УДК 517.95

Я. С. Кушицкий, С. Д. Эйдельман

# НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

1. **Постановка задачи. Условия**. В работе А. Н. Тихонова [1] найдены необходимые и достаточные условия на граничные операторы, гарантирующие стабилизацию ограниченных решений одномерного уравнения теплопроводности, построенных по произвольным стабилизирующимся граничным функциям. Аналогичный результат для одномерного модельного параболического уравнения высокого порядка был получен Д. В. Прокой [2]. В цикле работ Н. В. Житарашу и одного из авторов [3—5] найдены необходимые и достаточные условия на граничные функции, которые гарантируют стабилизацию ограниченных решений модельной параболической граничной задачи для многомерного параболического в смысле И. Г. Петровского уравнения.

В настоящей работе рассматривается модельное параболическое по Петровскому уравнение

$$\partial_t u + (-1)^b (\Delta_{x'}^b + \partial_{x_n}^{2b}) u = 0. \tag{1}$$

Исследуются ограниченные в $\mathbb{R}_{++}^{n+1} = \{(t, x) : t > 0,\ x = (x', x_n),\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ решения уравнения (1), удовлетворяющие нулевым начальным условиям

$$u(+0, x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}_+^n = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\} \tag{2}$$

и граничным условиям

$$B_j(\partial_{x'}, \partial_{x_n}) u|_{x_n=+0} \sum_{|k'|+k_n \leqslant r_j} a_{k'k_n}^{(j)} \partial_{x'}^{k'} \partial_{x_n}^{k_n} u|_{x_n=+0} = g_i(t, x'),$$

$$j = 1, 2, \ldots, b,\ (t, x') \in \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_b. \tag{3}$$

Здесь и дальше используются такие обозначения: $\partial_{x_k}$ — частная производная по переменной $x_k$; $\partial_{x'} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_{n-1}})$; $\partial_{x'}^{k'} = \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \ldots \partial_{x_{n-1}}^{k_{n-1}}$, $|k'| = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$; $\Delta_{x'}^b = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \ldots + \partial_{x_{n-1}}^2)^b$; $\sigma' = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots$

$\ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\sigma'^{2b} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_{n-1}^2)^b$, $x' \cdot \sigma' = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \sigma_k$; $\omega_s = \exp\{i(\pi/2b + (s-1)\pi/b)\}$, $s = 1, 2, \ldots, b$, — корни степени $2b$ из $-1$ с положительными мнимыми частями, $z^{1/2b} = (p + \sigma'^{2b})^{1/2b}$ — корень степени $2b$ из комплексного числа $p + \sigma'^{2b}$, положительный при вещественных $p + \sigma'^{2b} > 0$.

Обозначим через $B_j^0(\partial_{x'}, \partial_{x_n}) = \sum_{|k'|+k_n=r_j} a_{k'k_n}^{(j)} \partial_{x'}^{k'} \partial_{x_n}^{k_n}$ — старший оператор $j$-го граничного условия и определим функции

$$F(p, \sigma') = \det\{(B_j(i\sigma', i\omega_s(p + \sigma'^{2b})^{1/2b}))_{j,s=1}^b\},$$

$$F_0(p, \sigma') = \det\{(B_j^0(i\sigma', i\omega_s(p + \sigma'^{2b})^{1/2b}))_{j,s=1}^b\},$$

а через $P_{b,\sigma'}^{-}$ — полуплоскость $\operatorname{Re} p < -\sigma'^{2b}$ комплексной $p$-плоскости, а через $\bar{P}_{b,\sigma'}^{-} = P_{b,\sigma'}^{-} \cup \{\operatorname{Re} p = -\sigma'^{2b}\}$.

Существенную роль играют следующие условия:

$\alpha_1$ (параболические задачи): $p$ — нули функции $F_0(p, \sigma') z^{(1-b)/4}$ при любом ненулевом векторе $\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ принадлежат $\bar{P}_{b,\sigma'}^{-}$;

$\alpha_2$ (задачи устойчивости): $p$ — нули функции $F(p, \sigma') z^{(1-b)/4}$ при любом векторе $\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ принадлежат $P_{b,\sigma'}^{-}$.

Нам представляются наиболее существенными излагаемые ниже результаты изучения структуры ядер Пуассона задачи (1)—(3) при больших временах. Методика их получения, вероятно, найдет и другие содержательные приложения.

**2. Формулы для решения задачи (1)—(3).** Ограниченные решения задачи представим формулой

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{b} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau, \xi') d\xi', \qquad (4)$$

где $G_j(t, x)$ — ядра Пуассона. Можно предложить разные формы представления этих ядер. Для наших целей наиболее удобны формулы из [6, 8], записанные для граничной задачи с операторами $B_j$, содержащими и младшие члены. Как обычно, применение преобразования Лапласа по времени $t$ и Фурье по касательным переменным $x'$ приведет нас к представлению

$$G_j(t, x) = (2\pi)^{-n} i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\{ix' \cdot \sigma'\} d\sigma' \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\{pt\} \hat{G}_j(p, \sigma', x_n) dp, \qquad (5)$$

где $\hat{G}_j(p, \sigma', x_n) = R_j(\sigma', z^{1/2b}, x_n / R(\sigma', z^{1/2b})$, а функции, фигурирующие в последней формуле, конструируются ниже.

Вначале определяется $\sigma_n$-многочлен $M^+(\sigma_n, z^{1/2b}) = \prod_{s=1}^{b}(\sigma_n - \omega_s z^{1/2b}) = \sum_{l=0}^{b} \alpha_l \sigma_n^{k-l} z^{l/2b}$. Затем функции

$$v_l(z^{1/2b}, x_n) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma^+} [\sigma_n^{l-1} \exp\{ix_n\sigma_n\}] / M^+(\sigma_n, z^{1/2b}) d\sigma_n, \quad l = 1, 2, \ldots, b, \qquad (6)$$

где $\gamma^+$ — замкнутый жорданов контур комплексной $\sigma_n$-плоскости, охватывающий все нули $\sigma_n$-полинома $M^+(\sigma_n, z^{1/2b})$. По функциям $v_l(z^{1/2b}, x_n)$ и граничным операторам $B_j(\partial_{x'}, \partial_{x_n})$ определяются

$$r_{jl}(\sigma', z^{1/2b}) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma^+} \{[\sigma_n^{l-1} B_j(i\sigma', i\sigma_n)] / M^+(\sigma_n, z^{1/2b})\} d\sigma_n, \qquad (7)$$

тогда $R(\sigma', z^{1/2b}) = \det\{(r_{jl}(\sigma', z^{1/2b}))_{j,l=1}^{b}\}$, а $R_j(\sigma', z^{1/2b}, x_n)$ получается из $R(\sigma', z^{1/2b})$ заменой $j$-й строки на строку из функций $v_1(z^{1/2b}, x_n)$, $v_2(z^{1/2b}, x_n), \ldots, v_b(z^{1/2b}, x_n)$. Условие $\alpha_2$ означает, что $p$-нули функции $R(\sigma', (p+\sigma'^{2b})^{1/2b})$ принадлежат при $\forall\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ полуплоскости $P^{-}_{b,\sigma'}$, а условие $\alpha_1$ относится к старшей группе членов $R(\sigma', (p+\sigma'^{2b})^{1/2b})$.

Особую роль в дальнейшем играет задача Дирихле: $B_j(\partial_{x'}, \partial_{x_n}) \equiv \equiv \partial_{x_n}^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, b$, для нее выполнены условия $\alpha_1$, $\alpha_2$ $(R(\sigma', z^{1/2b}) \equiv 1)$.

Как установлено в [3], ограниченные решения этой задачи стабилизируются при любых стабилизирующихся граничных функциях $q_j(t, x')$. Переходим к изложению основных результатов, их доказательство требует привлечения техники комплексного анализа и детального анализа формул (4)—(7).

3. **Результаты**. В дальнейшем через $C$, $c$ будем обозначать положительные постоянные (разные в разных неравенствах), через $q = 2b/(2b-1)$, $y = xt^{-1/2b}$, $P_{j(x_n)}^{(k)}$ многочлены степени не выше $k$ с неотрицательными коэффициентами.

**Теорема 1** (о ядрах Пуассона). Пусть выполнены условия $\alpha_1$, $\alpha_2$. Тогда ядра Пуассона $G_j(t, x)$, $j = 1, 2, \ldots, b$, граничной задачи (1)—(3) обладают следующими свойствами:

1. При $t \in ]0, 1]$ и $r_j > 0$

$$|C_j(t, x)| \leqslant P_j^{(2b-1)}(x_n)\, t^{-(n-1+2b-r_j)/2b} \exp\{-c|y|^q\}; \tag{8}$$

если $r_j = 0$, то для соответствующего ядра Пуассона $G_j(t, x)$ справедлива оценка

$$|G_j(t, x)| \leqslant x_n P_j^{(2b-1)}(x_n)\, t^{-(n+2b)/2b} \exp\{-c|y|^q\}. \tag{9}$$

2. Имеет место представление

$$G_j(t, x) = G_j^{(0)}(t, x) + G_j^{(1)}(t, x), \tag{10}$$

где $G_j^{(0)}(t, x) \sum\limits_{m=1}^{b} C_{mj} \partial_{x_n}^{j-1} G_b^{(D)}(t, x)$, $C_{mj}$ — постоянные; $C_b^{(\mathscr{D})}(t, x)$ — $b$-е ядро Пуассона задачи Дирихле; при $t \in ]1, \infty[$ справедливы оценки

$$|G_j^{(0)}(t, x)| \leqslant x_n P_j^{(b-1)}(x_n)\, t^{-(n+2b)/2b} \exp\{-c|y|^q\}, \tag{11}$$

а для $G_j^{(1)}(t, x)$ при $t \geqslant 1$

$$|G_j^{(1)}(t, x)| \leqslant P_j^{(b-1)}(x_n)\, t^{-(n+2b)/b} \exp\{-c|y|^q\}. \tag{12}$$

3. Интегралы $\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |G_j(t, x)|\, dx'$, $j = 1, 2, \ldots, b$, равномерно (по $x_n$) ограничены на каждом конечном отрезке $[0, L]$.

4. Функции $\mathscr{C}_j(x) = \int\limits_0^\infty G_j(t, x)\, dt$, $j = 1, 2, \ldots, b$, являются ядрами Пуассона граничной задачи (3) для эллиптического уравнения $(\Delta_{x'}^{b} + \partial_{x_n}^{2b}) u = 0$.

Переходим к формулировке теорем о стабилизации, они всецело основаны на оценках (8)—(12).

**Определение**. Граничные функции $g_j(t, x')$, $j = 1, 2, \ldots, b$, определенные в $\mathbb{R}_+$, принадлежат классу $\Omega$, если 1) $g_j(t, x')$ непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}_+$; 2) $\exists \lim\limits_{\to\infty} g_j(t, x') = g_j^0(x')$ равномерно по $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

**Теорема 2** (о стабилизации). Пусть выполнены условия $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Тогда ограниченное решение $u(t, x)$ задачи (1)—(3), построенное по произвольным граничным функциям $g_j(t, x')$ из класса $\Omega$, равномерно в каждом слое

$\mathbb{R}_+^n \cap (x_n \leqslant L)$ стабилизируется к ограниченной непрерывной функции $u_0(x)$ (т. е. $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = u_0(x)$), которая удовлетворяет граничным условиям (3) и представима формулой

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{b} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathscr{C}_j(x - \xi') g_j^0(\xi')\, d\xi'.$$

Рассмотрим частный класс граничных операторов, которые не содержат производных по касательным переменным

$$B_j(\partial_{x_n}) u|_{x_n=+0} = \sum_{k_n=0}^{r_j} a_{k_n}^{(j)} \partial_{x_n}^{k_n} u|_{x_n=+0} = g_j(t, x'), \quad j = 1, 2, \ldots, b. \qquad (3')$$

Пусть выполнено условие $\alpha_1$ параболичности задачи (1)—(3). Нетрудно убедиться, что в этом случае для ядер Пуассона справедливы равенства $G_j(t,x) = Z_{n-1}(t,x')\, \widetilde{G}_j(t,x_n)$, где $\widetilde{G}_j(t,x_n)$ — ядра Пуассона соответствующей одномерной краевой задачи. Из этого и результатов [2] следует

**Теорема 3** (необходимые условия стабилизации). Если ограниченное решение $u\ (t,\ x)$ граничной задачи (1), (2), (3′), построенное по произвольным стабилизирующимся граничным функциям класса $\Omega$, стабилизируется при $t \to \infty$, то выполнено условие $\alpha_2$.

**4. Случай уравнения теплопроводности** ($b = 1$). В этом практически интересном случае в представлении (10) $G_j^{(0)}(t,x) = G_1^{(0)}(t,x) = \mathrm{const}\,(x_n/t^{(n+2)/2}) \exp\{-cx^2/t\}$, все рассуждения и оценки существенно упрощаются, а утверждение 3) теоремы 1 усиливается так:

3) Интеграл $\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |G(t,x)|\, dx'$ равномерно (по $x_n \geqslant 0$) ограничен.

Из этого выводится, что для уравнения теплопроводности теорема 2 (о стабилизации) усиливается в том смысле, что стабилизация решения $u\ (t,\ x)$ к функции $u_0\ (x)$ происходит равномерно по всем $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Приведем несколько простых примеров, иллюстрирующих и дополняющих изложенные результаты.

Пример 1. Задача Дирихле: $B(\partial x', \partial x_n) \equiv 1$, $F_0(p, \sigma') \equiv F(p,\sigma') \equiv 1$.

Выполнены условия $\alpha_1$ и $\alpha_2$, поэтому справедливы все утверждения теорем 1 и 2. Ядро Пуассона определяется формулой

$$G^{(0)}(t,x) = (x_n/t)(4\pi t)^{-n/2} \exp\{-x^2/4t\}.$$

Пример 2. Задача Неймана: $B(\partial x', \partial x_n) \equiv \partial x_n$, поэтому $F(p,\sigma') = F_0(p,\sigma') = -\sqrt{p + \sigma'^2}$. Условие $\alpha_1$ выполнено, условие $\alpha_2$ — нет, так как функция $F(p,\sigma')$ имеет $p$-нуль $p = -\sigma'^2$, не лежащий в полуплоскости $P_{1,\sigma'}^-$. В силу теоремы 3 нет стабилизации при произвольных граничных функциях из $\Omega$. В этом можно убедиться непосредственно. Действительно, ядро Пуассона задачи Неймана $G^{(1)}(t,x) = -2(4\pi t)^{-n/2} \times \exp\{-x^2/4t\}$; если взять $g(t,x') \equiv 1$, то соответствующее решение задачи Неймана $u_1(t,x)$ определяется формулой

$$u_1(t,x) = -\pi^{-1/2} \int\limits_0^t \exp\{-x_n^2/4(t-\tau)\}(t-\tau)^{-1/2} d\tau \to -\infty \text{ при } t \to \infty.$$

Заметим, что если функция $q^0(x') = \lim\limits_{t\to\infty} g(t,x')$ ортогональна к единице, то соответствующее решение задачи Неймана стабилизируется [5].

Пример 3. Задача теплообмена: $B(\partial_{x'}, \partial_{x_n}) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \partial_{x_k} + b_0$,

$F_0(p,\sigma') = -b_n\sqrt{p + \sigma'^2} + i\sigma' \cdot b'$, $F(p,\sigma') = -b_n\sqrt{p + \sigma'^2} + i\sigma' \cdot b' + b_0$.

Если $b_n \neq 0$, то выполнено условие $\alpha_1$; если $a = -b_0/b_n < 0$, то выполнено и условие $\alpha_2$. Если $a > 0$, то условие $\alpha_2$ не выполнено: при $\sigma'$ ортогональных $b'$ функция $G(p, \sigma')$ имеет $p$-нуль $p = -\sigma'^2 + a^2$, не лежащий в $P^-_{1,\sigma'}$. И в этом случае ядро Пуассона $G^{(2)}(t, x)$ вычисляется явно:

$$G^{(2)}(t,x) = -2\left(|b|^2 (4\pi t)^{n/2} b_n\right)^{-1} \{b_n^2 \exp\{-x^2/4t\} +$$

$$+ 2t^{1/2}|b| \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \partial_{x_j} + b_0\right) \exp\left[\{-x^2/4t\} + (b\cdot x - 2tb_0)^2 (4 + |b|^2)^{-1}\right]\right] \times$$

$$\times \int\limits_{(b\cdot x - 2tb_0)/(2t^{1/2}|b|)}^{\infty} \exp(-z^2)\, dz.$$

Если взять в качестве граничной функции $g(t, x') \equiv 1$, то соответствующее решение будет иметь вид

$$u_2(t,x) = b_0^{-1} \int\limits_0^t x_n \exp\{-x_n^2/4\tau\} \quad \left(\tau (4\pi\tau)^{n/2}\right)^{-1} d\tau -$$

$$-2(\pi^{1/2} b_0)^{-1} \exp\{a^2 t - a x_n\} \left(\sqrt{\pi}/2 - \int\limits_0^{(x_n/2\sqrt{t}) - a\sqrt{t}} \exp\{-s^2\}\, ds\right).$$

Из последней формулы непосредственно следует, что при $a < 0\ \exists \lim\limits_{t\to\infty} u_2(t, x) = b_0^{-1}$; если $a > 0$, то $u_2(t, x) \to -\infty$ при $t \to \infty$. Таким образом, при $b_n \neq 0$ условие $a = (b_0/b_n) < 0$ необходимо и достаточно, чтобы ограниченные решения граничной задачи теплообмена стабилизировались при любых $g(t, x') \in \Omega$.

Пример 4. Третья краевая задача:

$$B(\partial_{x'}, \partial_{x_n}) \equiv (-\partial_{x_n} + b_0); \quad F_0(p, \sigma') = \sqrt{p + \sigma'^2},$$

$$F(p, \sigma') = \sqrt{p + \sigma'^2} + b_0.$$

Это частный случай задачи теплообмена. Как следует из изложенного выше, для стабилизации решений третьей краевой задачи для любых $g(t, x') \in \Omega$ необходимо и достаточно, чтобы $b_0 > 0$.

5. **О доказательствах**. Доказательство центральной теоремы 1 требует детального анализа формул, которыми определяются функции $\hat{G}_j(p, \sigma', x_n)$. При этом для получения представления (10) предпочтительна запись этих функций с помощью формул, приведенных в [6, с. 417—420] (но с учетом младших по порядку дифференцирования операторов в граничных условиях, фигурирующих в изучаемом нами случае)

$$\hat{G}_j(p, \sigma', x_n) = (1/2\pi i) \int\limits_{\gamma^+} e^{ix_n\sigma_n} \{N_j(p, \sigma')/M^+(\sigma_n, z^{1/2b})\}\, d\sigma_n, \tag{13}$$

где $N_j(p, \sigma') = \sum\limits_{\nu=1}^{b} q^{\nu j}(\sigma', z^{1/2b})\, M^+_{b-\nu}(\sigma_n, z^{1/2b}), \quad M^+_j(\sigma_n, z^{1/2b}) = \sum\limits_{l=0}^{j} \alpha_l z^{l/2b} \sigma_n^{j-l}$.

В случае задачи Дирихле функции $\hat{G}_j(p, \sigma', x_n)$ определяются равенствами

$$\hat{G}_j^{(D)}(p, \sigma', x_n) = (1/2\pi i) \int\limits_{\gamma^+} e^{ix_n\sigma_n} \{M^+_{b-j}(p, \sigma)/M^+(\sigma_n, z^{1/2b})\}\, d\sigma_n. \tag{14}$$

Сравнивая формулы (13), (14) с учетом формул для $N_j(p, \sigma')$ приходим к равенствам

$$\hat{G}_j(p, \sigma', x_n) = \sum_{\nu=1}^{b} q^{\nu j}(\sigma', z^{1/2b})\, \hat{G}_\nu^{(D)}(p, \sigma', x_n) = \sum_{\nu=1}^{b} q^{\nu j}(0, 0)\, \hat{G}_\nu^{(D)}(p, \sigma', x_n) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{b} \{q^{\nu j}(\sigma', z^{1/2b}) - q^{\nu j}(0, 0)\}\, \hat{G}_\nu^{(D)}(p, \sigma', x_n). \qquad (15)$$

Из (15) и выводится равенство (10), получаются все результаты, изложенные в теореме 1.


1. *Тихонов А. Н.* О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Мат. сб.— 1950.— **26**, №.1.— 1950.— С. 35—56.
2. *Прока Д. В.* О стабилизации решения граничной задачи для параболического уравнения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1973.— **126**.— С. 145—170.
3. *Эйдельман С. Д., Житарашу Н. В.* Асимптотическое представление при $t \to \infty$ решений параболических задач с постоянными коэффициентами // Мат. исслед.— 1975. — **186**.—С. 119—136.
4. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений модельной параболической граничной задачи // Докл. АН СССР.— 1979.— **246**, № 5.— С. 812—815.
5. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Асимптотическое поведение и необходимые и достаточные условия стабилизации решений параболических граничных задач. Краевые задачи для нестационарных уравнений // Мат. исслед.— 1980.— **58**.— С. 26—47.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 444 с.
7. *Кушицкий Я. С.* О стабилизации решений параболической граничной задачи // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 6.— С. 766—779.
8. *Arima R.* On general boundary value problem for parabolic equations // J. Math. Kyoto Univ.— 1964.— **4**, N 1.— P. 19—64.



Киев. высш. инж. радиотехн. уч-ще
противовоздуш. обороны



Получено 05.10.87