

УДК 531.36

©2010. А.Е. Позднякович, В.Е. Пузырев

ПАССИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ

Рассмотрена задача об устойчивости вращения вокруг вертикали гироскопа Лагранжа с демпфером пассивного типа. Изучен вопрос об оптимальном выборе параметров стабилизирующего устройства (СУ), обеспечивающих наибольшую скорость стремления возмущенных движений к невозмущенному. Предложен новый подход в оценке величин характеристических показателей для уравнения высокой (шестой) степени. Получены соответствующие асимптотические приближения.

Ключевые слова: демпфер пассивного типа, характеристический показатель, малый параметр.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассмотрим тяжелое твердое тело, имеющее неподвижную точку O , и введем в рассмотрение две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и связанную с телом $Ox_1y_1z_1$. Предполагается, что тело является динамически симметричным, а центр масс O_1 тела принадлежит оси Oz_1 ; $|OO_1| = l_1$. В качестве обобщенных координат, определяющих положение связанной системы координат относительно неподвижной, выберем корабельные углы (углы Крылова) θ, φ, ψ , которые вводятся обычным образом [1]. Параллельно плоскости Ox_1y_1 в теле жестко закреплена направляющая прямая L_N , пересекающая ось симметрии в точке O_2 , $|OO_2| = l_2$. Вдоль направляющей может двигаться материальная точка N , на которую действуют линейная упругая сила, приложенная в точке O_2 , и сила вязкого трения. Все связи предполагаются идеальными. Поскольку тело является динамически симметричным, то можно считать что L_N коллинеарна главной оси инерции тела (например, первой). Радиус-вектор точки N в системе координат, связанной с телом, запишем как $\mathbf{r}_N = l_2(\xi \mathbf{e}_{x_1} + \mathbf{e}_{z_1})$. Обобщенная координата ξ равняется отношению алгебраической проекции вектора $\mathbf{O}_2\mathbf{N}$ на ось Ox_1 к расстоянию l_2 . Учитывая, что $\mathbf{v}_N = l_2\dot{\xi}\mathbf{e}_{x_1} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N$, а проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат определяются формулами [1]

$$\omega_1 = \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_3 = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi},$$

для кинетической и потенциальной энергий твердого тела и материальной точки N получаем:

$$K_S = \frac{1}{2}[I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2], \quad \Pi_S = Mgl_1 \cos \psi \cos \theta,$$

$$K_N = \frac{1}{2}ml_2^2[\dot{\xi}^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \xi^2(\omega_2^2 + \omega_3^2) + 2\dot{\xi}\omega_2 - 2\xi\omega_1\omega_3],$$

$$\Pi_N = mgl_2[\xi(-\cos \varphi \sin \psi + \sin \theta \sin \varphi \cos \psi) + \cos \psi \cos \theta] + \frac{1}{2}\varkappa(\xi - \xi^0)^2,$$

где I_1, I_3 – экваториальный и осевой моменты инерции тела относительно неподвижной точки, m_1, m_2 – массы тела и материальной точки соответственно, g – ускорение силы тяжести. Тогда выражение для кинетической энергии рассматриваемой системы принимает вид

$$\begin{aligned} K = K_S + K_N = & \frac{1}{2}(I_1 + m_2 l_2^2)(\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) + m_2 l_2^2 \xi^2 [\dot{\psi}^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta) + \\ & + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta] + I_3(\dot{\psi} \sin \theta - \dot{\varphi})^2 + \\ & + m_2 l_2^2 [\dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi}(\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + 2\xi(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \\ & - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi)]. \end{aligned}$$

Уравнения движения механической системы запишем в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j(\dot{q}_s, q_s) \quad (j = \overline{1, 4}), \quad \mathbf{Q} = \text{col}(0, 0, 0, -\hbar \dot{\xi}). \quad (1)$$

Они допускают решение

$$\theta = \psi = 0, \quad \varphi = \omega t, \quad \xi = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\xi} = 0, \quad (2)$$

которому соответствуют равномерные вращения тела вокруг оси динамической симметрии, материальная точка N находится на этой оси. Перейдем к возмущениям по переменным θ, ψ, ξ и введем безразмерные параметры и время по формулам

$$\begin{aligned} a = I_1/I_3 - 1, \quad \varepsilon = m_2 l_2^2/I_3, \quad \mu = m_1 l_1 g/I_3 \omega^2, \quad \nu = I_3/m_1 l_1 l_2, \\ h = \hbar/m_2 l_2^2 \omega, \quad \kappa = \varkappa/m_2 l_2^2 \omega^2 - 1, \quad \tau = \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения в вариациях (с точностью до положительного множителя) запишем так:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)\theta_v'' - \varepsilon\xi_v'' \sin \tau + (a + 1)\psi_v' - 2\varepsilon\xi_v' \cos \tau + \varepsilon\xi_v \sin \tau - \mu(1 + \varepsilon\nu)\theta_v = 0, \\ (1 + \varepsilon)\psi_v'' + \varepsilon\xi_v'' \cos \tau - (a + 1)\theta_v' - 2\varepsilon\xi_v' \sin \tau - \varepsilon\xi_v \cos \tau - \mu(1 + \varepsilon\nu)\psi_v = 0, \quad (4) \\ -\theta_v'' \sin \tau + \psi_v'' \cos \tau + \xi_v'' + h\xi_v' + \mu\varepsilon\nu(\theta_v \sin \tau - \psi_v \cos \tau) + \kappa\xi_v = 0. \end{aligned}$$

Система (4) – система с периодическими коэффициентами, но с помощью невырожденного линейного преобразования

$$\theta_v = x \cos \tau - y \sin \tau, \quad \psi_v = x \sin \tau + y \cos \tau, \quad \xi_v = z$$

сводится к автономной системе

$$\begin{aligned}(1 + \varepsilon)x'' - (1 - a)y' - 2\varepsilon z' + [a - \mu - \varepsilon(1 + \mu\nu)]x &= 0, \\ (1 + \varepsilon)y'' + \varepsilon z'' + (1 - a)x' + [a - \mu - \varepsilon(1 + \mu\nu)]y - \varepsilon z &= 0, \\ y'' + z'' + 2x' + hz' - y + \kappa z &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости изучаемого движения (по отношению к позиционным координатам и скоростям) приведены в [2] (тело при этом предполагалось несимметричным, а уравнения движения были записаны в углах Эйлера). Эти условия для характеристического многочлена

$$c_6\lambda^6 + c_5\lambda^5 + c_4\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0\tag{6}$$

нетрудно получить на основе критерия Рауса–Гурвица [3]:

$$\begin{aligned}c_6 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_0 > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_5 & c_3 & c_1 \\ c_6 & c_4 & c_2 \\ 0 & c_5 & c_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} c_5 & c_3 & c_1 & 0 & 0 \\ c_6 & c_4 & c_2 & c_0 & 0 \\ 0 & c_5 & c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_6 & c_4 & c_2 & c_0 \\ 0 & 0 & c_5 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} > 0.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\text{Здесь } c_6 &= 1 + \varepsilon, \quad c_5 = h(1 + \varepsilon)^2, \quad c_4 = k + a^2 + 1 - 2\mu + \varepsilon[2\kappa + 5a - \mu(1 + 2\nu)] + \\ &+ \varepsilon^2(\kappa + 5 - \mu\nu), \quad c_3 = h[(a^2 + 1 - 2\mu) - 2(1 - a + \mu\nu + \mu) - 2\varepsilon^2(1 + \mu\nu)], \\ c_2 &= k(a^2 + 1 - 2\mu) + (a - \mu)^2 - \varepsilon[2\kappa(1 - a + \mu\nu + \mu) - 3 + 2a\mu\nu + 4\mu - 2\mu^2\nu] - \\ &- 2\varepsilon^2[2\kappa(1 + \mu\nu) + 6 + 4\mu\nu - \mu^2\nu^2], \quad c_1 = h[(a - \mu)^2 - 2\varepsilon(a - \mu)(1 + \mu\nu)] + \varepsilon^2(1 + \mu\nu)^2, \\ c_0 &= k(a - \mu)^2 - \varepsilon(a - \mu)[1 + 2\kappa(1 + \mu\nu)] + \varepsilon^2(1 + \mu\nu)[1 + \kappa(1 + \mu\nu)].\end{aligned}\tag{8}$$

Условия (7) сводятся к двум неравенствам

$$a - \mu - \varepsilon(1 + \mu\nu) > 0, \quad \kappa[a - \mu - \varepsilon(1 + \mu\nu)] - \varepsilon > 0.\tag{9}$$

Другими словами, для любого набора параметров $\kappa, h, \nu, \varepsilon$, характеризующих демпфер, выполнение неравенств (9)¹, теоретически, обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (5). Однако, при попытке численно построить фазовые траектории, обнаружился любопытный факт: для любых “выбранных наугад” допустимых значений параметров из области (9) и как угодно малых начальных возмущений не наблюдалось

¹В дальнейшем набор параметров $\kappa, h, \nu, \varepsilon$, удовлетворяющих (9), будем называть допустимым.

стремления решений к нулю за сколь-нибудь *разумный*, с *практической точкой зрения*, промежуток времени (например, за 10^5 τ -секунд). Причина этого стала понятна после нахождения (численного, при заданных значениях параметров из (3)) характеристических показателей – все они были отрицательны, но наибольший из них, “ответственный” за скорость стремления возмущенных решений к нулю, имел порядок в пределах $10^{-10} - 10^{-6}$. Поэтому и возник вопрос об определении параметров СУ, обеспечивающих “приемлемую” скорость затухания.

Таким образом, задача заключается в выборе таких параметров СУ, при которых скорость затухания возмущенных движений будет наибольшей. Применительно к λ -матрице, соответствующей дифференциальному оператору уравнений (5), это означает, что нужно: а) получить выражение (дать соответствующую оценку) для p – модуля максимальной вещественной части собственных значений этого оператора, как функции переменных $\kappa, h, \nu, \varepsilon$, при заданных (но неизвестных) параметрах a, μ ; б) определить условия, при которых величина p будет наибольшей.

Характеристический многочлен в (6) имеет шестую степень и не может быть представлен в виде произведения многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами (за исключением немногочисленных частных случаев, о которых здесь говорить не будем). По этой причине записать точное выражение для p не представляется возможным. Рассмотрим вопрос о получении эффективной оценки для этого выражения, с этой целью воспользуемся методами теории возмущений [4].

Поскольку масса и размеры СУ для реальных объектов малы по сравнению с соответствующими характеристиками носителя, то величину ε будем считать малым параметром. Сделаем замену $\lambda = \tilde{\lambda} - \sigma$ и обозначим коэффициенты полученного многочлена $f(\tilde{\lambda})$ через $\tilde{c}_j$ ($j = \overline{0; 6}$). Они выражаются через коэффициенты (8) по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{c}_6 &= c_6^{(0)}, \quad \tilde{c}_5 = c_5 - 6\sigma c_6, \quad \tilde{c}_4 = c_4 - 5\sigma c_5 + 15\sigma^2 c_6, \quad \tilde{c}_3 = c_3 - 4\sigma c_4 + 10\sigma^2 c_5 - \\ &- 20\sigma^3 c_6, \quad \tilde{c}_2 = c_2 - 3\sigma c_3 + 6\sigma^2 c_4 - 10\sigma^3 c_5 + 15\sigma^4 c_6, \quad \tilde{c}_1 = c_1 - 2\sigma c_2 + 3\sigma^2 c_3 - \\ &- 4\sigma^3 c_4 + 5\sigma^4 c_5 - 6\sigma^5 c_6, \quad \tilde{c}_0 = c_0 - \sigma c_1 + \sigma^2 c_2 - \sigma^3 c_3 + \sigma^4 c_4 - \sigma^5 c_5 + \sigma^6 c_6. \end{aligned} \quad (10)$$

Определители, соответствующие критерию Рауса–Гурвица для $f(\tilde{\lambda})$, можно представить следующим образом:

$$\tilde{\Delta}_3 = f_1(\sigma) + \sigma^2 Q_1^{(4)}(\sigma), \quad \tilde{\Delta}_5 = f_2(\sigma) + \sigma^3 Q_2^{(12)}(\sigma), \quad (11)$$

где

$$f_1(\sigma) = \Delta_3 - \delta_0 \sigma, \quad f_2(\sigma) = \Delta_5 - 2\delta_1 \sigma + \delta_2 \sigma^2, \quad (12)$$

а Q_1, Q_2 – многочлены переменной σ четвертой и двенадцатой степени соответственно. Здесь

$$\delta_0 = -2h\{2\kappa^2 - 2\kappa(a^2 + 1 - 2\mu) + a^4 + 1 - 4\mu(a^2 - a + 1) + 2\mu^2 + h^2(a - 1)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon[2\kappa(3a^2+6a+7-4\mu)+a^4+9a^3+7a^2-a-8+\mu(-a^2-16a+17)-3\mu^2]+ \\
 & +\varepsilon^2[8\nu\mu\kappa+3a^3+23a^2+37a+25+2\nu\mu(3a^2+5a-2)-\mu(25-a^2)-\mu^2(2\nu-3)]+ \\
 & +\nu\mu\varepsilon^3[2(a^2+7a+14)+\mu(5\nu-6)]+3\nu^2\mu^2\varepsilon^4\}, \quad \delta_1=4c_5^3c_1c_0-c_5^2(c_0c_3^2+ \\
 & +4c_4c_1^2-4c_4c_2c_0+9c_6c_0^2+c_2^3)+c_5(6c_4c_6c_1c_0+c_4c_3c_2^2-4c_3c_0c_4^2-2c_6c_2^2c_1+ \\
 & +c_4c_3^2c_1+3c_6c_2c_0c_3+4c_6c_3c_1^2)-c_6c_3^2c_2^2+c_6c_4c_3c_2c_1+3c_6^2c_2c_1^2-c_6c_3^3c_1- \\
 & -9c_6^2c_3c_1c_0+3c_6c_4c_0c_3^2-c_6c_4^2c_1^2, \quad \delta_2=4[c_5^3(7c_2c_0-4c_1^2)-c_5^2(c_3c_2^2-21c_6c_1c_0+ \\
 & +3c_4c_2c_1+9c_4c_3c_0+c_3^2c_1)+c_5(3c_6c_0c_3^2-4c_6c_2^2-9c_4c_6c_1^2-27c_6^2c_0^2+18c_4c_6c_2c_0+ \\
 & +2c_4c_2c_3^2-4c_4^3c_0+c_3c_4^2c_1+c_4^2c_2^2+3c_6c_3c_2c_1)+6c_6^2c_3c_1^2-2c_6c_2c_3^3]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Задача отыскания минимального характеристического числа (МХЧ) решений уравнений (5) равносильна задаче нахождения наибольшего (вещественного) числа p такого, что для любого $\sigma \in [0, p]$ система алгебраических неравенств, которая получается из (7) путем формального дописывания в левых частях символа $\sim$ и заменой знаков $>$ на $\geq$, совместна. Нетрудно видеть, что $p = \min\{p_j\}$, где p_j — последовательность, составленная из меньших, положительных, простых корней полиномов $\tilde{c}_s(\sigma)$ ($s = \overline{0; 5}$); $\tilde{\Delta}_3(\sigma)$, $\tilde{\Delta}_5(\sigma)$, при этом $1 \leq j \leq 42$ (42 — сумма степеней этих многочленов).

Основную трудность представляет анализ выражения $\tilde{\Delta}_5(\sigma)$ — вопрос о числе вещественных корней многочлена пятнадцатой степени. Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Существует такое положительное число ε_0 (зависящее от параметров a, μ, μ_0, κ, h), что для любых значений $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при выполнении неравенств

$$\mu < a, \quad \sigma < \frac{h}{6}, \quad \kappa > \sigma(h - \sigma) \quad (14)$$

уравнение $\tilde{\Delta}_5(\sigma) = 0$ имеет в точности три вещественных корня.

Доказательство. Приведем выражение для $\tilde{\Delta}_5$ при $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{\Delta}_5^0 = \sigma^2(h - 2\sigma)[4\sigma^2 + (a - 1)^2][4\sigma^2 + (a + 1)^2 - 4\mu]Q_3(\sigma),$$

$$\begin{aligned}
 & \text{где } Q_3 = 4k^4 - 8k^3(4h\sigma + a^2 + 1 - 2\mu + 8\sigma^2) + 4k^2[h^2(a^2 + 1 - 2\mu + 24\sigma^2) - \\
 & - 4h\sigma(a^2 + 1 - 2\mu - 24\sigma^2) + a^4 + 4a^2 + 1 - 4\mu(a^2 + a + 1) - 8\sigma^2(a^2 + 1 - 2\mu) + 96\sigma^4] - \\
 & - 16k\{h^3\sigma(a^2 + 1 - 2\mu + 8\sigma^2) + h^2[(a - \mu)^2 - 4\sigma^2(a^2 + 1 - 2\mu) - 48\sigma^4] + h\sigma[a^4 - 4a^2 + 1 - \\
 & - 4\mu(a^2 - 3a + 1) - 2\mu^2 + 8\sigma^2(a^2 + 1 - 2\mu) + 96\sigma^4] + a^2(a^2 + 1) - 2a\mu(a^2 + a + 1) + \\
 & + \mu^2(a^2 + 4a + 1) - 2\mu^3 - 4\sigma^2[a^4 - 4a^2 + 1 - 4\mu(a^2 - 3a + 1) - 2\mu^2] - 16\sigma^4(a^2 + \\
 & + 1 - 2\mu) - 128\sigma^6\} + 4h^4[(a - \mu)^2 + 4\sigma^2(a^2 + 1 - 2\mu) + 16\sigma^4] - 32h^3\sigma[(a - \mu)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+4\sigma^2(a^2+1-2\mu)+16\sigma^4]+4h^2\{a^2(a^2+1)-2a\mu(a^2+a+1)+\mu^2(a^2+4a+1)- \\
 &-2\mu^3+4\sigma^2[a^4+8a^2+1-4\mu(a^2+3a+1)+10\mu^2]+112\sigma^4(a^2+1-2\mu)+384\sigma^6\}- \\
 &-16h\sigma\{a^2(a^2+1)-2a\mu(a^2+a+1)+\mu^2(a^2+4a+1)-2\mu^3+4\sigma^2[a^4+4a^2+ \\
 &+1-4\mu(a^2+a+1)+6\mu^2]+48\sigma^4(a^2+1-2\mu)+128\sigma^6\}+4(a-\mu)^4+ \\
 &+32\sigma^2[a^2(a^2+1)-2a\mu(a^2+a+1)+\mu^2(a^2+4a+1)-2\mu^3]+64\sigma^4[a^4+4a^2+1- \\
 &-4\mu(a^2+a+1)+6\mu^2]+512\sigma^6(a^2+1-2\mu)+1024\sigma^8.
 \end{aligned}$$

Выражение Q_3 – многочлен четвертой степени относительно переменных k и h . Можно показать, используя соответствующий критерий знакоопределенности, что $Q_3 > 0$ в области D , определяемой неравенствами (14). Однако этот путь достаточно громоздкий, поэтому воспользуемся более простой схемой доказательства. Предположим, что существует такая точка $M(a_1, \mu_1, k_1, h_1, \sigma_1)$ области D , что $Q_3(M) \leq 0$. Рассмотрим функцию двух переменных $F(a, \mu) = Q_3(a, \mu, k_1, h_1, \sigma_1)$ и найдем ее наименьшее значение в замкнутой области $D_1 = \{0 \leq a \leq 1, 0 \leq \mu \leq a\}$. Покажем, что внутри этой области не содержится точек экстремума. Вычисляя соответствующие частные производные и приравнявая их нулю, с помощью системы аналитических вычислений получаем координаты пяти точек, три из которых принадлежат границе ($a = 1$ для двух точек и $\mu = a$ для третьей). Координаты остальных двух суть $\{a = 1 - \sqrt{4k_1 - h_1^2}, \mu = k_1 - 2h_1\sigma_1 + 4\sigma_1^2 + a\}$; $\{a = 1 \pm \nu(h_1 - 4\sigma_1), \mu = -k_1 + 2h_1\sigma_1 - 4\sigma_1^2 + a\}$.

Первое решение является вещественным при $k_1 \geq h_1^2/4$, но тогда

$$\mu = (k_1 - \frac{1}{4}h_1^2) + \frac{1}{4}(h_1 - 4\sigma_1)^2 + a \geq a,$$

т.е. не принадлежит внутренности области. Второе решение также не подходит, поскольку является вещественным только при условии $h_1 = 4\sigma_1$, но тогда $a = 1$. Таким образом, функция F не имеет стационарных точек и, как следствие, точек экстремума и принимает наименьшее значение на границе области. Последовательно вычисляем

$$F(a, 0) = 4[(\rho - 1)^2 + (h_1 - 4\sigma_1)^2][(\rho - a^2)^2 + a^2(h_1 - 4\sigma_1)^2] \geq 0,$$

$$F(a, a) = 4\rho^2[(\rho - a^2 + 2a - 1)^2 + (a - 1)^2(h_1 - 4\sigma_1)^2] \geq 0, \quad \rho = k_1 - 2h_1\sigma_1 + 4\sigma_1^2,$$

$$\begin{aligned}
 F(1, \mu) &= 4[(k_1^2 - 2(1 + 2h_1\sigma_1 - 4\sigma_1^2 - \mu)k_1 + 1 - 4h_1\sigma_1 - 8\sigma_1^2 - 2\mu + \\
 &+ 4h_1^2\sigma_1^2 - 16h_1\sigma_1^3 + 4h_1\sigma_1\mu + 16\sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\mu + \mu^2 + 16\sigma_1^2 + h_1^2 - \mu h_1^2)^2] \geq 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, при $0 < a < 1, 0 < \mu < a$ функция $F(a, \mu)$ строго положительна, и исходное предположение о существовании точки M неверно. $\square$

На рисунке представлен типичный вид поверхности $\tilde{\Delta}_5 = 0$ при $a = 0.5, \mu = 0.2, \nu = 1, \varepsilon = 0.05$.

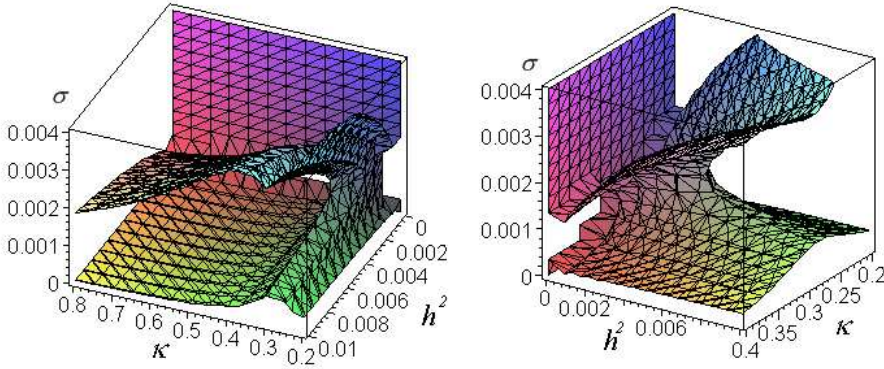


Рис. 1. Вид поверхностей, соответствующих вещественным решениям уравнения $\hat{\Delta}_5 = 0$.

Для определения корней многочлена $f_2(\sigma)$ запишем его коэффициенты (с точностью до положительного множителя)

$$k_2 = 4(a^2 + 2a + 1 - 4\mu)\{h^4(a - \mu)^2 + h^2[\kappa^2(a^2 + 1 - 2\mu) - 4\kappa(a - \mu)^2 + (a - \mu)^2(a^2 + 1 - 2\mu)] + [\kappa^2 - \kappa(a^2 + 1 - 2\mu) + (a - \mu)^2]^2\} + O(\varepsilon),$$

$$k_1 = \varepsilon(a^2 + 2a + 1 - 4\mu)\{(a - \mu)(a^3 + a^2(3 - \mu) - 4\mu a + \mu^2 - 3\mu + 1)h^2 + \kappa^2[a^4 + 3a^3 + 3a^2(1 - \mu) + a(1 - 4\mu) + \mu^2 - \mu] - 2\kappa[a^4 + a^3(3 - 2\mu) + a^2(3 - 7\mu + \mu^2) + a(1 - 6\mu + 5\mu^2) - \mu(1 - 3\mu + \mu^2)] + a^4 + a^3(3 - 4\mu) + a^2(3 - 11\mu + 6\mu^2) + a(1 - 8\mu + 14\mu^2 - 4\mu^3) - \mu(1 - 5\mu + 6\mu^2 - \mu^3)\} + O(\varepsilon^2),$$

$$k_0 = \varepsilon^2 h^2 \mu^4 (a - \mu) + O(\varepsilon^3).$$

Если параметры κ , h выбраны произвольно или же заданы с некоторой погрешностью, то в качестве приближения p следует брать меньший корень σ_1 многочлена $f_2(\sigma)$ (при этом σ_1 и σ_2 сильно разнятся по величине). Все остальные условия выполняются автоматически, как более слабые ограничения на σ . Если же параметры СУ можно настроить достаточно точно, то значения, обеспечивающие максимальный эффект – наибольшую скорость затухания, можно рассчитать следующим образом.

Наибольшее значение для p получится при $\sigma_1 = \sigma_2$, т.е. когда $4k_2k_0 - k_1^2 = 0$. Разрешая последнее равенство относительно безразмерного коэффициента демпфирования, находим

$$h^2 = -\{\kappa_0^2[a(a + 1)^4 - \mu(5a + 1)(a + 1)^2 + \mu^2(5a + 3)] - 2\kappa_0[a(a + 1)^4 - \mu(a + 1)^2(2a^2 + 7a + 1) + \mu^2(a^3 + 10a^2 + 16a + 5) - \mu^3(3a + 5)] + a(a + 1)^4 - \mu(a + 1)^2(4a^2 + 9a + 1) + \mu^2(6a^3 + 28a^2 + 31a + 7) -$$
(21)

$$-2\mu^3(2a^2+11a+7)+\mu^4(a+7)\}\{(a-\mu)[(a+1)^4-\mu(a+1)^2(a+5)+\mu^2(3a+5)]\}^{-1}.$$

Легко убедиться в том, что выражение во вторых фигурных скобках положительно. Выражение в первых фигурных скобках представляет собой квадратный трехчлен относительно κ_0 и имеет два положительных корня κ_* , κ^* (которые зависят от a , μ , т.е. динамических характеристик тела-носителя). Очевидно, что для существования значения h , удовлетворяющего (21), необходимо и достаточно, чтобы

$$\kappa_* < \kappa_0 < \kappa^*. \quad (22)$$

Подставляя (21) в f_2 , находим

$$p_0 = hU(a, \mu)\{(1-a)(a^2+2a+1-4\mu)[\kappa_0^2-(a-\mu)^2]\}^{-1}. \quad (23)$$

Здесь U совпадает с выражением в квадратных скобках при κ_0 в равенстве (21). Найдем наибольшее значение функции $p_0(\kappa_0)$ в интервале (22). Вычисляя ее производную, получаем для нахождения стационарных точек следующее уравнение третьего порядка:

$$\begin{aligned} f(\kappa_0) = & \kappa_0^3[a(a+1)^4-\mu(a+1)^2(5a+1)+\mu^2(5a+3)-3\kappa_0^2[a(a+1)^4-\mu(a+1)^2(2a^2+ \\ & +11a+7)+\mu^2(a^3+10a^2+16a+5)-\mu^3(3a+5)]+\kappa_0[a(a+1)^4(a^2+2)-\mu(a+1)^2(2a^4+ \\ & +9a^3+11a^2+18a+2)+\mu^2(a^5+14a^4+45a^3+77a^2+65a+14)-\mu^3(5a^3+29a^2+57a+ \\ & +29)+\mu^4(7a+17)]-[a^3(a+1)^4-\mu a^2(a+1)^2+\mu^2 a(6a^4+36a^3+56a^2+27a+3)- \\ & -\mu^3(4a^4+34a^3+54a^2+19a+1)-\mu^4(a^3+16a^2+26a+5)+\mu^5(3a+5)]=0. \end{aligned}$$

Можно, вычислив дискриминант многочлена $f(\kappa_0)$, доказать его положительность в области (14), т.е. существование трех действительных (положительных) корней. Однако, поскольку нас интересуют корни, принадлежащие интервалу (22), проще поступить иначе. Вычислим (с помощью САВ) выражение $f(\kappa_*)$ и убедимся, что его наименьшее значение в области (14) положительно. Следовательно $f(\kappa_*) > 0$, и, поскольку $f(0) < 0$, первый из корней f лежит в промежутке $(0, \kappa_*)$. Аналогично можно показать, что $f(\kappa^*) < 0$, значит второй корень f лежит в промежутке (κ_*, κ^*) . Наконец, третий корень принадлежит промежутку $(\kappa^*, +\infty)$.² Таким образом, средний корень многочлена $f(\kappa_0)$ соответствует точке максимума и является искомым оптимальным приближением для жесткости СУ. Точное выражение для κ_0^{opt} можно получить согласно формуле Кардано, однако учитывая, что коэффициенты уравнения зависят от двух параметров, это выражение является неудобным для практических целей и его целесообразно заменить асимптотическим приближением.

²Другими словами, многочлены $f(\xi)$, $h^2(\xi)$ суть полиномы с перемежающимися корнями, и этот факт можно установить так же, используя один из критериев работы [5].

Заключение. По идейной направленности проведенные здесь исследования продолжают тематику исследований, выполненных в [6 – 9]. Вместе с тем, предложенный подход позволяет давать не только качественную оценку поведения возмущенных решений (притягиваются или нет к невозмущенному), но и оценивать скорость притяжения и, как следствие, устанавливать степень эффективности СУ конкретного типа.

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
2. Лосева Н.Н. Устойчивость движений твердого тела с подвижной точечной массой при наличии частичной диссипации. – Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1989. – 13 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
4. Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
5. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций. – Тр. мат. ин-та им.В.А.Стеклова. – М.:Изд-во АН СССР, 1949. – XXVI – 331 с.
6. Peiffer K., Savchenko A. Ya. On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – 244. – P. 106–119.
7. Позднякович А.Е., Савченко А.Я. Пассивная стабилизация малых колебаний физического маятника относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 97–100.
8. Савченко А.Я., Кравченко В.В. О скорости затухания малых колебаний физического маятника в окрестности положения его равновесия в режиме пассивной стабилизации // Там же. – 2004. – Вып. 34. – С. 106–111.
9. Савченко А.Я., Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. Пассивная стабилизация положения равновесия двузвенного маятника с упругими связями // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 104–113.

A.E. Pozdnyakovih, V.E. Puzirev

A passive stabilization of permanent rotations of the rigid body around the principal axis

In the paper a stability problem of the Lagrange's gyroscope rotation, with attached passive-type damper, around the vertical axis is investigated. The question of optimum parameters choice of stabilizing device, which guarantee the maximal damping degree of perturbed motions, is studied. The novel approach to estimate the Lyapunov's exponents for characteristic equation of six's order is suggested. Some asymptotical formulas are given.

Keywords: passive damper, characteristic exponent, small parameter.

О.Є. Позднякович, В.Є. Пузырьов

Пасивна стабілізація рівномірних обертань твердого тіла навкруги головної осі

Розглянуто задачу про стійкість обертань навкруги вертикалі гіроскопа Лагранжа з демпфером пасивного типу. Досліджено питання оптимального вибору параметрів стабілізуючого пристрою (СП), що забезпечують найбільшу швидкість прямування збурених рухів до незбуреного. Запропоновано новий підхід для оцінювання величин характеристичних показників для рівняння високої (шостої) степені. Отримано відповідні асимптотичні наближення.

Ключові слова: демпфер пасивного типу, характеристичний показник, малий параметр.

Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры,
Макеевка;

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

vpsr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.07.10