УДК 517.95

В. В. Курта

О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В неограниченной области G, геометрия которой характеризуется тем, что

$$G \subset \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n,\ \infty > T > t > -\varphi(|x|)\}, \quad n \geqslant 1,$$

где $\varphi(s)$ — непрерывная монотонно не убывающая функция, рассматриваются растущие на бесконечности классические решения для общих линейных параболических уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой, растущими на бесконечности, вообще говоря, негладкими коэффициентами, удовлетворяющие нулевому граничному условию Дирихле на параболической части границы G.

Выделены зависящие от образующей $\varphi(s)$ классы единственности таких решений, которые в случае $\varphi(s) = \mathrm{const}$ аналогичны хорошо известному в теории дифференциальных уравнений классу А. Н. Тихонова для уравнения теплопроводности. Установлено, что при достаточно медленном росте (дается оценка предельной скорости роста) образующей $\varphi(s)$ единственность есть в более широких классах, аналогичных классу С. Тэклинда.

Пусть $\varphi(s)$ — произвольная непрерывная монотонно не убывающая на $\mathbb{R}^1_+$ функция такая, что $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\ \varphi(s)/s^2 = 0$. Обозначим через G произвольную неограниченную область, лежащую в слое $Q \subset \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n,\ \infty > T > t > -\varphi(|x|)\}$, $n \geqslant 1$, с границей $\partial G = \Omega_T \cup \gamma$. Здесь $\Omega_T = \{(x, t) \in \partial G,\ t = T\}$, а γ является кусочно-гладкой гиперповерхностью.

Отметим, что множество Ω_T может, вообще говоря, оказаться пустым.

Рассмотрим в $G_T = G \cup \Omega_T$ линейный параболический оператор второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)\, u - \frac{\partial u}{\partial t}$$

с измеримыми коэффициентами и неотрицательной квадратичной формой

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0$$

для $\forall (x,t)\in G_T$ и $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\in \mathbb{R}^n$.

В области G_T будем рассматривать решения $u(x,t)$ уравнения

$$Lu(x,t) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющие нулевому граничному условию Дирихле на параболической части γ границы G:

$$u(x,t)|_\gamma = 0 \tag{2}$$

Впервые вопросы зависимости класса единственности решений граничной задачи для уравнений параболического типа от образующей $\varphi(s)$ были рассмотрены (в случае уравнения теплопроводности и $\varphi(s) = -As^2$, $A > 0$) в 1935 г. А. Н. Тихоновым [1]. Изучению проблем, возникающих в связи с этой работой, а также обобщению и развитию ее результатов посвящены многочисленные исследования.

Так, для общих дивергентных параболических уравнений второго порядка зависимость классов единственности от образующей $\varphi(s)$ прослежена в [2]. С другой стороны, в работах [3, 4] найден обобщенный класс Тихонова — Тэклинда быстро растущих функций, обеспечивающий единственность классических решений задачи Коши, рассматриваемой в полосе Q при $\varphi(s) = \mathrm{const}$, для общих линейных параболических уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой и с коэффициентами, могущими быть неограниченными.

В настоящей работе выделены зависящие от образующей $\varphi(s)$ классы единственности решений граничной задачи (1)—(2) (ср. [2]), являющиеся аналогами обобщенных классов Тихонова — Тэклинда из [3—4].

Теорема. Пусть в G_T существует решение граничной задачи (1)—(2) такое, что

$$u(x,t)\in \mathbb{C}^{2;1}_{x;t}(G_T) \wedge \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Пусть также существуют монотонно не убывающие на $\mathbb{R}^1_+$ функции $h(s)$ и $\alpha(s)$ такие, что

1) функция $\psi(s) = \dfrac{s^2 h(s)}{\varphi(s)\,\alpha(s)}$ монотонно не убывает на $\mathbb{R}^1_+$;

2) для любого неотрицательного числа a существует $b \geqslant a$:

$$\frac{4-e}{256}\int_a^b \frac{\varphi(s)}{sh(s)}\,ds \geqslant \varphi(b) + T; \tag{3}$$

3)

$$\int^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2 h(s)}{\varphi(s)\,\alpha(s)}\right)\frac{ds}{s} < \infty. \tag{4}$$

Если к тому же

$$\sup_{\substack{(y,t)\in G\\ |y|\leqslant|x|}}\ \max_{|\xi|=1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y,t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \alpha(|x|),$$

$$\sup_{\substack{(y,t)\in G\\ |y|\leqslant|x|}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2(y,t)\right)^{1/2} \leqslant \frac{8}{e}\,\frac{|x|\,h(|x|)}{\varphi(|x|)}, \tag{5}$$

$$c(x,t)\leqslant 0$$

и существует $B > 0$, что

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left\{\frac{|x|^2 h(|x|)}{\varphi(|x|)\,\alpha(|x|)}\right\} \tag{6}$$

для $\forall (x,t) \in \overline{G}$, то

$$u(x,t) \equiv 0 \tag{7}$$

в G.

В основе доказательства теоремы лежит метод барьерных функций (см. [3—5]).

Замечание. В случае $\varphi(s) = \mathrm{const}$ утверждение теоремы является частным случаем теоремы 1 из [4].

Приведем два примера, позволяющие проследить зависимость выбора функции $h(s)$, определяющей класс единственности решений соответствующей граничной задачи Дирихле, рассматриваемой в области G, от образующей $\varphi(s)$.

Пример 1. Пусть $\varphi(s) \sim s^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, т. е. $c_1 s^\alpha \leqslant \varphi(s) \leqslant c_2 s^\alpha$ для $s \geqslant 0$ и $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$. Тогда для того, чтобы $h(s)$ удовлетворяла условию теоремы, необходимо выполнение неравенства

$$\varlimsup_{s\to\infty} h(s) = \mathrm{const} < \infty.$$

Для образующих $\varphi(s)$, растущих медленнее степенной функции, наряду с аналогом класса единственности А. Н. Тихонова ($h(s) \leqslant \mathrm{const}$), действительно появляется некоторый более широкий класс.

Пример 2. Для образующей $\varphi(s) = \exp((\ln s)^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ предельной функцией, образующей самый широкий класс единственности решений задачи (1)—(2), является $h(s) = c(\ln s)^{1-\alpha}$ с некоторой $c > 0$.

Доказательство теоремы. Пусть (x_0, t_0) — произвольная фиксированная точка из области G и $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Для доказательства тождества (7) достаточно установить, что

$$|u(x_0, t_0)| < \varepsilon. \tag{8}$$

В силу (4) для фиксированного нами числа $\varepsilon > 0$ $\exists$ $k(\varepsilon) \in N$ такое, что

$$\sum_{k=k(\varepsilon)}^{\infty} \exp\left(-4^k \frac{h(2^k)}{\varphi(2^k)\,\alpha(2^k)}\right) < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Для фиксированной точки $(x_0, t_0) \in G$ выберем $k_0 > k(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$|x_0| < 2^{k_0-1}, \quad \psi(2^{k_0}) > \frac{e}{8} n \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \exp\left(-4^k \frac{h(2^k)}{\varphi(2^k)}\right) < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{10}$$

В соответствии с (3) выберем такое m, чтобы

$$T_1 \geqslant \frac{4-e}{256} \sum_{i=0}^{m-k_0} \frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})} \geqslant \varphi(2^m) + T > \frac{4-e}{256} \sum_{i=0}^{m-k_0-1} \frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}. \tag{11}$$

Всюду ниже

$$K(\rho;\ \tau_1, \tau_2) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| < \rho;\ \tau_1 < \tau < \tau_2\}$$

и

$$K(m-k) = K\left(2^{m-k};\ -\varphi(2^m) + \frac{4-e}{256} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}, T_1\right);$$

$$Ц\,(m-k) = K\left(2^{m-k-1};\ -\varphi(2^m),\ -\varphi(2^m) + \frac{4-e}{256}\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}\right);$$

$$П\,(m-k) = K\,(m-k) \cap Ц\,(m-k);$$

$$KG\,(m-k) = K\,(m-k) \cap G_T;$$

$$ЦG\,(m-k) = Ц\,(m-k) \cap G_T;$$

$$ПG\,(m-k) = П\,(m-k) \cap G_T.$$

Для доказательства соотношения (8) установим, что при тех k, $0 \leqslant k \leqslant m - k_0$, при которых $Ц\,(m-k) \cap G_T \neq \varnothing$ в теле $ЦG\,(m-k)$, справедливо неравенство

$$|u(x,t)| \leqslant B\sum_{i=0}^{k}\exp\left(-4^{m-i}\frac{h(2^{m-i})}{\varphi(2^{m-i})\,\alpha(2^{m-i})}\right) = B(k). \qquad (12)$$

Для этого в $K\,(m-k)$, $k = 0, 1, \ldots, m-k_0$ введем «квазипараболическую» норму

$$z\,(m-k) = \left\{\tau + \varphi(2^m) - \frac{4-e}{256}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})} + \frac{e}{64}\,\frac{\varphi(2^{m-k})\,|x|^2}{h(2^{m-k})\,4^{m-k}}\right\}^{1/2} \qquad (13)$$

и функцию

$$V_{m-k}(x,t) = B\exp\left(\frac{4^{m-k}h(2^{m-k})}{\varphi(2^{m-k})\,\alpha(2^{m-k})}\right)\exp\left\{-2\,\frac{4^{m-k}h(2^{m-k})}{\varphi(2^{m-k})\,\alpha(2^{m-k})}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{e\varphi(2^{m-k})}{64h(2^{m-k})\,z^2(m-k)}\right\} + B(k-1), \qquad (14)$$

если

$$(x,\ t) \in K\,(m-k) \diagdown \left\{0,\ -\varphi(2^m) + \frac{4-e}{256}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}\right\}$$

и $V_{m-k}(x,t) = B\,(k-1)$ в точке

$$(x,\ t) = \left(0,\ -\varphi(2^m) + \frac{4-e}{256}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}\right).$$

Здесь $B(-1) \equiv 0$.

Лемма 1. Функции $V_{m-k}(x,t)$ при $0 \leqslant k \leqslant m-k_0$ суперпараболичны в цилиндре $KG\,(m-k)$, если $KG\,(m-k) \neq \varnothing$.

Доказательство леммы 1. В самом деле, $V_{m-k}(x,t) \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(K\,(m-k)) \wedge \mathrm{C}\,(\overline{K}\,(m-k))$ и в цилиндре $KG\,(m-k)$

$$LV_{m-k}(x,t) = \frac{2\cdot 4^{m-k}h(2^{m-k})}{\varphi(2^{m-k})\,\alpha(2^{m-k})}\,\frac{V_{m-k}(x,t)}{z^2(m-k)}\left\{\frac{e}{8}\,\frac{e}{64}\,\frac{\varphi(2^{m-k})}{h(2^{m-k})}\times\right.$$

$$\times\frac{|x|^2}{4^{m-k}z^2(m-k)}\,\frac{1}{\alpha(2^{m-k})}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{x_i}{|x|}\,\frac{x_j}{|x|} - \left(\frac{e\varphi(2^{m-k})\,|x|}{32h(2^{m-k})\,(4^{m-k})z\,(m-k)}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{x_i}{|x|}\,\frac{x_j}{|x|} + \frac{e}{32}\,\frac{\varphi(2^{m-k})}{h(2^{m-k})\,4^{m-k}}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x,t) + \frac{e}{32}\,\frac{\varphi(2^{m-k})\,|x|}{h(2^{m-k})\,4^{m-k}}\times$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,\frac{x_i}{|x|} + \frac{\alpha(2^{m-k})\,\varphi(2^{m-k})}{2\cdot 4^{m-k}h(2^{m-k})}\,z^2(m-k)\,c(x,t) - 1\right\}.$$

А поскольку в $KG(m-k)$

$$\frac{e}{64}\,\frac{\varphi(2^{m-k})}{4^{m-k}h(2^{m-k})}\,|x|^2 \leqslant z^2(m-k);$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x,t) \leqslant n\alpha(2^{m-k});$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{x_i}{|x|}\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,t)\right)^{1/2},$$

то соотношения (5) и (9) влекут

$$LV_{m-k}(x,t) < 0 \tag{15}$$

для $\forall (x,t) \in KG(m-k)$.

Пусть далее

$$\pi(\nu 2^{m-k}) = \left\{(x,t)\in K(m-k);\ z(m-k) < \left(\frac{\nu\varphi(2^{m-k})}{64h(2^{m-k})}\right)^{1/2}\right\};$$

$$\pi G(\nu 2^{m-k}) = \pi(\nu 2^{m-k}) \cap G_T;$$

$$\Gamma(\nu 2^{m-k}) = \left\{(x,t)\in \bar{\pi}(\nu 2^{m-k});\ z(m-k) = \left(\frac{\nu\varphi(2^{m-k})}{64h(2^{m-k})}\right)^{1/2}\right\};$$

$$\gamma(\nu 2^{m-k}) = \{(x,t)\in \bar{\pi}(\nu 2^{m-k}) \cap \gamma\};$$

$$\delta(\nu 2^{m-k}) = \left\{(x,t)\in \bar{\pi}(\nu 2^{m-k});\ t = -\varphi(2^m) + \frac{4-e}{256}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varphi(2^{m-i})}{h(2^{m-i})}\right\};$$

$$\Gamma G(\nu 2^{m-k}) = \Gamma(\nu 2^{m-k}) \cap G_T;$$

$$\delta G(\nu 2^{m-k}) = \delta(\nu 2^{m-k}) \cap G.$$

Лемма 2. При $0 \leqslant k \leqslant m-k_0$

$$B(k-1) \leqslant V_{m-k}(x,t) \leqslant B\exp\left\{\frac{4^{m-k}h(2^{m-k})}{\alpha(2^{m-k})\,\varphi(2^{m-k})}\right\} + B(k-1)$$

в теле $\bar{\pi}(e2^{m-k})$ и

$$B(k-1) \leqslant V_{m-k}(x,t) \leqslant B(k) \tag{16}$$

в теле $\pi(2^{m-k})$.

Доказательство леммы 2. Из соотношений (13) и (14) непосредственно следует, что при любом фиксированном x, $|x| < 2^{m-k}$, $V_{m-k}(x,\cdot)$ как функция от t монотонно возрастает в теле $\pi(e2^{m-k})$.

С другой стороны, любая гиперповерхность, задаваемая уравнением $z(m-k) = \left(\frac{\nu\varphi(2^{m-k})}{64h(2^{m-k})}\right)^{1/2}$, $\nu \in (0, e)$ является поверхностью уровня для барьера (14) в теле $\pi(e2^{m-k})$. Причем

$$V_{m-k}(x,t) = B\exp\left\{\frac{4^{m-k}h(2^{m-k})}{\alpha(2^{m-k})\,\varphi(2^{m-k})}\right\} + B(k-1)$$

для $\forall (x,t) \in \Gamma(e2^{m-k})$ и

$$V_{m-k}(x,t) = B(k)$$

для $\forall (x,t) \in \Gamma(2^{m-k})$.

Из этих рассуждений непосредственно следуют утверждения леммы 2.

Итак, пусть $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_j \leqslant \ldots m-k_0$ все k, при которых $\Pi G(m-k) \neq \varnothing$.

Проверим справедливость неравенства (12) при $k=k_1$. Для этого докажем, что в теле $\overline{\pi G}(e2^{m-k_1})$

$$|u(x,t)| \leqslant V_{m-k_1}(x,t). \tag{17}$$

С этой целью установим справедливость оценки (17) на собственной границе $\pi G(e2^{m-k_1})$. Кстати, отметим, что $\delta G(e2^{m-k_1}) = \varnothing$, иначе $\Pi(m-k_1+1) \cap G_T \neq \varnothing$. Последнее противоречит выбору k_1. Поскольку $V_{m-k_1}(x,t)$ определена и неотрицательна в $K(m-k_1)$, а

$$u(x,t)|_{\gamma} = 0,$$

то

$$|u(x,t)|\,|_{\gamma(e2^{m-k_1})} \leqslant V_{m-k_1}(x,t)|_{\gamma(e2^{m-k_1})},$$

если, конечно, $\gamma(e2^{m-k_1}) \neq \varnothing$.

С другой стороны, тело $\pi(e2^{m-k_1})$ лежит в $K(m-k_1)$ и, следовательно, из условия монотонности функции $\varphi(s)$ следует, что для $(x,t) \in \pi G(e2^{m-k_1})$

$$|u(x,t)| \leqslant B\exp\left\{\frac{|x|^{2h(|x|)}}{\alpha(|x|)\varphi(|x|)}\right\} \leqslant B\exp\left\{\frac{4^{m-k_1}}{\alpha(2^{m-k_1})} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{h(2^{m-k_1})}{\varphi(2^{m-k_1})}\right\} \leqslant V_{m-k_1}(x,t)|_{\gamma(e2^{m-k_1})},$$

а значит,

$$|u(x,t)|\,|_{\Gamma G(e2^{m-k_1})} \leqslant V_{m-k_1}(x,t)|_{\Gamma G(e2^{m-k_1})},$$

если $\Gamma G(e2^{m-k_1}) \neq \varnothing$.

Таким образом, $V_{m-k_1}(x,t) \pm u(x,t) \geqslant 0$ на собственной части $\partial\pi G(e2^{m-k_1})$ и, значит, в силу слабого принципа экстремума, справедливого для параболического оператора второго порядка с неотрицательной характеристической формой

$$|u(x,t)| \leqslant V_{m-k_1}(x,t)$$

для $\forall (x,t) \in \pi G(e2^{m-k_1})$.

Далее из леммы 2 следует, что

$$|u(x,t)| \leqslant B(k_1) \tag{18}$$

в теле $\overline{\pi G}(2^{m-k_1})$, а поскольку $ЦG(m-k_1) = \Pi G(m-k_1)$ и $\overline{\Pi G}(m-k_1) \subset \overline{\pi G}(2^{m-k_1})$, то оценка (18) справедлива и в $\overline{ЦG}(m-k_1)$.

Если $k_2 - k_1 > 1$, то доказательство формулы (12) при $k=k_2$ полностью совпадает с предыдущим, поскольку здесь снова $\delta G(e2^{m-k_2}) = \varnothing$. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда $k_2 = k_1 + 1$.

Как и раньше, установим вначале справедливость неравенства

$$|u(x,t)| \leqslant V_{m-k_2}(x,t) \tag{19}$$

в теле $\pi G(e2^{m-k_2})$.

Поскольку, из леммы 1 следует, что $V_{m-k_2}(x,t) \pm u(x,t)$ суперпараболична в $KG(m-k_2)$ и непрерывна в $\overline{KG}(m-k_2)$, то для доказательства справедливости (19) достаточно проверить его справедливость на собственной части $\partial\pi G(e2^{m-k_2})$.

Заметим, что $\delta G(e2^{m-k_2}) \neq \varnothing$ и принадлежит верхней крышке $ЦG(m-k_1)$ и, значит, из соотношения (18) и свойств функции $V_{m-k_2}(x,t)$ имеем

$$|u(x,t)|\,|_{\delta G(e2^{m-k_2})} \leqslant B(k_1) \leqslant V_{m-k_2}(x,t)|_{\delta G(e2^{m-k_2})} \tag{20}$$

и

$$0 = |u(x,t)|\,|_{\gamma(e2^{m-k_2})} \leqslant V_{m-k_2}(x,t)|_{\gamma(e2^{m-k_2})}, \tag{21}$$

если $\gamma(e2^{m-k_2}) = \varnothing$.

Далее, поскольку тело $\pi(e2^{m-k_2})$ лежит в $K(m-k_2)$, то

$$|u(x,t)| \leqslant B\exp\left\{\frac{|x|^2 h(|x|)}{\alpha(|x|)\varphi(|x|)}\right\} \leqslant B\exp\left\{\frac{4^{m-k_2}}{\alpha(2^{m-k_2})}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{h(2^{m-k_2})}{\varphi(2^{m-k_2})}\right\} \leqslant V_{m-k_2}(x,t)|_{\Gamma(e2^{m-k_2})},$$

а поэтому

$$|u(x,t)||_{\Gamma G(e2^{m-k_2})} \leqslant V_{m-k_2}(x,t)|_{\Gamma G(e2^{m-k_2})}, \tag{22}$$

естественно, если $\Gamma G(e2^{m-k_2}) \neq \varnothing$.

Следовательно, $V_{m-k_2}(x,t) \pm u(x,t) \geqslant 0$ на собственной границе тела $\pi G(e2^{m-k_2})$. И, значит, в силу слабого принципа экстремума для суперпараболических в $\pi G(e2^{m-k_2})$ и непрерывных в $\overline{\pi G}(e2^{m-k_2})$ функций $V_{m-k_2}(x,t) \pm u(x,t)$ имеем

$$|u(x,t)| \leqslant V_{m-k_2}(x,t)$$

для $\forall (x,t) \in \overline{\pi G}(e2^{m-k_2})$.

Отсюда и из леммы 2 выводим оценку

$$|u(x,t)| \leqslant B(k_2) \tag{23}$$

в теле $\overline{\pi G}(2^{m-k_2})$.

Поскольку $\overline{\Pi G}(m-k_2) \subset \overline{\pi G}(2^{m-k_2})$, то (18) и (23) влекут справедливость неравенства (23) в $\overline{ЦG}(m-k_2)$.

Далее на основании оценки (23) в теле $ЦG(m-k_2)$ аналогично предыдущему устанавливается неравенство (12) при $k=k_3$ и так далее вплоть до $k=m-k_0$.

Следовательно, в соответствии с (10)

$$|u(x,t)| \leqslant B\sum_{i=0}^{m-k_0}\exp\left\{-\frac{4^{m-i}h(2^{m-i})}{\alpha(2^{m-i})\varphi(2^{m-i})}\right\} < \varepsilon$$

для $\forall (x,t) \in \overline{ЦG}(k_0)$.

Ввиду того что $(x_0,t_0) \in ЦG(k_0)$ из предыдущего неравенства получаем оценку

$$|u(x_0,t_0)| < \varepsilon,$$

завершающую доказательство.

1. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб.— 1935.— **42**, № 2.— С. 199—216.
2. *Шишков А. Е.* Классы единственности решений смешанных систем для параболических уравнений в нецилиндрических областях // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 11.— С. 35—37.
3. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* Об априорных оценках решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи нижней крышки параболической границы // Сиб. мат. журн.— 1981.— **22**, № 4.— С. 94—113.
4. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* О проблеме Тихонова—Петровского для параболических уравнений 2-го порядка // Там же.— С. 78—109.
5. *Смирнова Г. Н.* Задача Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности // Мат. сб.— 1966.— **70**, № 4.— С. 591—604.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк

Получено 24.09.89