УДК 539.3:534.1

©2017. **В.Г. Выскуб, И.А. Глухов, В.И. Сторожев**

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В ВОДОНАСЫЩЕННОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ УПРУГИМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Построено численно-аналитическое решение задачи о распространении локализованных трехпарциальных волн деформаций вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости насыщенного упруго-пористого ортотропного слоя, контактирующего по граням с вмещающими ортотропными полупространствами из разнотипных по физико-механическим свойствам насыщенных упруго-пористых материалов. Получено основное дисперсионное соотношение. Дана качественная характеристика особенностей асимптотического поведения скоростей исследуемых волновых движений в высокочастотном коротковолновом диапазоне при варьировании ориентации направления распространения.

Ключевые слова: *слой между полупространствами, ортотропные насыщенные материалы, модификация модели Био, трехпарциальные локализованные волны, трансцендентные дисперсионные уравнения, коротковолновые асимптотики скоростей.*

Введение. Свойство пористости и водонасыщенности разрабатываемых угольных пластов и вмещающих массивов горных пород оказывает существенное влияние на эффективные характеристики их волнового деформирования в процессе геоакустических исследований и сейсморазведки. Поэтому элементом дальнейшего совершенствования методологии этих исследований является привнесение учета фактора многокомпонентности в синтезируемых и исследуемых теоретических моделях волновой механики составных геомассивов, применяемых в технологиях горной сейсмоакустики. При самом широком внимании к теоретическим проблемам механики динамического деформирования пористо-упругих насыщенных жидкостью сред, охарактеризованном в современных обзорно-аналитических статьях [1, 2] и монографиях [3–9], ряд актуальных проблем распространения волн деформаций в составных неоднородных телах с указанными свойствами требует дальнейших исследований. Это в существенной мере касается задач о распространении упругих волн вдоль слоев-пластов из насыщенных пористо-упругих материалов, контактирующих с полубесконечными породными массивами при учете различных дополнительных усложняющих факторов в их физико-механических свойствах. Так, в наибольшей степени из широкого класса задач данного типа исследованы проблемы распространения локализованных обобщенных волн Лява в геоструктурах “слой, контактирующий с полупространством” при учете факторов пористости, флюидонасыщенности, анизотропии, функционально-градиентной неоднородности, начальных деформаций [10–12]. В ряде работ рассмотрена проблема описания дисперсионных свойств локализованных сдвиговых и продольно-сдвиговых волн деформаций в упругом многокомпонентном слое, расположенном между упругими полупространствами, при ряде допущений о специфических свойствах компонентов волновода и о характере контактных граничных условий [13–16].

В контексте представленной характеристики результатов исследований по проблеме распространения упругих волн в составных слоистых пористо-упругих насыщенных жидкостью средах, данная работа посвящена разработке теоретического алгоритма получения и качественного исследования дисперсионных соотношений для симметричных трехпарциальных локализованных волн деформаций, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости водонасыщенного ортотропного слоя между однотипными по свойствам водонасыщенными ортотропными упругими полупространствами.

1. Постановка задачи. Рассматривается волновод, занимающий область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V \cup V^{(-)} \qquad (1)$$

в виде заключенного между деформируемыми полупространствами пористого водонасыщенного упругого слоя, компоненты которого имеют в отнесенных к нормирующему параметру R_* безразмерных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ описания

$$\begin{gathered} V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2,\ x_3 > h/2\}, \quad V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2,\ x_3 < -h/2\}, \\ V = \{(x_1, x_2) \in R^2, \quad -h/2 \le x_3 \le h/2\}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Слой и полупространства состоят из прямолинейно-ортотропных пористо-упругих насыщенных жидкостью материалов с коллинеарными, ориентированными вдоль координатных осей, одноименными упруго-эквивалентными направлениями. Используемая версия модели из волнового динамического деформирования представлена в работах [1,2,17,18]. Полагается, что физико-механические свойства вмещающих полупространств $V^{(+)}$, $V^{(-)}$ идентичны и отличаются от физико-механических свойств слоя V.

В рамках используемой модели характеристиками деформирования пористо-упругой насыщенной среды являются поля осредненных векторов смещений $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ для жесткого пористого каркаса, $\mathbf{U} = (U_1,\ U_2,\ U_3)$ для жидкости в поровом пространстве и $\mathbf{W} = \phi\,(\mathbf{U} - \mathbf{u}) = (w_1,\ w_2,\ w_3)$ – смещений жидкости относительно каркаса, где ϕ – коэффициент пористости. Относительно характеристик $u_1,\ u_2,\ u_3,\ w_1,\ w_2,\ w_3$ и $U_1,\ U_2,\ U_3$ системы определяющих соотношений и уравнений движения для среды рассматриваемого типа могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3 - q_{11}(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3), \\ \sigma_{22} = c_{12}\partial_1 u_1 + c_{22}\partial_2 u_2 + c_{23}\partial_3 u_3 - q_{22}(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3), \\ \sigma_{33} = c_{13}\partial_1 u_1 + c_{23}\partial_2 u_2 + c_{33}\partial_3 u_3 - q_{33}(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3), \\ \sigma_{23} = c_{44}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \quad \sigma_{13} = c_{55}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), \\ \sigma_{12} = c_{66}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \quad \sigma_f = -\phi p_f, \\ p_f = -q_{11}\partial_1 u_1 - q_{22}\partial_2 u_2 - q_{33}\partial_3 u_3 + M\phi(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3); \end{gathered} \qquad (3)$$

$$
\begin{aligned}
\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} &= \rho_{11}\partial_t^2 u_1 + \rho_{12}\partial_t^2 U_1 - b_{11}(\partial_t U_1 - \partial_t u_1),\\
\partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} + \partial_3\sigma_{32} &= \rho_{11}\partial_t^2 u_2 + \rho_{12}\partial_t^2 U_2 - b_{22}(\partial_t U_2 - \partial_t u_2),\\
\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} + \partial_3\sigma_{33} &= \rho_{11}\partial_t^2 u_3 + \rho_{12}\partial_t^2 U_3 - b_{33}(\partial_t U_3 - \partial_t u_3),\\
\partial_1\sigma_f &= \rho_{22}\partial_t^2 U_1 + \rho_{12}\partial_t^2 u_1 + b_{11}(\partial_t U_1 - \partial_t u_1),\\
\partial_2\sigma_f &= \rho_{22}\partial_t^2 U_2 + \rho_{12}\partial_t^2 u_2 + b_{22}(\partial_t U_2 - \partial_t u_2),\\
\partial_3\sigma_f &= \rho_{22}\partial_t^2 U_3 + \rho_{12}\partial_t^2 u_3 + b_{33}(\partial_t U_3 - \partial_t u_3),
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_f\delta_{ij}$ – компоненты полного тензора напряжений в пористой насыщенной среде; $\sigma_{ij}^{(s)}$ – напряжения, приложенные к упругому скелету; σ_f – напряжение в жидкости; p_f – давление насыщающей жидкости; $\rho_{12} = \rho_f\phi(1 - a_f)$ – параметр удельной присоединенной массы; $\rho_{11} = \rho_s(1 - \phi) - \rho_{12}$ – параметр эффективной удельной массы упругой фазы; $\rho_{22} = \rho_f\phi - \rho_{12}$ – параметр эффективной удельной массы жидкой фазы; ρ_s – параметр плотности упругого скелета; ρ_f – параметр плотности жидкости; a_f – параметр извилистости; $c_{ij} = c_{ji}$ – обобщенные модули упругости насыщенного каркаса, множество ненулевых значений которых включает и девять независимых отнесенных к нормирующему параметру c_* величин c_{ij}, $(ij = 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 13,\ 23,\ 44,\ 55,\ 66)$; q_{ij}, M – механические постоянные деформирования пористо-упругой насыщенной среды; $b_{ij} = k_{npij}/\eta_f$, k_{npij} – коэффициенты проницаемости анизотропной пористой насыщенной среды, η_f – динамическая вязкость насыщающей жидкости, $\partial_j = \partial/\partial x_j$; $\partial_t = \partial/\partial t$.

С учетом формул связи $w_j = \phi\,(U_j - u_j)$ и путем подстановки определяющих соотношений (3) в уравнения движения (4) записываются уравнения волнового деформирования пористо-упругой насыщенной среды в рамках рассматриваемой версии модели Био относительно компонентов векторов смещений в упругой и жидкой фазах

$$
\begin{gathered}
L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j(x_1, x_2, x_3, t) + G_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)U_j(x_1, x_2, x_3, t) = 0,\\
\tilde{L}_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j(x_1, x_2, x_3, t) + \tilde{G}_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)U_j(x_1, x_2, x_3, t) = 0\\
(i, j = \overline{1,3}),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
L_{11}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{55}\partial_3^2 - \rho_{11}\partial_t^2 - b_{11}\partial_t,\\
L_{22}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{66}\partial_1^2 + c_{22}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho_{11}\partial_t^2 - b_{22}\partial_t,\\
L_{33}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho_{11}\partial_t^2 - b_{33}\partial_t,\\
L_{12}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2,\\
L_{13}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{31}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{13} + c_{55})\partial_1\partial_3,\\
L_{23}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{32}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{23} + c_{44})\partial_2\partial_3,
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$\begin{gathered}
G_{11}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{11}\partial_1^2 - \rho_{11}\partial_t^2 + b_{11}\partial_t,\\
G_{22}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{22}\partial_2^2 - \rho_{11}\partial_t^2 + b_{22}\partial_t,\\
G_{33}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{33}\partial_3^2 - \rho_{11}\partial_t^2 + b_{33}\partial_t,\\
G_{12}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{11}\partial_1\partial_2, \quad G_{21}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{22}\partial_1\partial_2,\\
G_{13}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{11}\partial_1\partial_3, \quad G_{31}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{33}\partial_1\partial_3,\\
G_{23}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{22}\partial_2\partial_3, \quad G_{32}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = q_{33}\partial_2\partial_3,
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{L}_{11}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{11}\phi + M\phi^2)\partial_1^2 - \rho_{12}\partial_t^2 + b_{11}\partial_t,\\
\tilde{L}_{22}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{22}\phi + M\phi^2)\partial_2^2 - \rho_{12}\partial_t^2 + b_{22}\partial_t,\\
\tilde{L}_{33}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{33}\phi + M\phi^2)\partial_3^2 - \rho_{12}\partial_t^2 + b_{33}\partial_t,\\
\tilde{L}_{12}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{22}\phi + M\phi^2)\partial_1\partial_2,\\
\tilde{L}_{13}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{33}\phi + M\phi^2)\partial_1\partial_3,\\
\tilde{L}_{21}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{11}\phi + M\phi^2)\partial_1\partial_2,\\
\tilde{L}_{23}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{33}\phi + M\phi^2)\partial_2\partial_3,\\
\tilde{L}_{31}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{11}\phi + M\phi^2)\partial_1\partial_3,\\
\tilde{L}_{32}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = (q_{22}\phi + M\phi^2)\partial_2\partial_3,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{G}_{11}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_1^2 - \rho_{22}\partial_t^2 - b_{11}\partial_t,\\
\tilde{G}_{22}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_2^2 - \rho_{22}\partial_t^2 - b_{22}\partial_t,\\
\tilde{G}_{33}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_3^2 - \rho_{22}\partial_t^2 - b_{33}\partial_t,\\
\tilde{G}_{12}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = \tilde{G}_{21}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_1\partial_2,\\
\tilde{G}_{13}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = \tilde{G}_{31}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_1\partial_3,\\
\tilde{G}_{23}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = \tilde{G}_{32}(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_t) = -M\phi^2\partial_2\partial_3.
\end{gathered} \tag{9}$$

Сформулированная система дифференциальных уравнений (5) дополняется краевыми условиями [19] на контактных поверхностях

$$\Gamma^{(+)} = \{(x_1,x_2) \in R^2,\ x_3 = h/2\}, \quad \Gamma^{(-)} = \{(x_1,x_2) \in R^2,\ x_3 = -h/2\},$$

которые рассматриваются как флюидопроницаемые поверхности идеального механического контакта, а также условиями асимптотического затухания интенсивности волновых полей в глубине полупространств $V^{(+)}$, $V^{(-)}$ при удалении от контактных поверхностей. С учетом введения нижних индексов $\pm$ для всех характеристик рассматриваемой модели деформирования в полубесконечных составляющих $V^{(\pm)}$ и интерпретации характеристик без этих индексов, как соответствующих области слоя V, данные краевые условия в рассматриваемом случае формулируются в виде

$$
\begin{gathered}
(\sigma_{33\pm}^{(s)} + \sigma_{f\pm})_{x_3=\pm h/2} = (\sigma_{33}^{(s)} + \sigma_f)_{x_3=\pm h/2},\\
(\sigma_{31\pm}^{(s)})_{x_3=\pm h/2} = (\sigma_{31}^{(s)})_{x_3=\pm h/2}, \quad (\sigma_{32\pm}^{(s)})_{x_3=\pm h/2} = (\sigma_{32}^{(s)})_{x_3=\pm h/2};\\
(\partial_t u_{j\pm})_{x_3=\pm h/2} = (\partial_t u_j)_{x_3=\pm h/2} \quad (j=\overline{1,3}),\\
(\partial_t w_{3\pm})_{x_3=\pm h/2} = (\partial_t w_3)_{x_3=\pm h/2}, \quad (p_{f\pm})_{x_3=\pm h/2} = (p_f)_{x_3=\pm h/2}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Таким образом, на каждой из контактных поверхностей задается по восемь граничных условий.

2. Процедура получения аналитической формы основного дисперсионного соотношения. Для волновода с описанной структурой подлежат анализу процессы распространения симметричных по толщине слоя локализованных трехпарциальных гармонических волн деформаций с круговой частотой ω вдоль произвольно ориентированного направления $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ в первом квадранте координатной плоскости Ox_1x_2, составляющего угол φ с осью Ox_1 ($n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$). Представляемая методика анализа рассматриваемой проблемы базируется на обобщении подходов, изложенных в работах [20–23].

На первом этапе реализации рассматриваемого подхода осуществляется аналитическое интегрирование систем дифференциальных уравнений волнового деформирования орторопной пористо-упругой насыщенной среды для каждой составляющей волновода.

При подстановке в уравнения (4) для области слоя V исходных представлений комплексных функций волновых перемещений в исследуемых трехпарциальных локализованных волнах с волновым числом k

$$
\begin{gathered}
u_j(x_1,x_2,x_3,t) = A_j\cos(\lambda x_3)E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j=\overline{1,2}),\\
u_3(x_1,x_2,x_3,t) = A_3\sin(\lambda x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),\\
U_j(x_1,x_2,x_3,t) = A_{j+3}\cos(\lambda x_3)E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j=\overline{1,2}),\\
U_3(x_1,x_2,x_3,t) = A_6\sin(\lambda x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),\\
E(\omega,k,n_1,n_2) = \exp(-i(\omega t - k(n_1x_1 + n_2x_2))),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

соотношения (4) трансформируются в однородную систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка

$$
Q_{ij}(\lambda)A_j = 0 \qquad (i,j=\overline{1,6}),
\tag{12}
$$

где элементы матрицы $Q_{ij}(\lambda)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
Q_{11}(\lambda) = \Omega_1 - \Omega_{11}^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\lambda^2,\\
Q_{22}(\lambda) = \Omega_2 - \Omega_{11}^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\lambda^2,\\
Q_{33}(\lambda) = \Omega_3 - \Omega_{11}^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\lambda^2,\\
Q_{12}(\lambda) = Q_{21}(\lambda) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2,\\
Q_{13}(\lambda) = ik(c_{13} + c_{55})n_1\lambda, \quad Q_{31}(\lambda) = -ik(c_{13} + c_{55})n_1\lambda,\\
Q_{23}(\lambda) = ik(c_{23} + c_{44})n_2\lambda, \quad Q_{32}(\lambda) = -ik(c_{23} + c_{44})n_2\lambda,\\
Q_{14}(\lambda) = -k^2q_{11}n_1^2 - \Omega_{11}^2 + \Omega_1, \quad Q_{25}(\lambda) = -k^2q_{22}n_2^2 - \Omega_{11}^2 + \Omega_2,\\
Q_{36}(\lambda) = -q_{33}\lambda^2 - \Omega_{11}^2 + \Omega_3,\\
Q_{15}(\lambda) = -k^2q_{11}n_1n_2, \quad Q_{24}(\lambda) = -k^2q_{22}n_1n_2,\\
Q_{16}(\lambda) = ikq_{11}n_1\lambda, \quad Q_{34}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = ikq_{33}n_1\lambda,\\
Q_{26}(\lambda) = ikq_{22}n_2\lambda, \quad Q_{35}(\lambda) = -ikq_{33}n_2\lambda,\\
Q_{41}(\lambda) = -k^2(q_{11}\phi + M\phi^2)n_1^2 - \Omega_{12}^2 + \Omega_1, \qquad (13)\\
Q_{52}(\lambda) = -k^2(q_{22}\phi + M\phi^2)n_2^2 - \Omega_{12}^2 + \Omega_2,\\
Q_{63}(\lambda) = -(q_{33}\phi + M\phi^2)\lambda^2 - \Omega_{12}^2 + \Omega_3,\\
Q_{42}(\lambda) = -k^2(q_{22}\phi + M\phi^2)n_1n_2, \quad Q_{51}(\lambda) = -k^2(q_{11}\phi + M\phi^2)n_1n_2,\\
Q_{43}(\lambda) = ik(q_{33}\phi + M\phi^2)n_1\lambda, \quad Q_{53}(\lambda) = ik(q_{33}\phi + M\phi^2)n_2\lambda,\\
Q_{62}(\lambda) = -ik(q_{22}\phi + M\phi^2)n_2\lambda, \quad Q_{61}(\lambda) = -ik(q_{11}\phi + M\phi^2)n_1\lambda,\\
Q_{44}(\lambda) = k^2M\phi^2n_1^2 - \Omega_{22}^2 - \Omega_1, \quad Q_{55}(\lambda) = k^2M\phi^2n_2^2 - \Omega_{22}^2 - \Omega_2,\\
Q_{66}(\lambda) = M\phi^2\lambda^2 - \Omega_{22}^2 - \Omega_3, \quad Q_{45}(\lambda) = Q_{54}(\lambda) = k^2M\phi^2n_1n_2,\\
Q_{46}(\lambda) = -ikM\phi^2n_1\lambda, \quad Q_{64}(\lambda) = k^2M\phi^2n_1\lambda,\\
Q_{56}(\lambda) = -ikM\phi^2n_2\lambda, \quad Q_{65}(\lambda) = k^2M\phi^2n_2\lambda,\\
\Omega_{11}^2 = \rho_{11}\omega^2R_*^2/c_*, \quad \Omega_{12}^2 = \rho_{12}\omega^2R_*^2/c_*,\\
\Omega_{22}^2 = \rho_{22}\omega^2R_*^2/c_*, \quad \Omega_j = -i\omega b_{jj}R_*/c_* \quad (j = \overline{1,3}).
\end{gathered}$$

Характеристическое уравнение системы (12) представляет собой полиномиальное уравнение восьмой степени относительно параметра λ, имеющее ненулевые коэффициенты только при четных степенях неизвестной, что позволяет записывать аналитические представления для квадратов его корней с использованием формул Феррари. Структура этой системы такова, что в предельных случаях распространения исследуемых волн вдоль упругоэквивалентных направлений Ox_1 ($n_1 = 1,\ n_2 = 0$) и Ox_2 ($n_1 = 0,\ n_2 = 1$) из нее соответственно выделяются подсистемы однородных алгебраических уравнений с квадратными характеристическими уравнениями

$$\begin{aligned} &Q_{22}(\lambda)A_2 + Q_{25}(\lambda)A_5 = 0, \\ &Q_{52}(\lambda)A_2 + Q_{55}(\lambda)A_5 = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} &Q_{11}(\lambda)A_1 + Q_{14}(\lambda)A_4 = 0, \\ &Q_{41}(\lambda)A_1 + Q_{44}(\lambda)A_4 = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

описывающие несвязанные волны SH-типа. С учетом свойств четности представлений (11) по параметру λ из совокупности корней уравнения (13) отбирается подмножество λ_p ($\mathrm{Re}\lambda_p > 0,\ p = \overline{1,4}$). Соответствующие этим значениям нетривиальные решения $A_j^{(p)}$ ($j = \overline{1,6}$) системы (12) в общем случае трехпарциальных волн, обладающие, вместе с тем, свойствами корректного описания предельных частных случаев упруго-эквивалентных направлений распространения при условии, что величины λ_4 принадлежат той ветви корней характеристического уравнения, которая в предельных случаях ($n_1 = 1,\ n_2 = 0$) и ($n_1 = 0,\ n_2 = 1$) описывает нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления в плоскости слоя, т. е. совпадает с ветвями корней характеристических уравнений систем (14) и (15), конструируются в виде представлений со структурой $A_j^{(p)} = \beta_{jp}D_p$, содержащих произвольные постоянные коэффициенты D_j

$$\begin{aligned} A_j^{(p)} &= \Delta_{6j}(\lambda_p)D_p = \beta_{jp}D_p \ \ (j = \overline{1,6};\ \ p = \overline{1,3}), \\ A_j^{(4)} &= (n_2\Delta_{j1}(\lambda_4) + n_1\Delta_{j2}(\lambda_4))D_4 = \beta_{j4}D_4, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda_p)$ – алгебраические дополнения к элементам $Q_{ij}(\lambda_p)$ матрицы системы (12).

Таким образом, для характеристик исследуемых волновых полей в области слоя V записываются представления вида

$$\begin{aligned} u_j(x_1,x_2,x_3,t) &= \sum_{p=1}^{4} D_p\beta_{jp}\cos(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j = \overline{1,2}), \\ u_3(x_1,x_2,x_3,t) &= \sum_{p=1}^{4} D_p\beta_{3p}\sin(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2); \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} U_j(x_1,x_2,x_3,t) &= \sum_{p=1}^{4} D_p\beta_{j+3,p}\cos(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2) \ \ (j = \overline{1,2}), \\ U_3(x_1,x_2,x_3,t) &= \sum_{p=1}^{4} D_p\beta_{6p}\sin(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \end{aligned} \tag{18}$$

которые обладают свойством предельного соответствия в описании структуры волновых полей для всего диапазона угловых параметров направлений распространения $0 \le \varphi \le \pi/2$ и могут быть эффективно использованы в дальнейшем теоретическом алгоритме получения верифицируемых дисперсионных соотношений для исследуемых симметричных трехпарциальных локализованных волн при задании соответствующих однотипных контактных краевых условий (10) на противоположных гранях слоя.

По аналогичной схеме формируются представления комплексных функций волновых упругих перемещений в областях, занимаемых однотипными по физико-механическим параметрам пористо-упругими насыщенными ортотропными вмещающими полупространствами, для совпадающих характеристик которых соответственно вводятся индексы ($\pm$). Так, для полупространства $V^{(+)}$ в случае задания исходных представлений

$$\begin{gathered} u_j^{(+)}(x_1,x_2,x_3,t) = B_j \exp(-\alpha x_3) E(\omega,k,n_1,n_2), \\ U_j^{(+)}(x_1,x_2,x_3,t) = B_{j+3} \exp(-\alpha x_3) E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j=\overline{1,3}) \end{gathered} \tag{19}$$

при условии $\operatorname{Re}\alpha > 0$, уравнения (5) трансформируются в линейные алгебраические уравнения вида

$$Q_{ij}^{+}(\alpha) B_j = 0, \tag{20}$$

в которых выражения $Q_{ij}^{+}(\alpha)$ имеют сходную с представлениями (13) структуру. С введением обозначений α_p ($\operatorname{Re}\alpha_p > 0,\ p=\overline{1,4}$) для корней соответствующего рассматриваемому случаю варианта характеристического уравнения системы (20), представляющего собой полиномиальное уравнение восьмой степени относительно параметра α с ненулевыми коэффициентами при четных степенях неизвестной, для соответствующих этим корням нетривиальных решений $B_j^{(p)}$ системы (20) конструируются представления $B_j^{(p)} = \eta_{jp} C_p$ с произвольными постоянными коэффициентами C_p

$$\begin{gathered} B_j^{(p)} = \Delta_{6j}^{+}(\alpha_p) C_p = \eta_{jp} C_p \quad (j=\overline{1,6};\quad p=\overline{1,3}), \\ B_j^{(4)} = (n_2 \Delta_{j1}^{+}(\alpha_4) + n_1 \Delta_{j2}^{+}(\alpha_4)) C_4 = \eta_{j4} C_4, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\Delta_{ij}^{+}(\alpha_p)$ – алгебраические дополнения к элементам $Q_{ij}^{+}(\alpha_p)$ матрицы системы (20).

В итоге, для характеристик исследуемых волновых полей в области полупространства V^{+} записываются представления вида

$$u_j^{+}(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{p=1}^{4} C_p \eta_{jp} \exp(-\alpha_p x_3) E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j=\overline{1,3}), \tag{22}$$

$$U_j^{+}(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{p=1}^{4} C_p \eta_{j+3,p} \exp(-\alpha_p x_3) E(\omega,k,n_1,n_2) \quad (j=\overline{1,3}), \tag{23}$$

также обладающие свойством предельного соответствия в описании структуры волновых полей для всего диапазона угловых параметров направлений распространения $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Ввиду отражаемой представлениями (17), (18) симметрии волнового поля по толщине внутреннего слоя и эквивалентности физико-механических свойств окружающих полупространств, сходная симметрия априори свойственна и волновому полю по всей толщине составного волновода, а контактные краевые условия (10) в рассматриваемой граничной задаче могут быть сформулированы [20–23] только на одной из поверхностей сопряжения $x_3 = h/2$. С учетом представлений (17), (18), (22), (23), а также выражений для входящих в контактные условия (10) характеристик

$$\begin{gathered}
\sigma_{33}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} D_p(ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \\
+\lambda_p c_{33}\beta_{3p})\cos(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\sigma_{32}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} D_p(ikc_{44}(n_2\beta_{3p} - \\
-\lambda_p\beta_{2p}))\sin(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\sigma_{31}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} D_p(ikc_{55}(n_1\beta_{3p} - \\
-\lambda_p\beta_{1p}))\sin(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\sigma_{33+}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{3} C_p(ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \\
-\alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p})\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\sigma_{32+}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} C_p(ikc_{44}^{(+)}(n_2\eta_{3p} - \\
-\alpha_p\eta_{2p}))\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\sigma_{31+}^{(s)}(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} C_p(ikc_{55}^{(+)}(n_1\eta_{3p} - \\
-\alpha_p\eta_{1p}))\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\partial_t w_3(x_1,x_2,x_3,t) = \\
= i\omega\phi \textstyle\sum_{p=1}^{4} D_p(\beta_{6p} - \beta_{3p})\sin(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
\partial_t w_{3+}(x_1,x_2,x_3,t) = i\omega\phi_+ \textstyle\sum_{p=1}^{4} C_p(\eta_{6p} - \eta_{3p})\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2), \\
p_f(x_1,x_2,x_3,t) = \textstyle\sum_{p=1}^{4} D_p(ikn_1(M\phi\beta_{4p} - (q_{11} + M\phi)\beta_{1p}) + \\
+ikn_2(M\phi\beta_{5p} - (q_{22} + M\phi)\beta_{2p}) + \\
+\lambda_p(M\phi\beta_{6p} - (q_{33} + M\phi)\beta_{3p}))\cos(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),
\end{gathered} \tag{24}$$

$$p_{f+}(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{p=1}^{4} C_p(ikn_1(M_+\phi_+\eta_{4p} - (q_{11+} + M_+\phi_+)\eta_{1p})+$$
$$+ikn_2(M_+\phi_+\eta_{5p} - (q_{22+} + M_+\phi_+)\eta_{2p})-$$
$$-\alpha_p(M_+\phi_+\eta_{6p} - (q_{33+} + M_+\phi_+)\eta_{3p}))\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),$$

$$\sigma_f(x_1,x_2,x_3,t) = -\phi\sum_{p=1}^{4} D_p(ikn_1(M\phi\beta_{4p}-$$
$$-(q_{11} + M\phi)\beta_{1p}) + ikn_2(M\phi\beta_{5p} - (q_{22} + M\phi)\beta_{2p})+$$
$$+\lambda_p(M\phi\beta_{6p} - (q_{33} + M\phi)\beta_{3p}))\cos(\lambda_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),$$

$$\sigma_{f+}(x_1,x_2,x_3,t) = -\phi_+\sum_{p=1}^{4} C_p(ikn_1(M_+\phi_+\eta_{4p} - (q_{11+} + M_+\phi_+)\eta_{1p})+$$
$$+ikn_2(M_+\phi_+\eta_{5p} - (q_{22+} + M_+\phi_+)\eta_{2p})-$$
$$-\alpha_p(M_+\phi_+\eta_{6p} - (q_{33+} + M_+\phi_+)\eta_{3p}))\exp(-\alpha_p x_3)E(\omega,k,n_1,n_2),$$

из краевых условий следуют соотношения

$$\sum_{p=1}^{4} D_p\zeta_{q,p} + \sum_{p=1}^{4} C_p\zeta_{q,p+4} = 0 \qquad (q=\overline{1,8}), \tag{25}$$

в которых

$$\begin{gathered}
\zeta_{1,p} = -(ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \lambda_p c_{33}\beta_{3p})\cos(\lambda_p h/2)-\\
-\phi(ikn_1(M\phi\beta_{4p} - (q_{11} + M\phi)\beta_{1p}) + ikn_2(M\phi\beta_{5p} - (q_{22} + M\phi)\beta_{2p})+\\
+\lambda_p(M\phi\beta_{6p} - (q_{33} + M\phi)\beta_{3p}))\cos(\lambda_p h/2),\\
\zeta_{1,p+4} = -(ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p})\exp(-\alpha_p h/2)-\\
-\phi_+(ikn_1(M_+\phi_+\eta_{4p} - (q_{11+} + M_+\phi_+)\eta_{1p}) + ikn_2(M_+\phi_+\eta_{5p} - (q_{22+}+\\
+M_+\phi_+)\eta_{2p}) - \alpha_p(M_+\phi_+\eta_{6p} - (q_{33+} + M_+\phi_+)\eta_{3p}))\exp(-\alpha_p h/2),\\
\zeta_{2,p} = -c_{44}(ikn_2\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{2p})\sin(\lambda_p h/2),\\
\zeta_{2,p+4} = -c_{44}^{(+)}(ikn_2\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{2p})\exp(-\alpha_p h/2),\\
\zeta_{3,p} = -c_{55}(ikn_1\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{1p})\sin(\lambda_p h/2),\\
\zeta_{3,p+4} = -c_{55}^{(+)}(ikn_1\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{1p})\exp(-\alpha_p h/2),\\
\zeta_{4,p} = -\beta_{1p}\cos(\lambda_p h/2), \quad \zeta_{4,p+4} = -\eta_{1p}\exp(-\alpha_p h/2),\\
\zeta_{5,p} = -\beta_{2p}\cos(\lambda_p h/2), \quad \zeta_{5,p+4} = -\eta_{2p}\exp(-\alpha_p h/2),\\
\zeta_{6,p} = -\beta_{3p}\sin(\lambda_p h/2), \quad \zeta_{6,p+4} = -\eta_{3p}\exp(-\alpha_p h/2),
\end{gathered} \tag{26}$$

$$\zeta_{7,p} = -\phi(\beta_{6p} - \beta_{3p})\sin(\lambda_p h/2), \quad \zeta_{7,p+4} = \phi_+(\eta_{6p} - \eta_{3p})\exp(-\alpha_p x_3),$$

$$\zeta_{8,p} = -(ikn_1(M\phi\beta_{4p} - (q_{11} + M\phi)\beta_{1p}) + ikn_2(M\phi\beta_{5p} - (q_{22} + M\phi)\beta_{2p})+$$
$$+\lambda_p(M\phi\beta_{6p} - (q_{33} + M\phi)\beta_{3p}))\cos(\lambda_p h/2),$$

$$\zeta_{8,p+4} = (ikn_1(M_+\phi_+\eta_{4p} - (q_{11+} + M_+\phi_+)\eta_{1p})+$$
$$+ikn_2(M_+\phi_+\eta_{5p} - (q_{22+} + M_+\phi_+)\eta_{2p})-$$
$$-\alpha_p(M_+\phi_+\eta_{6p} - (q_{33+} + M_+\phi_+)\eta_{3p}))\exp(-\alpha_p h/2).$$

Из соотношений (25), (26) в качестве конечного результата следует дисперсионное уравнение для рассматриваемых локализованных волн, записываемое в форме равенства нулю определителя матрицы системы алгебраических уравнений (25)

$$F(\omega, k) = \det\|\zeta_{qm}\| \quad (q, m = \overline{1,8}). \tag{27}$$

3. Вопросы качественного анализа дисперсионного соотношения. В вопросах качественного анализа топологических особенностей спектров локализованных волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств важную роль играет исследование возможных механизмов предельного асимптотического поведения в высокочастотном коротковолновом диапазоне для скоростей исследуемых волн по характеризуемым углом $0 \le \varphi \le \pi/2$ направлениям в координатной плоскости Ox_1x_2. При реализации подобного исследования в рассматриваемом диапазоне строятся зависимости от углового параметра для реальных частей скоростей двух продольных и одной сдвиговой объемных волн в каждом из материалов компонентов волновода [17, 18, 24], реальных частей скоростей волн Стоунли вдоль всех трех имеющихся контактных плоскостей пористо-упругих насыщенных ортотропных материалов [25], а также для реальных частей значений параметра фазовой скорости $v_D^{(p)}$, при которых характеристические полиномы уравнений волновой динамики для материалов компонентов волновода имеют кратные корни. Роль значений характеристик $v_D^{(p)}$ в описании закономерностей высокочастотной коротковолновой локализации нормальных волн для анизотропных волноводов исследована в работах [26, 27].

Далее для каждого анализируемого значения угловой переменной из описанного множества определяется минимальное и его тип указывает на вариант локализации, реализующийся для данного направления распространения.

Выводы. В результате проведенных исследований в рамках модели деформирования многокомпонентной среды Био построено численно-аналитическое решение задачи о распространении локализованных трехпарциальных волн деформаций воль произвольно ориентированного направления в плоскости водонасыщенного упруго-пористого ортотропного слоя, контактирующего по граням с вмещающими ортотропными полупространствами из разнотипных по физико-механическим свойствам насыщенных упруго-пористых материалов. Рассмотрен вариант идеального механического контакта на флюидопроницаемых плоскостях сопряжения компонентов волновода. Описана структура основных дисперсионных соотношений. Дана качественная характеристика особенностей механизмов асимптотического поведения скоростей исследуемых волновых движений в высокочастотном коротковолновом диапазоне при варьировании ориентации направления распространения.

1. *Городецкая Н.С.* Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью пористых средах // Акустичний вiсник. – 2007. – **10**, № 2. – С. 43–63.
2. *Ковтун А.А.* Об уравнениях модели Био и их модификациях // Учен. зап. СПбГУ. – 2011. – № 444. – С. 3–26.
3. *Nikolaevskij V.N.* Mechanics of porous and fractured media. – Singapore: World Scientific Publishers, 1990. – 472 p.
4. *Tolstoy I.* Acoustics, elasticity and thermodynamics of porous media: Twenty-one papers by M.A. Biot. – New-York: AIP Press, 1992. – 272 p.
5. *Wilmanski K.* Propagation of sound and surface waves in porous materials // WIAS-Preprint. – 2001. – № 684. – P. 1–12.
6. *De Boer R.* Theory of porous media. Highlights in historical development and current state. – Berlin: Springer, 2000. – 416 p.
7. *Молотков Л.А.* Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. – СПб.: Наука, 2001. – 348 с.
8. *Coussy O.* Poromechanics. – Stateplace New York: John Wiley & Sons, 2004. – 298 p.
9. *Allard J.F., Atalla N.* Propagation of Sound in Porous Media. 2nd ed. – Wiley, 2009. – 349 p.
10. *Ke L.L., Wang Y.S., Zhang Z.M.* Propagation of Love Waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with properties varying exponentially // Intern. J. of Geomechanics. – 2005. – V. 131 (12). – P. 1322–1328.
11. *Ghorai A.P., Samal S.K., Mahanti N.C.* Love waves in a fluid-saturated porous layer under a rigid boundary and lying over an elastic half-space under gravity // Appl. Math. Model. – 2010. – **34**. – P. 1873–1883.
12. *Kundu S., Gupta S., Majhi D.K.* Love wave propagation in porous rigid layer lying over an initially stressed half space // Appl. Phys.& Math. – 2013. – № 3 (2). – P. 140–142.
13. *Молотков Л.А.* Распространение волн в пористом слое Био с закрытыми порами на границах // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2008. – **354**. – С. 173–189.
14. *Молотков Л.А, Мухин А.А.* Исследование нормальных волн в пористом слое, окруженном упругой средой // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2009. – 369. – С. 127–142.
15. *Ковтун А.А.* Дисперсионные уравнения для пористого слоя Био между упругими полупространствами // Вопр. геофизики. Учен. зап. СПбГУ. – 2012. – № 445. – С. 17–34.
16. *Kumar S.* Propagation of SH-wave in a corrugated viscous sandy layer sandwiched between two elastic half-spaces // J. Waves in Random and Complex Media. – 2017. – **27**, Iss. 2. – P. 213–240.
17. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. II. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**, № 2. – P. 168–191.
18. *Biot M.A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – **34**, № 5. – Part I. – P. 1254–1264.
19. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. IV. Surface waves in a half-space // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1962. – **52**, № 3. – P. 627–638.

20. *Wendler L., Grigoryan V.G.* Acoustic interface waves in sandwich structures // Surface Science. – 1988. – **206**. – P. 203–224.
21. *Григорян В.Г., Вендлер Л.* Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. – 1991. – **33**, № 7. – С. 2120–2128.
22. *Ting T.C.T.* Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // Mathematics and mechanics of solids. – 2009. – **14**, № 1–2. – P. 52–71.
23. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Дисперсионные свойства локализованных упругих волн во вмещенном между ортотропными полупространствами ортотропном слое // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2015. – **29**. – С. 41–50.
24. *King M.S., Marsden J.R., Dennis J.W.* Biot dispersion for P- and S-wave velocities in partially and fully saturated sandstones // Geophys. Resch. – 2000. – **48**. – P. 1075–1089.
25. *Tang X.M., Cheng C.H., Toksoz M.N.* Dynamic permeability and borehole Stoneley waves: a simplified Biot-Rosenbaum model // J. Acoust. Soc. Amer. – 1991. – **90**, № 3. – P. 1632–1646.
26. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое // Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 116–121.
27. *Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // Акустический журнал. – 1996. – **42**, № 1. – С. 5–9.

V.G. Vyskub, I.A. Glukhov, V.I. Storozhev

Dispersion relations for localized waves of deformations in a water-saturated anisotropic layer between elastic half-spaces

A numerical-analytic solution of the problem of propagation of localized three-partial deformation waves in arbitrarily oriented direction in the plane of a saturated elastic-porous orthotropic layer contacting along the faces with the enclosing orthotropic half-spaces made of various elastic-porous materials is constructed. The general dispersion relation is obtained. A qualitative characteristic of the features of the asymptotic behavior of the velocities of the investigated wave motions in the high-frequency short-wave range for various orientation of the propagation direction is given.

Keywords: *layer between half-spaces, orthotropic saturated materials, modification of the Bio model, three-partial localized waves, transcendental dispersion equations, short-wave asymptotic of velocities.*

ФГБНУ "Научно-исслед. ин-т – Респуб. исслед. научно-консультац. центр экспертизы", Москва;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк;
ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
stvistvi@mail.ru

Получено 21.09.17