УДК 531.38

©2019. **Н.Н. Щепин**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрена замкнутая система n гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими и телескопическими шарнирами в предположении отсутствия действия внешних сил и моментов. Данная система может служить конечномерной моделью упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости. Полагалось, что упругий момент в шарнирах существенно нелинеен. Определены и исследованы достаточные условия устойчивости для конфигурации типа “восьмерка”.

Ключевые слова: *система твердых тел, упругий шарнир, устойчивость положения равновесия, достаточные условия устойчивости.*

Введение. Использование системы n твердых тел, связанных упругими шарнирами, для моделирования колебаний балочных конструкций оказалось достаточно эффективным при изучении устойчивости их малых колебаний [1]. В работах [2, 3] показано, что конечномерные системы можно также использовать и в задачах механики стержневых систем, при этом учитывая прогибы значительной величины. Вид упругого момента применительно к данному классу задач был получен в работе [4].

Целью конечномерного подхода в указанных работах являлось как определение в явном виде известных форм равновесия оси стержня [2, 3], так и установление новых форм [5]. Для замкнутых форм оси упругого стержня были найдены конечномерные аналоги равновесных конфигураций систем n твердых тел, такие как “круговая”, “восьмерка” и “роза”. При этом решения уравнений равновесия системы были выписаны в элементарных функциях. Конечномерный подход позволил также определить достаточные условия устойчивости равновесных конфигураций системы, используя ее потенциальную энергию [6], и найти необходимые условия устойчивости, исходя из анализа уравнений движения системы [7].

Однако, как показывают экспериментальные исследования, учет только изгибных деформаций не дает полной картины поведения моделируемых объектов. В связи с этим, при исследовании равновесных конфигураций возникает задача учета других видов деформаций, таких как растяжение и сдвиг. Так, в работе [8] для случая замкнутой оси упругого стержня типа “восьмерка” были найдены равновесные конфигурации системы твердых тел с учетом растяжения. Учет упругих смещений в сочленениях был реализован с помощью телескопических шарниров. Следующим шагом при изучении поведения таких систем в окрестности найденных решений является изучение условий устойчивости установленных положений равновесия.

В настоящей работе получены достаточные условия устойчивости равновесной конфигурации системы тел типа “восьмерка” в случае учета растяжения и изгиба оси моделируемого стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему n гироскопов Лагранжа S_j. Пусть в точке P_j тела S_j установлен невесомый, упругий, телескопический шарнир, сонаправленный с осью симметрии тела S_j. В точке O_{j+1} тела S_{j+1} телескопический шарнир с помощью упругого цилиндрического шарнира соединяется с телом S_{j+1}. Точка O_{j+1} принадлежит оси симметрии тела S_{j+1}. На рис. 1 показана связка двух тел S_j и S_{j+1}. Полагаем, что оси симметрии $O_jP_j = h_j$ тел S_j $(j = \overline{1,n})$, лежат в одной плоскости OXZ, а оси всех цилиндрических шарниров, закрепленных в точках O_j, ей перпендикулярны.

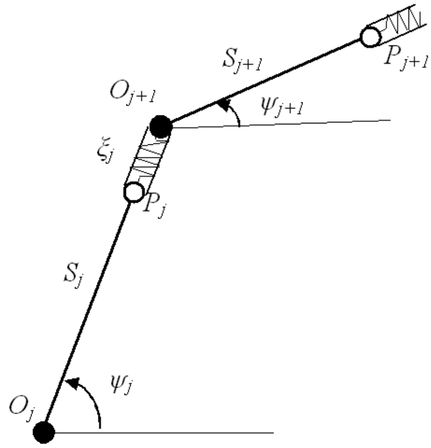

Рис. 1. Сочленение тел S_j и S_{j+1}.

Выражение для упругого момента получено в [4], и в случае, когда тела S_{j-1} и S_j связаны цилиндрическим шарниром, момент L_j равен

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где c^2 – жесткость на изгиб, ψ_j – угол поворота тела S_j вокруг оси $(j-1)$-го шарнира. Для замкнутых систем $(O_1 = O_{n+1})$ угол ψ_0 считаем равным ψ_n [8], т. е. $\psi_0 = \psi_n$.

Поскольку внешнее силовое поле отсутствует, то с учетом (1) потенциальная энергия системы имеет вид [8]

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^{n} \cos(\psi_j - \psi_{j-1}) + \frac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2, \tag{2}$$

где ξ_j – растяжение в j-ом телескопическом шарнире, k^2 – жесткость на растяжение.

Аналогично работе [8], для замкнутых систем выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} (h_j + \xi_j)\mathbf{e}_j^x = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{e}_j^x$ – единичный орт оси O_jP_j, составляющий угол ψ_j с осью OX. Поскольку $\mathbf{e}_j^x = \cos\psi_j \mathbf{e}^x + \sin\psi_j \mathbf{e}^z$ ($\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^z$ – соответственно орты осей OX и OZ), то из соотношения (3) имеем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы ψ_j и растяжения ξ_j:

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n}(h_j + \xi_j)\cos\psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^{n}(h_j + \xi_j)\sin\psi_j = 0. \tag{4}$$

Для систем с дополнительными нелинейными связями, наложенными на переменные, положения равновесия могут быть найдены из условия [9, 10] стационарности функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, т. е.

$$\delta L = \delta\Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \tag{5}$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа. Подставляя выражения (2), (4) в соотношение (5), получаем систему уравнений

$$c^2\big[\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})\big] = (h_j + \xi_j)(\lambda_2\cos\psi_j - \lambda_1\sin\psi_j), \quad j = \overline{1, n},$$
$$\psi_{n+1} = \psi_1, \qquad \psi_0 = \psi_n, \tag{6}$$

$$k^2\xi_j = -(\lambda_1\cos\psi_j + \lambda_2\sin\psi_j), \qquad j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

которая, вместе с равенствами (4), позволяет определить неизвестные величины решаемой задачи, а именно углы ψ_j и растяжения ξ_j, а также множители Лагранжа λ_1, λ_2. Как показано в [3], множители Лагранжа λ_1, λ_2 при этом играют роль реакций связей. Положение изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями является устойчивым [11] при минимуме функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, множители λ_1, λ_2 которой найдены из (6), (7). Таким образом, условия устойчивости положения равновесия выполняются в области

$$\delta^2 L = \delta^2\Pi + \lambda_1\delta^2 f_1 + \lambda_2\delta^2 f_2 > 0, \qquad \delta f_1 = 0, \qquad \delta f_2 = 0. \tag{8}$$

Пусть в возмущенном движении $\psi_j = \psi_j^0 + \varepsilon_j$, $\xi_j = \xi_j^0 + \nu_j$, где ψ_j^0, ξ_j^0 – решения уравнений равновесия (6), (7), а ε_j, ν_j – их малые возмущения. Тогда из (4) получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\nu_j\cos\psi_j^0 - \sum_{j=1}^{n}(h_j + \xi_j^0)\varepsilon_j\sin\psi_j^0 + ... = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\nu_j\sin\psi_j^0 + \sum_{j=1}^{n}(h_j + \xi_j^0)\varepsilon_j\cos\psi_j^0 + ... = 0. \tag{10}$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по переменным ε_j, ν_j.

Введем новые переменные $X_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}$. Учитывая (4) и полагая $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$, получим

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{j} X_i + \varepsilon_n, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = 0. \tag{11}$$

Из (9), (10) и (11) следует

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j \cos\psi_j^0 - \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} (h_j + \xi_j^0) \sin\psi_j^0 + ... = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j \sin\psi_j^0 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} (h_j + \xi_j^0) \cos\psi_j^0 + ... = 0. \tag{13}$$

Подстановка (2), (4) с учетом (5), (11) – (13) в (8) дает возможность определить $\delta^2 L = k^2 \delta^2 \widetilde{L}$ (знак “тильды” в дальнейшем опущен) в виде

$$\delta^2 L = \frac{\beta}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \cos(\psi_j^0 - \psi_{j-1}^0) X_j^2 + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0) \left(\sum_{j=1}^{n-1} X_j \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \nu_j^2 -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (h_j + \xi_j^0)(\mu_1 \cos\psi_j^0 + \mu_2 \sin\psi_j^0) \left(\sum_{i=1}^{j} X_i \right)^2 + \tag{14}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_2 \cos\psi_j^0 - \mu_1 \sin\psi_j^0) \nu_j \left(\sum_{i=1}^{j} X_i \right),$$

где $\beta = c^2/k^2$, $\mu_1 = \lambda_1/k^2$, $\mu_2 = \lambda_2/k^2$.

Для нахождения области выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия системы необходимо определить область положительной определенности квадратичной формы (14), количество независимых переменных которой уменьшается на две с учетом соотношений (12), (13).

2. Решение типа “восьмерка” в случае шести тел. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 2. Она представлена шестью телами. Фигура симметрична относительно оси OZ и длины осей симметрии тел O_iP_i $(i = \overline{1,6})$ равны

$$O_1P_1 = O_3P_3 = O_4P_4 = O_6P_6 = h_1, \qquad O_2P_2 = O_5P_5 = h_2.$$

В этом случае уравнения равновесия (6), (7) и уравнения связей (4) имеют следующее решение:

$$\psi_1 = \psi_3 = \varphi, \qquad \psi_2 = -\psi, \qquad \psi_4 = \psi_6 = \pi - \varphi, \qquad \psi_5 = \pi + \psi, \tag{15}$$

$$\xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6, \qquad \xi_2 = \xi_5, \qquad \lambda_1 = 0. \tag{16}$$

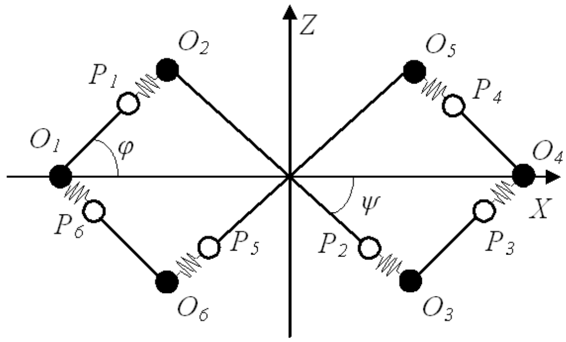

Рис. 2. Конфигурация типа “восьмерка” для шести тел.

Полагая $\xi_1 = h_1\widetilde{\xi_1}, \quad \xi_2 = h_2\widetilde{\xi_2}$ (знак “тильды” в дальнейшем опускаем), получим [8], что углы φ, ψ и растяжения ξ_1, ξ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\sin 2\varphi - \sin(\varphi + \psi)}{2\sin(\varphi + \psi)} = b\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}, \quad \sin\psi = 2b\sin\varphi, \quad \cos\psi = p\cos\varphi, \tag{17}$$

$$a(1 + \xi_1)/(1 + \xi_2) = b, \qquad a(\xi_1)/(\xi_2) = -1/2b, \tag{18}$$

где $a = h_1/h_2$, p и b – параметры. Сила реакции связи равна

$$\mu_2 = (h_2\xi_2)/\sin\psi. \tag{19}$$

В [8] проведен полный анализ условий (17), (18). В явном виде найдены значения углов φ, ψ и растяжений ξ_1, ξ_2 в зависимости от параметра b:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-p^2}{4b^2 - p^2}}, \ \sin\psi = 2b\sqrt{\frac{1-p^2}{4b^2-p^2}}, \ \xi_1 = \frac{b-a}{a(1+2b^2)}, \ \xi_2 = -2b\frac{b-a}{1+2b^2},$$

где $p = -2b + 1 + \sqrt{1-4b}$, а $b \in (0, (\sqrt{2}-1)/2)$.

3. Исследование устойчивости положения равновесия “восьмерки”. Для конфигурации “восьмерка” множитель λ_1 равен нулю, следовательно, $\mu_1 = 0$. Тогда (14) принимает вид

$$\delta^2 L = \frac{\beta}{2}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\cos(\psi_j^0 - \psi_{j-1}^0)X_j^2 + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0)\left(\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nu_j^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(h_j + \xi_j^0)\mu_2\sin\psi_j^0\left(\sum_{i=1}^{j}X_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\mu_2\cos\psi_j^0\nu_j\left(\sum_{i=1}^{j}X_i\right), \tag{20}$$

где множитель μ_2 определен в (19).

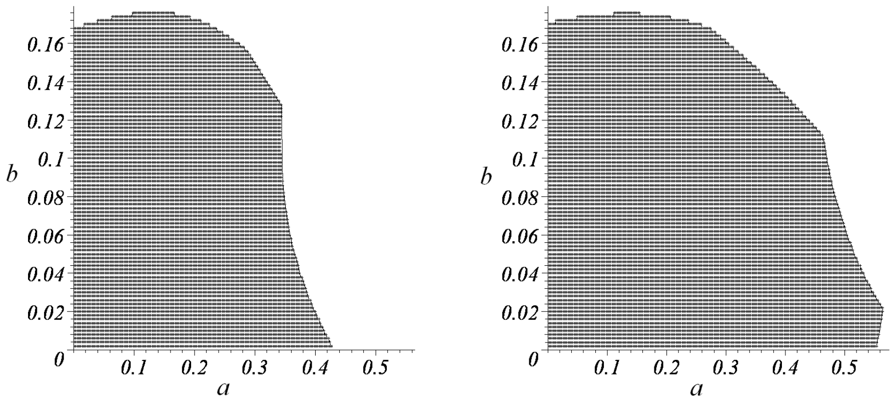

Рис. 3. Область выполнения достаточных условий при $\beta = 0.125$ и $\beta = 0.25$.

Полагая $\nu_i = h_1\widetilde{\nu}_i,\ i = 1,3,4,6;\ \nu_j = h_2\widetilde{\nu}_j,\ j = 2,5$ (знак “тильды” в дальнейшем опущен) и подставляя решения (15), (16) в (12), (13), с учетом (17) и (18) определяем, что X_2 и X_3 равны

$$X_2 = -\frac{\operatorname{ctg}\psi}{1+\xi_2}\Big(\frac{a}{p}(\nu_1+\nu_3-\nu_4-\nu_6)+\nu_2-\nu_5\Big)-\frac{1}{2}(X_1+X_4+2X_5),$$

$$X_3 = \frac{\operatorname{tg}\psi}{1+\xi_2}\Big(\frac{a}{2b}(\nu_1+\nu_3+\nu_4+\nu_6)-\nu_2-\nu_5\Big)+\frac{b}{p}X_1-\Big(1+\frac{b}{p}\Big)X_4-X_5.$$

После исключения этих переменных из (20) и подстановки (19) в (20), с помощью систем компьютерной алгебры получаем квадратичную форму девяти переменных X_1, X_4, X_5 и ν_i $(i=\overline{1,6})$, коэффициенты которой являются функциями параметров a, b и β.

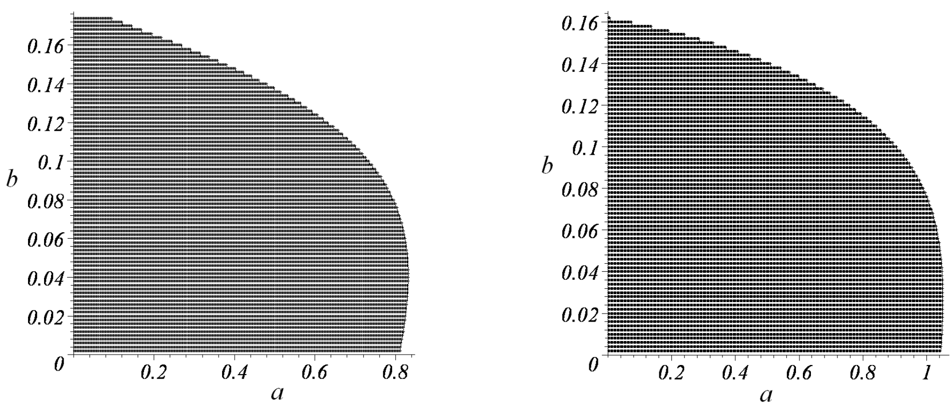

Рис. 4. Области выполнения достаточных условий при $\beta = 1$ и $\beta = 2$.

Эта квадратичная форма будет положительно определена при выполнении критерия Сильвестра $\Delta_i > 0,\ i = \overline{1,9}$, где Δ_i – i-ый главный минор матрицы квадратичной формы. Области выполнения условий $\Delta_i > 0$ для некоторых значений β представлены на рис. 3 и рис. 4.

Проведенные расчеты показывают, что область выполнения достаточных условий устойчивости решения (15), (16) при возрастании параметра β расширяется по a и сужается по b. При достаточно больших значениях β положительность Δ_i определяется знаком выражения $\cos 2\varphi$ и по параметру b область ограничена величиной 0.139372.

1. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.
2. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
3. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
4. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // Прикл. математика и механика. — 2014. – **78**, вып. 25. — С. 671–680.
5. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия упругих систем с двумя самопересечениями // Тр. ИПММ НАНУ. – 2008. – **16**. – С. 26–33.
6. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Достаточные условия устойчивости положения равновесия замкнутой системы тел // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 181–191.
7. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Необходимые условия устойчивости относительного равновесия замкнутой “круговой” системы // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 173–184.
8. *Щепин Н.Н.* Исследование положений равновесия замкнутой системы тел с учетом растяжения // Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 71–77.
9. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
10. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
11. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1976. – 534 с.

N.N. Shchepin

The analysis of sufficient stability conditions of equilibrium position of the closed multybody system

The closed system of n Lagrange gyroscopes connected with elastic cylindrical and telescopic joints, is considered in this paper in supposition of the lack of exterior forces and moments. Such system can serve as a finite-dimensional model of the elastic rod with plane axis. It was supposed, that the elastic moment in joints is essentially nonlinear. Sufficient conditions of stability for an “eight” configuration are obtained and stydied .

Keywords: *system of rigid bodies, stability of equilibrium position, sufficient conditions of stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк Получено 10.06.2019

shchepin_nick@mail.ru