

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

---

ВЫПУСК

32

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов

Основан в 1969 г.

---

ДОНЕЦК 2002

УДК 521.14; 531.38

©2002. С.Н.Судаков

## О КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЖИДКИХ ЭЛЛИпсоИДОВ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Рассмотрена задача о колебаниях вращающейся гравитирующей эллипсоидальной массы жидкости, вязкость которой равна нулю на свободной поверхности и возрастает к центру масс по специальному квадратичному закону до заданного максимального значения, оставаясь постоянной на каждом эллипсоиде, подобном и соосном границе. Закон изменения вязкости выбран так, что течение жидкости оказывается однородным вихревым, благодаря чему движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае отсутствия вязкости рассматриваемые эллипсоиды переходят в известные эллипсоиды Дирихле.

В работе [1] дан обзор результатов экспериментальных исследований, указывающих на сильный рост вязкости расплавов железа при повышении давления до значений, сравнимых с давлением внутри планет. Там же указано на необходимость учета этого фактора при построении математических моделей вращения планет, имеющих жидкое ядро, основным компонентом которого является расплав железа. Например, при построении моделей вращения Земли. С этой целью в работах [2-4] была рассмотрена задача о вращении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной ньютоновской жидкостью, вязкость которой равна нулю на границе полости и возрастает к ее центру до максимального значения. Закон изменения вязкости выбран так, что движение жидкости оказывается однородным вихревым.

В настоящей работе этот подход применен к исследованию колебаний вращающихся жидких гравитирующих эллипсоидов. При исследовании использован известный прием [5], суть которого состоит в следующем. Сначала задача решается в предположении, что граница жидкости, независимо от распределения давлений на ней, вынуждена оставаться эллипсоидом постоянного объема, но с переменными длинами главных осей. Затем доказывается, что для полученного решения давление действительно будет одним и тем же во всех точках границы.

**1. Уравнения однородных вихревых движений жидкости переменной вязкости в эллипсоидальной полости с переменными длинами главных осей.** Введем неподвижную декартову систему координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Через  $Ox_1x_2x_3$  обозначим подвижную декартову систему координат, начало  $O$  которой совпадает с началом неподвижной системы координат. Будем считать, что имеется эллипсоидальная полость, граница которой описывается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \quad (1)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — некоторые заданные непрерывные функции времени, удовлетворяющие условию

$$c_1c_2c_3 = R^3 = \text{const}. \quad (2)$$

Это условие означает, что объем полости при изменении длин главных осей остается постоянным. Полость целиком заполнена несжимаемой ньютоновской жидкостью постоянной плотности  $\rho$ , а ее кинематическая вязкость  $\nu$  является функцией координат

$$\nu = \nu_0(1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2), \quad (3)$$

где  $\nu_0$  — константа. Таким образом,  $\nu$  является функцией координат  $x_1, x_2, x_3$  и неявно зависит от времени  $t$ , поскольку  $c_1, c_2, c_3$  — функции времени. Из (1) и (3) следует, что  $\nu$  обращается в нуль на границе жидкости и достигает максимального значения в центре.

Движение жидкости относительно подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  описывается уравнениями [6]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) -$$

$$-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости жидкости относительно подвижных осей  $Ox_1x_2x_3$ ;  $p$  — давление;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ;  $\sigma$  — тензор скоростей деформаций жидкости, компоненты которого имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$v_1, v_2, v_3$  — проекции  $\mathbf{v}$  на оси  $Ox_1x_2x_3$ ;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор абсолютной угловой скорости подвижных осей  $Ox_1x_2x_3$ ;  $-\Phi$  — потенциал гравитационных сил, определяемый формулами [5]

$$\Phi = \pi \rho \gamma (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D},$$

$$D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}},$$

$\gamma$  — гравитационная постоянная.

Из соотношений (1),(3) следует, что вязкость  $\nu$  на границе жидкости обращается в нуль. Поэтому касательные напряжения на границе жидкости будут отсутствовать. В качестве граничных условий для системы (4),(5) примем условия непротекания через границу (1):  $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} |_S = 0$ , где  $S$  — граница жидкости;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе  $S$ ;  $\mathbf{u}$  — скорость точек границы жидкости относительно осей  $Ox_1x_2x_3$ , обусловленная изменением длин  $c_1, c_2, c_3$ .

Вектор вихря абсолютной скорости жидкости  $2\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega}$  в случае однородного вихревого движения жидкости не зависит от  $x_1, x_2, x_3$  и является только функцией времени. Поэтому поле скоростей жидкости ищется в виде

$$v_1 = c_1 \left( \omega_2^* \frac{x_3}{c_3} - \omega_3^* \frac{x_2}{c_2} \right) + \frac{\dot{c}_1}{c_1} x_1 \quad (123), \quad (6)$$

где

$$\omega_1^* = \frac{2c_3 c_2}{c_3^2 + c_2^2} (\Omega_1 - \omega_1) \quad (123). \quad (7)$$

Символ (123) означает, что остальные выражения получаются круговой перестановкой индексов. Здесь  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — соответственно проекции векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  на оси  $Ox_1x_2x_3$ .

Очевидно, что для поля скоростей (6) выполняются принятые выше граничные условия. Для выполнения условия несжимаемости (5) необходимо и достаточно выполнения условия  $\dot{c}_1/c_1 + \dot{c}_2/c_2 + \dot{c}_3/c_3 = 0$ , которое является следствием соотношения (2).

Подставляя (6) в уравнения (4) и применяя операцию  $\text{rot}$  с последующим учетом (3),(7), получаем уравнения для  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 = & (1 - \varepsilon_3)\omega_3\Omega_2 - (1 - \varepsilon_2)\omega_2\Omega_3 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\Omega_2\Omega_3 - \sigma_1(\Omega_1 - \omega_1) - \\ & - \omega_1(\dot{c}_2/c_2 + \dot{c}_3/c_3) \quad (123), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2 + c_2^2}, \quad \sigma_1 = 2\nu_0\varepsilon_1^2 \frac{c_2^2 + c_3^2}{c_2^2 c_3^2} \quad (123).$$

Если функции  $c_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  выбраны так, что выполнено условие (2) и система уравнений (8) разрешима, то в эллипсоидальной области с границей (1) будет существовать однородное вихревое движение жидкости с вязкостью, заданной выражением (3).

Подставляя выражения для скорости жидкости (6) в уравнения (4), получаем систему уравнений для определения давления  $p$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (123),$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} = & \omega_2^{*2} + \omega_3^{*2} + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_2^*\omega_2c_3/c_1 + 2\omega_3^*\omega_3c_2/c_1 - \dot{c}_1/c_1 - 4\nu_0\dot{c}_1/c_1^3, \\ p_{12} = & \dot{\omega}_3^* \frac{c_1}{c_2} - \omega_1^*\omega_2^* \frac{c_1}{c_2} + \dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 - 2\omega_1^*\omega_2 \frac{c_3}{c_2} + 2\nu_0\omega_3^* \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1c_3^2} + 2\omega_3^* \frac{\dot{c}_1}{c_2} + 2\omega_3 \frac{\dot{c}_2}{c_2}, \\ p_{21} = & -\dot{\omega}_3^* \frac{c_2}{c_1} - \omega_1^*\omega_2^* \frac{c_2}{c_1} - \dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 - 2\omega_2^*\omega_1 \frac{c_3}{c_1} + 2\nu_0\omega_3^* \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^3c_2} - 2\omega_3^* \frac{\dot{c}_2}{c_1} - 2\omega_3 \frac{\dot{c}_1}{c_1} \end{aligned} \quad (123).$$

Условия совместности этих уравнений  $p_{12} = p_{21}$  (123) совпадают с уравнениями (8). Выражение для давления имеет вид

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{1}{2} (p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{33}x_3^2) + p_{12}x_1x_2 + p_{23}x_2x_3 + p_{31}x_3x_1 - \Phi + \frac{1}{\rho} p_0(t), \quad (9)$$

где  $p_0(t)$  — произвольная функция времени.

**2. Обобщенные координаты, описывающие положение частиц жидкости в полости.** Для введения обобщенных координат, применим подход, использованный в работе [7], распространив его на случай эллипсоида с переменными длинами главных осей. Для этого изучим отображение эллипсоидальной области с полуосями  $c_{10}, c_{20}, c_{30}$  на эллипсоидальную область с полуосями  $c_1, c_2, c_3$ , состоящее из трех последовательных отображений:

1) линейное отображение сжатия и растяжения, сохраняющее объем и переводящее эллипсоидальную область с полуосями  $c_{10}, c_{20}, c_{30}$  в шар, который условимся называть "жидким шаром";

2) поворот "жидкого шара" вокруг его центра;

3) линейное отображение растяжения и сжатия, сохраняющее объем и преобразующее "жидкий шар" в эллипсоидальную область с полуосями  $c_1, c_2, c_3$ .

Выясним, куда перейдет после отображения точка, имеющая в осях  $Ox_1x_2x_3$  координаты  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ . Для этого рассмотрим как изменяются координаты точки после каждого преобразования.

Первое отображение переводит ее в точку с координатами

$$z_i = \frac{R}{c_{i0}} x_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad R = \sqrt[3]{c_{10}c_{20}c_{30}}.$$

После второго отображения положение точки в системе  $Ox_1x_2x_3$  описывается радиусом-вектором  $y = Bz$ , где  $z$  — вектор с компонентами  $z_1, z_2, z_3$ ;  $B$  — матрица поворота, компоненты  $b_{ij}$  которой зависят от параметров  $\varphi_*, \psi_*, \theta_*$ , определяющих положение "жидкого шара" после поворота. Проекция вектора  $y$  на оси  $Ox_1x_2x_3$  обозначим  $y_1, y_2, y_3$ .

После третьего отображения рассматриваемая точка будет иметь в осях  $Ox_1x_2x_3$  координаты

$$x_i = \frac{c_i}{R} y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Координаты  $x_i$  можно выразить через  $x_i^0$  по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \frac{c_i}{c_{j0}} x_j^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Обозначим через  $x^0$  вектор, проекции которого на оси  $Ox_1x_2x_3$  равны  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ . Если предположить, что параметры  $\varphi_*, \psi_*, \theta_*, c_1, c_2, c_3$  являются функциями времени  $t$  и  $b_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $c_i = c_{i0}$  при  $t = t_0$ , то определенные равенствами (10) функции  $x_i(t, x^0)$  будут описывать в осях  $Ox_1x_2x_3$  движение частицы жидкости, имевшей при  $t = t_0$  координаты  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ . Дифференцируя равенства (10) по  $t$ , находим компоненты скорости этой частицы относительно осей  $Ox_1x_2x_3$

$$v_i^* = \sum_{j=1}^3 (b_{ij} \dot{c}_i + b_{ij} \dot{c}_j) \frac{x_j^0}{c_{j0}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Компоненты скорости  $v_i^*$  представим как функции времени  $t$  и координат  $x_i$ . Для этого выпишем отображение, обратное отображению (10). Умножая левую и правую части равенства (10) на матрицу  $A$ , обратную к матрице  $B$ , получаем

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \frac{c_{j0}}{c_k} x_k, \quad j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $a_{ij}$  — компоненты матрицы  $A$ , определенные равенствами

$$a_{ij} = b_{ji}. \quad (13)$$

Заменяя в равенствах (11) величины  $x_i^0$  по формулам (12), получаем

$$v_i^* = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (b_{ij} \dot{c}_i + b_{ij} \dot{c}_j) a_{jk} \frac{x_k}{c_k}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор с компонентами  $x_1, x_2, x_3$ . Формулы (14) описывают движение жидкости в полости по методу Эйлера. Применяя к равенствам (14) операцию  $\text{rot}$ , находим следующие выражения для компонент вектора вихря  $2\Omega^*$

$$2\Omega_1^* = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{c_3}{c_2} \dot{b}_{3j} a_{j2} - \frac{c_2}{c_3} \dot{b}_{2j} a_{j3} \right) - \sum_{j=1}^3 \left( b_{3j} a_{j2} \frac{\dot{c}_3}{c_2} - b_{2j} a_{j3} \frac{\dot{c}_2}{c_3} \right) \quad (123).$$

Из равенства (13) и условия постоянства объема эллипсоида следует, что вторая сумма равна нулю, следовательно

$$2\Omega_1^* = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{c_3}{c_2} \dot{b}_{3j} a_{j2} - \frac{c_2}{c_3} \dot{b}_{2j} a_{j3} \right) \quad (123).$$

Согласно работе [7], эти формулы можно представить в виде

$$\Omega_1^* = \frac{c_3^2 + c_2^2}{2c_2c_3} \omega_1^* \quad (15)$$

где  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  — компоненты вектора угловой скорости  $\omega^*$  "жидкого шара", движению которого соответствует матрица поворота  $B$ .

Из формул (15) следует, что в рассматриваемом движении вектор  $\Omega^*$  не зависит от  $x_1, x_2, x_3$ , то есть движение однородное вихревое. С другой стороны, для любого изменяющегося со временем вектора  $\Omega^*(t)$  можно указать такое движение "жидкого шара" с угловой скоростью  $\omega^*(t)$ , что будет выполнено равенство (15). Иными словами, всякое однородное вихревое движение жидкости в эллипсоидальной оболочке с переменными длинами главных осей можно описать изложенным способом.

Формулы (14) и (15) определяют относительную скорость и относительную завихренность однородного вихревого движения, а именно, скорость  $\mathbf{v}$  и вихрь  $2\Omega^*$  относительно подвижных осей  $Ox_1x_2x_3$ . Абсолютная скорость  $\mathbf{v}^*$  и вихрь  $2\Omega$  находятся по формулам

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^* + \boldsymbol{\omega}. \quad (16)$$

Проекции векторов (16) на оси  $Ox_1x_2x_3$  в развернутом виде выглядят так

$$v_1^* = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\dot{b}_{1j} c_1 + b_{1j} \dot{c}_1) a_{jk} \frac{x_k}{c_k} + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \quad (17)$$

$$\Omega_1 = \frac{c_3^2 + c_2^2}{2c_3c_2} \omega_1^* + \omega_1 \quad (18)$$

где  $v_i^*, \omega_i, \Omega_i, i = 1, 2, 3$  — соответственно проекции на оси  $Ox_1x_2x_3$  векторов  $\mathbf{v}^*, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ .

Используя соотношения (13) и  $\sum_{j=1}^3 \dot{b}_{3j} a_{j2} = \omega_1^*$  (123), формулу (17) представим в виде

$$v_1^* = c_1 \left( \frac{\omega_2^*}{c_3} x_3 - \frac{\omega_3^*}{c_2} x_2 \right) + \frac{\dot{c}_1}{c_1} x_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \quad (19)$$

Положение "жидкого шара" относительно осей  $Ox_1x_2x_3$  будем определять обобщенными координатами  $\varphi^*, \psi^*, \theta^*$ . Положение осей  $Ox_1x_2x_3$  относительно неподвижной системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  определим обобщенными координатами  $\varphi, \psi, \theta$ . Величины  $\varphi, \psi, \theta$ ,

$\varphi_*, \psi_*, \theta_*, c_1, c_2$  можно принять за обобщенные координаты, описывающие границу жидкости и положение частиц жидкости внутри нее. При этом надо учитывать, что  $c_1, c_2, c_3$  связаны соотношением (2).

**3. Функция Лагранжа.** Кинетическая энергия жидкости определяется выражением

$$T = \frac{\rho}{2} \int_Q (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) dQ,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $Q$  — объем, занимаемый жидкостью. Используя формулы (19), соотношения

$$\frac{\rho}{2} \int_Q x_i^2 dQ = \frac{1}{10} m c_i^2, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho c_1 c_2 c_3, \quad \int_Q x_i x_j dQ = 0$$

и вводя вместо  $c_1, c_2, c_3$  безразмерные величины  $\zeta_i = c_i/R$ ,  $i = 1, 2, 3$ , представим выражение для кинетической энергии в виде

$$T = \frac{mR^2}{10} \sum_{(123)} [(\zeta_1 \omega_2^* + \zeta_3 \omega_2)^2 + (\zeta_1 \omega_3^* + \zeta_3 \omega_3)^2 + \zeta_1^2]. \quad (20)$$

В качестве обобщенных координат  $\varphi_*, \psi_*, \theta_*$ , определяющих положение "жидкого шара" относительно осей  $Ox_1x_2x_3$ , примем углы Эйлера. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \dot{\varphi}_* \sin \theta_* \sin \psi_* + \dot{\theta}_* \cos \psi_*, \\ \omega_2^* &= -\dot{\varphi}_* \sin \theta_* \cos \psi_* + \dot{\theta}_* \sin \psi_*, \\ \omega_3^* &= \dot{\varphi}_* \cos \theta_* + \dot{\psi}_*. \end{aligned} \quad (21)$$

В качестве обобщенных координат  $\varphi, \psi, \theta$ , определяющих положение подвижных осей  $Ox_1x_2x_3$  относительно неподвижных  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , также примем углы Эйлера. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22)$$

В качестве обобщенных координат, описывающих положение частиц жидкости, будем использовать  $\varphi_*, \psi_*, \theta_*, \varphi, \psi, \theta, \zeta_1, \zeta_2$ . При этом

$$\zeta_3 = 1/(\zeta_1 \zeta_2). \quad (23)$$

Потенциальную энергию гравитационных сил обозначим  $\Pi(\zeta_1, \zeta_2)$ . Конкретное выражение для нее будет указано ниже. Функция Лагранжа будет иметь вид  $L = T - \Pi$ , где  $T$  определено выражениями (20)–(23).

**4. Диссипативная функция Рэлея.** Учитывая, что скорость жидкости относительно осей  $Ox_1x_2x_3$  определяется формулами (6), запишем выражения для компонент тензора скоростей деформаций в виде

$$\sigma_{11} = \frac{\dot{\zeta}_1}{c_1}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{c_3^2 - c_2^2}{2c_3c_2} \omega_1^* \quad (123). \quad (24)$$

Компоненты тензора напряжений имеют вид [6]

$$p_{ij} = p \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x})\sigma_{ij}, \quad (25)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\mu(\mathbf{x}) = \rho\nu(\mathbf{x})$  — динамическая вязкость жидкости. Тогда диссипация энергии за счет вязкого трения будет определяться формулой [8]

$$d\mathcal{A} = - \int_Q p_{ij} e_{ij} dQ dt.$$

Используя (24) и (25), представим последнюю формулу в виде

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{5} \nu_0 m \sum_{(123)} \left( \left( \frac{\zeta_3^2 - \zeta_2^2}{\zeta_3 \zeta_2} \right)^2 \omega_1^{*2} + 2 \frac{\zeta_1^2}{\zeta_1^2} \right).$$

$\mathcal{F}$  и есть диссипативная функция Рэлея.

**5. Уравнения движения эллипсоидальной массы жидкости.** Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad (\varphi, \psi, \theta, \varphi_*, \psi_*, \theta_*, \zeta_1, \zeta_2).$$

Остальные уравнения системы получаются циклической перестановкой взятых в скобки символов. Уравнения, соответствующие обобщенным координатам  $\varphi, \psi, \theta$ , в развернутом виде таковы:

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 - w_1 \omega_2 + w_2 \omega_1 &= 0, \\ \dot{w}_1 \sin \theta \sin \varphi + \dot{w}_2 \sin \theta \cos \varphi + \dot{w}_3 \cos \theta + \\ + w_1 (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) + w_2 (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) - w_3 \dot{\theta} \sin \theta &= 0, \\ \dot{w}_1 \cos \varphi - \dot{w}_2 \sin \varphi - \\ - w_1 (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi) - w_2 (\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) + w_3 \dot{\psi} \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

где

$$w_1 = 2\zeta_2 \zeta_3 \omega_1^* + (\zeta_2^2 + \zeta_3^2) \omega_1 \quad (123).$$

Обозначая левые части полученных уравнений в порядке следования через  $f_1, f_2, f_3$  и составляя линейные комбинации

$$f_2 \sin \varphi + f_3 \sin \theta \cos \varphi - f_1 \cos \theta \sin \varphi = 0,$$

$$f_2 \cos \varphi - f_3 \sin \theta \sin \varphi - f_1 \cos \theta \cos \varphi = 0, \quad f_1 = 0,$$

представим уравнения для  $w_1, w_2, w_3$  в виде

$$\dot{w}_1 - w_2 \omega_3 + w_3 \omega_2 = 0 \quad (123). \quad (26)$$

Уравнения, соответствующие обобщенным координатам  $\varphi_*, \psi_*, \theta_*$ , в развернутом виде таковы

$$\dot{u}_1 \sin \theta_* \sin \psi_* - \dot{u}_2 \sin \theta_* \cos \psi_* + \dot{u}_3 \cos \theta_* + u_1 (\dot{\theta}_* \cos \theta_* \sin \psi_* + \dot{\psi}_* \sin \theta_* \cos \psi_*) -$$

$$\begin{aligned}
 & -u_2(\dot{\theta}_* \cos \theta_* \cos \psi_* - \dot{\psi}_* \sin \theta_* \sin \psi_*) - u_3 \dot{\theta}_* \sin \theta_* + \partial \mathcal{F} / \partial \dot{\varphi}_* = 0, \\
 & \dot{u}_3 + u_1 \omega_2^* - u_2 \omega_1^* + \partial \mathcal{F} / \partial \dot{\psi}_* = 0, \\
 & \dot{u}_1 \cos \psi_* + \dot{u}_2 \sin \psi_* - u_1(\dot{\psi}_* \sin \psi_* + \dot{\varphi}_* \cos \theta_* \sin \psi_*) + \\
 & + u_2(\dot{\psi}_* \cos \theta_* + \dot{\varphi}_* \cos \theta_* \cos \psi_*) + u_3 \dot{\varphi}_* \sin \theta_* + \partial \mathcal{F} / \partial \dot{\theta}_* = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$u_1 = 2 \zeta_2 \zeta_3 \omega_1 + (\zeta_2^2 + \zeta_3^2) \omega_1^* \quad (123).$$

Обозначая левые части этих уравнений в порядке следования через  $f_1^*, f_2^*, f_3^*$  и составляя линейные комбинации

$$f_1^* \sin \psi_* + f_3^* \sin \theta_* \cos \psi_* - f_2^* \cos \theta_* \sin \psi_* = 0,$$

$$f_1^* \sin \psi_* - f_3^* \sin \theta_* \sin \psi_* - f_2^* \cos \theta_* \cos \psi_* = 0, \quad f_2^* = 0,$$

приведем уравнения для  $u_1, u_2, u_3$  к виду

$$\dot{u}_1 + u_2 \omega_3^* - u_3 \omega_2^* + \frac{2\nu_0}{R^2} \left( \frac{\zeta_2^2 - \zeta_3^2}{\zeta_2 \zeta_3} \right)^2 \omega_1^* = 0 \quad (123). \quad (27)$$

Уравнения, соответствующие обобщенным координатам  $\zeta_1, \zeta_2$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (1 + \zeta_1^{-4} \zeta_2^{-2}) \ddot{\zeta}_1 + \zeta_1^{-3} \zeta_2^{-3} \ddot{\zeta}_2 - 2\zeta_1^{-5} \zeta_2^{-2} \dot{\zeta}_1^2 - 2\zeta_1^{-3} \zeta_2^{-4} \dot{\zeta}_2^2 - 2\zeta_1^{-4} \zeta_2^{-3} \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2 + \\
 & + \zeta_1^{-3} \zeta_2^{-2} (\omega_1^{*2} + \omega_1^2) + 2\zeta_1^{-2} \omega_1^* \omega_1 - (\zeta_1 - \zeta_1^{-3} \zeta_2^{-2}) (\omega_2^{*2} + \omega_2^2) - \\
 & - \zeta_1 (\omega_3^{*2} + \omega_3^2) - 2\zeta_2 \omega_3^* \omega_3 + \frac{4\nu_0}{R^2} (2\zeta_1^{-2} \dot{\zeta}_1 + \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \dot{\zeta}_2) + \frac{5}{\rho Q R^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (28) \\
 & \zeta_1^{-3} \zeta_2^{-3} \ddot{\zeta}_1 + (1 + \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-4}) \ddot{\zeta}_2 - 2\zeta_1^{-4} \zeta_2^{-3} \dot{\zeta}_1^2 - 2\zeta_1^{-2} \zeta_2^{-5} \dot{\zeta}_2^2 - 2\zeta_1^{-3} \zeta_2^{-4} \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2 + \\
 & + \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-3} (\omega_2^{*2} + \omega_2^2) + 2\zeta_2^{-2} \omega_2^* \omega_2 - (\zeta_2 - \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-3}) (\omega_1^{*2} + \omega_1^2) - \\
 & - \zeta_2 (\omega_3^{*2} + \omega_3^2) - 2\zeta_1 \omega_3^* \omega_3 + \frac{4\nu_0}{R^2} (2\zeta_2^{-2} \dot{\zeta}_2 + \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \dot{\zeta}_1) + \frac{5}{\rho Q R^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (26)–(28) будут действительно описывать движение эллипсоидальной массы жидкости со свободной поверхностью, если давление  $p$ , задаваемое формулой (9), будет иметь нулевое значение на ее границе.

**6. Случай осесимметричного эллипсоида.** Рассмотрим движение сплюснутого осесимметричного эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии. Примем  $Ox_3$  за ось симметрии, и считая ее неподвижной, потребуем, чтобы во все время движения выполнялись условия

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_1^* = \omega_2^* = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta, \quad (29)$$

где  $\zeta$  — новое обозначение для  $\zeta_1, \zeta_2$ . Тогда уравнения движения (26), (27) будут удовлетворены, а (28) сведутся к одному уравнению

$$(1 + 2\zeta^{-6}) \ddot{\zeta} - 6\zeta^{-7} \dot{\zeta}^2 + \frac{12\nu_0}{R^2} \zeta^{-2} \dot{\zeta} - \frac{1}{4} u_3^2 \zeta^{-3} + \frac{5}{2mR^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 0, \quad (30)$$

где  $u_3 = 2\zeta^2(\omega_3^* + \omega_3) = \text{const}$ . В случае сплюснутого эллипсоида вращения имеем [5]

$$\Pi = \frac{4}{5} \pi \gamma \rho m R^2 V, \quad V = 1 - (1 + \xi^{-2})^{\frac{1}{3}} \xi \operatorname{arccctg} \xi,$$

$$\alpha_1 = (\xi^2 + 1)\xi \operatorname{arccctg} \xi - \xi^2, \quad \alpha_3 = 2(\xi^2 + 1)(1 - \xi \operatorname{arccctg} \xi), \quad \xi = (\zeta^6 - 1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Покажем, что давление на границе эллипсоида будет одним и тем же во всех ее точках. Учитывая (29), будем иметь  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $p_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ,

$$p_{11} = p_{22} = (\omega_3^* + \omega_3)^2 - \frac{\ddot{\zeta}}{\zeta} - \frac{4\nu_0}{R^2} \frac{\dot{\zeta}}{\zeta^3}, \quad p_{33} = -\frac{\ddot{\zeta}_3}{\zeta_3} - \frac{4\nu_0}{R^2} \frac{\dot{\zeta}_3}{\zeta_3^3}. \quad (32)$$

Тогда выражение (9) для  $p$  можно записать в виде

$$(p_{11} - 2\pi\rho\gamma\alpha_1)(x_1^2 + x_2^2) + (p_{33} - 2\pi\rho\gamma\alpha_3)x_3^2 = 2p/\rho.$$

Это уравнение описывает в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  семейство подобных соосных эллипсоидов, на каждом из которых  $p$  имеет постоянное значение. Граница жидкости будет принадлежать этому семейству в том и только том случае, если выполнено условие

$$\zeta_1^2(p_{11} - 2\pi\rho\gamma\alpha_1) = \zeta_3^2(p_{33} - 2\pi\rho\gamma\alpha_3), \quad (33)$$

которое с учетом (31),(32) представляется в виде

$$(1 + 2\zeta^{-6})\ddot{\zeta} = 6\zeta^{-7}\dot{\zeta}^2 + \frac{1}{4}u_3^2\zeta^{-3} - 12\nu_0R^{-2}\zeta^{-2}\dot{\zeta} + 2\pi\rho\gamma(\alpha_3\zeta^{-5} - \alpha_1\zeta). \quad (34)$$

Учитывая соотношение

$$-\frac{5}{2mR^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 2\pi\rho\gamma(\alpha_3\zeta^{-5} - \alpha_1\zeta),$$

находим, что уравнение (34) совпадает с уравнением (30). Следовательно, условие (33) будет выполнено и давление на границе жидкости будет одним и тем же во всех ее точках.

Уравнение (34) запишем в виде системы

$$\dot{\eta} = \frac{6}{(2 + \zeta^6)\zeta} \eta^2 - 12\frac{\nu_0}{R^2} \frac{\zeta^4}{2 + \zeta^6} \eta + \frac{u_3^2}{4} \frac{\zeta^3}{2 + \zeta^6} + 2\pi\rho\gamma \frac{\alpha_3\zeta - \alpha_1\zeta^7}{2 + \zeta^6}, \quad \dot{\zeta} = \eta, \quad (35)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  определены формулами (31). Система (35) имеет стационарное решение  $\eta = 0$ ,  $\dot{\zeta} = \zeta_0$ , где значение  $\zeta$  находится из уравнения

$$u_3^2/4 = 2\pi\rho\gamma(\alpha_1\zeta^4 - \alpha_3\zeta^{-2}). \quad (36)$$

Разрешить это уравнение относительно  $\zeta$  затруднительно. Поэтому удобнее задавать величину  $\zeta$  и определять соответствующее ей значение  $u_3^2/4$  равенством (36).

Изучим поведение решений системы (35) в малой окрестности стационарного решения. Для этого введем новую переменную  $\zeta' = \zeta - \zeta_0$  и линеаризуем систему (35) в окрестности стационарного решения. Будем иметь  $\dot{\eta} = -a\eta + b\zeta'$ ,  $\dot{\zeta}' = \eta$ , где

$$a = 12\frac{\nu_0}{R^2} \frac{\zeta_0^4}{2 + \zeta_0^6}, \quad b = 2\pi\rho\gamma W(\zeta_0), \quad W(\zeta) = (\alpha_1\zeta^4 - \alpha_3\zeta^{-2}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^3}{2 + \zeta^6} - \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы  $\lambda^2 + a\lambda - b = 0$  имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 + b}.$$

График функции  $W(\zeta)$  изображен на рисунке. При  $\nu_0 = 0$  имеем  $a = 0, b < 0$ . В этом случае характеристическое уравнение будет иметь одну пару чисто мнимых комплексно-сопряженных корней. При  $\nu_0 > 0$ , в зависимости от соотношений величин  $\rho\gamma$  и  $\nu_0/R^2$ , может представиться два следующих случая:

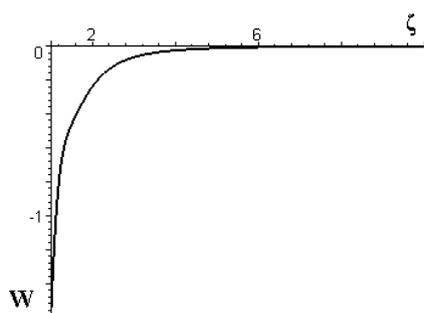


Рис. 1. График функции  $W(\zeta)$

а) характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня с отрицательной действительной частью, и эллипсоид совершает затухающие колебания около положения равновесия;

б) характеристическое уравнение имеет два различных отрицательных действительных корня и эллипсоид асимптотически приближается к положению равновесия.

#### Заключение.

1) Показано, что несжимаемая ньютоновская жидкость, целиком заполняющая произвольно движущийся эллипсоид постоянного объема с изменяющимися длинами главных осей и имеющая вязкость, заданную формулой (3), может совершать однородное вихревое движение.

2) Изучено влияние вязкости, величина которой заданна формулой (3), на движение вращающегося осесимметричного гравитирующего эллипсоида в окрестности положения равновесия. При этом оказалось, что возмущения, в зависимости от величины  $\nu_0$ , могут затухать двояким образом: либо эллипсоид совершает затухающие колебания около положения равновесия, либо асимптотически стремится к нему.

1. Бражкин В.В. Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений: стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли // Усп. физических наук. – 2000. – **170**, N 5. – С. 535 – 551.
2. Судаков С.Н. Движение тела с жидкостью переменной вязкости в поле неподвижного притягивающего центра // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 111 – 118.
3. Судаков С.Н. Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2000. – **5**. – С. 141 – 144.
4. Судаков С.Н. Переменные Депри в задаче о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью переменной вязкости // Там же. – 2000. – **7**. – С. 181 – 191.
5. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
7. Судаков С.Н. Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 67 – 71.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука. – 1973. – т.1. – 536 с.