УДК 517.9

В. А. Кондратьев, О. А. Олейник

О НЕРАВЕНСТВАХ КОРНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В работе дано элементарное доказательство неравенства Корна для звездных областей. Установлена зависимость констант в этом неравенстве от диаметра области и радиуса шара, относительно которого область является звездой. Полученные оценки в определенном смысле неулучшаемые. Доказаны также неравенства Корна для некоторых классов неограниченных областей. Неравенства Корна используются для доказательства единственности решений краевых задач для стационарной системы теории упругости.

Исследования краевых задач теории упругости основаны на неравенствах Корна. Эти неравенства, предложенные А. Корном в 1909 г. [1], были доказаны многими способами (см., например, [2—6] и др.), однако ввиду сложности этих доказательств не удавалось выяснить зависимость постоянных, входящих в неравенства Корна, от геометрических характеристик области. Неравенствам Корна в ограниченных и неограниченных областях и их обобщениям посвящена обширная литература (см. [6] и приведенную там библиографию). Здесь приводим подробное элементарное доказательство неравенства Корна для звездных областей и получим для него асимптотически точные оценки постоянных в зависимости от геометрических характеристик области, т. е. оценки в определенном смысле неулучшаемые. Такие оценки необходимы в приложениях при асимптотическом анализе структур типа упругих решеток, каркасов, башен и других подобных конструкций, в задачах усреднения.

Кроме того, для некоторых классов неограниченных областей мы доказываем неравенства Корна, которые используются для доказательства единственности решений краевых задач для стационарной системы теории упругости. Эти теоремы дополняют результаты работы [6].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{D}(u,\Omega)\equiv\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx,\quad E(u,\Omega)\equiv\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}|e_{ij}(u)|^2\,dx,$$

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\quad u=(u_1,\ldots,u_n),\quad e_{ij}(u)\equiv\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Область Ω называется звездной относительно шара Q, если $\Omega\supset Q$ и отрезок, соединяющий любую точку Q с любой точкой Ω, также принадлежит Ω.

Будем говорить, что вектор-функция $u=(u_1,\ldots,u_n)$ принадлежит пространству $H^1(\Omega)$, если u является пределом бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ по норме

$$\|u\|=\Big(\int\limits_{\Omega}(|u|^2+|\nabla u|^2)\,dx\Big)^{1/2},$$

где

$$|u|^2=\sum_{i=1}^{n}u_i^2,\quad |\nabla u|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2.$$

Теорема 1. Пусть область Ω — звездна относительно шара $Q_1=\{x: |x|<R_1\}$, Ω имеет диаметр R, $u\in H^1(\Omega)$. Тогда

$$\mathcal{D}(u,\Omega)\leqslant C_1\left(\frac{R}{R_1}\right)^n[E(u,\Omega)+\mathcal{D}(u,Q_1)],\ \text{если}\ n\geqslant 3, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}(u,\Omega)\leqslant C_2\left(\frac{R}{R_1}\right)^2\ln\left(4\frac{R}{R_1}\right)E(u,\Omega)+C_3\left(\frac{R}{R_1}\right)^2\mathcal{D}(u,Q_1),\ \text{если}\ n=2, \tag{2}$$

где постоянные C_1, C_2, C_3 зависят только от n.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для гладких вектор-функций $u(x)$. Рассмотрим сначала случай $n\geqslant 3$ и положим $R_1=1$. Через C_j будем обозначать постоянные, зависящие только от n. Пусть $v=(v_1,\ldots,v_n)$ — решение в Ω уравнений

$$\Delta v_i=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}e_{ik}(u)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}e_{kk}(u)\right) \tag{3}$$

с граничными условиями

$$v_i=0\ \text{на}\ \partial\Omega. \tag{4}$$

Умножая уравнение (3) на v_i, интегрируя полученное уравнение по Ω и преобразуя интегралы интегрированием по частям с учетом граничного условия (4), получаем

$$\mathcal{D}(v,\Omega)\leqslant C_4E(u,\Omega). \tag{5}$$

Положим $w=u-v$. Тогда $\Delta w_i=0$, $\Delta e_{ij}(w)=0$, $i,j=1,\ldots,n$, в Ω. Это следует из формулы, справедливой для любой гладкой вектор-функции $V=(V_1,\ldots,V_n)$:

$$\frac{\partial^2V_i}{\partial x_p\partial x_q}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_p}e_{iq}(V)+\frac{\partial}{\partial x_q}e_{ip}(V)-\frac{\partial}{\partial x_i}e_{pq}\right]. \tag{6}$$

Пусть $\rho(x)$ — расстояние от x до $\partial\Omega$. Легко видеть, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной, равной единице. Поэтому умножая уравнение $\Delta e_{ij}(w)=0$ на $\rho(x)\,e_{ij}(w)$, интегрируя полученное уравнение по Ω и преобразуя его интегрированием по частям, находим, что

$$\int_\Omega\rho^2(x)\,|\nabla e_{ij}(w)|^2\,dx\leqslant C_5\int_\Omega|e_{ij}(w)|^2\,dx\leqslant C_6E(u,\Omega). \tag{7}$$

Отсюда и из соотношения (6) вытекает, что

$$\int_\Omega\rho^2(x)\sum_{i,k,l=1}^{n}\left|\frac{\partial^2w_i}{\partial x_k\partial x_l}\right|^2dx\leqslant C_6E(u,\Omega). \tag{8}$$

Воспользуемся теперь следующим элементарным неравенством, которое будет доказано ниже в лемме 1:

$$\int_0^a t^pf^2(t)\,dt\leqslant C\left[\int_{a/4}^{a}(t-a)^2t^p|f'|^2\,dt+a^{p+1}\int_0^{3a/4}t^p|f'|^2\,dt+a^{p+1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1 t^pf^2(t)\,dt\right],\quad a=\text{const}>1,\quad p=\text{const}>1, \tag{9}$$

постоянная C не зависит от a и f.

Применим неравенство (9) к функциям $f = \frac{\partial w_i}{\partial x_k}$, $p = n - 1$ и отрезку луча OP, где P — любая точка на $\partial\Omega$, O — начало координат. Получим

$$\int_0^{|P|} |\nabla w|^2 |x|^{n-1} d|x| \leqslant C_7 \Big[\int_0^{|P|} |P - x|^2 |x|^{n-1} \sum_{i,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 d|x| +$$

$$+ R^n \int_0^{3|P|/4} |x|^{n-1} \sum_{i,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 d|x| + R^n \int_0^1 |x|^{n-1} |\nabla w|^2 d|x| \Big]. \quad (10)$$

Поскольку область Ω-звездна относительно шара Q_1 радиуса 1 то, как легко видеть, имеет место соотношение

$$|P - x| \leqslant \rho(x) R \quad (11)$$

и, кроме того,

$$\rho(x) = \frac{3}{4} \text{ при } |P - x| \geqslant \frac{3|P|}{4}. \quad (12)$$

Интегрируя неравенство (10) по сферическим переменным и учитывая, что $w = u - v$, а также неравенства (11), (12), (8) и (5), получаем неравенство (1)при $R_1 = 1$. При любом $R_1 > 0$ неравенство (1) получаем из него же при $R_1 = 1$ заменой переменных $y = \frac{x}{R_1}$.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$, $R_1 = 1$. В этом случае используем вместо неравенства (9) оценку

$$\int_0^a f^2(t)\, t dt \leqslant C \Big[\int_{a/4}^a (t - a)^2 t |f'|^2 dt + a^2 \ln(4a) \int_0^{3a/4} t |f'|^2 dt + a^2 \int_0^1 t f^2(t)\, dt \Big], \quad (13)$$

где постоянная C не зависит от a и f. Неравенство (13) также будет доказано в лемме 1. Для доказательства неравенства (2) применим оценку (13) к функциям $f = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$, $a = |P|$ и отрезку луча OP, где P — любая точка на $\partial\Omega$; O — начало координат. Имеем

$$\int_0^P |\nabla w|^2 |x| d|x| \leqslant C_8 \Big[\int_0^{|P|} |P - x|^2 |x| \sum_{i,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 d|x| + R^2 \ln(R) \times$$

$$\times \int_0^{3|P|/4} \sum_{i,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_k \partial x_l} \right|^2 |x| d|x| + R^2 \int_0^1 |\nabla w|^2 |x| d|x| \Big]. \quad (14)$$

Далее из неравенства (14) получаем (2) точно также, как мы получили (1) из (10).

Лемма 1. Для любой гладкой функции $f(t)$, $a = \text{const} > 1$, $p = \text{const} > 1$ справедливо неравенство (9). Кроме того, при $a = \text{const} > 1$ выполнено неравенство (13).

Доказательство. Докажем сначала (9). Оценим

$$\int_0^{3a/4} f^2 t^p dt. \quad (15)$$

Имеем

$$|f(t)| \leqslant |f(\xi)| + \left| \int_\xi^t f'(s)\, ds \right|, \quad t \in [0, 3a/4], \quad \xi \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right].$$

Отсюда вытекает, что

$$|f(t)|^2 \leqslant 2|f(\xi)|^2 + 2 \int_\xi^t t^p |f'|^2 dt \int_{1/4}^\infty t^{-p} dt \leqslant 2|f(\xi)|^2 + C_1 \int_0^{3a/4} t^p |f'|^2 dt, \quad (16)$$

где постоянная C_1 не зависит от f и a, так как $p > 1$. Легко видеть, что в силу теоремы о среднем найдется такое $\xi \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, что

$$f^2(\xi) \leqslant 4^{p+1} \int_{1/4}^{1/2} t^p f^2(t)\, dt. \tag{17}$$

Умножая неравенство (16) на t^p, интегрируя его по t от 0 до $3a/4$ и учитывая оценку (17), находим

$$\int_0^{3a/4} t^p f^2(t)\, dt \leqslant C_2 a^{p+1} \int_0^1 t^p f^2(t)\, dt + C_3 a^{p+1} \int_0^{3a/4} t^p |f'|^2\, dt, \tag{18}$$

где постоянные C_2, C_3 не зависят от a и f. Таким образом, получаем оценку интеграла (15).

Из неравенства Харди

$$\int_b^\infty \varphi^2(t)\, dt \leqslant C_4 \int_b^\infty (t-b)^2 |\varphi'|^2\, dt, \quad \varphi(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{19}$$

где постоянная C_4 не зависит от b и φ, вытекает неравенство

$$\int_{b_1}^{b_2} f^2(t)\, dt \leqslant C_5 \left[\int_{b_1}^{b_2} (t-b_2)^2 |f'|^2\, dt + |b_2 - b_1| f^2(b_1)\right], \quad b_2 > b_1. \tag{20}$$

Для доказательства неравенства (20) продолжим функцию $f(t) - f(b_1)$ нулем при $t < b_1$ и к функции $\varphi(t) = f(t) - f(b_1)$ применим неравенство Харди (19), сделав замену переменных $t = -t'$. Получим

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(t) - f(b_1)|^2\, dt \leqslant C_6 \int_{b_1}^{b_2} |t - b_2|^2 |f'|^2\, dt.$$

Отсюда следует (20). Применим теперь неравенство (20) к оценке интеграла

$$\int_{\lambda a}^{a} t^p f^2(t)\, dt,$$

где $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$. Выберем λ так, чтобы, согласно теореме о среднем, выполнялась оценка

$$f^2(\lambda a) \leqslant \frac{4}{a} \int_{a/2}^{3a/4} f^2(t)\, dt \leqslant C_7 a^{-(p+1)} \int_{a/2}^{3a/4} t^p f^2(t)\, dt.$$

Применяя неравенство (20) при $b_1 = \lambda a$ и $b_2 = a$ и учитывая последние неравенства,

$$\int_{\lambda a}^{a} t^p f^2 dt \leqslant a^p \int_{\lambda a}^{a} f^2 dt \leqslant C_8 a^p \left[\int_{\lambda a}^{a} (t-a)^2 |f'(t)|^2\, dt + |1 - \lambda| a f^2(\lambda a)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \left[\int_{a/2}^{a} (t-a)^2 t^p |f'(t)|^2\, dt + \int_{a/2}^{3a/4} t^p f^2(t)\, dt\right]. \tag{21}$$

Складывая оценки (18) и (21), получаем неравенство (9).

Доказательство неравенства (13) отличается от доказательства неравенства (9) в выводе оценки (16). В этом случае

$$|f^2(t)|^2 \leqslant 2|f(\xi)|^2 + 2\int_\xi^t t|f'|^2\, dt \int_\xi^t t^{-1} dt \leqslant 2|f(\xi)|^2 + 2\ln(4a) \int_0^{3a/4} t|f'|^2\, dt,$$

$$\xi \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right], \quad t \in [0, 3a/4].$$

Далее доказательство (13) повторяет доказательство оценки (9). Лемма доказана.

Замечание 1. Оценка (1) является неулучшаемой в следующем смысле. Вместо $\left(\frac{R}{R_1}\right)^n$ мы не можем поставить $\left(\frac{R}{R_1}\right)^n \alpha\left(\frac{R}{R_1}\right)$, где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, для вектор-функции $u = Ax + B$, где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами; B — постоянный вектор в области Ω, звездной относительно шара радиуса R_1, неравенство Корна (I) выполняется с коэффициентом $C_1\left(\frac{R}{R_1}\right)^n$. Такая же постоянная имеет место в неравенстве Корна (1), если $u = (Ax + B)\psi$, где $\psi = 0$ при $|x| < R_1$ и $\psi = 1$ при $|x| \geqslant 2R_1$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Предполагается, что шар $\{x : |x| < 2R_1\}$ также принадлежит Ω, $n \geqslant 3$.

Теорема 2. Пусть для области Ω выполнены условия теоремы 1, $u \in H^1(\Omega)$, γ — расстояние между Q_1 и $\partial\Omega$. Тогда

$$\mathcal{D}(u, \Omega) \leqslant C_1\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^n E(u, \Omega) + \left(\frac{R}{R_1}\right)^n \gamma^{-2}\int_\Omega |u|^2\,dx\right], \quad n \geqslant 3, \tag{22}$$

$$\mathcal{D}(u, \Omega) \leqslant C_2\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \ln\left(4\frac{R}{R_1}\right) E(u, \Omega) + \left(\frac{R}{R_1}\right)^n \gamma^{-2}\int_\Omega |u|^2\,dx\right], \quad n = 2, \tag{23}$$

где постоянные C_1, C_2 зависят только от n.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ в Q_1, $\varphi = 0$ вне шара $\{x : |x| < R_1 + \gamma/2\}$. Как известно (см. [2, 3, 6]),

$$\mathcal{D}(u\varphi, \Omega) \leqslant \frac{1}{2} E(u\varphi, \Omega). \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что

$$\mathcal{D}(u, Q_1) \leqslant \frac{1}{2} E(u, \Omega) + C_3\gamma^{-2}\int_\Omega |u|^2\,dx, \tag{25}$$

где постоянная C_3 зависит только от n. Из неравенства (1) и оценки (25) получаем (22), а из неравенства (2) и (25) находим (23). Теорема доказана.

Замечание 2. Доказательства теорем 1 и 2 дают простые доказательства неравенств Корна для любой ограниченной области Ω, граница которой удовлетворяет условию Липшица, поскольку такую область можно представить как сумму конечного числа звездных областей.

Рассмотрим теперь некоторые классы бесконечных областей Ω. Пусть $n = 2$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и любая окружность $\{x : |x| = \rho\}$ при $\rho \geqslant \rho_0$, $\rho_0 = \mathrm{const} > 0$, имеет не пустое пересечение с $\partial\Omega$, $u = 0$ на $\partial\Omega$, $u \in H^1(\Omega_a)$ для любого $a > 0$; $\Omega_a = \Omega \cap \{x : |x| < a\}$. Тогда

$$\mathcal{D}(u, \Omega) \leqslant \frac{1}{2} E(u, \Omega). \tag{26}$$

Доказательство. Определим $u(x)$ в $\mathbb{R}^2$, полагая $u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Тогда, согласно теореме 1, § 3 из [6],

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega) \leqslant \frac{1}{2} E(u, \Omega), \tag{27}$$

где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами.

Ниже докажем, что при условиях теоремы $A \equiv 0$. Предположим, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = \mathrm{const} > 0$. Фиксируем $\rho \geqslant \rho_0 \geqslant 2$ и пусть точка $P = (x_1^0, x_2^0)$ принадлежит $\partial\Omega$, $|x_1^0|^2 + |x_2^0|^2 = \rho^2$. В этом случае

$$\text{либо } |x_1^0|^2 > \frac{\rho^2}{4}, \quad \text{либо } |x_2^0|^2 > \frac{\rho^2}{4}. \tag{28}$$

Предположим, что справедливо первое из неравенств (28) при $\rho \geqslant \rho_0$. Так как $u=0$ на $\partial\Omega$, $u(P)=0$ и, следовательно, для $v=u-Ax$ имеем $v_2(P)=-ax_1^0$. Для любого x такого, что $|x|=\rho$, получаем

$$v_2(P) = -ax_1^0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\, d\varphi, \tag{29}$$

где (r, φ), (ρ, φ_0) — полярные координаты для точек x и P соответственно. Из (29) следует, что

$$|v_2(x)|^2 \geqslant \frac{a^2 |x_1^0|^2}{2} - \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\, d\varphi\right)^2 \geqslant \frac{a^2\rho^2}{8} - 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} |v_2(x)|^2\, d\varphi \geqslant \frac{\pi a^2 \rho^2}{4} - 4\pi^2 \int_0^{2\pi} |x|^2 |\nabla v_2|^2\, d\varphi.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{|x|\,|v_2(x)|^2\, d\varphi}{|x|^2\,|\ln|x||^2} \geqslant \frac{\pi a^2 |x|}{4\,|\ln|x||^2} - 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \frac{|\nabla v_2(x)|^2\,|x|}{|\ln|x||^2}\, d\varphi,$$

$$\int_{\beta>|x|>\rho_0} \frac{|v_2(x)|^2\, dx}{|x|^2\,|\ln|x||^2} \geqslant \frac{\pi a^2}{4} \int_{\rho_0}^{\beta} \frac{t\,dt}{|\ln|t||^2} - 4\pi^2 \int_{\beta>|x|>\rho_0} \frac{|\nabla v_2|^2\, dx}{|\ln|x||^2}. \tag{30}$$

Последний интеграл в правой части неравенства (30) ограничен равномерно относительно β, так как справедливо неравенство (27). Поэтому из (30) вытекает, что

$$\int_{\beta>|x|>\rho_0} \frac{|v_2|^2\, dx}{|x|^2\,|\ln|x||^2} \to \infty \text{ при } \beta \to \infty. \tag{31}$$

Согласно неравенству Харди (см. [6]) интеграл (31) ограничен равномерно относительно β, если $D(v, \Omega) < \infty$. Мы получили противоречие с тем, что $d \neq 0$. Другие случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω содержит конус K с липшицевой границей. Предположим, что $\Omega_{2\lambda} \setminus \bar{\Omega}_\lambda$, где $\Omega_\lambda = \Omega \cap \{x : |x| < \lambda\}$, при $\lambda = 2^m$, $m \geqslant m_0$, m — целое число, может быть покрыто конечным числом областей $G_1^\lambda, \ldots, G_{p(\lambda)}^\lambda$ так, что выполнены следующие условия:

1) кратность покрытия ограничена числом, независящим от λ;

2) диаметры областей G_j^λ ограничены постоянной, не зависящей от λ, $G_j^\lambda \subset \Omega$; Ω_λ при $\lambda = 2^{m_0+1}$ имеет липшицеву границу;

3) для любой области $G_{k_0}^\lambda$, $k_0 = 1, \ldots, p(\lambda)$, существует конечное число областей $G_{k_1}^\lambda, \ldots, G_{k_l}^\lambda$ таких, что $G_{k_s}^\lambda \cap G_{k_{s+1}}^\lambda$ содержит шар S_s^λ радиуса большего чем δ и δ не зависит от k_0, s, λ, $s = 0, 1, \ldots, l-1$; область $G_{k_s}^\lambda$-звездна относительно шара S_s^λ и $G_{k_l}^\lambda \subset K$; число l ограничено постоянной, не зависящей от λ и k_0, причем любое G_k^λ может входить в цепочку областей $G_{k_1}, \ldots, G_{k_l}$ лишь для конечного числа областей $G_{k_0}^l$, ограниченного постоянной, не зависящей от λ.

Если $E(u, \Omega) < \infty$, $\mathcal{D}(u, \Omega_a) < \infty$ для любого $a > 0$, то существует кососимметрическая матрица A с постоянными элементами такая, что

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega) \leqslant CE(u, \Omega), \tag{32}$$

где постоянная C не зависит от u.

Доказательство. Из теоремы 3, § 3, доказанной в [6], следует, что

$$\mathcal{D}(u - Ax, K) \leqslant C_1 E(u, K), \tag{33}$$

где K — конус, принадлежащий Ω, постоянная C_1 не зависит от u. Пусть m — столь большое число, что условия 1)—3) теоремы выполнены для $\lambda = 2^m$. Тогда на основании теоремы 1, доказанной выше, получаем

$$\mathcal{D}(u - Ax, G^{\lambda}_{k_0}) \leqslant C_2 [E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_0}) + \mathcal{D}(u - Ax, G^{\lambda}_{k_1}) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_0}) + C_2^2 E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_1}) + C_2^2 \mathcal{D}(u - Ax, G^{\lambda}_{k_2}) \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant C_2 E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_0}) + C_2^2 E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_1}) +$$
$$+ \ldots + C_2^l E(u - Ax, G^{\lambda}_{k_{l-1}}) + C_2^l \mathcal{D}(u - Ax, G^{\lambda}_{k_l}). \tag{34}$$

Суммируя неравенства (34) от $k = 1$ до $k_0 = p(2^m)$, находим, что при $\lambda = 2^m$

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega_{2\lambda} \setminus \Omega_{\lambda}) \leqslant C_3 [E(u - Ax, \Omega_{2\lambda} \setminus \Omega_{\lambda}) + \mathcal{D}(u - Ax, \Omega_{2\lambda} \setminus \Omega_{\lambda})], \tag{35}$$

где постоянная C_3 не зависит от u. Суммируя неравенства (35) по m от m_0 до $m = \infty$, получаем

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega \setminus \Omega_{2m_0}) \leqslant C_4 [E(u, \Omega \setminus \Omega_{2m_0}) + \mathcal{D}(u - Ax, K)]. \tag{36}$$

Применяя классическое неравенство Корна в области Ω_{2m_0+1} для функции $(u - Ax)\psi$, где $\psi = 1$ в Ω_{2m_0} и $\psi = 0$ в $\Omega \setminus \Omega_{2m_0+1}$, $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega_{2m_0}) \leqslant C_5 \Big[E(u, \Omega_{2m_0+1}) + \int\limits_{\Omega_{2m_0+1} \setminus \Omega_{2m_0}} |u - Ax|^2 \, dx \Big], \tag{37}$$

где C_5 не зависит от u. Прибавляя, если нужно, к $u - Ax$ постоянный вектор, мы можем предполагать, что

$$\int\limits_{\Omega_{2m_0+1} \setminus \Omega_{2m_0}} (u - Ax) \, dx = 0.$$

Поэтому применяя неравенство Пуанкаре для оценки последнего интеграла в (37), находим

$$\mathcal{D}(u - Ax, \Omega_{2m_0}) \leqslant C_6 [E(u, \Omega_{2m_0+1}) + \mathcal{D}(u - Ax, \Omega_{2m+1} \setminus \Omega_{2m_0})]. \tag{38}$$

Складывая неравенства (36), (38) и пользуясь (33), получаем неравенство (32). Теорема доказана.

Условиям теоремы 4 удовлетворяет, например, область $\Omega = \{x : x_n > \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, где φ — ограниченная функция в $\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющая условию Липшица, а также область вида $\Omega = \{x : |\tilde{x}| < \varphi(x_n) + K x_n\}$, где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, φ — ограниченная функция, удовлетворяющая условию Липшица, $K = \text{const}$.

Пользуясь теоремой 4 точно также, как доказана теорема 2, § 4 в [6], можно доказать, что в области Ω, удовлетворяющей условиям теоремы 4, решение второй краевой задачи для стационарной системы теории упругости (задача Неймана) определяется однозначно с точностью до слагаемого $Ax + B$, где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами, а B — постоянный вектор, если решения рассматривать в классе вектор-функций u, удовлетворяющих условию $E(u, \Omega) < \infty$.

Точно также, как доказана теорема 1, § 4 в [6], можно доказать, что если область Ω удовлетворяет условиям теоремы 3, то решение u задачи Дирихле в Ω для стационарной системы теории упругости единственно при условии, что $E(u, \Omega) < \infty$.

Краткое доказательство теоремы 1 приведено в [7]. Аналогичные ей вопросы рассмотрены в [8, 9].

1. *Korn A.* Über einige Ungleichungen, welche in der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen // Bull. Int. Cracov Acad. umiejet (Classe Sc. Math. Rat.).— 1909.— 108 p.
2. *Friedrichs K. O.* On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // Ann. Math.— 1947.— 48, N 2.— P. 441—471.
3. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости.— М. : Мир, 1974.— 221 с.
4. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inegalites en Mecanique et en Physique. Paris, Dunod, 1972.— 196 p.
5. *Nitsche J. A.* On Korn's second inequality // R. A. I. R. O., Analyse Numerique.— 1981.— 15, N 3.— P. 237—248.
6. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Усп. мат. наук.— 1988.— 43, № 5.— С. 55—98.
7. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О зависимости констант в неравенстве Корна от параметров, характеризующих геометрию области // Усп. мат. наук.— 1989.— 44, № 6.— С. 157—158.
8. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* On Korn's inequalities // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1989.— 308, Ser. 1.— P. 483—487.
9. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* On Korn's inequalities for frame type structures and junctions // Ibid.— 1989.— 309, Ser. 1.— P. 591—596.

Моск. гос. ун-т Получено 25.10.89