УДК 517.956

В. М. Кирилич

ЗАДАЧА ТИПА ДАРБУ — СТЕФАНА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Для полулинейной гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными рассматривается задача типа Дарбу с неизвестными границами. Граничные условия задаются в нелокальном (неразделенном и интегральном) виде.

Пусть G — полуплоскость при $t > 0$, $\left(G_\gamma = \bigcup\limits_{s=0}^{m} G_\gamma^s\right) \subset G$ — область, ограниченная некоторыми ранее неизвестными кривыми γ_s: $x = a_s(t)$, $a_s(0) = 0$, $s = \overline{0, m+1}$, $m \geqslant 0$, $a_s(t) \in C^2(\overline{G})$. Заданы только $a_s'(0)$, причем $a_0'(0) < a_1'(0) < \ldots < a_{m+1}'(0)$. G_γ^s пронумерованы слева направо.

Задача состоит в том, чтобы определить эти кривые вместе с функциями $u_i(x, t)$ исходя из условий

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x, t, u), \quad u = (u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. гранични. задачи. 1990. Вып. 2.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\Big[\sum_{k=s}^{s+1}\alpha_{is}^{kp}(a(t),t)\,u_i^s(a_k(t),t)+\int\limits_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}\beta_{is}^{p}(y,t)\,u_i^s(y,t)\,dy\Big]=$$

$$=h^p(a(t),t),\quad p=\overline{1,q}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\int\limits_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}\beta_{is}^{p}(y,t)\,u_i^s(y,t)\,dy=h^p(a(t),t),\quad p=\overline{q+1,N}, \tag{3}$$

$$N=(m+1)\,n,\quad 0\leqslant q\leqslant N,$$

$$\begin{gathered} a_s''(t)=H_s(t,a(t),a'(t),u(a(t),t)),\\ a_s'(0)=(a_s')_0=\mathrm{const},\quad s=\overline{0,m+1}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $a(t)=(a_0(t),a_1(t),\ldots,a_{m+1}(t))$.

Поскольку границы областей G_γ^s заранее не заданы, считаем, что все функции условий (1) — (4) заданы и непрерывны при $t\geqslant 0$ в некоторой окрестности точки (0, 0). Функции λ_i^s и т. п. комбинируются из λ_i после построения всех $a_s(t)$, т. е. областей G_γ^s, по правилу $\lambda_i(x,t)=\lambda_i^s(x,t)$ при $a_s(t)<x<a_{s+1}(t)$, $s=\overline{0,m+1}$.

Предполагается, что при каждом $s=\overline{0,m}$

$$\begin{gathered} \lambda_i^s(0,0)-a_s'(0)>0\quad (i=\overline{1,p_s}),\\ \lambda_i^s(0,0)-a_{s+1}'(0)<0\quad (i=\overline{p_s+1,n}), \end{gathered} \tag{5}$$

где $0\leqslant p_s\leqslant n$.

Эта задача представляет собой вариант многофазной двусторонней задачи типа Стефана (задачи с неизвестными границами) для системы (1) в случае вырождения интервала задания начальных условий в точку. Некоторые случаи задач с неизвестными границами для гиперболических систем рассмотрены в [1—3]. Задачи с нелокальными (неразделенными и интегральными [4]) условиями для таких систем изучались в [5, 6]. Используемый в данной работе метод базируется на методе характеристик [7, 8].

Введем в рассмотрение матрицы

$$\alpha_s^1(a(t),t)=\|\alpha_{is}^{sp}(a(t),t)\|,\quad i=\overline{1,p_s},\ p=\overline{1,q},$$

$$\alpha_s^2(a(t),t)=\|\alpha_{is}^{s+1,p}(a(t),t)\|,\quad i=\overline{p_s+1,n},\quad p=\overline{1,q},$$

$$\beta_s^1(a(t),t)=\|\beta_{is}^p(a(t),t)(\lambda_i^s(a_s(t),t)-a_s'(t))\|,\quad i=\overline{1,p_s},\quad p=\overline{q+1,N},$$

$$\beta_s^2(a(t),t)=-\|\beta_{is}^p(a(t),t)(\lambda_i^s(a_{s+1}(t),t)-a_{s+1}'(t))\|,\quad i=\overline{p_s+1,n},$$
$$p=\overline{q+1,N},$$

$$\alpha_s^3(a(t),t)=-\|\alpha_{is}^{s+1,p}(a(t),t)\|,\quad i=\overline{1,p_s},\quad p=\overline{1,q},$$

$$\alpha_s^4(a(t),t)=-\|\alpha_{is}^{sp}(a(t),t)\|,\quad i=\overline{p_s+1,n},\quad p=\overline{1,q},$$

$$\beta_s^3(a(t),t)=\|\beta_{is}^p(a(t),t)(\lambda_i^s(a_{s+1}(t),t)-a_{s+1}'(t))\|,$$
$$i=\overline{1,p_s},\quad p=\overline{q+1,N},$$

$$\beta_s^4(a(t),t)=-\|\beta_{is}^p(a(t),t)(\lambda_i^s(a_s(t),t)-a_s'(t))\|,$$
$$i=\overline{p_s+1,n},\quad p=\overline{q+1,N},$$
$$s=\overline{0,m};\quad t\geqslant 0.$$

Положим

$$A(a(t), t) = \left\| \begin{matrix} \alpha_0^1(a(t), t) \ldots \alpha_m^1(a(t), t)\, \alpha_0^2(a(t), t) \ldots \alpha_m^2(a(t), t) \\ \beta_0^1(a(t), t) \ldots \beta_m^1(a(t), t)\, \beta_0^2(a(t), t) \ldots \beta_m^2(a(t), t) \end{matrix} \right\|,$$

$$B(a(t), t) = \left\| \begin{matrix} \alpha_0^3(a(t), t) \ldots \alpha_m^3(a(t), t)\, \alpha_0^4(a(t), t) \ldots \alpha_m^4(a(t), t) \\ \beta_0^3(a(t), t) \ldots \beta_m^3(a(t), t)\, \beta_0^4(a(t), t) \ldots \beta_m^4(a(t), t) \end{matrix} \right\|.$$

Под кусочно-непрерывным обобщенным решением задачи (1) — (4) будем понимать набор функций $a_s(t) \in C^2(G)$ $(s = \overline{0, m+1})$ и кусочно-непрерывное обобщенное (в смысле [6]) решение $u_i(x, t)$ в G_γ задачи (1) — (3), удовлетворяющее условию (4) при всех $t \geqslant 0$.

Теорема. Предположим следующее:

1) коэффициенты $\lambda_i^s(x, t) \in C^2(\overline{G}_{\gamma 0}^s)$ $(i = \overline{1, n},\ s = \overline{0, m})$, где $\overline{G}_{\gamma 0}^s = \{(x, t) : |x| \leqslant \varepsilon_0,\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0\}$ для некоторого $\varepsilon_0 \geqslant 0$;

2) функции $F_i^s(x, t, u) \in C(\overline{G}_{\gamma 0}^s \times \mathbb{R}^n)$ и по переменной u удовлетворяют локальному условию Липшица;

3) коэффициенты $\alpha_{is}^{kp}(y, t) \in C([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+2} \times [0, \varepsilon_0])$;

4) коэффициенты $\beta_{is}^p(y, t) \in C(\overline{G}_{\gamma 0}^s)$;

5) функции $h^p(y, t) \in C([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+2} \times [0, \varepsilon_0])$ $(p = \overline{1, q})$ и $h^p(y, t) \in C^1([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+2} \times [0, \varepsilon_0])$ $(p = \overline{q+1, N})$;

6) $\det A(0, 0) \neq 0$;

7) $|A^{-1}(0, 0) B(0, 0)| < 1$ (через $|\cdot|$ обозначена одна из обычных норм матрицы);

8) $\det \|\alpha_{is}^{sp}(0, 0) + \alpha_{is}^{s+1, p}(0, 0)\| \neq 0$ $(i = \overline{1, n},\ p = \overline{1, q})$;

9) $H_s \in C\{[0, \varepsilon_0] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+2} \times [(a_0')_0, (a_{m+1}')_0] \times \mathbb{R}^{(m+1)n}\}$; и по переменным начиная со второго удовлетворяет локальному условию Липшица;

10) выполнены условия согласования; для их получения следует в (2), (3) положить $t = 0$, что приведет к системе

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{m} [\alpha_{is}^{sp}(0, 0) + \alpha_{is}^{s+1, p}(0, 0)]\, u_i^s(0, 0) = h^p(0, 0), \quad p = \overline{1, q},$$

$$h^p(0, 0) = 0, \quad p = \overline{q+1, N},$$

из которой в силу условия 8) можно однозначно определить все значения $u_i^s(0, 0)$; эти значения должны удовлетворять (4) при $t = 0$:

$$a_s''(0) = H_s(0, 0, a'(0), u(0, 0)), \quad s = \overline{0, m+1}.$$

Тогда существует такое значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, что задача (1)—(4) имеет единственное кусочно-непрерывное обобщенное решение, определенное для всех $t \in [0, \varepsilon]$.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Зададимся некоторыми значениями $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $h > 0$. Через $\mathcal{D}_\varepsilon^h$ обозначим множество функций $a = (a_0, \ldots, a_{m+1}) \in [C^2[0, \varepsilon]]^{m+2}$, для которых $|a_s(t)| < \varepsilon$, $|a_s'(t) - (a_s')_0| \leqslant h$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, $s = \overline{0, m+1}$. Значения ε и h будем считать столь малыми, чтобы для всех таких функций выполнялись условия (5) и $\det A(a, t) \neq 0$, $|A^{-1}(a, t) B(a, t)| < 1$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$.

Каждой функции $a \in \mathcal{D}_\varepsilon^h$ отвечает кусочно-непрерывное обобщенное решение в $\overline{G}_{\gamma 0}^s$ [6]. Обозначим это решение через $U(x, t; a, a')$.

Легко доказать, используя 2), что при любых $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, m}$, $k = \overline{s, s+1}$ зависимость $U_j^s(a_k(t), t; a, a')$ в метрике равномерного уклонения от a как элемента $[C^2[0, \varepsilon]]^{m+2}$ удовлетворяет условию Липшица

$\exists L \geqslant 0, \ \forall a^1, a^2 \in \mathcal{D}_\varepsilon^h$:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon} |U^s(a^1(t), t; a^1, a^{1\prime}) - U^s(a^2(t), t; a^2, a^{2\prime})| \leqslant$$

$$\leqslant L[\max_{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon} (a^1(t) - a^2(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon} |a^{1\prime}(t) - a^{2\prime}(t)|],$$

где вертикальными черточками обозначена любая из норм в $\mathbb{R}^{m+2}$.

Подставляя $U(x, t; a, a')$ в (4) и интегрируя полученное выражение по t, приходим к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, разрешимых для малых t:

$$a_s'(t) = \widetilde{H}_s(t, a(t)) \ \ a_s(0) = 0, \quad s = \overline{0, m+1}, \ \ t \in [0, \varepsilon].$$

Рассмотрим теперь оператор B; $a \to Ba$, действующий за формулой

$$(Ba_s)(t) = \int_0^t \widetilde{H}_s(\tau, a(\tau))\, d\tau, \quad s = \overline{0, m+1}, \ \ t \in [0, \varepsilon].$$

Из условия согласования 10) вытекает, что при определенном выборе h и ε оператор B отображает $\mathcal{D}_\varepsilon^h$ в себя и в метрике $[C^2[0, \varepsilon]]^{m+2}$ сжимающий. Значит, существует единственная неподвижная точка оператора, т. е. искомое решение.

Замечание. Если F_i — линейные функции относительно u, а H_s — линейные по a, a', u и априори известно, что $a_s(t)$ линейны, то теорема справедлива при всех $t \geqslant 0$.

1. *Мельник З. О.* Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей.— Киев, 1983.— С. 77—79.
2. *Кирилич В. М.* Нелокальные задачи типа Дарбу для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1984.— 18 с.
3. *Казаков К. Ю., Морозов С. Ф.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 4.— С. 440—450.
4. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1980.— **16**, № 11.— С. 1925—1935.
5. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Там же.— 1983.— **19**, № 1.— С. 86—94.
6. *Мельник З. О., Кирилич В. М.* Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр. мат. журн.— 1983. — **35**, № 6.— С. 722—727.
7. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Учен. зап. Латв. ун-та.— 1958.— **20**, № 3.— С. 87—104.
8. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М. : Наука, 1978.— 687 с.

Львов. гос. ун-т им. Ив. Франко Получено 29.09.87