

УДК 531.383:531.4

©2009. Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

**ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ
ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА**

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов нутации и прецессии. Рассмотрено возмущенное движение волчка Лагранжа при случайных вертикальных колебаниях точки опоры. Получены и исследуются решения усредненных систем уравнений движения в первом и втором приближениях.

1. Рассмотрим возмущенные движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов нутации и прецессии. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + M_2, \quad C\dot{r} = M_3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p , q , r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O ; величины $M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; ψ , φ , θ – углы Эйлера; A , C – экваториальный и осевой моменты инерции тела относительно точки O ; $A \neq C$.

Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\theta, \psi)$, зависящий от углов нутации и прецессии, и

$$(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Неравенства (2) означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом. В работе [1] рассматривалась аналогичная задача в предположении, что угловая скорость осевого вращения достаточно велика и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\theta, \psi) = \varepsilon K(\theta, \psi), \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi) \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Новые переменные P, Q , а также переменные r, ψ, θ, φ , функции K, M_i^* ($i = 1, 2, 3$) и моменты инерции A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε , если выполнены условия (2), (3), которое будет проводиться методом усреднения [2, 3] на интервале времени порядка ε^{-1} . Упрощающие предположения (2) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив обе части первых двух уравнений (1) на ε после замены переменных (3)) и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 r &= r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 + r_0 t, \\
 P &= a \cos \gamma_0 + b \sin \gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin (r_0 t + \varphi_0), \\
 Q &= a \sin \gamma_0 - b \cos \gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos (r_0 t + \varphi_0), \\
 a &= P_0 - K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \\
 b &= -Q_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\
 \gamma_0 &= n_0 t, \quad n_0 = (C - A) A^{-1} r_0, \quad r_0 \neq 0, \quad |n_0 / r_0| \leq 1.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3), (4), перейдем в системе (1) от переменных $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где $\alpha = \gamma + \varphi, r = r_0 + \varepsilon \delta$.

После преобразований получим систему семи уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) - \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta (b - \\
 &- K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) - \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} - \\
 &- \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \sin \alpha (a \sin \alpha - b \cos \alpha + K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} + \\
 &+ \varepsilon^2 K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\
 &+ \varepsilon^2 C^{-1} r_0^{-2} \delta \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} + \\
 &+ \varepsilon^2 C^{-1} r_0^{-2} \delta \sin \alpha (a \sin \alpha - b \cos \alpha + 2K(\theta, \psi) C^{-1} r_0^{-1} \delta \sin \theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} + \\
 &+ \varepsilon^2 K(\theta, \psi) C^{-2} r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{b} = & \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) + \varepsilon K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \cos \theta(a + \\
 & + K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) + \varepsilon C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha(a \cos \alpha + b \sin \alpha) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} + \\
 & + \varepsilon C^{-1}r_0^{-1} \cos \alpha \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} (a \sin \alpha - b \cos \alpha + K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta) - \\
 & - \varepsilon^2 K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta(a + 2K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\
 & - \varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2} \delta \sin \theta \cos \alpha(a \cos \alpha + b \sin \alpha) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} - \\
 & - \varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \alpha(a \sin \alpha - b \cos \alpha + 2K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \delta \sin \theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} - \\
 & - \varepsilon^2 K(\theta, \psi)C^{-2}r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\delta} = \varepsilon C^{-1} M_3^0, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha),$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-2} \delta,$$

$$\dot{\alpha} = CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) -$$

$$- \varepsilon K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-1} \cos \theta + \varepsilon^2 K(\theta, \psi)C^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta,$$

$$\dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C - A)A^{-1} \delta,$$

$$M_i^0(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3.$$

Система (5) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и быстрые – фазы α и γ с постоянными частотами. В работах [4–7] рассматривались случаи, когда восстанавливающий момент или постоянен $k = \operatorname{const}$, или зависит от: 1) угла нутации $k = k(\theta)$; 2) медленного времени и угла нутации $k = k(\tau, \theta)$ ($\tau = \varepsilon t$); 3) медленного времени и угла прецессии $k(\tau, \psi)$. В данной работе зависимость восстанавливающего момента от углов нутации и прецессии приводит к появлению в уравнениях (5) слагаемых, содержащих частные производные $\frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi}$.

Исследуем возмущенное движение твердого тела относительно неподвижной точки под действием возмущающего момента M_i ($i = 1, 2, 3$), постоянного в связанных осях:

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^* = \varepsilon^2 M_i^0 = \operatorname{const}, \tag{6}$$

и восстанавливающего момента

$$k(\theta, \psi) = k(\theta) \sin \psi = \varepsilon K(\theta) \sin \psi. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи применим методику усреднения разработанную Д.Д. Лещенко и А.С. Шамаевым [4].

Решение усредненной системы уравнений (5) первого приближения с учетом (6), (7) для медленных переменных примет вид

$$\begin{aligned}
 a^{(1)}(\tau) &= \exp\left(-\frac{1}{2}F_2(\tau)\right)(a_0 \cos G - b_0 \sin G), \\
 b^{(1)}(\tau) &= \exp\left(-\frac{1}{2}F_2(\tau)\right)(a_0 \sin G + b_0 \cos G), \\
 \theta^{(1)} &= \theta_0, \quad \delta^{(1)}(\tau) = C^{-1}M_3^0\tau, \quad \operatorname{tg} \frac{\psi^{(1)}(\tau)}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(F_1\tau), \\
 F_1 &= K(\theta)C^{-1}r_0^{-1}, \quad F_2 = F_1 \int_0^\tau \cos \psi^{(1)}(\tau')d\tau', \\
 G(\tau) &= C^{-1}r_0^{-1}\left(K(\theta) \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\right) \int_0^\tau \sin \psi^{(1)}(\tau')d\tau', \\
 \cos \psi^{(1)}(\tau) &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(F_1\tau)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} \exp(2F_1\tau)}, \quad \sin \psi^{(1)}(\tau) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(F_1\tau)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} \exp(2F_1\tau)}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В первом приближении угол нутации постоянен. Угол прецессии – 2π -периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2}$. Переменные $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ являются произведением экспоненциального и осциллирующего сомножителей, зависящих от начальных значений угла прецессии и нутации.

Определим эволюцию углов прецессии и нутации по схеме, предложенной в [4],

$$\begin{aligned}
 \psi_\varepsilon^\vee(t) &= 2 \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(\varepsilon F_1 t)\right] + \varepsilon \exp(F_2(\varepsilon t)) \int_0^{\varepsilon t} g(\tau) \exp(-F_2(\tau))d\tau - \\
 &\quad - \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0 [a^{(1)} \cos \alpha + b^{(1)} \sin \alpha], \\
 \theta_\varepsilon^\vee(t) &= \theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon AC^{-3}r_0^{-3} K^2(\theta_0) \sin \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} \sin 2\psi^{(1)}(\tau)d\tau + \\
 &\quad + \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} [a^{(1)} \sin \alpha - b^{(1)} \cos \alpha], \\
 \alpha(t) &= \varphi_0 + CA^{-1}r_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}M_3^0 t^2 - \varepsilon C^{-1}r_0 K(\theta_0) \cos \theta_0 \int_0^t \sin \psi^{(1)}(\varepsilon t')dt',
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2}K^2(\theta_0)AC^{-4}r_0^{-4} \sin \theta_0 \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \int_0^\tau \sin 2\psi^{(1)}(\tau') d\tau' + \\ + K^2(\theta_0)AC^{-3}r_0^{-3} \cos \theta_0 \sin^2 \psi^{(1)}(\tau) - K(\theta_0)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\tau \sin \psi^{(1)}(\tau).$$

Зависимость восстанавливающего момента $K(\theta, \psi)$ от углов нутации и прецессии привела к появлению в формулах (9) слагаемых, содержащих интеграл $\int_0^\tau \sin 2\psi^{(1)}(\tau') d\tau'$. Полученные выражения для углов прецессии и нутации уточняют известные ранее результаты из приближенной теории гироскопов [8].

2. Рассмотрим быстрое движение волчка Лагранжа при случайных вертикальных колебаниях точки опоры [9]. Уравнения движения имеют вид аналогичный (1). Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k = k(\tau)$, зависящий от медленного времени и являющийся дифференцируемой функцией на промежутке $\tau \in (0, 1]$.

Проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела имеют вид

$$M_1 = \varepsilon^2 a(\tau) ml \sin \theta \cos \varphi, \quad M_2 = -\varepsilon^2 a(\tau) ml \sin \theta \sin \varphi, \\ M_3 = \varepsilon^2 M_3^0, \quad M_3^0 = \text{const}, \quad (10)$$

где m – масса тела, l – расстояние от точки опоры до центра тяжести, $a(\tau)$ – ускорение точки опоры. Предполагается, что $a(\tau)$ включает периодическую и случайную составляющие:

$$a(\tau) = g(\xi(\tau) + \rho \cos \omega\tau). \quad (11)$$

Здесь $\xi(\tau)$ – нормальный непрерывный справа случайный процесс с нулевым средним, g – ускорение силы тяжести, ρ и ω – амплитуда и частота колебаний.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1), (10), (11) при малом ε , если выполнены условия (2). В работе [9] рассматривался случай различных порядков малости проекций вектора возмущающих моментов. Для решения задачи воспользуемся методом усреднения [2, 3] на интервале времени порядка ε^{-1} . Схема построения приближенных решений данной системы подробно описана в [4]. Решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных a , b , δ , ψ , θ и быстрых переменных α , γ в этой задаче примет вид

$$a^{(1)}(\tau) = a_0 \cos G(\tau) - b_0 \sin G(\tau), \quad b^{(1)}(\tau) = a_0 \sin G(\tau) + b_0 \cos G(\tau), \\ \delta^{(1)}(\tau) = C^{-1}M_3^0\tau, \quad \psi^{(1)} = \psi_0 + {}^{-1}r_0^{-1} \int_0^\tau K(\tau') d\tau', \quad \theta^{(1)} = \theta_0,$$

$$\alpha = \varphi_0 + CA^{-1}r_0t - \varepsilon C^{-1}r_0^{-1} \cos \theta_0 \int_0^t K(\varepsilon t') dt' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 A^{-1} M_3^0 t^2, \quad (12)$$

$$\gamma = (C - A)A^{-1}r_0t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (C - A)A^{-1}C^{-1}M_3^0 t^2, G(\tau) = C^{-1}r_0^{-1} \cos \theta_0 \int_0^\tau K(\tau') d\tau',$$

$$a_0 = P_0 - K_0(\tau)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, b_0 = -Q_0 + K_0(\tau)C^{-1}r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0.$$

Здесь $\psi_0, \theta_0, \varphi_0, r_0, P_0, Q_0$ – начальные значения соответствующих переменных. Определим эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\psi_\varepsilon^\vee(t) = \psi_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$\theta_\varepsilon^\vee(t) = \theta_0 + \varepsilon AK(\varepsilon t)C^{-2}r_0^{-2} \sin \theta_0 + \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin(\alpha - \zeta_1),$$

$$S_1 = C^{-1}r_0^{-1} \int_0^{\varepsilon t} K(\tau) d\tau, S_3 = \varepsilon AC^{-3}r_0^{-3} \cos \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} K^2(\tau) d\tau,$$

$$S_2 = \varepsilon C^{-1}r_0^{-1} gml \left(\frac{\rho}{\omega} \sin(\varepsilon \omega t) + \int_0^{\varepsilon t} \xi(\tau) d\tau \right) - \varepsilon C^{-2}r_0^{-2} M_3^0 \int_0^{\varepsilon t} K(\tau) \tau d\tau, \quad (13)$$

$$S_4 = -\varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0 \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \sin(\alpha + \zeta_2),$$

$$\cos \zeta_2 = \sin \zeta_1 = \frac{b^{(1)}}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}.$$

В выражении (13) для угла нутации $\theta_\varepsilon^\vee(t)$ ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a_0, b_0 . Для угла прецессии $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ дополнительные слагаемые S_1, S_2, S_3, S_4 уточняют для нашей задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p = K_0 C^{-1} r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться первым приближением (12). В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

1. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием восстанавливающего момента, зависящего от углов прецессии и нутации // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 97–102.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.

Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

4. Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 8–17.
5. Кушпиль Т.А., Лещенко Д.Д., Тимошенко И.А. Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 119–125.
6. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 77–84.
7. Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А. Эволюция вращений твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2008. – Вып. 38. – С. 111–115.
8. Бухгольц Н. Н. Основы курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – Ч. 2. – 332 с.
9. Ковалева А.С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. – Ч.1. Нерезонансные колебания // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – С. 44–52.

Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса
kushpil.ru@rambler.ru, leshchenko_d@ukr.net

Получено 12.10.09