

УДК 517.946

©2008. В.А. Маркашева

ЛОКАЛЬНАЯ ГЁЛЬДЕРОВОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА БАОУЕНДИ-ГРУШИНА. ЧАСТЬ 2

В работе изучается свойство регулярности решений вырождающегося параболического уравнения с нелинейным оператором типа Баоуенди-Грушина. Установлено свойство локальной гёльдеровости решений.

Введение. Исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\lambda, \alpha}[u] = \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u), (x, y, t) \in S_T = R^{N+M} \times (0, T). \quad (1.1)$$

Здесь $\lambda > 1$, а $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_M)$, $N \geq 1$, $M \geq 1$ – произвольные точки евклидовых пространств R^N и R^M , соответственно. $z = (x, y) = (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M)$, $z \in R^{N+M}$. Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right). \quad (1.2)$$

Далее,

$$|D_L u| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + |x|^{2\alpha} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)^2},$$

$$\operatorname{div}_L \vec{F}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^M \frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}.$$

Если $\alpha = 0$, то при условии $\lambda > 1$ ([7]) уравнение (1.1) описывает процесс с медленной диффузией. Операторы типа $L_{1, \alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$, где символ Δ означает оператор Лапласа, впервые исследовались в работах [1] и [6]. В работах [3] и [4] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda, \alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) (см. также [5] и имеющуюся там литературу).

Цель данной работы – доказать локальную гёльдеровость решений уравнения (1.1). Прежде, чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем необходимые понятия. Однородное расстояние для пространственных переменных $d(z, 0) = d((x, y), (0, 0)) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2 |y|^2)^{1/2(\alpha+1)}$. В качестве шаров используем $B_\rho(z') = \{z \in R^{N+M} : d(z - z', 0) \leq \rho\}$. $Q = N + (\alpha+1)M$ – однородная размерность в пространствах Карно-Каратеодори (см. [6]). B_ρ является естественным расширением понятия шара в пространствах Карно-Каратеодори.

Пусть $t > 0, R > 0$ – произвольные фиксированные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слабым решением уравнения (1.1) будем называть неотрицательную измеримую на $S_T = R^{N+M} \times (0, T)$ функцию

$$u(x, y, t) \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \equiv L_{\lambda+1}(t, T; \mathfrak{L}_{1,\lambda+1,loc}(R^{M+N})) \cap C(t, T; L_{2,loc}(R^{M+N})),$$

при каждом $t > 0$ удовлетворяющую интегральному тождеству :

$$\int_{B_R} u(z, \tau) \eta(z, \tau) dz \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R} \{-u \eta_\tau + (|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) D_L \eta\} dz d\tau = 0, \quad (1.3)$$

для всех $\eta(x, y, t) \in C(t, T; \mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(B_R)) \cap L_2(B_R \times (t, T))$ и для всех $t_1, t_2 : 0 < t_1 \leq t_2 \leq T$.

Основным результатом статьи является теорема вложения:

Теорема 5.3. Пусть $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \cap L_{\infty,loc}(S_T)$ – слабое решение уравнения (1.1). Тогда $u(z, t)$ – локально гёльдерово на S_T и для любого компакта $K \subset S_T$ существуют постоянные $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ и $C(\bar{\alpha})$, зависящие только от параметров задачи и $\text{diam} K$, такие что

$$|u(z_1, t_1) - u(z_2, t_2)| \leq C(\bar{\alpha}) (d^{\bar{\alpha}}(z_1, z_2) + |t_1 - t_2|^{\frac{\bar{\alpha}}{\lambda+1}}). \quad (1.4)$$

Содержание теоремы 5.3 является естественным обобщением результатов работы [2], где изучался случай $\alpha = 0$. Доказательство теоремы 5.3 приводится подходом работы [2], где существенно используются также идеи работы [5].

Статья разделена на 2 части. В первую часть входят разделы 1 и 2. Во вторую часть входят разделы 3, 4 и 5. Структура статьи такова: в первом разделе описывается класс функций $\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, для $\lambda > 1$, и доказывается, что если слабое решение уравнения (1.1) из $L_{\infty,loc}(S_T)$, то принадлежит классу функций $\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, второй раздел содержит предварительные пояснения и обозначения, а также вспомогательные утверждения, на основании которых строится доказательство альтернатив и основного результата, разделы 3 и 4 доказывают соответственно первую и вторую альтернативы, а в пятом разделе приводится доказательство теоремы 5.3 при помощи альтернатив. Доказательства третьего, четвертого и пятого разделов используют лишь принадлежность функции классу $\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$.

На протяжении всей работы символами $C, C_{i,j}$ будем обозначать различные положительные константы, зависящие лишь от параметров $\lambda, N, M, \bar{\alpha}, \alpha$. Индексы i, j означают, что эта константа впервые появляется в выражении (i, j) . Нумерация сквозная.

Продолжим доказательство теоремы 5.3.

3. Первая альтернатива.

Лемма 3.1. Существует $\alpha_0 \in (0, 1)$, не зависящее от w, R, s^* , такое, что если для некоторого $\bar{t} : \bar{t} \leq t_0, \bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}$, найдется цилиндр $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t}) = S_R^{s_0}$,

для которого справедлива оценка

$$\left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \alpha_0 |S_R^{s_0}|, \quad (3.1)$$

то либо

$$w < 2^{s_0} R^\varepsilon$$

для некоторого произвольного $\varepsilon : 0 < \varepsilon < (\lambda + 1)/(\lambda - 1)$, либо

$$u(z, t) > \mu^- + w/2^{s_0+1} \quad (3.2)$$

для всех $(z, t) \in S_{R/2}^{s_0}$.

Доказательство леммы. Если первое утверждение неверно и $w \geq 2^{s_0} R^\varepsilon$, тогда цилиндр $S_R^{s_0}$ компактно вложен в цилиндр $S_R^\varepsilon = B_R \times (t_0 - R^{\lambda+1-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0)$. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, то удовлетворяет первым двум условиям леммы 2.7. Положив $s = s_0, \theta = \theta_0, \rho = R, t = \bar{t}$, рассмотрим условие (2.7)

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}-\theta\rho^{\lambda+1}}^{\bar{t}} \text{mes} \{z : (u - \mu^\pm \mp \frac{w}{2^s})^\pm > 0, z \in B_\rho\} d\tau &= \left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \\ &\leq C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}} \rho^{Q+\lambda+1} = C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}} |S_R^{s_0}|. \end{aligned}$$

Очевидно, что условие (2.7) справедливо при любом

$$\alpha_0 \leq C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}}.$$

Применив лемму 2.7, получим утверждение

$$u(z, t) > \mu^- + w/2^{s_0+1}$$

для всех $(z, t) \in S_{R/2}^{s_0}$. Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3.1. В данной лемме значение $\bar{t}$ не определено. Единственное ограничение уже описано в предыдущем разделе: $\bar{t} \leq t_0, \bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}$. Выберем $s_1 : \bar{t} - \theta_0 (R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1 (R/2)^{\lambda+1}$. Очевидно, что $s_0 \leq s_1 \leq s^*$.

Лемма 3.2. Если

$$H^- = \|(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-\|_{\infty, S_{R/2}^{s_1}} \geq \frac{w}{2^{s_0+2}} \quad (3.3)$$

и выполняются условия леммы 3.1, тогда для любого $\alpha_0 \in (0, 1)$, удовлетворяющего (2.1), найдется $m = m(\alpha_0)$, не зависящее от w и R , такое что либо $w < 2^{s_1} R^\varepsilon$, либо

$$\text{mes} \left\{ z \in B_{R/4} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}} \right\} < \alpha_0 |B_{R/4}| \quad (3.4)$$

сразу для всех $t \in [t_0 - \theta_1 (R/2)^{\lambda+1}, t_0]$.

Доказательство леммы 3.2. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, то неравенство (1.6) справедливо на цилиндре $S_{R/2}^{s_1}(z_0, t_0)$. В качестве срезающей функции выберем $\xi(z)$, которая равна 1 на шаре $B_{R/4}$, нулю вне шара $B_{R/2}$, и $|D_L \xi| \leq 4/R$. Положим $\nu = w/2^{s_0+m}$, $k = \mu^- + w/2^{s_0+1}$. Тогда (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{t_0 - \theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1} \leq \tau \leq t_0} \int_{B_{R/2}} \psi^2(H^-, (u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-(\tau), \frac{w}{2^{s_0+m}}) \xi^{\lambda+1}(z) dz \leq \\ & \leq \int_{B_{R/2}} \psi^2((u - k)^-)(t_0 - \theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1}) dz + C_{1.6} \int_{S_{R/2}^{s_1}} \int \psi |\psi|^{1-\lambda} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что $(u - k)^- = -\min([u - \mu^-] - w/2^{s_0+1}, 0) \leq -\min(-w/2^{s_0+1}, 0) = w/2^{s_0+1}$. Тогда $H^- \leq w/2^{s_0+1}$ и

$$\begin{aligned} \psi &= \ln^+ \left(\frac{H^-}{H^- - (u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}} \right) \leq \ln^+ \left(\frac{H^-}{\frac{w}{2^{s_0+m}}} \right) \leq \\ & \leq \ln(2^{m-1}) = (m-1) \ln 2. \\ |\psi_u|^{1-\lambda} &= \left| \frac{1}{H^- - (u - k)^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}} \right|^{1-\lambda} = |H^- - (u - k)^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}|^{\lambda-1} \leq \\ & \leq \left| \frac{w}{2^{s_0+1}} + \frac{w}{2^{s_0+1}} \right|^{\lambda-1} = \left(\frac{w}{2^{s_0}} \right)^{\lambda-1} = \theta_0. \end{aligned}$$

Поскольку справедлива лемма 3.1, то $u > \mu^- + w/2^{s_0+1}$ при $t = \bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1}$. Выберем s_1 : $\bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}$. Очевидно, что $s_0 \leq s_1 \leq s^*$. Тогда $(u - k)^-(t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}) = 0$, откуда $\psi((u - k)^-(t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1})) = 0$. Оценим правую часть неравенства (3.5) сверху.

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R/2}} \psi^2((u - k)^-)(t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}) dz + C_{1.6} \int_{S_{R/2}^{s_1}} \int \psi |\psi|^{1-\lambda} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau \leq \\ & \leq \frac{C_{1.6} \theta_0 (m-1) \ln 2}{(R/4)^{\lambda+1}} |S_{R/2}^{s_1}|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \left(\ln^+ \left(\frac{H^-}{H^- - (u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}} \right) \right)^2 \geq \\ & \geq \left(\ln^+ \left(\frac{\frac{w}{2^{s_0+2}}}{\frac{w}{2^{s_0+m-1}}} \right) \right)^2 = (m-3)^2 \ln^2 2. \\ & \operatorname{ess\,sup}_{t_0 - \theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1} \leq \tau \leq t_0} \int_{B_{R/2}} \psi^2(H^-, (u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-(\tau), \frac{w}{2^{s_0+m}}) \xi^{\lambda+1}(z) dz \geq \end{aligned}$$

$$\geq (m-3)^2 \ln^2 2 \text{ mes } \left\{ z \in B_{R/4} : (u(z, t) - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}])^- > 0 \right\}.$$

Имеем для всех $t \in [t_0 - \theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1}, t_0]$ и $m = \max([C_{1.6}2^{s_1}/\alpha_0] + 1; s_1 - s_0 + 1)$

$$\text{mes } \left\{ z \in B_{R/4} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}} \right\} \leq C_{1.6} \frac{(m-1)4^{\lambda+1}}{(m-3)^2 R^{\lambda+1}} \theta_0 |S_{R/4}^{s_1}| \leq \alpha_0 |B_{R/4}|.$$

Лемма доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Выбор m не зависит от w, R, s^* . Дополнительное свойство $m : m + s_0 > s_1$ будет использовано при доказательстве следующей леммы 3.3.

Лемма 3.3. Если выполняются условия леммы 3.1 и леммы 3.2, то либо $w < 2^{s_1} R^\varepsilon$, либо

$$u(z, t) > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}} \quad (3.6)$$

для всех $(z, t) \in S_{R/8}^{s_1}(z_0, t_0)$.

Доказательство леммы 3.3. Выберем $\rho_n = R/8 + R/2^{n+3}$, $\bar{\rho}_n = (\rho_n + \rho_{n+1})/2$, $k_n = \mu^- + w/2^{s_0+m+1} + w/2^{s_0+m+1+n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Обозначим $S_n = S_{\rho_n}^{s_1}$, $\bar{S}_n = \bar{S}_{\bar{\rho}_n}^{s_1}$. Выберем срезающую функцию $\xi(z)$, которая равна 1 на $\bar{S}_n$, нулю вне S_n , и $|D_L \xi| \leq 2^{n+1}/\rho_n$. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1, loc}(S_T, \bar{M}, C)$, то неравенство (1.5) справедливо на каждом цилиндре S_n :

$$\begin{aligned} & \text{ess sup}_{t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1} \leq \tau \leq t_0} \left(\| (u - k_n)^- \|_{L_2(B_{\bar{\rho}_n})}^2 + \| D_L(u - k_n)^- \|_{L_{\lambda+1}(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} \leq \right. \\ & \leq \| (u - k_n)^- \|_{L_2(B_{\bar{\rho}_n})}^2 (t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1}) + \\ & \quad \left. + C_{1.5} \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \int_{S_n} [(u - k_n)^-]^{\lambda+1} dz d\tau. \right. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что поскольку $s_1 : \bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}$, то $\tau = t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1} : \tau \in (\bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1}, \bar{t})$ и по лемме 3.1 $(u - k_n)^-(t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1}) = 0$ для всех $z \in B_{R/2}(z_0)$. Также заметим, что в силу выбора k_n

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2^{s_1}}{w} \right)^{\lambda-1} \text{ess sup}_{B_{\bar{\rho}_n}} \int [(u - k_n)^-]^{\lambda+1} dz \leq \\ & \leq \left(\frac{2^{s_0+m}}{w} \right)^{\lambda-1} \text{ess sup}_{B_{\bar{\rho}_n}} \int [(u - k_n)^-]^{\lambda+1} dz \leq \text{ess sup}_{B_{\bar{\rho}_n}} \int [(u - k_n)^-]^2 dz. \end{aligned}$$

Сделав в неравенстве (3.7) замену переменной $\tau = t_0 + \theta_1 \dot{z}$, получим оценку на цилиндрах $S_n = B_{\rho_n} \times (-(R/8)^{\lambda+1}, 0)$, $\bar{S}_n = B_{\bar{\rho}_n} \times (-(R/8)^{\lambda+1}, 0)$:

$$\theta_1 \text{ess sup}_{B_{\bar{\rho}_n}} \int [(v - k_n)^-]^{\lambda+1} dz + \theta_1 \| D_L(v - k_n)^- \|_{L_{\lambda+1}(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} \leq C_{1.5} \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \theta_1 |A_n^-|.$$

$$\|(v - k_n)^-\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} \leq C_{1.5} \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \left(\frac{w}{2^{s_1}} \right)^{\lambda+1} |A_n^-|. \quad (3.8)$$

Введем кусочно-гладкую срезающую функцию $\varphi_n(z)$, которая равна 1 на $B_{\rho_{n+1}}$, 0 вне $B_{\bar{\rho}_n}$, $|D_L \varphi_n| \leq 2^{n+1}/\rho_n$. Тогда $(v - k_n)^- \varphi_n \in \mathfrak{B}_{\lambda+1}^0(\bar{S}_n)$. Следствие 2.5 и неравенство (3.8) дают

$$\begin{aligned} \|(v - k_n)^-\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}(S_{n+1})}^{\lambda+1} &\leq \|(v - k_n)^-\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} \leq \\ &\leq C_{2.5} |A_n^-|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} \|(v - k_n)^- \varphi_n\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}^0(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} \leq \\ &\leq C_{2.5} |A_n^-|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} \left\{ \|(v - k_n)^-\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)}^{\lambda+1} + \frac{2^{(n+2)(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \|(v - k_n)^-\|_{L_{\lambda+1}(S_n)}^{\lambda+1} \right\} \leq \\ &\leq C_{2.5} C_{1.5} \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \left(\frac{w}{2^{s_1}} \right)^{\lambda+1} |A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|(v - k_n)^-\|_{\mathfrak{B}_{\lambda+1}(S_{n+1})}^{\lambda+1} &\geq \\ &\geq |k_n - k_{n+1}|^{\lambda+1} |A_{n+1}^-| \geq (w/2^{s_0+m})^{\lambda+1} / 2^{(\lambda+1)(n+1)} |A_{n+1}^-|, \end{aligned}$$

имеем

$$|A_{n+1}^-| \leq C_{2.5} C_{1.5} 2^{\lambda+1} \frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} |A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} = C_{3.9} \frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} |A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}. \quad (3.9)$$

Введем новое обозначение $Y_n = |A_n^-|/|S_n|$. Тогда

$$Y_{n+1} \leq C_{3.9} 4^{n(\lambda+1)} Y_n^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}.$$

Заметим, что

$$Y_0 = \frac{|(z, t) : u > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}, z \in B_{R/4}, t \in [t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda=1}, t_0]|}{|B_{R/4} \times [t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda=1}, t_0]|} \leq \alpha_0$$

в следствие леммы 3.2. Применим лемму 2.6. Доказательство завершено. $\square$

Утверждение 3.4. Для некоторого, фиксированного в лемме 3.1, $\alpha_0 \in (0, 1)$ найдутся целые положительные s_1 и m , такие что, если существует цилиндр $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t})$:

$$\left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \alpha_0 |S_R^{s_0}|,$$

тогда либо $w < 2^{s_1} R^\varepsilon$, либо

$$ess\,osc_{S_{R/8}^{s_1}(z_0, t_0)} u < w \left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}} \right). \quad (3.10)$$

Доказательство. Если выполняется условие (3.1) и

$$H^- = \|(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-\|_{\infty, S_{R/2}^{s_1}} \geq \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то справедливы леммы 3.1, 3.2, 3.3, откуда

$$u(z, t) > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}$$

для всех $(z, t) \in S_{R/8}^{s_1}(z_0, t_0)$. Следовательно,

$$\operatorname{ess\,inf}_{S_{R/8}^{s_1}(z_0, t_0)} u(z, t) \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,osc}_{S_{R/8}^{s_1}} u(z, t) &= \operatorname{ess\,sup}_{S_{R/8}^{s_1}} u(z, t) - \operatorname{ess\,inf}_{S_{R/8}^{s_1}} u(z, t) \leq \\ &\leq \mu^+ - \mu^- - \frac{w}{2^{s_0+m+1}} = w \left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}} \right). \end{aligned}$$

Если же

$$H^- = \|(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-\|_{\infty, S_{R/2}^{s_1}} < \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то

$$\operatorname{ess\,inf}_{S_{R/8}^{s_1}} u(z, t) \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}} - \frac{w}{2^{s_0+2}} = \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+2}} \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}.$$

Утверждение доказано. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Число s_1 зависит от t_0 и $s_1 \leq s^*$, m зависит только от выбора α_0 .

4. Вторая альтернатива. Первая альтернатива имеет смысл, если для некоторого, фиксированного в лемме 3.1, числа $\alpha_0 \in (0, 1)$ существует хотя бы один цилиндр $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t})$, такой что

$$\left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \alpha_0 |S_R^{s_0}|. \quad (4.1)$$

Во второй альтернативе будем предполагать, что для подобного α_0 не существует ни одного цилиндра, для которого справедливо (4.1). Тогда для всех $\bar{t} < t_0 < T$ и цилиндров $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t})$ выполняется

$$\left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| > \alpha_0 |S_R^{s_0}|.$$

Используя верное неравенство $\mu^+ - w/2^{s_0} \geq \mu^- + w/2^{s_0}$, имеем

$$\left| (z, t) \in S_R^{s_0} : u(z, t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq (1 - \alpha_0) |S_R^{s_0}|, \quad (4.2)$$

для всех $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t})$, где $\bar{t} : \bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}, \bar{t} \leq t_0$.

Лемма 4.1. Пусть справедливо (4.2). Тогда существует $t^* \in [\bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$, такое что

$$\left| z \in B_R : u(z, t^*) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \left(\frac{1 - \alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R|.$$

Доказательство. От противного. Допустим, что не существует такого t^* , тогда для почти всех $t \in [\bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$ справедливо

$$\left| z \in B_R : u(z, t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| > \left(\frac{1 - \alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R|.$$

Проинтегрировав неравенство по t на множестве $[\bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| (z, t) \in S_R^{s_0}(\bar{t}) : u(z, t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| > \\ & > \int_{\bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1}}^{\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}} \left\{ z \in B_R : u(z, t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right\} dt > (1 - \alpha_0) |S_R^{s_0}|, \end{aligned}$$

что противоречит (4.2). $\square$

Лемма 4.2. Предположим, что

$$H^+ = \|(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^+\|_{\infty, S_R^{s_0}} > \frac{w}{2^{s_0+2}}.$$

Тогда существует целое положительное l , определенное в (2.1), не зависящее от w и R , такое что либо $w \leq 2^{s_0+l} R^\varepsilon$, либо

$$\left| z \in B_R : u(z, t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+l}} \right| \leq \left(1 - \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \right) |B_R|$$

для всех $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$.

Доказательство. Используем неравенство (1.6). Обозначим $S_R^* = B_R \times [t^*, t]$, $S_{R-\sigma R}^* = B_{R-\sigma R} \times [t^*, t]$, $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$. Положим $k = \mu^+ - w/2^{s_0}$, $\nu = w/2^{s_0+l}$. В качестве срезающей функции выберем $\xi(z)$, которая равна 1 на шаре $B_{R-\sigma R}$, нулю вне шара B_R , и $|D_L \xi| \leq 1/(\sigma R)$. Тогда (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R-\sigma R}} \psi^2(H^+, (u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}}])^+(\tau), \frac{w}{2^{s_0+l}}) \xi^{\lambda+1}(z) dz \leq \\ & \leq \int_{B_R} \psi^2((u - k)^+)(t^*) dz + C_{1.6} \int_{S_R^*} \psi |\psi|^{1-\lambda} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что $(u - k)^+ = \max([u - \mu^+] + w/2^{s_0}, 0) \leq \max(w/2^{s_0}, 0) = w/2^{s_0}$. Тогда $H^+ \leq w/2^{s_0}$ и

$$\psi = \ln^+ \left(\frac{H^+}{H^+ - (u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}}])^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}} \right) \leq \ln^+ \left(\frac{H^+}{\frac{w}{2^{s_0+l}}} \right) \leq \ln(2^l) = l \ln 2.$$

$$\begin{aligned} |\psi_u|^{1-\lambda} &= \left| \frac{1}{H^+ - (u - k)^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}} \right|^{1-\lambda} = |H^+ - (u - k)^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}|^{\lambda-1} \leq \\ &\leq \left| \frac{w}{2^{s_0}} + \frac{w}{2^{s_0}} \right|^{\lambda-1} = 2^{\lambda-1} \left(\frac{w}{2^{s_0}} \right)^{\lambda-1} = \theta_0 2^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Поскольку справедлива лемма 4.1, то оценим первый интеграл справа

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \psi^2((u - k)^+)(t^*) dz &\leq \int_{\{z \in B_R : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0}}\}} \ln^2 \left(\frac{H^+}{\nu} \right) dz \leq \\ &\leq \ln^2 \left(\frac{\frac{w}{2^{s_0}}}{\frac{w}{2^{s_0+l}}} \right) |\{z \in B_R : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0}}\}| \leq l^2 \ln^2 2 \left(\frac{1 - \alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R|. \end{aligned}$$

Получим оценку

$$\int_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u - k)^+)(t) dz \leq l^2 \ln^2 2 \left(\frac{1 - \alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R| + \frac{C_{1.6} \theta_0 l 2^{\lambda-1} \ln 2 (t - t^*)}{(\sigma R)^{\lambda+1}} |B_R|.$$

Учтем, что $\bar{t} - t^* \leq \theta_0 R^{\lambda+1}$. Имеем

$$\int_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u - k)^+)(t) dz \leq l^2 \ln^2 2 \left(\frac{1 - \alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R| + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1} \ln 2}{\sigma^{\lambda+1}} |B_R|.$$

Оценим левую часть неравенства

$$\begin{aligned} \int_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u - k)^+)(t) dz &\geq \int_{\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}} \ln^2 \left(\frac{H^+}{\nu} \right) dz \geq \\ &\geq \ln^2 \left(\frac{\frac{w}{2^{s_0+2}}}{\frac{w}{2^{s_0+l}}} \right) |\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \geq \\ &\geq (l - 2)^2 \ln^2 2 |\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}|. \end{aligned}$$

Имеем

$$|\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(l-2)^2 \ln^2 2} \left(l^2 \ln^2 2 \left(\frac{(1-\alpha_0)}{(1-\frac{\alpha_0}{2})} \right) |B_R| + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1} \ln 2}{\sigma^{\lambda+1}} |B_R| \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |\{z \in B_R : u > \mu + \frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \leq \\ & \leq |\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + \frac{w}{2^{s_0+l}}\}| + |B_R - B_{R-\sigma R}| \leq \\ & \leq \left(\frac{l^2}{(l-2)^2} \frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}} + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}}{\sigma^{\lambda+1} (l-1)^2 \ln 2} + Q\sigma \right) |B_R| \end{aligned}$$

для всех $t \in [t^*, \bar{t}]$. По условию (2.1) l выбрана таким образом, что $(l/(l-2))^2 < (1-\alpha_0/2)(1+\alpha_0)$. Выберем σ достаточно малым, чтобы

$$\frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}}{\sigma^{\lambda+1} (l-2)^2 \ln 2} \leq \frac{3}{8} \alpha_0^2, \quad Q\sigma \leq \frac{3}{8} \alpha_0^2.$$

Тогда

$$|\{z \in B_R : u > \mu + \frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \leq (1 - \alpha_0^2 + \frac{3}{8} \alpha_0^2 + \frac{3}{8} \alpha_0^2) |B_R| = (1 - (\alpha_0/2)^2) |B_R|$$

для каждого $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, поскольку $t^* \leq \bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}$. Что и требовалось доказать. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Условие (4.2) выполняется для всех $\bar{t} \leq t_0 : t_0 \geq \bar{t} \geq t_0 - (\theta_* - \theta_0)R^{\lambda+1}$. Лемма 4.2 выполняется для $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, значит, $t \in [t_0 - (\theta_* - \theta_0)R^{\lambda+1} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, t_0] = [t_0 - (\theta_* - (1 - (\alpha_0/2))\theta_0)R^{\lambda+1}, t_0]$. Заметим, что $\theta_* - (1 - (\alpha_0/2))\theta_0 = (2^{s^*}/w)^{\lambda-1} - (1 - (\alpha_0/2))(2^{s_0}/w)^{\lambda-1} \geq (2^{s^*}/w)^{\lambda-1} (1 - 1/(1 + \alpha_0/2)) = \theta_*(\alpha_0/(\alpha_0 + 2)) > \theta_* \alpha_0/3$. Значит, лемма 4.2 выполняется для всех $t \in [t_0 - (\alpha_0/3)\theta_* R^{\lambda+1}, t_0]$.

Лемма 4.3. Если (4.2) выполняется, тогда для каждого $\alpha_0 \in (0, 1)$, удовлетворяющего (2.1), существует целое положительное s^* , определенное в (2.2), такое что на цилиндре $S_R^{s^*}(\alpha_0) = B_R \times [\bar{t} - (\alpha_0/3)\theta_* R^{\lambda+1}, \bar{t}]$ либо $w \leq 2^{s^*} R^\varepsilon$, либо

$$\left| (z, t) \in S_R^{s^*} : u(z, t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*}} \right| \leq \alpha_0 |S_R^{s^*}|.$$

Доказательство. Используем неравенство (1.5). Рассмотрим цилиндры $S_R^p(\alpha_0)$ и $S_{2R}^p(\alpha_0)$. Выберем срезающую функцию $\xi(z, t)$, которая равна единице на $S_R^p(\alpha_0)$, нулю вне $S_{2R}^p(\alpha_0)$, и такую, что $\xi(z, \bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1} 2R^{\lambda+1}) = 0$, $0 < \xi_\tau \leq C_\xi / ((\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1} 2R^{\lambda+1})$, $|D_L \xi| \leq 2/R$. Уровень $k = \mu^+ - w/2^{p-1}$, $p > s_0 + l$. Тогда неравенство (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int \int_{S_R^p(\alpha_0)} |D_L(u-k)^+|^{\lambda+1} dz d\tau \leq \frac{C_{1.5}}{R^{\lambda+1}} \int \int_{S_{2R}^p(\alpha_0)} [(u-k)^+]^{\lambda+1} dz d\tau + \\ & + \frac{3C_{1.5}}{(\alpha_0/3)(\frac{2^p}{w})^{\lambda-1} 2R^{\lambda+1}} \int \int_{S_{2R}^p(\alpha_0)} [(u-k)^+]^2 dz d\tau \leq \frac{C_{4.3} 2^{Q+\lambda+1}}{\alpha_0 R^{\lambda+1}} \left(\frac{w}{2^p} \right)^{\lambda+1} |S_R^p(\alpha_0)|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь используем лемму 2.1 на шаре B_R . Выберем $l = \mu^+ - w/2^p, k = \mu^+ - w/2^{p-1}$. Тогда для всех $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$

$$\lambda \left(\frac{w}{2^p} \right) |\{z \in B_R, u < \mu^+ - \frac{w}{2^p}\}| \leq \frac{C_{2.4}|B_R|^{\frac{Q+1}{Q}}}{mes(B_R - A_{k,R}^+)} \int_{A_{k,R}^+ - A_{l,R}^+} |D_L u| dz.$$

Лемма 4.2 дает на отрезке $[\bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}, \bar{t}]$ для всех $p \leq s^*$ оценку

$$mes(B_R - A_{\mu^+ - \frac{w}{2^{p-1}}, R}^+) \geq \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)^2 |B_R|.$$

Используя последнюю оценку, получаем

$$\left(\frac{w}{2^p} \right) mes(A_{\mu^+ - \frac{w}{2^p}, R}^+(t)) \leq \frac{4C_{2.4}|B_R|^{\frac{1}{Q}}}{\alpha_0^2} \int_{A_{k,R}^+ - A_{l,R}^+} |D_L u| dz.$$

Обозначим

$$A_p = \int_{\bar{t} - (\frac{\alpha_0}{3})(\frac{2^p}{w})^{\lambda-1} R^{\lambda+1}}^{\bar{t}} mes\{A_{\mu^+ - \frac{w}{2^p}, R}^+(t)\} dt.$$

Тогда, проинтегрировав последнее неравенство по t на отрезке $[\bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, и применив неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{w}{2^p} \right) A_p \leq \\ & \leq \frac{4C_{2.4}}{\alpha_0^2} |B_R|^{\frac{1}{Q}} \left(\int \int_{S_R^p(\alpha_0)} |D_L(u - k)^+|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} (A_p - A_{p-1})^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}. \end{aligned}$$

Используем (4.3)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{w}{2^p} \right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \\ & \leq \left(\frac{4C_{2.4}}{\alpha_0^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} |B_R|^{\frac{\lambda+1}{\lambda Q}} \left(\frac{C_{4.3} 2^{Q+\lambda+1}}{\alpha_0 R^{\lambda+1}} \left(\frac{w}{2^p} \right)^{\lambda+1} |S_R^p(\alpha_0)| \right)^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}), \\ & A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{2^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{Q+\lambda+1}{\lambda}} C_{2.4}^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} C_{4.3}^{\frac{1}{\lambda}}}{\frac{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}}{\alpha_0}} |S_R^p(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}) = \\ & = \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S_R^p(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}), \\ & \sum_{p=s_0+l+1}^{s^*} A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S_R^{s^*}(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} \sum_{p=s_0+l+1}^{s^*} (A_p - A_{p-1}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку для всех $p \leq s^*$, $A_{s^*} \leq A_p$, имеем

$$[s^* - s_0 - l - 1] A_{s^*}^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S_R^{s^*}(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} A_{s^*},$$

$$A_{s^*} \leq \frac{C_{4.4}}{[s^* - s_0 - l - 1]^{\lambda} \alpha_0^{\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}}} |S_R^{s^*}(\alpha_0)| \leq \frac{C_{4.4}}{s^{*\lambda} \alpha_0^3} |S_R^{s^*}(\alpha_0)|.$$

s^* задано достаточно большим, чтобы $C_{4.4}/(s^{*\lambda} \alpha_0^3) \leq \alpha_0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.4. *Предположим, что (4.2) выполняется, тогда s^* , определенное в (2.2), таково, что либо $w \leq 2^{s^*} R^\varepsilon$, либо*

$$u < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}$$

для всех $(z, t) \in S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)$.

Доказательство. Поскольку выполняется (4.2), то справедлива лемма 4.3. Из леммы 4.3 следует, что справедливо условие (2.7) при $\rho = R, s = s^*, k = \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*}}$. Поскольку $u \in \mathfrak{W}_{\lambda+1}(S_\rho^s(z, \bar{t}))$, то верно неравенство (1.5). Используем лемму 2.7. Лемма 4.4 доказана. $\square$

Утверждение 4.5. *Положительное целое s^* , не зависящее от w и R , определенное в (2.2), таково, что если верно (4.2) сразу для всех $\bar{t}$ на всех $S_R^{s_0}(z_0, \bar{t})$, тогда либо $w \leq 2^{s^*} R^\varepsilon$, для некоторого $\varepsilon : 0 < \varepsilon < (\lambda + 1)/(\lambda - 1)$, либо*

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u \leq w \left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}} \right),$$

где $S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0) = B_{R/2} \times (t_0 - (\alpha_0/3)\theta_*(R/2)^{\lambda+1}, t_0)$.

Доказательство. Если выполняется условие (4.2), и

$$H^+ = \|(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-\|_{\infty, S_R^{s_0}} \geq \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то справедливы леммы 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, откуда

$$u(z, t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}$$

для всех $(z, t) \in S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)(z_0, t_0)$. Следовательно,

$$\operatorname{ess\,sup}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)(z_0, t_0)} u(z, t) \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}.$$

Тогда

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z, t) = \operatorname{ess\,sup}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z, t) - \operatorname{ess\,inf}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z, t) \leq$$

$$\leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}} - \mu^- = w \left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}} \right).$$

Если же

$$H^+ = \|(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-\|_{\infty, S_R^{s_0}} < \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то

$$\operatorname{ess\,sup}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z, t) \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}} + \frac{w}{2^{s_0+2}} = \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+2}} \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}.$$

Утверждение доказано. $\square$

5. Доказательство теоремы вложения.

Утверждение 5.1. Пусть $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C_{1.5}, C_{1.6})$. Точка $(z_0, t_0) \in S_T$ такова, что для некоторых $R_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ цилиндр $S_{R_0}^\varepsilon = B_{R_0}(z_0) \times [t_0 - R_0^{\lambda+1-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0] \subset S_T$. Для определенного в (2.2) положительного целого s^* , любого $R : 0 < R \leq R_0$ и $w : 0 < w \leq 2\bar{M}$,

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_R^{s^*}(z_0, t_0)} u(z, t) \leq w,$$

где $S_R^{s^*} = B_R \times [t_0 - (2^{s^*}/w)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}, t_0]$ справедливо: либо $w \leq 2^{s^*+1} R^\varepsilon$, либо найдутся такие $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ и $\eta_0 \in (0, 1)$, что

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R/8}^{\sigma_0}(z_0, t_0)} u(z, t) \leq \eta_0 w. \quad (5.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Точка (z_0, t_0) – произвольная фиксированная точка из S_T .

Доказательство. Справедливо либо утверждение 3.4, либо утверждение 4.5. Следовательно, либо $w < 2^{s_1} R^\varepsilon$, откуда немедленно следует, что $w \leq 2^{s^*+1} R^\varepsilon$, либо

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u \leq w \left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}} \right),$$

где $S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0) = B_{R/2} \times (t_0 - (\alpha_0/3)\theta_*(R/2)^{\lambda+1}, t_0)$, либо $w \leq 2^{s^*+1} R^\varepsilon$, либо

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R/8}^{s_1}(z_0, t_0)} u < w \left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}} \right),$$

где $s_1 \leq s^*, m \geq s^*$.

Выберем $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ – максимальное, при условии что $2^{\sigma_0(\lambda-1)} \leq (\alpha_0/3)2^{s_1(\lambda-1)}$ и $\eta_0 = (1 - (1/2^{s_0+m+1}))$. Утверждение следует из элементарных оценок. $\square$

Пусть $\bar{\theta} = (2^{s^*}/\bar{w})^{\lambda-1}$, $\bar{w}$ – будет определена позднее, $S_{R_0}^\varepsilon = B_{R_0} \times (t_0 - R_0^{(\lambda+1)-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0)$, $S_{R_0}^{\bar{\theta}} = B_{R_0} \times (t_0 - \bar{\theta} R_0^{\lambda+1}, t_0)$. Определим последовательность вложенных цилиндров $\{S_h\}_{h=0}^\infty$. Если

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R_0}^\varepsilon} u(z, t) \leq 2^{s^*} R_0^\varepsilon,$$

тогда положим $w_0 = 2^{s^*} R_0^\varepsilon, S_0 = B_{R_0} \times (t_0 - (2^{s^*}/w_0)R_0^{\lambda+1}, t_0) = S_{R_0}^\varepsilon$. В противном случае, если

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R_0}^\varepsilon} u(z, t) > 2^{s^*} R_0^\varepsilon,$$

существует $\bar{w} : 2^{s^*} R_0^\varepsilon < \bar{w} \leq 2\bar{M}$, такая, что

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R_0}^\theta} u(z, t) \leq \bar{w}.$$

Положим $w_0 = \bar{w}, S_0 = S_{R_0}^\theta$. Для $h = 0, 1, 2, \dots$ $w_h = \max[\eta_0 w_{h-1}, 2^{s^*} R_{h-1}^\varepsilon], \theta_h = (2^{s^*}/w_h)^{\lambda-1}, R_h = R_0/C_{5.2}^h$,

$$S_h = S_{R_h}^{\theta_h} = B_{R_h}(z_0) \times [t_0 - \left(\frac{2^{s^*}}{w_h}\right)^{\lambda-1} R_h^{\lambda+1}, t_0], \text{ где } C_{5.2} = 8 \left(2^{s^*-\sigma_0}/\eta_0\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}. \quad (5.2)$$

Утверждение 5.2 . Пусть выполняются требования утверждения 5.1, тогда для определенной выше последовательности цилиндров справедливо:

$$S_{h-1} \subset S_h, \operatorname{ess\,osc}_{S_h} u(z, t) \leq w_h, h = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Доказательство. Заметим, что для $h = 1, 2, \dots$ $R_{h-1} > R_h, w_{h-1} > w_h$. Действительно, первое неравенство очевидно. Для второго неравенства возможны два случая. Если $2^{s^*} R_{h-1}^\varepsilon \leq \eta_0 w_{h-1}$, то $w_h = \eta_0 w_{h-1} < w_{h-1}$, иначе, $\eta_0 w_{h-1} < 2^{s^*} R_{h-1}^\varepsilon$, и $w_h = 2^{s^*} R_{h-1}^\varepsilon < 2^{s^*} R_{h-2}^\varepsilon < \max[\eta_0 w_{h-2}, 2^{s^*} R_{h-2}^\varepsilon] = w_{h-1}$. Но число $C_{5.2}$ выбрано таким образом, что справедлива оценка

$$\left(\frac{2^{s^*}}{w_h}\right)^{\lambda-1} R_h^{\lambda+1} \leq \left(\frac{2^{\sigma_0}}{w_{h-1}}\right)^{\lambda-1} \left(\frac{R_{h-1}}{8}\right)^{\lambda+1} \leq \left(\frac{2^{s^*}}{w_{h-1}}\right)^{\lambda-1} R_{h-1}^{\lambda+1}.$$

Откуда имеем $S_{h-1} \subset S_h$. Докажем оставшуюся часть (5.2) методом математической индукции. При $h = 0$ утверждение (5.2) тривиально выполняется. Предполагаем, что (5.2) справедливо при $h = k - 1$. Докажем (5.2) для случая $h = k$. Из предположений имеем

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{k-1}} u(z, t) \leq w_{k-1}.$$

В утверждении 5.1 выберем $w = w_{k-1}, R = R_{k-1}$. Заметим, что случай $w_{k-1} \leq 2^{s^*} R_{k-1}^\varepsilon \leq \max[\eta_0 w_{k-1}, 2^{s^*} R_{k-1}^\varepsilon] = w_k$ дает

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_k} u(z, t) \leq \operatorname{ess\,osc}_{S_{k-1}} u(z, t) \leq w_{k-1} \leq w_k.$$

В противном случае, для $S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0} = B_{R_{k-1}} \times (t_0 - (2^{\sigma_0}/w_{k-1})^{\lambda-1} (R_{k-1}/8)^{\lambda+1}, t_0)$ верна оценка

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0}} u(z, t) \leq \eta_0 w_{k-1} \leq \max[\eta_0 w_{k-1}, 2^{s^*} R_{k-1}^\varepsilon] = w_k.$$

В силу выбора $C_{5.2}$ верно вложение $S_k \subset S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0}$. Имеем

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_k} u(z, t) \leq \operatorname{ess\,osc}_{S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0}} u(z, t) \leq w_k.$$

Утверждение (5.2) полностью доказано. $\square$

Теорема 5.3. Пусть $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \cap L_{\infty,loc}(S_T)$ – слабое решение уравнения (1.1). Тогда $u(z, t)$ – локально гёльдерово на S_T и для любого компакта $K \in S_T$ существуют постоянные $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ и $C(\bar{\alpha})$, зависящие только от параметров задачи и $\operatorname{diam} K$, такие что

$$|u(z_1, t_1) - u(z_2, t_2)| \leq C(\bar{\alpha})(d^{\bar{\alpha}}(z_1, z_2) + |t_1 - t_2|^{\frac{\bar{\alpha}}{\lambda+1}}).$$

Доказательство теоремы 5.3. Положим

$$\bar{\alpha} = \min\{(\varepsilon, -\log_{C_{5.2}^\varepsilon} \eta_0), C(\bar{\alpha}) = \max\{2^{s^*} R_0^\varepsilon, w_0\} C_{5.2}^{\bar{\alpha}}.$$

Полагаем R_0 и ε такие, что $K \subset S_0^\varepsilon$. Из утверждения 1.1 следует, что условия утверждения 5.1 выполняются, тогда справедливо утверждение 5.2. Пускай $r : 0 < r \leq R_0$ – произвольное. Найдется такое $h_0 \in \mathbb{N}$, что $R_{h_0+1} \leq r < R_{h_0} \leq C_{5.2} r < R_{h_0+1}$. Тогда легко заметить, что $S_r^\varepsilon \subset S_{h_0+1}$ и

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_{h_0+1}} u(z, t) \leq w_{h_0+1},$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,osc}_{S_r^\varepsilon} u(z, t) &\leq \operatorname{ess\,osc}_{S_{h_0+1}^\varepsilon} u(z, t) \leq w_{h_0+1} = \max\{2^{s^*} R_{h_0}^\varepsilon, \eta_0 w_{h_0}\} \leq \\ &\leq \max\{2^{s^*} R_0^\varepsilon, w_{h_0}\} \max\{C_{5.2}^{-\varepsilon h_0}, \eta_0^{h_0}\}. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу выбора $\bar{\alpha}$ имеем $\eta_0 \leq C_{5.2}^{-\bar{\alpha}}$. Поскольку $R_{h_0} \leq C_{5.2} r$, то $C_{5.2}^{-h_0} \leq (C_{5.2} r)/R_0$. Откуда имеем

$$\max\{C_{5.2}^{-\varepsilon h_0}, \eta_0^{h_0}\} \leq \left(\frac{C_{5.2} r}{R_0} \right)^{\bar{\alpha}}.$$

Следовательно, для любого $r : 0 < r < R_0$

$$\operatorname{ess\,osc}_{S_r^\varepsilon} u(z, t) \leq \max\{2^{s^*} R_0^\varepsilon, w_{h_0}\} \left(\frac{C_{5.2} r}{R_0} \right)^{\bar{\alpha}} = C(\bar{\alpha}) R_0^{-\bar{\alpha}} r^{\bar{\alpha}}.$$

Откуда следует справедливость теоремы 5.3. $\square$

Автор выражает благодарность А.Ф.Тедееву за руководство над работой и А.В.Мартыненко за полезные обсуждения результатов работы.

1. Baouendi M.S. Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés // Bull. Soc. Math. France. – 1967. – Vol.95. – P.45-87.

2. *Di Benedetto E.* On the Local Behaviour of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Measurable Coefficients // Ann. Sc. Norm. Pisa Cl.Sci. – 1986. – Vol.13 (3). – P.487-535.
3. *Franchi B., Lanconelli E.* Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres // Toronto: Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. – 1984.
4. *Franchi B., Lanconelli E.* Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1983. – Vol.10 (4). – P.523-541.
5. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the Existence of Minimal Surfaces // Comm. Pure Appl. Math. – 1996. – Vol.49. – P.1081-1144.
6. *Grushin V.V.* On a class of hypoelliptic operators // Math USSR Sbornik. – 1970. – Vol.12 (3). – P.458-476.
7. *Kalashnikov A.S.* Some properties of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations // Russian Math. Surveys. – 1987. – Vol.42. – P.169-222.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квази линейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
w9071981@yandex.ru

Получено 26.03.08