишется следующим образом:

$$-\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)'_x + \frac{1}{g^2} \cdot \left(\frac{1}{z_\varphi} \right)'_\varphi = 0, \quad (x, \varphi) \in \Delta,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in [0, a],$$

$$\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right) \Big|_{x=a} = 0, \quad \varphi \in [0, 1],$$

$$\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)^2 + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{1}{z_\varphi^2} \geq \nu^2, \quad x \in [0, a], \quad \varphi = 1.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от $g(x) : z = z(x, \varphi; g(x))$, $(x, \varphi) \in \bar{\Delta}$. Непосредственно проверяется, что при $g(x) = b$, $x \in [0, a]$ решением последней задачи является функция $z(x, \varphi) = \varphi$, $(x, \varphi) \in \bar{\Delta}$.

Будем минимизировать функционал (7) на множестве (8) при помощи сумм

$$z_n(x, \varphi; a_{kj}(g)) = z_n(x, \varphi; g) = z_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(g) x^j \varphi^k, \quad \sup_{1 \leq k \leq m} (k + m_k) = n. \quad (11)$$

Выделим в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r , где

$$r = \sum_{k=1}^m (m_k + 1), \quad D_r = E_r^0 \cap G_r^+, \quad E_r^0 : \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0,$$

$$G_r^+ = \left\{ a_{kj} : \min_{(x, \varphi) \in \Delta} z_{n\varphi}(x, \varphi) > 0 \right\},$$

неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda a_1^q &= 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots, m_p, \quad p = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 &= 0, \quad I_2(a_{kj}) = I_1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что функция $I_2(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке a_{kj}^* множества D_r , лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [3]. Тогда в точке a_{kj}^* частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Следовательно, система уравнений (12) имеет решение.

Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} от $g(x)$.

Лемма 2. Пусть система Ритца имеет решение при некотором $y = g_0(x) \in C^2[0, a]$. Тогда решение $a_{kj}(g), \lambda(g)$ системы (12) непрерывно зависит от $g(x)$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x)$.

Доказательство. Выберем размерность пространства E_r произвольным образом, обозначив левую часть системы уравнений (12) через $R_{pq}(a_{kj}, \lambda; g)$, а решение, соответствующее элементу $g_0(x)$, через a_{pq}, λ . Тогда имеют место следующие равенства:

$$R_{pq}(a_{kj}, \lambda; g_0) = 0, \quad g = 0, 1, \dots, m_p, \quad p = 1, 2, \dots, m; \quad R_{oo}(a_{kj}, g_0) = 0,$$

где

$$R_{oo}(a_{kj}, g_0) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1.$$

Положим также

$$L = \frac{\partial (R_{pq}(a_{kj}, \lambda, g_0), R_{oo}(a_{kj}, g_0))}{\partial (a_{\alpha\beta}, \lambda)}, \quad L = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta} & 1 \\ a_1^\beta & 0 \end{pmatrix},$$

здесь

$$\begin{aligned}
 b_{\alpha\beta} = & 2 \iint_{\Delta} \left[\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g} \frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}} \right) z_{n\varphi}^2 - \right. \\
 & - \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}} \right) z_{n\varphi} \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} - \\
 & - \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) z_{n\varphi} \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} + \\
 & \left. + \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right)^2 + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} \right] \frac{g dx d\varphi}{z_{n\varphi}^3}.
 \end{aligned}$$

Квадратная матрица L имеет порядок $(r+1)$. Покажем, что $\det L \neq 0$. Предположим противное. Пусть $\det L = 0$. Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$L\eta = 0$$

имеет ненулевое решение $\eta = (\eta_{oo}, \eta_{\alpha\beta}) = (\eta_{oo}, \eta_1)$, $\eta_1 = (\eta_{\alpha\beta})$. Умножая теперь систему линейных уравнений соответственно на $\eta_{\alpha\beta} \cdot \eta_{pq}$, а затем, произведя суммирование по p, q, α и β , получим, учитывая что

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} \eta_{\alpha\beta} a_1^\beta = 0,$$

следующее выражение

$$\iint_{\Delta} \left\{ \left[z_{n\varphi} \left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right) - z_\varphi \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \right]^2 + \frac{z_\varphi^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{n\varphi}^3} dx d\varphi = 0,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad z = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} \eta_{kj} x^j \varphi^k.$$

Выражение стоящее слева обращается в ноль тогда и только тогда, когда

$$z(x, \varphi) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} \eta_{kj} x^j \varphi^k \equiv 0, \quad (x, \varphi) \in \bar{\Delta}.$$

Отсюда следует, что $\eta_{\alpha\beta} = 0$, $\beta = 0, 1, \dots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Тогда из того, что $L\eta = 0$, следует, что $\eta_{oo} = 0$. Таким образом, $\eta = (\eta_{\alpha\beta}, \eta_{oo})$ является нулевым решением системы линейных алгебраических уравнений. Получаем противоречие. Следовательно, $\det L \neq 0$. Применяя теперь теорему о неявных функциях, получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Итак, решив систему уравнений (12) при каждом n , можно затем построить последовательность приближений (11) в виде $z_n(x, \varphi; a_{kj}^*) = z_n^*$. Приближения z_n^*

образуют минимизирующую последовательность для функционала (7) на множестве (8) (доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3]).

Последовательность функций $z_n(x, \varphi)$ позволяет приближенно для задачи (1)–(4) найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_n(x, c)$ функций $\psi_n(x, y)$, являющихся линиями тока. Здесь значения постоянной величины c принадлежат промежутку $[0; 1]$. При этом имеем:

$$\gamma_n : y_n(x, 1) = g(x)z_n(x, 1) = g(x) \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j,$$

$$y_n(x, c) = g(x)z_n(x, c) = g(x) \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j c^k,$$

где $n = \sup_{1 \leq k \leq m} (k + m_k)$, $c \in [0, 1]$, (ψ_n, γ_n) – приближенное решение задачи (1)–(4).

4. Сходимость приближений Ритца z_n^* в $C(\bar{\Delta})$. Установим теперь сходимость приближенных решений (11), построенных по методу Ритца, к точному решению $z_0(x, \varphi)$, соответствующему решению (ψ, γ) задачи (1)–(4). Справедлива лемма.

Лемма 3. Пусть функция $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, где $l \geq 2$. Тогда можно построить допустимый многочлен

$$u_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} x^j \varphi^k, \quad n \leq m$$

такой, что

$$\|z_0 - u_n\|_{W_2^1(\Delta)}^2 = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right). \quad (13)$$

Доказательство. Введем новые переменные (ξ, ς) следующим образом:

$$x = 2a(\tau - t_2), \quad \cos \frac{\xi}{2} = 1 - \tau^2, \quad \varphi = 2(\theta - t_1), \quad \cos \frac{\varsigma}{2} = 1 - \theta^2,$$

где t_1, t_2 – произвольные числа из интервала $(0; 1/2)$. Тогда прямоугольник Δ перейдет в прямоугольник $\Delta_1 = (\xi_1 < \xi < \xi_2, \varsigma_1 < \varsigma < \varsigma_2)$, где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 \arccos(1 - t_2^2), \quad \xi_2 = 2 \arccos \left[1 - \left(t_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right], \\ \varsigma_1 &= 2 \arccos(1 - t_1^2), \quad \varsigma_2 = 2 \arccos \left[1 - \left(t_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Положим теперь $z_0(x(\xi), \varphi(\varsigma)) = u(\xi, \varsigma)$. Очевидно, что $u(\xi, \varsigma) \in W_2^l(\Delta_1)$. Продолжим затем функцию $u(\xi, \varsigma)$ на прямоугольник $\Delta^* = (0 < \xi < \pi, 0 < \varsigma < \pi)$ с

сохранением класса [13] и обозначим продолженную функцию через $u^*(\xi, \varsigma)$. Это продолжение всегда можно осуществить таким образом, чтобы функция u^* и все ее производные до порядка l включительно обращались в ноль в некоторой приграничной полоске области Δ^* . Разложим функцию $u^*(\xi, \varsigma)$ в ряд Фурье по косинусам

$$u^*(\xi, \varsigma) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi) \cos k\varsigma, \quad b_k(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u^*(\xi, \varsigma) \cos k\varsigma d\varsigma.$$

Положим

$$\sigma_n(\xi, \varsigma) = \sum_{k=0}^n b_k(\xi) \cos k\varsigma, \quad \rho_n(\xi, \varsigma) = u^*(\xi, \varsigma) - \sigma_n(\xi, \varsigma)$$

и оценим интеграл

$$F(\rho_n) = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{\partial \rho_n}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial \varsigma} \right)^2 + \rho_n^2 \right] d\xi d\varsigma,$$

пользуясь равенством Парсеваля. Тогда получим $F(\rho_n) \leq \frac{1}{(n+1)^{2(l-1)}} \|u^*\|_{W_2^l(\Delta^*)}^2$. Возвратимся затем к старым переменным (x, φ) . Для этого рассмотрим функцию

$$R(x, \varphi) = z_0(x, \varphi) - S(x, \varphi) = \rho_n(\xi(x), \varsigma(\varphi)), \quad (\xi, \varsigma) \in \Delta_1,$$

где

$$\begin{aligned} S(x, \varphi) &= \sigma_n(\xi(x), \varsigma(\varphi)) = \sum_{k=0}^n b_k(\xi(x)) \cos k\varsigma(\varphi) = \\ &= \sum_{k=0}^n b_k(\xi(x)) \cos \{2k \arccos[1 - \theta^2(\varphi)]\} = \sum_{k=0}^{4n} f_k(x) \varphi^k. \end{aligned}$$

Далее, разложив функцию $\sigma_n(\xi, \varsigma)$ в ряд Фурье по косинусам

$$\sigma_n(\xi, \varsigma) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(\varsigma) \cos i\xi, \quad d_i(\varsigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_n(\xi, \varsigma) \cos i\xi d\xi$$

и вновь повторив проделанные выше преобразования, построим многочлен $Q_n(x, \varphi)$. Однако он может оказаться недопустимым. Поэтому представим его в следующем виде:

$$Q_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi) + p(x),$$

где

$$T_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^m a_{kj} x^i \varphi^k, \quad p(x) = \sum_{i=0}^m a_{0i} x^i.$$

Тогда из оценок

$$\int_0^a p^2(x)dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-1)}}\right), \quad \int_0^a \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right)$$

следует, что условие (13) выполняется и $T_n(x, 0) = 0$, $T_n(a_1, 1) = 1$; если последнее условие не выполняется, необходимо рассмотреть многочлен $\tilde{T}_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi)/T_n(a_1, 1)$. Полагая теперь $u_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi)$, можно для всякого $\varepsilon > 0$ указать номер N степени многочлена $Q_n(x, \varphi)$, начиная с которого $\|z_0 - Q_n\|_{C^1(\bar{\Delta})} < \varepsilon$, а тогда и $\|z_0 - u_n\|_{C^1(\bar{\Delta})} < 2\varepsilon$. Поэтому $\min T_{n\varphi} > 0$ при $(x, \varphi) \in \bar{\Delta}$. Лемма доказана.

Перейдем к исследованию сходимости приближений (11).

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и пусть $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, когда $l \geq 6$. Тогда последовательность приближений Рунца (11) сходится к точному решению $z_0(x, \varphi)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$ и $W_2^1(\Delta)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (11), коэффициенты которых удовлетворяют системе (12), образуют минимизирующую последовательность z_n^* для функционала (7) на множестве (8). Следовательно, имеем

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, так как, согласно лемме 1, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(z)$ на множестве D_z .

Далее, для второй вариации функционала (10) справедлива оценка

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \leq \alpha \|\delta z\|_{W_2^1(\Delta)}^2$$

при некоторой постоянной α , когда $\delta z = z - z_0$, а z — произвольный элемент из D_z . Поэтому, если $u_n(x, \varphi)$ — многочлен, определенный в лемме 3, тогда, используя формулу (9) и неотрицательность первой вариации функционала (7) на элементе z_0 , получим

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \leq I_1(u_n) - I_1(z_0) = O\left(\frac{1}{n^{(l-2)}}\right),$$

так как

$$\left. \frac{dI_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{a_1}^a \left[\nu^2 - \left(\frac{z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0}{z_{0\varphi}} \right)^2 - \frac{1}{g^2 z_{0\varphi}^2} \right] g \delta z(x, 1) dx \leq \beta \|\delta z\|_{W_2^1(\Delta)}$$

при некоторой постоянной β и $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z_n^* - z_0)$.

Затем, опять воспользовавшись формулой (9), приходим к неравенству

$$\int_0^1 (1 - \varepsilon) \frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon \leq \varepsilon_n. \quad (14)$$

Применяя теперь теорему А.А. Маркова [14], согласно которой максимум модуля производной многочлена n -ой степени на промежутке длины h не превосходит произведения $2n^2/h$ на максимум модуля самого многочлена, получим, полагая $\eta_n(x, \varphi) = z_n^*(x, \varphi) - z_0(x, \varphi)$, следующие оценки:

$$\max_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_{\varepsilon\varphi}(x, \varphi) \leq 2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0 + M_n),$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \max_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_0(x, \varphi), \quad M_0 = \max_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_{0\varphi}(x, \varphi), \\ M_n &= \max_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} |\eta_n(x, \varphi)|, \quad \max_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_{n\varphi} \leq 2(A_0 + M_n)n^2. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (14) следует, что

$$\int_0^1 \frac{(1-\varepsilon)d\varepsilon}{b[2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0 + M_n)]^3} \iint_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 dx d\varphi \leq \int_0^1 (1-\varepsilon) \iint_{\Delta} \frac{\delta z_{\varphi}^2}{g z_{\varepsilon\varphi}^3} d\varepsilon dx d\varphi \leq \frac{\varepsilon_n}{2},$$

где $\eta_n = \delta z = z_n^* - z_0$. Отсюда, после интегрирования по ε , вытекает оценка

$$\iint_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2(x, \varphi) dx d\varphi \leq \mu_n, \quad (15)$$

где

$$\mu_n = 8M_0^2 b [M_0 + n^2(A_0 + M_n)] \varepsilon_n.$$

Используя неравенство Коши с ε и первое слагаемое в подынтегральном выражении (10), можно получить

$$(1 - \varepsilon_1) \iint_{\Delta} z_{0\varphi}^2 \left(\eta_{nx} + \frac{g_x}{g} \eta_n \right)^2 dx d\varphi \leq \frac{\mu_n}{cb} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) \iint_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 \left(z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0 \right)^2 dx d\varphi,$$

где ε_1 – некоторое достаточно малое число. Вновь применяя неравенство Коши и учитывая, что $\min z_{0\varphi} > 0$ при $(x, \varphi) \in \bar{\Delta}$, приходим к оценке

$$\iint_{\Delta} \eta_{nx}^2 dx d\varphi \leq R_1 \iint_{\Delta} \eta_n^2 dx d\varphi + R_2 \iint_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 dx d\varphi$$

при некоторых постоянных R_1 и R_2 . Тогда из (14) и (15) следуют соотношения

$$\iint_{\Delta} \eta_n^2(x, \varphi) dx d\varphi \leq c_1 \mu_n, \quad \iint_{\Delta} \eta_{nx}^2(x, \varphi) dx d\varphi \leq c_2 \mu_n, \quad (16)$$

где c_1 и c_2 – постоянные. Для завершения доказательства теоремы применим результаты Л.В. Канторовича по минимизации квадратичных функционалов методом Ритца (см. [14, стр. 358–362] и [15, стр. 32–35]). При этом учтем порядок величины ε_n , если $l = 6$. Тогда получим неравенство

$$\sqrt{M_n} \leq A_1 \sqrt{\frac{1}{n^2} \ln n + \frac{1}{n^2} \ln M_n + \frac{1}{n} A_2}, \quad (17)$$

здесь A_1 и A_2 некоторые постоянные. Из последнего неравенства следует, что $M_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из неравенств (15) и (16) будет следовать утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $g(x) = b$, $x \in [0, a]$, получим, что $z_0(x, \varphi; b) = \varphi \in W_2^l(\Delta)$, $l \geq 6$, хотя на самом деле l может быть любым целым числом, т.е. получим сходимость $z_n(x, \varphi; b)$ к $z_0(x, \varphi; b)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$. Учитывая, что $z_n(x, \varphi; g)$ непрерывно зависит от $g(x) \in C^2[0, a]$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x) = b$, тогда и предельная функция $z_0(x, \varphi; g)$ будет непрерывно зависеть от $g(x)$ в этой же окрестности. Следовательно, и неравенство (17) сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(b; g)$ элемента $g_0(x) = b$. Итак, установлена сходимость $z_n(x, \varphi; g)$ к $z_0(x, \varphi; g)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$ для всех $g \in U(b; g)$.

1. Миненко А.С. О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейн. граничн. задачи. – 1991. – **3**. – С. 60–66.
2. Миненко А.С. Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования // Мат. физика и нелиней. механика. – 1991. – **16**. – С. 48–52.
3. Миненко А.С. Осесимметрическое течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488.
4. Minenko A.S. Axially symmetric flow // Fifth SIAM conference on optimization (Victoria, British Columbia, May 20–22, 1996). – Victoria, 1996. – P. 12.
5. Миненко А.С. О вариационном методе исследования одной задачи вихревого течения жидкости со свободной границей // Нелинейн. граничн. задачи. – 1993. – **5**. – С. 58–64.
6. Миненко А.С. Вариационная задача со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
7. Данилюк И.И., Миненко А.С. О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
8. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одной вариационной теплофизической задаче со свободной границей // Сб. докл. конф. по смешанным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными и задачам со свободными границами (Штутгарт, 5–10 сент. 1978). – Штутгарт, 1978. – С. 9–18.
9. Миненко А.С. Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413–416.
10. Данилюк И.И., Миненко А.С. О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – **43**, № 5. – С. 228.
11. Garabedian P.R., Lewy H., Schiffer M. Axially symmetric cavitation flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560–602.
12. Friedrichs K.O. Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – P. 60–82.
13. Бабич В.М. К вопросу о распространении функций // Успехи мат. наук. – 1953. – **8**, № 2 – С. 111–113.
14. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 708 с.

15. Власова З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1959. – **53**. – С. 16–37.
16. Миненко А.С. Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1692–1700.

A. S. Minenko

On the minimization of one functional by Ritz method.

One nonlinear problem with the Bernoulli condition on a free boundary given by an inequality is studied by the variational method. The existence theorem is obtained. It is proved that approximate solutions based on the Ritz method convergent to an exact solution in certain metrics.

Keywords: *free boundary, functional, Ritz method, convergence, Bernoulli's law, existence theorem.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический ун-т»
sam_dntu@mail.ru

Получено 24.06.16

УДК 531.38

©2016. Д. Н. Ткаченко

О РЕДУКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

В статье рассмотрено движение тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом в предположении, что центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси в теле-носителе. На основе динамических и кинетических уравнений проведена редукция исходных уравнений к системе трех дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гиростата, переменный гиростатический момент, редукция уравнений.

Введение. В задачах о движении тяжелого твердого тела и гиростата известны различные формы редуцированных дифференциальных уравнений движения.

Первоначальные результаты в проблеме понижения порядка исходных дифференциальных уравнений указаны В. Гессом [1], А.Д. Билимовичем [2], Н. Ковалевским [3], А.С. Чаплыгиным [4]. П.В. Харламов обобщил результаты указанных выше ученых и предложил новые более общие формы уравнений движения гиростата [5, 6].

Полиномиальные решения уравнений Н.Ковалевского [3] и П.В. Харламова [6] нашли применение в истолковании движения гиростата (см. обзорную монографию [7]), а также при исследовании уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии [8, 9]. Структура этих решений позволила провести исследование условий существования полиномиальных решений класса В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева в задачах о движении гиростата в полях сложной структуры [10, 11, 12].

В статье рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, с переменным гиростатическим моментом. Уравнения движения в указанной задаче были получены Н.Е. Жуковским [13], П.В. Харламовым [14], Е. Витттенбургом [15]. Отметим, что наиболее общие уравнения в рассматриваемой задаче указал П.В. Харламов, так как он рассматривал случай, когда механическая система представляет собой систему гиростатов. Исследование решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом ранее проводилось на заданных классах инвариантных соотношений уравнений движения гиростата [16–18]. В данной статье в предположении, что центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси эллипсоида инерции гиростата, выполнена редукция уравнений движения к системе трех дифференциальных уравнений. Два из данных уравнений можно интерпретировать как уравнения движения более общего класса, чем уравнения Н. Ковалевского и П.В. Харламова. Дан анализ этих уравнений для одного класса движения несомого тела; для него указан способ нахождения полиномиальных решений уравнений движения тяже-

лого гиростата класса В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева, П.В. Харламова

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения тяжелого гиростата с переменным гиросtatическим моментом [14]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda(t)) \times \omega - \dot{\lambda}(t) + s \times \nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (2)$$

Эти уравнения допускают два интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda(t)) \cdot \nu = k, \quad (3)$$

k – произвольная постоянная.

Здесь обозначено: $\omega = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, коллинеарный вектору силы тяжести; $\lambda(t)$ – дифференцируемая вектор-функция, характеризующая движение несомых тел; $s = mgOC$ (O – неподвижная точка, C – центр масс гиростата, m – масса гиростата, g – ускорение свободного падения); A – тензор инерции гиростата; точка над переменными означает производную по времени t . Будем рассматривать уравнения (1), (2) и интегралы (3) предполагая, что

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad s = (s, 0, 0), \quad \lambda = \lambda(t)(1, 0, 0), \quad (4)$$

то есть центр масс гиростата и гиросtatический момент принадлежат барицентрической главной оси гиростата. Гиросtat представляет собой систему S , состоящую

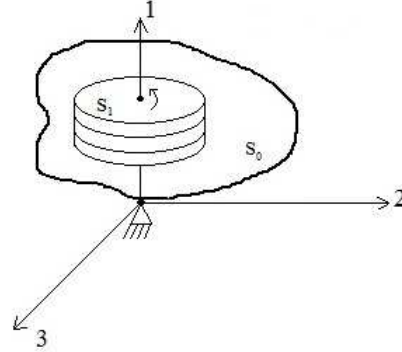


Рис. 1. Система S

из тела-носителя S_0 и вращающегося гироскопа S_1 (рис. 1).

Запишем уравнения, вытекающие из (1) и (2), при предположениях (4)

$$(A_1 p + \lambda(t))^\bullet = (A_2 - A_3)qr, \quad (5)$$

$$A_2\dot{q} = [(A_3 - A_1)p - \lambda(t)]r - s\nu_3, \quad (6)$$

$$A_3\dot{r} = [(A_1 - A_2)p + \lambda(t)]q + s\nu_2. \quad (7)$$

Представим уравнения Пуассона (2) в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= r\nu_2 - q\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= p\nu_3 - r\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= q\nu_1 - p\nu_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегралы (3) в скалярной виде таковы:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (9)$$

$$(A_1p + \lambda(t))\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k. \quad (10)$$

Будем полагать, что функция $\lambda(t) = \lambda^*(p(t))$. Тогда $\dot{\lambda}(t) = (\lambda^*(p))'\dot{p}$, где штрих обозначает дифференцирование по p . Для преобразования уравнений (5)–(8) выберем в качестве вспомогательной переменной компоненту p . Из уравнения (5) имеем

$$\dot{p} = \frac{q(p)r(p)(A_2 - A_3)}{u'(p)}, \quad (11)$$

где $u(p) = \lambda^*(p) + A_1p$. Перейдем в уравнениях (6) и (7) к дифференцированию по p . Используя (11), получим

$$(q^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_2(A_2 - A_3)}(A_3p - u(p) - \frac{s}{r(p)}\nu_3(p)), \quad (12)$$

$$(r^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_3(A_2 - A_3)}(u(p) - A_2p + \frac{s}{q(p)}\nu_2(p)), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nu_1'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(r(p)\nu_2(p) - q(p)\nu_3(p)), \\ \nu_2'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(p\nu_3(p) - r(p)\nu_1(p)), \\ \nu_3'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(q(p)\nu_1(p) - p\nu_2(p)). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (12)–(14) представляет собой систему дифференциальных уравнений на функции $q^2(p)$, $r^2(p)$, $\nu_1(p)$, $\nu_2(p)$, $\nu_3(p)$, $u(p)$. Данная система является незамкнутой, поэтому необходимо задавать одну из указанных функций как функцию от p . После интегрирования (12)–(14) зависимость p от t находится из уравнения (11). Для редукции уравнений (12)–(14) найдем ν_1 из интеграла (10), а ν_2 , ν_3 из (12), (13)

$$\begin{aligned} \nu_1(p) &= \frac{k - A_2q(p)\nu_2(p) - A_3r(p)\nu_3(p)}{u(p)}, \\ \nu_2(p) &= \frac{q(p)}{s}[(r^2(p))'\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u(p)'} + A_2p - u(p)], \\ \nu_3(p) &= \frac{r(p)}{s}[(q^2(p))'\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u(p)'} - A_3p + u(p)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем функции $Q(p) = q^2(p)$, $R(p) = r^2(p)$. Тогда из (15) имеем

$$\begin{aligned}\nu_1(p) &= \frac{1}{su(p)}[sk - A_2Q(p)(\frac{A_3(A_2 - A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)) + \\ &+ A_3R(p)(\frac{A_2(A_2 - A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3p + u(p))], \\ \nu_2(p) &= \frac{q(p)}{s}[R'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)], \\ \nu_3 &= \frac{r(p)}{s}[Q'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)],\end{aligned}\tag{16}$$

где $q(p) = \sqrt{Q(p)}$, $r(p) = \sqrt{R(p)}$.

Подставим выражения (16) во второе и третье уравнения системы (8)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}A_3(A_2 - A_3)\frac{R''(p)Q(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_3(A_2 - A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} - \frac{1}{2}A_3R'(p)Q(p) \cdot \\ &\cdot [\frac{A_2}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u'^2(p)}] + \frac{1}{2}Q'(p)[\frac{A_2A_3R}{u(p)} + pA_2 - u(p)] + \\ &+ \frac{A_3}{A_2 - A_3}R(p)u'(p)[1 - \frac{A_3p}{u(p)}] + Q(p)[-\frac{A_2^2}{A_2 - A_3}u'(p)p + \frac{A_2}{A_2 - A_3}u'(p) + \\ &+ A_2 - u'(p)] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3}[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_3] = 0, \\ &\frac{1}{2}A_2(A_2 - A_3)\frac{Q''(p)R(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_2(A_2 - A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} + \frac{1}{2}A_2Q'(p)R(p) \cdot \\ &\cdot [\frac{A_3}{u(p)} + \frac{(A_2 - A_3)u''(p)}{u'^2(p)}] - \frac{1}{2}R'(p)[\frac{A_2A_3Q(p)}{u(p)} + pA_3 - u(p)] + \\ &+ \frac{A_2}{A_2 - A_3}Q(p)u'(p)[1 - \frac{A_2p}{u(p)}] + Q(p)[-\frac{A_3^2}{A_2 - A_3}u'(p)p + \frac{A_3}{A_2 - A_3}u'(p) - \\ &- A_3 + u'(p)] + \frac{u'(p)}{A_2 - A_3}[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_2] = 0,\end{aligned}\tag{17}$$

С учетом (16) геометрический интеграл (9) примет вид

$$\begin{aligned}&\{\frac{1}{u(p)}[sk - A_2Q(p)(\frac{A_3(A_2 - A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)) + \\ &+ A_3R(p)(\frac{A_2(A_2 - A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3p + u(p))]\}^2 + \\ &+ \{q(p)[R'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)]\}^2 + \\ &+ \{r(p)[Q'(p)\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)]\}^2 - s^2 = 0,\end{aligned}\tag{18}$$

Соотношение (18) является первым интегралом уравнений (17).

Система (17) является неавтономной системой дифференциальных уравнений на три функции $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$. Так как она не замкнута, то для ее интегрирования необходимо задавать либо одну из функций $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$, либо инвариантное соотношение $f(Q, R, u(p)) = 0$, которое может описывать некоторое программное движение гиростата. После нахождения $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$ зависимость $p(t)$ определяется в силу (11) из уравнения

$$\dot{p} = \frac{A_2 - A_3}{u'(p)} \sqrt{Q(p)R(p)} \quad (19)$$

путем обращения соответствующего интеграла.

Уравнения (17) не являются простым обобщением уравнений Н. Ковалевского и П.В. Харламова, так как они получены на основании интеграла моментов (10) и поэтому содержат постоянную k и имеют особенность в знаменателе. Отметим, что уравнения Н. Ковалевского и П.В. Харламова установлены с помощью выражения для ν_1 , которое находится из интеграла энергии (в задаче (5)–(8) интеграла энергии нет); в силу этого указанные уравнения не имеют особенностей в знаменателе, а вместо постоянной k они содержат постоянную, характеризующую интеграл энергии.

Если в (17) положить $u(p) = A_1 p + \lambda_0$, где λ_0 – постоянная, то система (17) становится замкнутой. Следовательно, она может быть использована для нахождения решений уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Вариант, когда $u(p) = \text{const}$ на основании (11) приводит к условиям, при выполнении которых имеют место инвариантные соотношения: $q = 0$; $r = 0$. Их исследование требует дополнительного рассмотрения, которое необходимо проводить на основании уравнений (5)–(8).

2. Один специальный случай движения несомого гироскопа. Пусть тело-носитель имеет главные моменты инерции $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$. Будем предполагать, что ротор S_1 является симметричным гироскопом и обозначим через D момент инерции S_1 относительно оси вращения, а B – момент инерции S_1 относительно ортогональной оси к оси вращения (рис. 1). Пусть $\dot{k}$ – скорость вращения S_1 относительно его оси симметрии. Так как $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ вектор угловой скорости тела-носителя, то абсолютная угловая скорость гироскопа S_1 определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega} + \dot{k} \mathbf{i}_1,$$

$\mathbf{i}_1$ – единичный вектор первой главной оси гиростата. Общий момент количества движения гиростата равен:

$$\mathbf{x} = (A_1 \omega_1 + D \dot{k}) \mathbf{i}_1 + A_2 \omega_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \omega_3 \mathbf{i}_3, \quad (20)$$

здесь $A_1 = \tilde{A}_1 + D$, $A_2 = \tilde{A}_2 + m_2(s_2)^2$, $A_3 = \tilde{A}_3 + m_2(s_2)^2$, где s_2 – расстояние от неподвижной точки до центра масс C_2 гироскопа S_1 , m_2 – его масса. Положим, что центр масс C_1 тела-носителя с массой m_1 находится на первой главной оси ($s_1 = OC_1 > 0$). В силу указанных свойств центр масс гиростата C (системы,

состоящей из S_0 , S_1) лежит на первой координатной оси и выполняется равенство $OC = \frac{1}{m}(m_1 s_1 + m_2 s_2)$. Следовательно, вектор $\mathbf{s}$ в уравнении (1) таков

$$\mathbf{s} = (g(m_1 s_1 + m_2 s_2); 0; 0). \quad (21)$$

Положим в (20) $\dot{\kappa} = \omega_1$ и запишем уравнения движения гиростата, используя теорему об изменении момента количества движения

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - \alpha_1) \omega_3 \omega_1 - s \nu_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (\alpha_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + s \nu_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\alpha_1 = A_1 + D$. Интегралы уравнений (22) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \\ \alpha_1 \omega_1 \nu_1 + A_2 \omega_2 \nu_2 + A_3 \omega_3 \nu_3 &= k, \\ \alpha_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2s \nu_1 &= 2E. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что для указанного способа вращения гироскопа S_1 уравнения движения допускают аналог интеграла энергии (см. третье соотношение из (23)). Проведем сравнительный анализ уравнений (22), (23) и уравнений движения тяжелого твердого тела, которое состоит из тела-носителя S_0 и невращающегося гироскопа S_1 . Последние уравнения получаются из уравнений (22) заменой параметра α_1 параметром A_1 . При этом величины A_1 , A_2 , A_3 удовлетворяют неравенствам треугольника, поэтому уравнения движения (22) будем рассматривать при условиях, что α_1 , A_2 , A_3 также удовлетворяют неравенствам треугольника. Из этого требования вытекает следующее условие

$$D < A_2 + A_3 - A_1.$$

Для классических уравнений Эйлера–Пуассона построено значительное количество частных решений (см. [7, 19]). Из приведенного выше сравнения дифференциальных уравнений гиростата с переменным гиростатическим моментом и уравнений Эйлера–Пуассона вытекает, что все указанные частные решения обобщаются как решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом с указанным способом вращения S_1 при условии, что $D < A_2 + A_3 - A_1$. Например, в случае С.В. Ковалевской для уравнений (22), (23) необходимо положить $\alpha_1 = A_2 = 2A_3$. Применение данного результата означает, что если в реальном объекте, рассматриваемом при $\dot{\kappa} = 0$, распределение масс не удовлетворяет условиям Ковалевской, то с учетом введения вращения гироскопа со скоростью $\omega_1 = p$ можно части этих условий удовлетворить. Аналогичное заключение относится и к полиномиальным решениям класса Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева, П.В. Харламова. Распределение масс этих гироскопов в классическом случае есть

функция $f(A_1, A_2, A_3) = 0$. Для обобщения полиномиальных решений указанного класса в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в равенстве $f(A_1, A_2, A_3) = 0$ нужно A_1 заменить на α_1 : $f(\alpha_1, A_2, A_3) = 0$.

Замечание. Полученный выше результат представляет теоретический интерес, так как он установлен на основе формальных аналитических преобразований уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

3. Заключение. В статье изучена задача о движении гиростата S , состоящего из тела-носителя S_0 и симметричного гироскопа S_1 , центры масс которых лежат на главной оси эллипсоида инерции гиростата S . Движение гиростата S рассмотрено под действием силы тяжести. Уравнения движения гиростата редуцированы к системе трех неавтономных дифференциальных уравнений на компоненты угловой скорости и компоненту гиростатического момента. Данная система представляет собой некоторый аналог уравнений Н. Ковалевской, С.А. Чаплыгина и П.В. Харламова, полученных в задаче о движении твердого тела и тяжелого гиростата. Указан пример решения редуцированных уравнений.

1. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**, Н. 2. – Р. 153–181.
2. Билимович А.Д. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – В кн.: Сб. статей, посвященный Г.К. Сусливу. – К., 1911. – С. 23–74.
3. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – **65**. – Р. 528–537.
4. Сретенский Л.Н. О работах С.А. Чаплыгина по теоретической механике. – В кн.: Чаплыгин С.А. Собр. соч. – **3**. – М., 1950. – С. 366–376.
5. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та, 1965. – 221 с.
6. Харламов П.В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.
7. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
8. Брюно А.Д. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 192–227.
9. Гашененко И.Н., Ткаченко Д.Н. Степенные разложения решений уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2011. – **41**. – С. 11–26.
10. Горр Г.В., Зыза А.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6 – С. 12–21.
11. Зыза А.В. Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – **40**. – С. 103–109.
12. Зыза А.В. Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2015. – **45**. – С. 63–69.
13. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152.
14. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – **4**. – С. 52–73.
15. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир., 1980. – 288 с.
16. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
17. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным

- гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – **39**. – С.42–49.
18. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – **40**. – С.91–104.
19. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегро-дифференциальное уравнений динамики твердого тела. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.

D. N. Tkachenko

About reduction differential equation of motion inert gyrostat with variable gyrostatic moment.

This article considers the movement of inert gyrostat with variable gyrostatic moment, assuming that the center of mass of gyrostat and gyrostatic moment refers to the main axis of carrier body. Based on dynamic and kinetic equations the reduction of initial equations has been performed in the system of three differential equations.

Keywords: *gyrostat, variable gyrostatic moment, reduction initial equations.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
dntkachenko@mail.ru

Получено 02.07.16

УДК 539.4:534.1

©2016. Г. М. Улитин, С. Н. Царенко

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОНСТРУКЦИИ НЕСУЩИХ ОПОР

Рассматривается задача изгибных колебаний конструкций несущих опор, которые имеют форму конических труб. Учитывается переменная изгибная жесткость и распределенная масса для случая, когда их отношение выражается квадратичной зависимостью от безразмерного радиуса инерции поперечного сечения. В качестве примера рассмотрены свободные поперечные колебания, вызванные начальным отклонением продольной оси стержня от действия нагрузки переменной интенсивности. Исследовано влияние параметра поперечного сечения на значение первой собственной частоты с учетом наличия инерционной нагрузки. Получены выражения для динамических коэффициентов по прогибам и изгибающим моментам в основании стержня.

Ключевые слова: изгибные колебания, метод Фурье, стержни переменного сечения, функции Бесселя.

1. Введение. При исследовании напряженно-деформированного состояния различного рода конструкций и оборудования используются модели упругого стержня. Так, на основе модели упругого стержня исследовались динамические процессы в буровых колонах [1, 2], с использованием модели стержней переменной жесткости рассмотрены задачи устойчивости и продольно-поперечного изгиба [3, 4]. Общие подходы к построению математических моделей поперечных колебаний стержней известны и рассмотрены в литературе [5, 6], тем не менее, аналитические решения получены преимущественно для стержней однородной структуры. Для практического расчета неоднородных стержней используются численные [7, 8] и численно-аналитические методы [9].

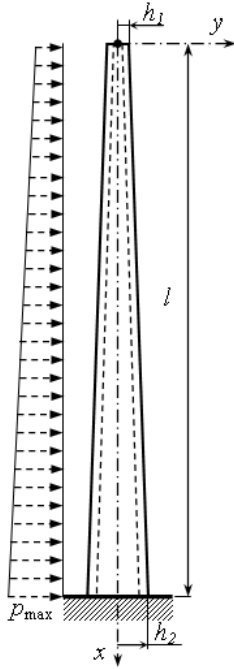
Поиск аналитических решений задач колебаний стержней с переменной структурой позволит не только определить динамические характеристики объекта на стадии проектных работ, но и может быть использован для построения эталонной модели при проведении проверочных расчетов в программных комплексах на базе метода конечных элементов.

2. Постановка задачи и основные соотношения. В работах [10, 11] рассмотрен общий подход к построению математической модели колебаний стержней, площадь поперечного сечения и изгибная жесткость которых изменяется по степенным зависимостям от продольной координаты. Для случая конической трубы уравнение изгибных колебаний будет иметь вид [11]

$$z^3 y'''' + 6z^2 y''' + 6zy'' = \frac{p(z, t)l^4}{EJ_2(1-k)^4} - \frac{\gamma F_2 l^4}{EJ_2(1-k)^4} z\ddot{y},$$

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

где $z = (1 - k)x/l + k$, $k = h_1/h_2$, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня, $y(x, t)$ – уравнение изогнутой оси стержня γ – плотность, E – модуль упругости, F_2 и J_2 – площадь поперечного сечения и момент инерции основания стержня, $p(z, t)$ – внешняя нагрузка (рис. 1).



Разделяя переменные, получаем уравнение для собственных функций, решение которого имеет вид [11]

$$Z_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}(C_1 J_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 I_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_1(\lambda_n \sqrt{z})), \quad (1)$$

где

$$\lambda_n^2 = \frac{4\omega_n l^2}{(1 - k)^2} \sqrt{\frac{\gamma F_2}{E J_2}},$$

ω_n – собственные частоты колебаний, $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ – функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

3. Модальный анализ консольной конструкции. Граничные условия в соответствии с принятой схемой (рис. 1) имеют вид

$$y(l, t) = 0, y'(l, t) = 0, Q(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$M(0, t) = 0. \quad (3)$$

Рис. 1. Расчетная схема консольной опоры

Удовлетворив граничным условиям (2), выражение для собственных функций (1) получим в виде

$$Z_n = \pi(J_1(\lambda_n \sqrt{z})(Y_1(\lambda_n) - \alpha_n Y_2(\lambda_n)) - Y_1(\lambda_n \sqrt{z})(J_1(\lambda_n) - \alpha_n J_2(\lambda_n))) + 2(I_1(\lambda_n \sqrt{z})(K_1(\lambda_n) - \alpha_n K_2(\lambda_n)) - K_1(\lambda_n \sqrt{z})(I_1(\lambda_n) + \alpha_n I_2(\lambda_n))), \quad (4)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_1(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_1(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_1(\lambda_n) + K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_1(\lambda_n))}{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_2(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_2(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_2(\lambda_n) - K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_2(\lambda_n))}.$$

Найдем выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. Определим производные от собственных функций (4):

$$Z'_z = \frac{\lambda}{2z}(\pi(-J_2(\lambda \sqrt{z})(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) + Y_2(\lambda \sqrt{z})(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda))) + 2(I_2(\lambda \sqrt{z})(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + K_2(\lambda \sqrt{z})(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda))));$$

$$\begin{aligned}
 z^3 Z''_{zz} &= \frac{\lambda z}{4} (\pi((4J_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}J_1(\lambda\sqrt{z}))(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) - \\
 &\quad - (4Y_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}Y_1(\lambda\sqrt{z}))(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda))) - \\
 &\quad - 2((4I_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}I_1(\lambda\sqrt{z}))(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + \\
 &\quad + (4K_2(\lambda\sqrt{z}) + \lambda\sqrt{z}K_1(\lambda\sqrt{z}))(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda)))); \\
 (z^3 Z''_{zz})'_z &= \frac{\lambda^3 z}{8} (\pi(J_2(\lambda\sqrt{z})(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) - Y_2(\lambda\sqrt{z})(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda))) + \\
 &\quad + 2(I_2(\lambda\sqrt{z})(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + K_2(\lambda\sqrt{z})(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda))))).
 \end{aligned}$$

Из условия (3) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$Z''_n(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (5)$$

С учетом того, что во многих упрощенных методах динамического расчета используется значение первой собственной частоты, оценим влияние параметра k на значение первого собственного числа уравнения (5)

$$\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2}(1 - k).$$

Аналогичное выражение используется для нахождения собственных частот стержней постоянной жесткости [5, 6]. Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного поперечного размера k представлены на рис. 2. Видно, что $\tilde{\lambda}_1 = 1.875$ при $k = 1$ (это соответствует собственному значению для консольной балки постоянной жесткости [6]).

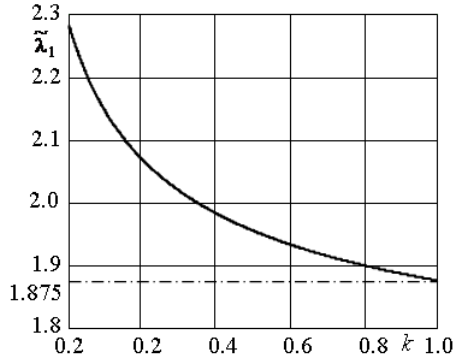


Рис. 2. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного поперечного размера k

4. Динамический расчет конструкции.

Собственные функции будут ортогональны с весом $\rho(z) = z$ [12]

$$\int_k^1 z Z_n(z) Z_m(z) dz = 0. \quad (6)$$

Для нахождения квадрата нормы собственных функций поступим аналогично как в работе [5] для собственных функций с различными индексами

$$\frac{\lambda_n^4 - \lambda_m^4}{16} \int_k^1 z Z_n(z) Z_m(z) dz = \left((z^3 Z_n'')' Z_m - (z^3 Z_m'')' Z_n - z^3 Z_n'' Z_m' + z^3 Z_m'' Z_n' \right) \Big|_k^1.$$

Перейдя к пределу при $m \rightarrow n$, получаем

$$\frac{\lambda_n^3}{4} \int_k^1 z Z_n^2(z) dz = \left(Z_n \frac{\partial(z^3 Z_n'')'}{\partial \lambda_n} - (z^3 Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^3 Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^3 Z_n'')}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_k^1. \quad (7)$$

Тогда из соотношения (7), принимая во внимание граничные условия (2), (3) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8}{\lambda_n^4} Z_n''(1)^2 - \frac{k^2}{2} Z_n^2(k).$$

В процессе эксплуатации конструкции несущих опор подвергаются воздействию переменных и ударных нагрузок: нагрузки, связанные с работой оборудования, сейсмические возмущения, а также нагрузки, возникающие в процессе монтажных работ и при аварийных ситуациях. Одним из видов такого воздействия является ветровая нагрузка, которая носит импульсный характер, что приводит к чередованию собственных и вынужденных колебаний конструкции. Остановимся на случае собственных колебаний, вызванных отклонением продольной оси распределенной нагрузкой интенсивностью $p(z) = p_{max}z$ ($k \leq z \leq 1$), которая в начальный момент времени исчезает (рис. 1). Для этого найдем решение $y(z, t)$ однородного уравнения

$$(z^3 y'')'' + \beta \ddot{y} = 0; \quad \beta = \frac{l^4 \gamma F_2}{(1-k)^4 E J_2} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$y(z, 0) = f(z); \quad \dot{y}(z, 0) = 0, \quad (9)$$

где

$$f(z) = \frac{p_{max} l^4}{12(1-k)^4 E J_2} \left(\frac{2k^3}{z} + 6k^2 \ln z + 2(k^3 - 3k^2 - 1)z + z^2 + 1 - 4k^3 + 6k^2 \right) -$$

уравнение начальных прогибов.

Решение уравнения (8) представим в виде ряда по собственным функциям, принимая во внимание соотношение $\lambda_n^4 = \beta \omega_n^2$, из второго начального условия (9) получим уравнение перемещений сечений стержня

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \cos \omega_n t, \quad (10)$$

где A_n – коэффициенты разложения.

Постоянные A_n определим из первого начального условия (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) = f(z). \quad (11)$$

Умножив обе части равенства (11) на $zZ_m(z)$ и проинтегрировав на участке $[k; 1]$, с учетом свойства (6) получим

$$A_n \Delta_n^2 = \int_k^1 z Z_n(z) f(z) dz. \quad (12)$$

Для определения интеграла из правой части равенства (12) учтем, что $zZ_n = \frac{16}{\lambda_n^4} (z^3 Z_n'')''$, интегрируя по частям, получим выражение для нахождения коэффициентов A_n

$$\begin{aligned} A_n = & \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \left(f(z)(z^3 Z_n'')' - f'(z)(z^3 Z_n'') + (z^3 f''(z)) Z_n' - (z^3 f''(z))' Z_n \right) \Big|_k^1 + \\ & + \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \int_k^1 (z^3 f''(z))'' Z_n(z) dz. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом граничных условий (2), (3), а также, что

$$(z^3 f''(z))'' = \frac{p_{max} l^4}{(1-k)^4 E J_2} z$$

из уравнения (13) получим

$$A_n = \frac{256 p_{max} l^4}{\Delta_n^2 \lambda_n^8 (1-k)^4 E J_2} (z^3 Z_n'')' \Big|_{z=1}.$$

Продифференцировав уравнение прогибов (10), получаем выражение для изгибающих моментов

$$M(z, t) = \frac{(1-k)^2 E J_2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^3 Z_n''(z) \cos \omega_n t. \quad (14)$$

При статическом действии нагрузки изгибающий момент определяется зависимостью

$$M_0(z) = \frac{p_{max} l^2}{6(1-k)^2} (z^3 - 3k^2 z + 2k^3).$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{E J_2}{\gamma F_2}}.$$

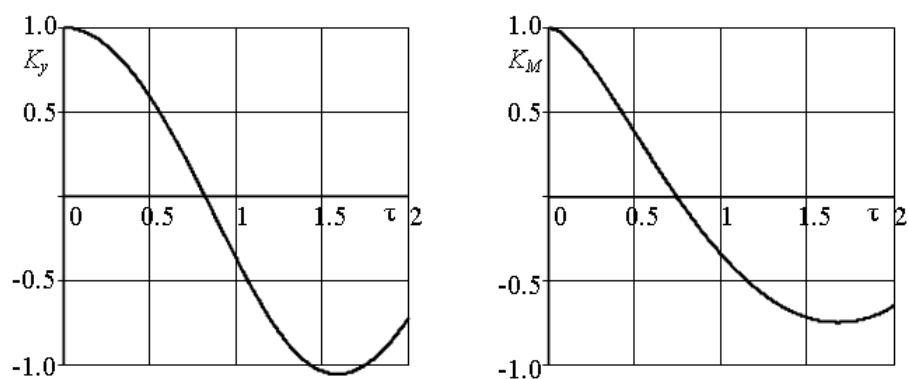


Рис. 3. Изменение динамических коэффициентов в зависимости от безразмерного параметра времени τ

Зависимости динамических коэффициентов по прогибу и изгибающему моменту в основании опоры для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$, за период $\tau = 2$ представлены на графиках рис. 3.

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)}, \quad K_M(\tau) = \frac{M(1, \tau)}{M_0}. \quad (15)$$

На рис. 3 показаны зависимости от значений коэффициентов (15) для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$. Максимальное значение коэффициента по прогибам составило $K_y = 1.053$, а по изгибающим моментам $K_M = 1$. Расчеты при разных значениях параметра показали, что динамический коэффициент по прогибам увеличивается для конструкций остроконечной формы.

1. Гуляев В.И., Луговой П.З., Борщ Е.И. Самовозбуждение колебаний долота буровой колонны // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 3. – С. 114–124.
2. Улитин Г.М. Продольные колебания упругого стержня, моделирующего буровую установку // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 10. – С. 125–128.
3. Tsarenko S.N., Ulitin G.M. Investigation of strained deformed state of variable stiffness rod // SpringerPlus. – 2014. – **3**. – P. 367.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 983 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
6. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – Киев: Наукова думка, 1965. – 716 с.
7. Егорова А.А., Москвитин С.С., Самохина Т.И. и др. Стержни переменных размеров поперечных сечений в методе конечных элементов // Дальний восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. – 2013. – **1**. – С. 183–188.
8. Хамилова Л.Г. Спектральная задача для изгибных колебаний стержня переменного сечения в вертикальной плоскости // Изв. Моск. индустр. ун-та. – 2011. – **4** (24). – С. 76–83.
9. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородного стержня // ПММ. – 2003. – **67**, № 4. – С. 588–602.
10. Динник А.Н. Избранные труды. Т. 2. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1955. – 223 с.
11. Улитин Г.М., Царенко С.Н. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и рас-

пределенной массой // ПММ. 2015. – 79, № 6. – С. 817–823.

12. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с.

G. M. Ulitin, S. N. Tsarenko

Transverse vibrations of elastic rods of variable section that simulate metal structures.

The problems of bending vibrations of metal structures, which have the form of conical pipes, are considered. For example, free transverse vibrations of the initial displacement of the longitudinal axis of the rod of the load of variable intensity, are considered. Effect of parameter cross-section at the first natural frequency value considering the availability of inertial load is investigated. Expressions in the displacements and bending moments at the base of the rod for dynamic coefficients obtained.

Keywords: *bending vibrations, Fourier method, variable cross-section rods, Bessel functions.*

ГОУ ВПО «ДонНТУ», Донецк
tzarenko@rambler.ru

Получено 17.06.16