УДК 517.9

В. П. Бурский

УСЛОВИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предлагается условие физической локализации в следующей форме. Пусть $\mathcal{O}$-область, заполненная средой; u — характеристика процесса, которую будем называть амплитудой, f — внешние воздействия, которые назовем силами, и пусть уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$u'_t + Pu = f, \tag{1}$$

где $Pu = \Sigma a_{\alpha\beta\ldots\gamma} (D^\alpha u)^{k_\alpha} (D^\beta u)^{k_\beta} \cdot \ldots \cdot (D^\gamma u)^{k_\gamma}$ — полином от производных функции u, причем $P0 = 0$. Вместо (1) можно рассматривать уравнения $Pu = f$, $u''_{tt} - Pu = f$ или системы. Пусть Ω — любая подобласть с гладкой границей в $\mathcal{O}$, $\theta_\Omega = 1$ в Ω, $\theta_\Omega = 0$ вне Ω, $\theta_{\Omega,n} = \theta_\Omega \times \delta_n$, δ_n— δ—последовательность. Предлагается следующее условие: для каждого гладкого решения u уравнения (1) и каждой подобласти Ω существует

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

распределение $f_{\partial\Omega}$, $\operatorname{supp} f_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$ со свойством $(\partial/\partial t + P)(u\theta_{\Omega,n}) \xrightarrow{n\to\infty} f\theta_\Omega + f_{\partial\Omega}$ в $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$. Или просто: оператор P определен на скачках. Физически это означает, что для любой реальной амплитуды u и любой подобласти Ω существует силовая стена ($\exists f_{\partial\Omega}$, $\operatorname{supp} f_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$), не влияющая на процесс $u(x, t)$ и не выпускающая его из Ω. Доказано

Утверждение. Обыкновенный дифференциальный оператор удовлетворяет условию физической локализации тогда и только тогда, когда $Pu = \sum_{k,m} a_{km} (u^k)^{(m)}$.

В настоящей работе проводится доказательство утверждения, анонсированного в работе [1].

В различных задачах механики и физики мы часто встречаемся с ситуацией, когда физический процесс, протекающий в среде, допускает локализацию в любой подобласти в том смысле, что влияние внешних к подобласти процессов и сил можно заменить граничными силами (граничными условиями) так, чтобы внутри подобласти процесс протекал так, как если бы он протекал без такого вмешательства во всей области. В настоящей работе предлагается математическая формулировка физического принципа локализации и выясняется, какие уравнения удовлетворяют введенному условию в простейшем случае. Пусть $\mathscr{O}$ — область, заполненная средой; u — характеристика процесса, которую называем амплитудой; f — внешние воздействия, которые назовем силами, и пусть уравнение, описывающее процесс, имеет вид (t — время, $a_{\alpha\beta\ldots\gamma} \in C$)

$$u_t' + Pu = f, \tag{1}$$

где $Pu = \Sigma a_{\alpha\beta\ldots\gamma} (D^\alpha u)^{k_\alpha} (D^\beta u)^{k_\beta} \cdot \ldots \cdot (D^\gamma u)^{k_\gamma}$ — полином от производных функции u, причем $P0 = 0$. Вместо (1) можно рассматривать уравнения $Pu = f$, $u_{tt}'' - Pu = f$ или системы. Ясно, что если $u_n \to u_0$ в $C^\infty(\mathscr{O})$, то $Pu_n \to Pu_0$ в $C^\infty(\mathscr{O})$. Пусть Ω — любая подобласть с гладкой границей в $\mathscr{O}$, $\theta_\Omega = 1$ в Ω, $\theta_\Omega = 0$ вне Ω, $\theta_{\Omega,n} = \theta_\Omega * \delta_n$, δ_n — δ — последовательность. Предлагается следующее условие локализации:

для каждого гладкого решения уравнения (1) и каждой подобласти Ω существует распределение $f_{\partial\Omega}$, $\operatorname{supp} f_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$ со свойством $(\partial/\partial t + P) \times (u\cdot\theta_{\Omega,n}) \xrightarrow{n\to\infty} f\cdot\theta_\Omega + f_{\partial\Omega}$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$. (Л)

Или просто: Оператор P определен на скачках.

Физически это означает, что для любой подобласти Ω и малой окрестности V ее границы $\partial\Omega$, для любой амплитуды найдутся силы, ненулевые только в V такие, что соответствующая им амплитуда нулевая вне $\Omega \cup V$, а внутри $\Omega \setminus V$ амплитуда процесса та же, что и без вмешательства этих сил. Другими словами, существует силовая стена, не влияющая на процесс и не выпускающая его из Ω.

Нетрудно показать, что линейный оператор P удовлетворяет (Л).

Утверждение 1. Обыкновенный дифференциальный оператор P удовлетворяет условию (Л) тогда и только тогда, когда

$$Pu = \sum_{k,m} b_{km} (u^k)^{(m)}. \tag{2}$$

Доказательство. Мы рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$Pu = P[u] = \sum_\alpha a_\alpha u^{\alpha_0} (u')^{\alpha_1} (u'')^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (u^{(l)})^{\alpha_l} = Q_0(u, u', \ldots, u^{(l)}),$$

где Q_0 — полином, $a_\alpha \in C$. Здесь $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_l$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + l\alpha_l$, $\alpha! = \alpha_0! \cdot \ldots \cdot \alpha_l!$ Пусть $\chi \in X$ означает, что $\chi \in C^\infty(R)$ и что $\chi(x) = 0$ при $x \leqslant -1$, $\chi(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. Тогда, очевидно, $\frac{d}{dx}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \delta(x)$ в $\mathscr{D}'(R)$.

Запишем условие физической локализации в следующем виде:

$\forall u \in C^\infty(R)$, $\forall \chi \in X$ в пространстве $\mathcal{D}'(R)$ существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0} P\left[u(x)\,\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]$. (Л')

Д о с т а т о ч н о с т ь почти очевидна. Действительно, $\left(\theta_\Omega * \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^k \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \theta_\Omega$, поскольку $\theta_\Omega * \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta_\Omega$. Действие оператора $L_k = \sum_m b_{km}\left(\frac{d}{dx}\right)^m$ на произведение $v\cdot\theta_\Omega$ внутри области Ω сводится к действию на функцию v:

$$L_k[v\theta_\Omega] = \sum_\alpha b_{k\alpha} D^{\alpha-(v)}\partial_v(v\theta_\Omega) = \sum_\alpha b_{k\alpha} D^{\alpha-(v)}(\theta_\Omega\cdot\partial_v v + v\cdot\partial_v\theta_\Omega) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_\Omega \sum_\alpha b_{k\alpha} D^\alpha v + f_{\partial\Omega},$$

где $f_{\partial\Omega}$ — распределение с носителем на $\partial\Omega$.

В силу непрерывности линейного оператора L_k в пространстве $\mathcal{D}'(R)$ получаем выполнение условия (Л).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть выполнено условие (Л). Тогда для всякой функции $\psi \in C^\infty(R)$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_R P\left[\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\psi(x)\,dx.$$

В частности, для всякого $r \in Z_+ = N \cup \{0\}$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_R P\left[\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]x^r dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_\alpha \frac{a_\alpha}{\varepsilon^{\|\alpha\|}}\int_R\left(\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\left(\chi^{(l)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{\alpha_l} x^r dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_\alpha \frac{a_\alpha}{\varepsilon^{\|\alpha\|-1-r}}\int_R (\chi(y))^{\alpha_0}\cdot\ldots\cdot(\chi^{(l)}(y))^{\alpha_l} y^r dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_\alpha \frac{\widetilde{Q}_{\alpha r}}{\varepsilon^{\|\alpha\|-1-r}}.$$

Мы получаем, что при $\|\alpha\| > 1 + r$

$$\sum_{\|\alpha\|=n}\widetilde{Q}_{\alpha r} = 0, \quad \forall n, \ \forall \chi \in X. \tag{3}$$

Пусть сначала $r = 0$. Члены со свойством $\|\alpha\| \leqslant 1$ в $P[u]$ имеют вид $R_0(u) + R_1(u)\,u'$, где R_0 и R_1 — полиномы одной переменной, т. е. такие члены представляются в виде (2). Пусть

$$Q_{00}(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_l) := \sum_{\|\alpha\|\geqslant 2} a_\alpha \chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\chi_l^{\alpha_l}.$$

Мы имеем

$$\int_R Q_{00}(\chi, \chi', \chi'', \ldots, \chi^{(l)})\,dy = 0, \ \forall \chi \in X. \tag{4}$$

Воспользуемся следующей леммой

Лемма. Пусть $Q = \sum_\alpha a_\alpha x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_l^{\alpha_l}$ — полином со свойствами: $Q(x_0, 0, \ldots, 0) = 0$; $\forall \chi \in X$, $\int_R Q(\chi, \chi', \ldots, \chi^{(l)}(y))\,dy = 0$. Тогда существует полином $R(x_0, x_1, \ldots, x_{l-1})$ такой, что

$$Q(\chi, \chi', \ldots, \chi^{(l)}) = \frac{d}{dx}R(\chi, \chi', \ldots, \chi^{(l-1)}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Подставим в (4) вместо χ функцию $\chi + t\psi$, где $\psi \in C_0^\infty(R)$, $t \in R$. Дифференцируя по t и перебрасывая производные, получаем уравнение Эйлера — Лагранжа

$$Q'_{\chi}-\frac{d}{dy}Q'_{\chi'}+\frac{d^2}{dy^2}Q'_{\chi''}-\ldots+(-1)^l\frac{d^l}{dy^l}Q'_{\chi^{(l)}}=0.$$

Доказательство леммы завершается применением результатов работы [2] (см. также [3, 4]). Применяя эту лемму, мы получим, что существует полином $Q_1(x_0, x_1, \ldots, x_{l-1})$ со свойством

$$\forall u,\ Q_0(u, u', \ldots, u^{(l)})-R_0(u)-R_1(u)u'=\frac{d}{dx}Q_1(u, u', \ldots, u^{(l-1)}).$$

В полиноме $Q_1(u, u', \ldots, u^{(l-1)})$ выделим члены вида $R_2(u)u'$, которые дают добавку вида (2), остальные в $P[u]$ относятся к членам с $\|\alpha\|\geqslant 2$. Обозначим их $Q_{10}(u, u', \ldots, u^{(l-1)})=Q_1-R_2(u)u'$. Они удовлетворяют условию (3) с $r=1$, т. е.

$$\int\limits_R y\frac{d}{dy}Q_{10}(\chi, \chi', \ldots, \chi^{(l-1)}(y))\,dy=0.$$

Перебросим производные и убедимся, что выполнены условия леммы, применение которой дает существование полинома $Q_2(x_0, x_1, \ldots, x_{l-2})$ со свойством

$$\forall u,\ Q_0(u, u', \ldots, u^{(l)})-R_0(u)-R_1(u)u'-(R_2(u)u')'=$$
$$=\frac{d^2}{dy^2}Q_2(u, \ldots, u^{(l-2)}).$$

Раскладывая

$$Q_2=R_3(u)u'+Q_{20}(u, u', \ldots, u^{(l-2)}),$$

находим, что для слагаемых в Q_{20} $\|\alpha\|\geqslant 2$, поэтому члены в $\dfrac{d^2}{dx^2}Q_2$ имеют $\|\alpha\|\geqslant 4$ и можно опять воспользоваться соотношениями (3) с $r=2$.

Вообще, на k-м шаге мы имеем

$$Q(u, \ldots, u^{(l)})-R_0(u)-\sum_{\varkappa=1}^{k}(R_\varkappa(u)u')^{(\varkappa-1)}=\left(\frac{d}{dy}\right)^kQ_k(u, u', \ldots, u^{(l-k)}).$$

Раскладываем полином Q_k

$$Q_k=R_{k+1}(u)u'+Q_{k0}(u, u', \ldots, u^{(l-k)})$$

и получаем, что для слагаемых в Q_{k0} $\|\alpha\|\geqslant 2$, поэтому $\left(\dfrac{d}{dy}\right)^kQ_{k0}(u, u', \ldots$ $\ldots, u^{(l-k)})$ имеет $\|\alpha\|\geqslant 2+k$ и можно воспользоваться соотношениями (3) с $r=k$. Перебрасывая производные на y^k и пользуясь финитностью производных функции χ, получаем

$$\int\limits_R Q_k(\chi, \chi', \ldots, \chi^{(l-k)}(y))\,dy=0,\quad Q_k(x_0, 0, \ldots, 0)=0$$

и можно применять лемму.

Доказательство окончено.

Замечание. Переход ко многим переменным не является принципиально трудным и, фактически лишь усложняя приведенное доказательство, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Одинокое дифференциальное уравнение с оператором $Pu=\Sigma a_{\alpha\beta\ldots\gamma}(D^\alpha u)^{k_\alpha}(D^\beta u)^{k_\beta}\cdot\ldots\cdot(D^\gamma u)^{k_\gamma}$, $P0=0$ удовлетворяет условию (Л) тогда и только тогда, когда существуют линейные операторы $L_1, \ldots$ $\ldots, L_m$ такие, что

$$Pu=\sum_{k=1}^{m}L_k(u^k). \tag{5}$$

Заметим, что в случае системы уравнений условие заметно усложняется.

Примеры. 1. Оператор $(u')^2 + uu''$ условию (Л) удовлетворяет, а его слагаемые — нет.

2. Все известные нам физические уравнения условию (Л) удовлетворяют.

Многие важные уравнения, однако, содержат операторы, не имеющие вида (5). В уравнении Монжа — Ампера, например, амплитудой является кривизна поверхности, в уравнении Хопфа — энтропия. Для этих и других таких уравнений, как показано выше, не может быть выполнено условие физической локализации (Л).

1. *Бурский В. П.* Физическая локализация и нелинейные уравнения // Нелинейные задачи математической физики: Тез. докл. VI Респ. конф.— Донецк: ИПММ АН УССР, 1987.— С. 21.
2. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Асимптотика резольвенты Штурм — Лиувиллевских уравнений Кортевега—де Фриза // Усп. мат. наук.— 1975.— **30**, № 5.— С. 67—100.
3. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Резольвента и гамильтоновы системы // Функц. анализ и его приложения.— 1977.— **11**, № 2.— С. 11—27.
4. *Жаринов В. В.* Законы сохранения эволюционных систем // Теорет. и мат. физика.— 1986.— **68**, № 2.— С. 163—171.

Ин-т прикл. математики и
механики АН УССР, Донецк

Получено 25.10.89