УДК 531.38; 531.39

©2020. **Е.А. Игнатова, С.В. Скрыпник**

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Исследованы условия существования частного решения задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом на основании полученного ранее решения для случая постоянного гиростатического момента. Дано новое представление гиростатического момента.

Ключевые слова: *постоянный и переменный гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы, линейные инвариантные соотношения.*

Введение. Постановка задачи о движении гиростата рассматривалась многими авторами. В связи с этим имеются определенные отличия в определении этой механической системы. Работы У. Томсона [1], А. Грея [2] посвящены изучению движения гиростата, в котором несомые тела являются симметричными и однородными по плотности. Гиростаты Вольтерра–Жуковского [3, 4] характеризуются наличием полостей в теле-носителе, в которых движется идеальная жидкость. Другие модели гиростатов рассмотрены В.В. Румянцевым [5], Й. Виттенбургом [6] и П.В. Харламовым [7]. Причем, модель гиростата П.В. Харламова [7] является наиболее общей, поскольку в ней главным свойством является требование динамической симметрии несомых тел относительно осей вращения, содержащих их центры масс.

Актуальность исследований в динамике гиростата, имеющего неподвижную точку, отмечена в [8, 9]. Наиболее полно исследована задача о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом (см. обзоры [10–12]).

В последнее время интенсивно изучается и задача о прецессионных движениях гиростата с переменным гиростатическим моментом [13]. Важный подход в построении решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом предложен в статье [14]. Он основан на том, что решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом, в случае его линейного вида по отношению к компонентам единичного вектора вертикали, можно получить, используя решения, найденные для случая постоянного гиростатического момента. С помощью этого метода в [14] получены условия существования решений неавтономного гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. Однако в [14] отсутствует доказательство симметричности матрицы, задающей переменный гиростатический момент. В данной статье такое доказательство выполнено не только с помощью некоторых примеров, но и в общем случае. Кроме этого, в статье обобщены результаты [14] для случая прецессионных движений гиростата, которые изучены в [15, 16]. Отличие построенного здесь решения от решения [14] состоит в новом представлении гиростатического момента, что является важным фактором в задачах управления движением гиростата с помощью различных методов вращения несомых тел.

1. Постановка задачи. Следуя [14], рассмотрим две задачи о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил.

Первая задача характеризуется постоянством гиростатического момента и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [17]

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = a\mathbf{x}^{(1)} \times (B^{(1)}\boldsymbol{\nu}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)}) + \boldsymbol{\nu}^{(1)} \times (C^{(1)}\boldsymbol{\nu}^{(1)} - \mathbf{s}^{(1)}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}^{(1)} = \boldsymbol{\nu}^{(1)} \times a\mathbf{x}, \tag{2}$$

которая допускает три первых интеграла

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x}^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)})\cdot\boldsymbol{\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\big(B^{(1)}\boldsymbol{\nu}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nu}^{(1)}\big) = k_1, \\ a\mathbf{x}^{(1)}\cdot\mathbf{x}^{(1)} - 2(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nu}^{(1)}) + \big(C^{(1)}\boldsymbol{\nu}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nu}^{(1)}\big) = 2E_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где k_1, E_1 – постоянные. В уравнениях (1)–(3) введены обозначения: $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ – момент количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu}^{(1)} = (\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \nu_3^{(1)})$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)})$ – постоянный гиростатический момент; $a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3)$ – матрица гирационного тензора; $\mathbf{s}^{(1)} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)})$ – вектор, направленный из неподвижной точки O в центр масс C гиростата: $\mathbf{s}^{(1)} = s(e_1, e_2, e_3)$; $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$; $s = mg|\mathbf{OC}|$; $B^{(1)} = \big(B_{ij}\big)^1$ $(i, j = \overline{1,3})$ – симметричная матрица третьего порядка, определяющая гироскопические силы; $C^{(1)} = \big(C_{ij}\big)^1$ $(i, j = \overline{1,3})$ – симметричная матрица третьего порядка, обусловленная потенциальными силами.

В случае $B^{(1)} = 0,\ C^{(1)} = 0$ уравнения (1), (2) с интегралами (3) описывают задачу о движении гиростата под действием силы тяжести. Основные направления исследований и полученные в ней результаты приведены в монографиях П.В. Харламова [10], Горра Г.В., Кудряшовой Л.В., Степановой Л.А. [11], Харламовой Е.И., Мозалевской Г.В. [12], Горра Г.В., Ковалева А.М. [17].

Вторая задача. Наряду с системой (1), (2), запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента [7, 17]:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + a\mathbf{x}^{(2)} \times \Big[B^{(2)}\boldsymbol{\nu}^{(2)} - \mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\lambda}(t)\Big] + \boldsymbol{\nu}^{(2)} \times (C^{(2)}\boldsymbol{\nu}^{(2)} - \mathbf{s}^{(2)}), \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}^{(2)} = \boldsymbol{\nu}^{(2)} \times a\mathbf{x}^{(2)}, \tag{5}$$

где индексом 2 обозначены переменные и параметры во второй задаче, их интерпретация такая же, как и в первой. Отличие (4), (5) от (1), (2) состоит в том, что в (4) $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – переменный гиростатический момент. Уравнения (4), (5) имеют только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu}^{(2)} = 1, \quad \big(\mathbf{x}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\big(B^{(2)}\boldsymbol{\nu}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu}^{(2)}\big) = k_2. \tag{6}$$

В статье [14] рассматривается построение решения уравнений (4), (5) на основании известного решения уравнений (1), (2), которое описывается векторным линейным инвариантным соотношением

$$\mathbf{x}^{(1)} = G\boldsymbol{\nu}^{(1)} + \mathbf{x}_0^{(1)}, \tag{7}$$

где $G = \big(g_{ij}\big)$ – постоянная матрица третьего порядка, $\mathbf{x}_0^{(1)}$ – постоянный вектор, в классе функций переменного гиростатического момента следующего вида

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = D\boldsymbol{\nu}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}_0^{(2)}. \tag{8}$$

Здесь $D = (d_{ij})$ – матрица третьего порядка с постоянными элементами, $\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)}$ – постоянный вектор.

Отметим, что система дифференциальных уравнений (4), (5) не замкнута, поскольку в правую часть уравнения (4) входит переменная вектор-функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Поэтому, следуя подходу П.В. Харламова, к уравнениям (4), (5) необходимо присоединить уравнения [7]

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{3} D_i p_i(t)\,\mathbf{э}_i, \qquad \dot{p}_i(t) = \frac{1}{D_i}L_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{9}$$

в которых $\mathbf{э}_i$ $i = (\overline{1,3})$ – единичные векторы подвижной системы координат $Oxyz$ тела-носителя S_0; D_i $i = (\overline{1,3})$ – моменты инерции несомых роторов S_i $(i = \overline{1,3})$ относительно их осей вращения l_i, неизменно связанных с телом-носителем S_0; $L_i(t)$ – проекции сил, действующих со стороны тела-носителя S_0. При этом функции $p_i(t) = a\mathbf{x}_0^{(2)} \cdot \mathbf{э}_i + \varkappa_i(t)$ ($\varkappa_i$ – угловые скорости вращения роторов S_i). Таким образом, в данной статье полагаем, что после нахождения функции (8) необходимо привлечь уравнения (9) для получения $\varkappa_i(t)$, $L_i(t)$. Различные подходы в изучении уравнений (9) указаны П.В. Харламовым [7].

В статье [14] указанная выше задача решена следующим образом. Для уравнений (4), (5) полагается

$$\boldsymbol{\nu}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\nu}^{(1)}(t), \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{x}^{(1)}(t) = G\boldsymbol{\nu}^{(1)}(t) + \mathbf{x}_0^{(1)}. \tag{10}$$

Первый этап исследования [14] состоял в том, что на решении (10) разность первых интегралов из (3), (6) в силу (7), (8) приводится к виду

$$\big[D - \frac{1}{2}(B^{(2)} - B^{(1)})\big]\boldsymbol{\nu}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}^{(1)} + \big(\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)} - \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)}\big) \cdot \boldsymbol{\nu}^{(1)} = k_2 - k_1. \tag{11}$$

Из равенства (11) в [14] получено

$$B^{(2)} = B^{(1)} + 2(D - \mu_0 \delta), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2^{(2)} = \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)}, \qquad k_2 = k_1 + \mu_0, \tag{13}$$

где μ_0 – постоянная, δ – единичная матрица третьего порядка. При этом в [14] полагалось, что равенство (11) должно быть следствием геометрического интеграла $\boldsymbol{\nu}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}^{(1)} = 1$. Кстати, для класса прецессионных движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом условие (13) можно не рассматривать.

В силу симметричности матриц B_1, B_2, из равенства (12) следует, что D в (8) также должна быть симметричной.

На втором этапе решения задачи в [14] с помощью уравнений (1), (2), (4), (5) найдены достаточные условия существования решения (7):

$$C^{(2)} = C^{(1)} + \big[(\mathrm{Sp}(D) - 2\mu_0)\delta - D\big] aG, \tag{14}$$

$$s^{(2)} = s^{(1)} + \big[(\mathrm{Sp}(D) - 2\mu_0)\delta - D\big] a\mathbf{x}_0^{(1)}, \tag{15}$$

где $\mathrm{Sp}(D) = d_{11} + d_{22} + d_{33}$ – след матрицы D. В статье [14] утверждается, что существует такая матрица D, которая является симметричной. Однако доказательство данного утверждения в [14] отсутствует.

2. Исследование равенства (14)**.** Введем обозначения $H = aG$, $L = (\mathrm{Sp}(D) - 2\mu_0)\delta - D$, где

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Тогда в силу $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ имеем следующие значения для h_{ij}, l_{ij}:

$$\left.\begin{array}{lll} h_{11} = a_1 g_{11}, & h_{12} = a_1 g_{12}, & h_{13} = a_1 g_{13}, \\ h_{21} = a_2 g_{21}, & h_{22} = a_2 g_{22}, & h_{23} = a_2 g_{23}, \\ h_{31} = a_3 g_{31}, & h_{32} = a_3 g_{32}, & h_{33} = a_3 g_{33}; \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{lll} l_{11} = d_{22} + d_{33} - 2\mu_0, & l_{12} = -d_{12}, & l_{13} = -d_{13}, \\ l_{21} = -d_{12}, & l_{22} = d_{11} + d_{33} - 2\mu_0, & l_{23} = -d_{23}, \\ l_{31} = -d_{13}, & l_{32} = -d_{23}, & l_{33} = d_{11} + d_{22} - 2\mu_0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Из (12) следует, что матрица D – симметричная, значит и матрица L должна быть симметричной.

Поставим задачу об определении условий на элементы матриц a, G, D, постоянную μ_0, при выполнении которых матрица $R = LH$ является симметричной. Тогда формула (14) будет иметь механический смысл.

Обозначим через r_{ij} элементы матрицы R и потребуем ее симметричности, т. е. выполнения равенств $r_{21} = r_{12}$, $r_{31} = r_{13}$, $r_{32} = r_{23}$. Тогда из (16)–(18) получим

$$\begin{gathered} a_1 g_{12}(d_{22} + d_{33} - 2\mu_0) - d_{12}(a_2 g_{22} - a_1 g_{11}) - d_{13} a_3 g_{32} - \\ -a_2 g_{21}(d_{11} + d_{33} - 2\mu_0) + d_{23} a_3 g_{31} = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} -a_1 g_{13}(d_{22} + d_{33} - 2\mu_0) + d_{12} a_2 g_{23} - d_{13}(a_1 g_{11} - a_3 g_{33}) - \\ -d_{23} a_2 g_{21} + a_3 g_{31}(d_{11} + d_{22} - 2\mu_0) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} -d_{12} a_1 g_{13} + d_{13} a_1 g_{12} + a_2 g_{23}(d_{11} + d_{33} - 2\mu_0) - \\ -d_{23}(a_3 g_{33} - a_2 g_{22}) - a_3 g_{32}(d_{11} + d_{22} - 2\mu_0) = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Отметим, что диагональные элементы матрицы R имеют вид

$$\begin{gathered} r_{11} = l_{11} h_{11} + l_{21} h_{21} + l_{13} h_{31}, \quad r_{22} = l_{12} h_{12} + l_{22} h_{22} + l_{23} h_{32}, \\ r_{33} = l_{13} h_{13} + l_{23} h_{23} + l_{33} h_{33}, \end{gathered} \tag{22}$$

где величины, входящие в правые части равенств (22), указаны в (17), (18).

Рассмотрим случай $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Из равенств (19)–(21) получим

$$d_{12}(a_2 g_{22} - a_1 g_{11}) = 0, \quad d_{13}(a_1 g_{11} - a_3 g_{33}) = 0, \quad d_{23}(a_3 g_{33} - a_2 g_{22}) = 0. \tag{23}$$

В силу (7) вектор угловой скорости гиростата имеет значение

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = a\mathbf{x}^{(1)} = aG\boldsymbol{\nu}^{(1)} + a\mathbf{x}_0^{(1)}. \tag{24}$$

Условия существования инвариантного соотношения (24) при $g_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$ для уравнений (1), (2) рассмотрены в [18]. Из равенств (23) следует, что матрица D из (8) может быть не диагональной.

Так как, согласно постановке задачи, решение $\boldsymbol{\nu}^{(1)}(t), \mathbf{x}_0^{(1)}(t)$ построено и для вектора $\mathbf{x}_0^{(1)}(t)$ имеет место уравнение (7), то условия (19)–(21) следует рассматривать, как условия на элементы матрицы D. Следовательно, необходимо получить либо известные примеры из динамики твердого тела, либо указать некоторые общие подходы, позволяющие исследовать равенства (19)–(21).

Рассмотрим два примера линейных инвариантных соотношений, полученных в [15, 16]. *Первый* пример характеризуется равенствами

$$x_1 = b_1\nu_1 + b_3\nu_3, \qquad x_2 = c_2\nu_2 + c_3\nu_3, \qquad x_3 = \frac{d_0}{a_3}\,\nu_3, \tag{25}$$

где b_1, b_3, c_2, c_3, d_0 – параметры (их значения будут указаны далее, в п. 3). Важно отметить лишь одно условие

$$a_1 b_1 = a_2 c_2, \tag{26}$$

которое входит в состав всех условий на параметры задачи [16]. Учтем в уравнениях (19)–(21) вид решения (25):

$$d_{12}(a_1b_1 - a_2c_2) = 0, \tag{27}$$

$$d_{22} + d_{33} - 2\mu_0 = \frac{1}{a_1b_3}\big[d_{12}a_2c_3 - d_{13}(a_1b_1 - d_0)\big], \tag{28}$$

$$d_{33} + d_{11} - 2\mu_0 = \frac{1}{a_2c_3}\big[d_{23}(d_0 - a_2c_2) + d_{12}a_1b_3\big]. \tag{29}$$

В силу условия (26) уравнение (27) становится тождеством, а из уравнений (28), (29) можно определить d_{22}, d_{11}. То есть в матрице D свободными параметрами можно считать $d_{12}, d_{13}, d_{23}, d_{33}$, а параметры d_{11}, d_{22} выражаются через эти параметры и постоянную μ_0.

Изучим *второе* решение из [15, 16]

$$x_1 = b_1\nu_1 + b_2\nu_2, \qquad x_2 = c_1\nu_1 + c_2\nu_2, \qquad x_3 = d_0\nu_3, \tag{30}$$

где b_1, b_2, c_1, c_2, d_0 – параметры. Запишем систему (19)–(21) с учетом равенств (30):

$$a_1b_2(d_{22} + d_{33} - 2\mu_0) - d_{12}(a_2c_2 - a_1b_1) - a_2c_1(d_{11} + d_{33} - 2\mu_0) = 0, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{13}(a_3d_0 - a_1b_1) - d_{23}a_2c_1 = 0,\\ d_{13}a_1b_2 - d_{23}(a_3d_0 - a_2c_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Рассмотрим систему (32) относительно d_{13}, d_{23}. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при d_{13}, d_{23}, используя свойства значений параметров решений, указанных в [15]:

$$\Delta = \Big(\frac{b_1}{A_1} - \frac{c_2}{A_2}\Big)^2 + \frac{4B_{12}^2}{(A_1 + A_2 + A_3)^2} > 0. \tag{33}$$

Из (32), (33) следует, что $d_{13} = 0$, $d_{23} = 0$. То есть в матрице D остальные элементы связаны условием (31).

В общем случае условия (19)–(21) служат для определения коэффициентов матрицы D. В первом варианте в качестве свободных параметров можно выбрать d_{12}, d_{13}, d_{23}, а параметры d_{11}, d_{22}, d_{33} выражать через данные. Во втором варианте в качестве свободных параметров можно взять d_{11}, d_{22}, d_{33}, а параметры d_{12}, d_{13}, d_{23} находить из системы (19)–(21).

3. Обобщение условий (13) в случае прецессионных движений гиростата. Рассмотрим решение [15] уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом, которое характеризуется инвариантными соотношениями (ИС) (25). В этом решении

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{a_1b_1}{a_2}, \qquad b_1 = \frac{a_2a_3B_{11}}{a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3}, \\ B_{12} = 0, \qquad b_3 = \frac{a_3B_{13}}{a_3 - a_1}, \qquad c_3 = \frac{a_3B_{23}}{a_3 - a_2}, \end{gathered} \tag{34}$$

$$B_{22} = \frac{B_{11}(a_2a_3 + a_1a_2 - a_1a_3)}{a_1a_2 - a_2a_3 + a_1a_3}, \quad B_{33} = \frac{B_{11}(a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3)}{a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3},$$

$$\begin{aligned} &C_{12} = \frac{a_1a_2b_3c_3}{a_3}, \quad C_{13} = \frac{a_1b_1b_3(a_1 - a_3)}{a_3}, \quad C_{23} = \frac{a_1b_1c_3(a_2 - a_3)}{a_3}, \\ &C_{11} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3}\big[(b_1^2 - b_3^2)(a_1 - a_3) + a_3c_3^2\big], \\ &C_{22} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3}\big[(b_1^2 - c_3^2)(a_2 - a_3) + a_3b_3^2\big], \\ &s_1 = -a_1b_3\lambda_3, \quad s_2 = -a_2c_3\lambda_3, \quad s_3 = -a_1b_1\lambda_3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Уравнения Пуассона (2) для данного случая ИС (25) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \nu_3[(d_0 - a_1b_1)\nu_2 - a_2c_3\nu_3], \\ \dot\nu_2 &= -\nu_3[(d_0 - a_1b_1)\nu_1 - a_1b_3\nu_3], \\ \dot\nu_3 &= \nu_3(a_2c_3\nu_1 - a_1b_3\nu_2). \end{aligned} \tag{36}$$

В статье [15] показано, что уравнения (36) имеют интегралы

$$a_1b_3\nu_1 + a_2c_3\nu_3 + (d_0 - a_1b_1)\nu_3 = -a_3\lambda_3, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{37}$$

Используя первые интегралы (37) и третье уравнение из (36), получим

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{\varkappa_0^2}\big[a_1b_3f(\nu_3) + a_2c_3\sqrt{F(\nu_3)}\big], \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{\varkappa_0^2}\big[a_2c_3f(\nu_3) - a_1b_3\sqrt{F(\nu_3)}\big], \end{aligned} \tag{38}$$

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\,\nu_3}{\nu_3\sqrt{F(\nu_3)}} = t - t_0. \tag{39}$$

В формулах (38), (39) введены обозначения

$$\begin{gathered} \varkappa_0^2 = a_1^2b_3^2 + a_2^2c_3^2, \qquad f(\nu_3) = (a_1b_1 - d_0)\nu_3 - a_3\lambda_3, \\ F(\nu_3) = \varkappa_0^2(1 - \nu_3^2) - f^2(\nu_3). \end{gathered} \tag{40}$$

Для получения функций $x_1(\nu_3), x_2(\nu_3)$ необходимо в соотношения (25) подставить значения (38), (39). В решении (25), (38) компонента ν_3 является вспомогательной переменнной, зависимость $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла (39). Как следует из (39), функция $\nu_3(t)$ является эллиптической функцией времени.

Данное решение можно использовать для построения решения уравнений (4), (5), для которого $\boldsymbol{\lambda}(t)$ определяется формулой (8). Ранее, при рассмотрении соотношения (11), полагалось, что выполнено условие (13). Структура решения (25), (38)–(40), имеющая место для уравнений (1), (2) при условиях (34), (35) (индекс 1 у решения опускаем, согласно ранее принятому условию), позволяет не принимать во внимание равенства (13). Действительно, рассмотрим первое соотношение из (37) в векторном виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} = \varepsilon_1, \tag{41}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (a_1 b_3,\, a_2 c_3,\, d_0 - a_1 b_1), \qquad \varepsilon_1 = -a_3 \lambda_3. \tag{42}$$

Инвариантное соотношение (41) описывает прецессионное движение гиростата [17]. Выделим в равенстве (11) слагаемое

$$\left(\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)} - \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}^{(1)} = k_2 - k_1 - \mu_0, \tag{43}$$

при записи которого учтено равенство (12). В соотношениях (43) $\boldsymbol{\lambda}_0^{(1)} = (0, 0, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, который характеризует в силу (35) решение (25), (38)–(40). Потребуем, чтобы равенство (43) было следствием (41). Тогда получим

$$\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)} = \boldsymbol{\lambda}_0^{(1)} + \varkappa_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0, \qquad k_2 - k_1 - \mu_0 + \varkappa_0 a_3 \lambda_3 = 0, \tag{44}$$

где $\varkappa_0$ – параметр, имеющий постоянное значение. Таким образом, решение (25), (38)–(40) может быть взято за основу построения решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом (4), (5), которое отличается от решения [14] тем, что в формуле (8) гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)}$ не коллинеарен, в силу (44), гиростатическому моменту $\boldsymbol{\lambda}_0^{(1)} = (0, 0, \lambda_3)$.

Заключение. В статье уточнены результаты работы [17], посвященные доказательству симметричности матрицы, характеризующей переменный гиростатический момент, и построены новые условия существования решения задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Авторы выражают благодарность Г.В. Горру за постановку задачи.

1. *Thomson W.* On the motion of rigid sonds in a liquid circulating irrotationally throngh perforations in them or in any fixed solid // Proc. of the Royal Society of Edinburg. – 1872. – № 7. – P. 668–674.
2. *Gray A.* A treatise on gurostatics and rotational motion. Theory and applications. – New York: Reprinted by Dover Publications, 1959. – 530 p.
3. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Mathematic. – 1899. – **22**. – P. 201–358.

4. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1949. – С. 31–152. (Изд. 1-е: Журн. Рус. физ.-хим. О-ва. Часть физ. – 1885. Т. 17. Отд. 1. – Вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280.
5. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Москов. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. № 2. – С. 83–96.
6. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
8. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
9. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 6. – С. 999–1009.
10. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч.1. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
11. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
12. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: Изд-е ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", 2017. – 250 с.
14. *Мазнев А.В., Белоконь Т.В.* Об условиях существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2020. – № 1. – С. 22–34.
15. *Скрыпник С.В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
16. *Горр Г.В., Скрыпник С.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях дифференциальных уравнений динамики // Тр. ИПММ НАНУ. – 2000. – **5**. – С. 38–43.
17. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
18. *Мазнев А.В., Белоконь Т.В.* О движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в решениях уравнений динамики с тремя инвариантными соотношениями // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – Вып. 3–4. – С. 18–30.

E.A. Ignatova, S.V. Skrypnyk

About one solution of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces

Existence conditions of a particular solution to the problem of the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment based on the previously obtained solution for the case of a constant gyrostatic moment are researched in this article. The difference between the obtained result and the results of other authors consists in a new representation of the gyrostatic moment.

Keywords: *constant and variable gyrostatic moment, potential and gyroscopic forces, linear invariant relations.*

ГО ВПО "Донецкий национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского", Донецк

Получено 09.09.20

`katerina-ignat@yandex.ru, skrypnik.svetlana2020@gmail.com`