

Необхідні і достатні умови існування єдиного розв'язку однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над полем $GF(3)$

Володимир І. Масол, Л. О. Ромашова

(Представлена С. Я. Мазном)

Анотація. Для однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над полем $GF(3)$ доведено дві теореми щодо умов існування єдиного розв'язку в залежності від інтервалів для розподілів коефіцієнтів системи.

2000 MSC. 34K06, 60H10.

Ключові слова та фрази. Лінійні випадкові рівняння, поле $GF(3)$, єдиний розв'язок.

1. Основні результати

Нехай над полем $GF(3)$ задана система

$$\sum_{j=1}^n a_j^{(\mu)} x_j = 0, \quad \mu \in J, \quad (1.1)$$

де $J = \{1, 2, \dots, T\}$, $T \geq 1$ та $\sum_3$ — символ додавання у полі $GF(3)$, яка задовольняє умову (А).

Умова (А): Коефіцієнти $a_j^{(\mu)}$, $1 \leq j \leq n$, $\mu \in J$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких приймає значення a з ймовірністю $P\{a_j^{(\mu)} = a\} = p_\mu$, $a \in GF(3)$, $a \neq 0$ та значення $0 \in GF(3)$ з ймовірністю $P\{a_j^{(\mu)} = 0\} = 1 - 2p_\mu$.

Покладемо ν_n кількість розв'язків $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, системи (1.1) з числом $|\bar{x}|$ ненульових компонент більшим нуля, $|\bar{x}| > 0$ (V_n — сукупність усіх n -вимірних векторів над полем $GF(3)$).

Стаття надійшла в редакцію 1.02.2009

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови (A) та*

$$\frac{\ln n + z}{n} \leq p_\mu \leq \frac{1}{2} - \frac{\ln n + z}{n}, \quad \mu \in J, \quad (1.2)$$

де $z = o(\ln n)$, $n \rightarrow \infty$.

Тоді умова

$$\frac{T}{n} \geq 1 + \gamma_n, \quad (1.3)$$

де $n^\varepsilon \gamma_n \rightarrow \infty$, $\gamma_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, де $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, є достатньою, а умова

$$\frac{T}{n} \geq \frac{\ln 1,8}{\ln 3}, \quad (1.4)$$

є необхідною для того, щоб

$$P\{\nu_n > 0\} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови (A) та*

$$\frac{E_n \ln n}{n} \leq p_\mu \leq \frac{1}{2} - \frac{E_n \ln n}{n}, \quad \mu \in J, \quad (1.6)$$

де $E_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Тоді умова

$$T = n + A_n, \quad (1.7)$$

де $A_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, є достатньою, а умова (1.4), є необхідною для того, щоб мало місце співвідношення (1.5).

2. Допоміжні твердження

Лема 2.1. *Нехай ξ — випадкова величина, яка має представлення $\xi = \xi_1 +_3 \dots +_3 \xi_k$, де $\xi_1, \dots, \xi_k$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини; $P\{\xi_s = 0\} = 1 - 2p^*$, $P\{\xi_s = a\} = p^*$, $a \in GF(3)$, $a \neq 0$, $s = 1, \dots, k$, $1 \leq k < \infty$, $+_3$ — операція сумування в полі $GF(3)$. Тоді*

$$P\{\xi = a\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3p^*)^k, \quad a \in GF(3), \quad a \neq 0.$$

Доведення. Доведення леми 2.1 можна виконати методом математичної індукції за параметром $k \geq 1$. □

Лема 2.2. Якщо виконується умова (А), то математичне сподівання $E\nu_n$ випадкової величини ν_n дорівнює

$$E\nu_n = 3^{-T} \sum_{t=1}^n \binom{n}{t} 2^t Q, \quad (2.1)$$

$$Q = \prod_{\mu=1}^T (1 + 2(1 - 3p_\mu)^t). \quad (2.2)$$

Доведення. Нехай $\xi(\bar{x})$ — індикатор події, яка полягає у тому, що вектор $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, є розв'язком системи (1.1). З урахуванням умови (А) маємо

$$E\nu_n = \sum_{\bar{x}: |\bar{x}| \geq 1} E\xi(\bar{x}) = \sum_{\bar{x}: |\bar{x}| \geq 1} \prod_{\mu=1}^T P\left(\sum_{j=1}^n a_j^{(\mu)} x_j = 0\right). \quad (2.3)$$

Кількість доданків у сумі $\sum_3$ з правої частини (2.3), які відмінні від 0, дорівнює t , де t — загальна кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}$, $|\bar{x}| \geq 1$. Тоді, скориставшись (2.3) та лемою 2.1, приходимо до (2.1). $\square$

Для довільних векторів $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\bar{x}^{(q)} = (x_1^{(q)}, \dots, x_n^{(q)})$, $q = 1, 2$, позначимо через $i_{c_1 c_2}$ кількість компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, які дорівнюють c_1 , а у векторі $\bar{x}^{(2)}$ їм відповідають компоненти, що дорівнюють c_2 , де $c_1, c_2 \in GF(3)$, $0 \leq i_{c_1 c_2} \leq n$.

Нехай $I = \{i_{01}, i_{02}, i_{10}, i_{20}, i_{11}, i_{22}, i_{12}, i_{21}\}$, $i = i_{01} + i_{02}$, $l = i_{10} + i_{20}$, $t = \sum_{j \in I} j$, $E\nu_n^{[2]} = E\nu_n(\nu_n - 1)$.

Лема 2.3. Якщо виконується умова (А), то

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T} \sum_{t=1}^n \binom{n}{t} \sum_{j \in I} \frac{t!}{j!} Q^*, \quad (2.4)$$

де

$$Q^* = \prod_{\mu=1}^T \left(1 + 2 \left(\sum_{r=1}^4 (1 - 3p_\mu)^{\Gamma(r)} \right)\right), \quad (2.5)$$

сумування $\sum$ відбувається за всіма $j \in I$ так, що $\sum_{j \in I} j = t$; в рівності (2.4) елементи множини I задовольняють співвідношенням

$$t - i \geq 1, \quad (2.6)$$

$$t - l \geq 1, \quad (2.7)$$

$$i + l + i_{12} + i_{21} \geq 1; \quad (2.8)$$

параметри $\Gamma^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ визначаються відповідно рівностями

$$\Gamma^{(1)} = i + l, \quad (2.9)$$

$$\Gamma^{(2)} = t - l, \quad (2.10)$$

$$\Gamma^{(3)} = t - i, \quad (2.11)$$

$$\Gamma^{(4)} = t. \quad (2.12)$$

Доведення. Користуючись умовою (A) та співвідношенням

$$E\nu_n^{[2]} = \sum^* E\xi(\bar{x}^{(1)})\xi(\bar{x}^{(2)}),$$

де сумування $\sum^*$ виконується за всіма парами $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$ векторів $\bar{x}^{(q)} \in V_n$ таким, що $|\bar{x}^{(q)}| \geq 1$, $q = 1, 2$, $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, отримуємо

$$\begin{aligned} E\nu_n^{[2]} &= \sum_{\mu=1}^* \prod_{\mu=1}^T P\{\cup \{A^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}) = y_k, A^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = y_{12}, k = 1, 2\}\} \\ &= \sum_{\mu=1}^* \prod_{\mu=1}^T \sum^{**} P\{A^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = y_{12}\} \prod_{k=1,2} P\{A^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}) = y_k\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де символ $\cup / \sum^{**} /$ об'єднання / сумування / розповсюджується на всі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1 + {}_3 y_{12} = 0, \\ y_2 + {}_3 y_{12} = 0 \end{cases}$$

над полем $GF(3)$; для $\mu \in J$

$$A^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\omega \in E^{(12)}} {}_3 a_{\omega}^{(\mu)}, \quad A^{(\mu)}(\bar{x}^{(q)}) = \sum_{\omega \in E^{(q)}} {}_3 a_{\omega}^{(\mu)}, \quad q = 1, 2,$$

де

$$E^{(12)} = \{j, 1 \leq j \leq n : x_j^{(q)} \neq 0, q = 1, 2\},$$

$$E^{(q)} = \{j, 1 \leq j \leq n : x_j^{(q)} \neq 0, x_j^{(q^*)} = 0\},$$

$q \in \{1, 2\}$, $q^* \in \{1, 2\}$, $q^* \neq q$.

Нехай $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ та $\gamma^{(3)}$ — кількість елементів відповідно множин $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ та $E^{(12)}$.

Покладемо

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} &= \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}, & \Gamma^{(2)} &= \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}, \\ \Gamma^{(3)} &= \gamma^{(1)} + \gamma^{(3)}, & \Gamma^{(4)} &= \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}.\end{aligned}$$

За допомогою умови (A) та леми 2.1 співвідношення (2.13) можна переписати у вигляді

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T} \sum^* \prod_{\mu=1}^T \left(1 + 2 \left(\sum_{k=1}^4 (1 - 3p_\mu)^{\Gamma^{(k)}} \right) \right). \quad (2.14)$$

Сумування $\sum^*$ у правій частині (2.14) за всіма парами $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)})$ такими, що $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $|\bar{x}^{(q)}| \geq 1$, $q = 1, 2$, еквівалентно сумуванню за всіма параметрами $j \in I$, наведеного у правій частині (2.4). Нерівності (2.6), (2.7), (2.8) гарантують виконання відповідно співвідношень $|\bar{x}^{(1)}| \geq 1$, $|\bar{x}^{(2)}| \geq 1$ та $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$.

Далі перевіримо рівність (2.9). Дійсно, користуючись тим, що сума $i_{10} + i_{20}$ — це кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, яким відповідають нульові компоненти вектора $\bar{x}^{(2)}$, знаходимо $|E^{(1)}| = \gamma^{(1)} = i_{10} + i_{20}$. Аналогічно отримуємо $|E^{(2)}| = \gamma^{(2)} = i_{01} + i_{02}$. Отже, $\Gamma^{(1)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = i + l$, що доводить (2.9). Таким же чином перевіряються рівності (2.10)–(2.12). $\square$

Лема 2.4. Якщо виконується умова (A) та

$$p_\mu \leq \frac{1}{2} - v, \quad (2.15)$$

де $0 < v \leq \frac{1}{2}$, $\mu \in J$, то

$$E\nu_n > 0. \quad (2.16)$$

Доведення. З урахуванням (2.1) та (2.2) для доведення співвідношення (2.16) достатньо показати, що для $n \geq 1$

$$Q > 0. \quad (2.17)$$

З цією метою представимо добуток Q , визначений рівністю (2.2), у вигляді

$$Q = \prod_{r=1}^3 Q_r, \quad (2.18)$$

де Q_r позначає добуток усіх множників з правої частини (2.2), для яких параметр μ належить множині W_r , $r = 1, 2, 3$. Тут

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \mu, 1 \leq \mu \leq T : p_\mu \leq \frac{1}{3} \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \mu, 1 \leq \mu \leq T : \frac{1}{3} < p_\mu \leq \frac{1}{2} - v, \quad t - \text{парне} \right\}, \\ W_3 &= \left\{ \mu, 1 \leq \mu \leq T : \frac{1}{3} < p_\mu \leq \frac{1}{2} - v, \quad t - \text{непарне} \right\}, \end{aligned}$$

де $t \geq 1$, t — параметр з правої частини рівності (2.2).

Покладемо η_r — кількість елементів множини W_r , $\eta_r = |W_r|$, $r = 1, 2, 3$. Тоді

$$\sum_{r=1}^3 \eta_r = T. \quad (2.19)$$

З означень добутоків Q_1 та Q_2 отримуємо, очевидно

$$Q_1 \geq 1, \quad Q_2 \geq 1. \quad (2.20)$$

За допомогою умови (2.15) знаходимо

$$Q_3 \geq (6v)^{\eta_3}. \quad (2.21)$$

Із (2.18)–(2.21) випливає

$$Q \geq (6v)^{\eta_3},$$

звідки маємо (2.17), а отже й (2.16). $\square$

Позначимо

$$p_{\max} = \max_{1 \leq \mu \leq T} p_\mu, \quad p_{\min} = \min_{1 \leq \mu \leq T} p_\mu.$$

Лема 2.5. Нехай виконуються умови (A), (1.2) та

$$\frac{T}{n} < \frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma, \quad (2.22)$$

де γ — фіксоване додатне число.

Тоді для довільного $t \in F$, де $F = \left[\left[\frac{2}{3}n \right] - \left[\frac{n}{\ln n} \right]; n \right]$ має місце співвідношення

$$Q \geq a_1, \quad (2.23)$$

при $n \rightarrow \infty$, де $[d]$ — знак цілої частини числа d . Тут і далі a_z — фіксоване додатне число, $a_z < \infty$, $z = 1, 2, \dots$

Доведення. В силу (2.18) для доведення (2.23) достатньо показати, що для $t \in F$ та $n \geq 1$ існує таке a_2 , що

$$Q_r \geq a_2, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

За допомогою (1.2) для $\mu \in W_1$ та $t \in F$ маємо при $n \rightarrow \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^t \geq (1 - 3p_{\max})^t \geq -a_3 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}. \quad (2.25)$$

Використовуючи (2.22) та (2.25), отримуємо при $n \rightarrow \infty$

$$Q_1 \geq \left(1 - a_4 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}\right)^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n},$$

звідки маємо (2.24) для $r = 1$.

Перевіримо співвідношення (2.24) для $r = 2$. Дійсно, беручи до уваги (1.2) для $\mu \in W_2$ та $t \in F$, знаходимо при $n \rightarrow \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^t \geq (1 - 3p_{\min})^t \geq -a_5 n^{-3(1+o(1))}. \quad (2.26)$$

З урахуванням (2.22) та (2.26) отримуємо для $n \rightarrow \infty$

$$Q_2 \geq \left(1 - a_6 n^{-3(1+o(1))}\right)^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n}. \quad (2.27)$$

За допомогою (2.27) приходимо до (2.24) для $r = 2$.

Нерівність (2.24) для $r = 3$ випливає з (2.2) та того, що для $\mu \in W_3$ і $t \in F$ маємо при $n \rightarrow \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^t \geq -(3p_{\max} - 1)^t \geq -a_3 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}.$$

Звідси з урахуванням (2.18) та (2.24) отримуємо співвідношення (2.23). $\square$

Лема 2.6. *Якщо виконуються умови (А), (1.2) та (1.3), то при $n \rightarrow \infty$*

$$D_1 = o(1), \quad (2.28)$$

де

$$D_1 = 3^{-T} \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]} \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Тут і далі ε_q — достатньо мале фіксоване додатне число, $q \geq 1$.

Доведення. З урахуванням (1.2) та співвідношення $p_{\min}t \in (0; 1)$ при $n \rightarrow \infty$ для $t \in [1; [\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]]$ отримуємо

$$Q \leq 3^T (1 - 2p_{\min}t + 3(p_{\min}t)^2)^T. \quad (2.29)$$

Використовуючи (2.29), знаходимо при $n \rightarrow \infty$

$$D_1 \leq \sum_{t=1}^{[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]} \frac{(2n)^t}{t!} \exp \left\{ -2Ttp_{\min} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n} p_{\min} \right) \right\}. \quad (2.30)$$

Оскільки в силу умови (1.2) для всіх $t \in [1; [\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]]$ маємо

$$\left(\frac{2}{e^{2Tp_{\min}(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n} p_{\min}) - \ln n}} \right)^t \leq \left(\frac{2}{e^{2\frac{T}{n}(\ln n + z)(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1(1 + \frac{z}{\ln n})) - \ln n}} \right)^t,$$

то з урахуванням (1.3) та (2.30) приходимо до оцінки

$$D_1 \leq \sum_{t=1}^{[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]} \frac{1}{t!} \exp \{ -t(\ln n + 2z)(1 - 3\varepsilon_1 + o(1)) \}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Із (2.31) випливає, очевидно, (2.28). $\square$

Лема 2.7. *Якщо виконуються умови (A), (1.2) та (1.3), то при $n \rightarrow \infty$*

$$D_2 = o(1), \quad (2.32)$$

де

$$D_2 = 3^{-T} \sum_{t=[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}] + 1}^{[\varepsilon_2 n]} \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Доведення. Для $t \in [[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}] + 1, [\varepsilon_2 n]]$ знаходимо

$$Q \leq \left(1 + 2 \exp \left\{ -3p_{\min} \left(\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n} \right] + 1 \right) \right\} \right)^T. \quad (2.33)$$

Із (1.2) та (2.33) випливає при $n \rightarrow \infty$

$$D_2 \leq \left(\frac{e^{\sigma_1(\varepsilon_2) \frac{n}{T}} \left(1 + \frac{2}{e^{3\varepsilon_1(1 + \frac{z}{\ln n})}} \right)}{3} \right)^T, \quad (2.34)$$

де $\sigma_r(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), $r \geq 1$. Беручи до уваги припущення (1.3), умову (1.2) в частині $z = o(\ln n)$ та нерівність (2.34), отримуємо (2.32). $\square$

Лема 2.8. Якщо виконуються умови (А), (1.2) та (1.3), то при $n \rightarrow \infty$

$$D_3 = o(1), \quad (2.35)$$

де

$$D_3 = 3^{-T} \sum_{t=[\varepsilon_2 n]+1}^n \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Доведення. Для всіх $t \in [[\varepsilon_2 n] + 1, n]$

$$Q \leq (1 + 2 \exp \{-3p_{\min}([\varepsilon_2 n] + 1)\})^T. \quad (2.36)$$

Використовуючи (1.2) та (2.36), маємо

$$D_3 \leq \frac{3^n}{3^T} \exp \left\{ \frac{2T}{\exp \{3\varepsilon_2 (\ln n) (1 + \frac{z}{\ln n})\}} \right\}. \quad (2.37)$$

За допомогою співвідношень $z = o(\ln n)$, $n^\varepsilon \gamma_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ та (2.37) отримуємо

$$D_3 \leq \exp \left\{ -T \gamma_n (\ln 3) \left\{ -\frac{2}{\gamma_n (\ln 3) n^{3\varepsilon_2(1+o(1))}} + 1 + O(\gamma_n) \right\} \right\}.$$

Звідки безпосередньо приходимо до (2.35). $\square$

Лема 2.9. Якщо виконуються умови (А), (1.6) та (1.7), то має місце співвідношення (2.35).

Доведення. Справедливість рівності (2.35) випливає з того, що по-перше, для добутку Q справедлива оцінка (2.36) і, по-друге, використовуючи умову (1.6), отримуємо при $n \rightarrow \infty$

$$D_3 \leq \frac{3^n}{3^T} \left(1 + \frac{2}{n^{3\varepsilon_2 E_n}} \right)^T,$$

звідки, беручи до уваги (1.7), маємо при $n \rightarrow \infty$

$$D_3 \leq \exp \left\{ \frac{2n}{n^{3\varepsilon_2 E_n}} \right\} \left(\frac{\exp \left\{ \frac{2}{n^{3\varepsilon_2 E_n}} \right\}}{3} \right)^{A_n}. \quad (2.38)$$

За допомогою співвідношень $E_n \rightarrow \infty$, $A_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ та (2.38) знаходимо (2.35) при $n \rightarrow \infty$. $\square$

3. Доведення теорем

Доведення теореми 1.1. Достатність. Покажемо, що при виконанні (1.3) має місце

$$E\nu_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Беручи до уваги (2.1) та (2.2), математичне сподівання $E\nu_n$ можна подати у вигляді

$$E\nu_n = \sum_{h=1}^3 D_h, \quad (3.2)$$

де

$$D_h = 3^{-T} \sum_{t \in R_h} \binom{n}{t} 2^t Q, \quad h = 1, 2, 3.$$

Замкнені відрізки R_h , $h = 1, 2, 3$ кінцями яких слугують цілі числа, дорівнюють

$$R_1 = \left[1, \left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]\right], \quad R_2 = \left[\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right] + 1, [\varepsilon_2 n]\right], \quad R_3 = [[\varepsilon_2 n] + 1, n].$$

За допомогою (3.2) для обґрунтування (3.1) достатньо переконатися, що при $n \rightarrow \infty$

$$D_h = o(1) \quad (3.3)$$

для $h = 1, 2, 3$. Використовуючи (2.28), (2.32) та (2.35), отримуємо (3.3) для $h = 1, 2, 3$.

Із (3.2) та (3.3) випливає (3.1). З урахуванням (3.1) та нерівності Чебишева отримуємо (1.5).

Необхідність. Нехай при $n \rightarrow \infty$ ймовірність $P(\nu_n > 0)$ прямує до нуля, тобто

$$P(\nu_n > 0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Покажемо, що тоді виконується (1.4). Припустимо, що рівність (1.4) не виконується, тобто має місце співвідношення (2.22) і переконаємося, що у такому випадку

$$P(\nu_n > 0) > 0 \quad (3.5)$$

при $n \rightarrow \infty$, тобто з додатною ймовірністю існують розв'язки, які відмінні від нульового. З цією метою перевіримо наступні оцінки при $n \rightarrow \infty$

$$(E\nu_n)^{-1} \leq a_7, \quad (3.6)$$

$$E\nu_n^{[2]} (E\nu_n)^{-2} \leq a_8, \quad (3.7)$$

з подальшим використанням їх в нерівності [1]

$$P(\nu_n > 0) \geq ((E\nu_n)^{-1} + E\nu_n^{[2]}(E\nu_n)^{-2})^{-1}. \quad (3.8)$$

Дійсно, за допомогою співвідношень (2.1), (2.2) та леми 2.4 маємо для $t \in F$ при $n \rightarrow \infty$

$$(E\nu_n)^{-1} \leq 3^{T-n}\delta_n, \quad (3.9)$$

де

$$\delta_n \leq a_1^{-1} \left(3^{-n} \sum_{t \in F} \binom{n}{t} 2^t \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

Використовуючи рівність $3^{-n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 2^t = 1$, отримуємо

$$3^{-n} \sum_{t=0}^{\left[\frac{2}{3}n\right] - \left[\frac{n}{\ln n}\right]} \binom{n}{t} 2^t \leq \exp \left\{ -\frac{n}{\ln^2 n} \left(\frac{9}{4} + O((\ln n)^{-1}) \right) \right\} \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$, звідки

$$3^{-n} \sum_{t \in F} \binom{n}{t} 2^t \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Із співвідношень (3.9)–(3.11) випливає (3.6).

Покажемо, що при $n \rightarrow \infty$ існує таке число a_9 , для якого

$$(3^{T-n} E\nu_n)^{-1} \leq a_9. \quad (3.12)$$

Дійсно, беручи до уваги (3.9), знаходимо

$$(3^{T-n} E\nu_n)^{-1} \leq \delta_n \quad (3.13)$$

при $n \rightarrow \infty$. Але з урахуванням (3.10) та (3.11) приходимо до нерівності $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq a_1^{-1}$, яка разом з (3.13) доводить (3.12).

Із (3.12) випливає, що для доведення (3.7) достатньо показати, що має місце співвідношення

$$9^{T-n} E\nu_n^{[2]} \leq a_{10}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

З цією метою за допомогою (2.4), (2.5) ліву частину (3.14) перепишемо у вигляді

$$9^{T-n} E\nu_n^{[2]} = 9^{-n} S(n; Q^*), \quad (3.15)$$

де

$$S(n; Q^*) = \sum_{t=1}^n \binom{n}{t} \sum_{\substack{\sum j=t \\ j \in I}} \frac{t!}{\prod j!} Q^*. \quad (3.16)$$

Суму $S(n; Q^*)$ подамо у вигляді двох сум $S_1(n; Q^*)$ та $S_2(n; Q^*)$, а саме:

$$S(n; Q^*) = S_1(n; Q^*) + S_2(n; Q^*), \quad (3.17)$$

де $S_1(n; Q^*)$ відрізняється від $S(n; Q^*)$ тим, що сумування у правій частині (3.16) розповсюджується на всі j , $j \in I$, такі, що

$$\Gamma^{(k)} \geq \varepsilon n, \quad (3.18)$$

де $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\Gamma^{(k)}$ визначені рівностями (2.9)–(2.12) для $k = 1, 2, 3, 4$; $S_2(n; Q^*)$ — сума доданків з $S(n; Q^*)$, які не увійшли до $S_1(n; Q^*)$. Тоді беручи до уваги (1.2), (2.5), (2.22) та (3.18), приходимо до оцінки

$$S_1(n; Q^*) \leq S_1(n; 1) Q_1^*, \quad (3.19)$$

де $Q_1^* = (1 + 8n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})})^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Нерівність

$$S_1(n; 1) \leq 9^n \quad (3.20)$$

у поєднанні з (3.19) дає

$$S_1(n; Q^*) \leq a_{11} 9^n (1 + 8n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})})^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}. \quad (3.21)$$

Суму $S_2(n; Q^*)$ представимо у вигляді

$$S_2(n; Q^*) = \sum_{r=1}^4 S_{2;r}(n; Q^*), \quad (3.22)$$

де $S_{2;r}(n; Q^*)$ відрізняється від $S_2(n; Q^*)$ тим, що сумування у правій частині (3.16) відбувається за всіма параметрами j , $j \in I$ такими, що існують $l_1, \dots, l_r \in \{1, 2, 3, 4\}$, для яких $\Gamma^{(l_h)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(k)} \geq \varepsilon n$, де $k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{l_1, \dots, l_r\}$, $h = 1, \dots, r$, $r = 1, 2, 3, 4$. Далі, для $r = 1, 2, 3, 4$ подамо $S_{2;r}(n; Q^*)$ у вигляді

$$S_{2;r}(n; Q^*) = \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_r \leq 4} S_{2;r;t_1, \dots, t_r}(n; Q^*), \quad (3.23)$$

де $S_{2;r;t_1, \dots, t_r}(n; Q^*)$ позначає суму усіх доданків, що належать $S_{2;r}(n; Q^*)$ та для яких $\Gamma^{(t_l)} < \varepsilon n$, $l = 1, \dots, r$, $\Gamma^{(t')}\geq \varepsilon n$, $t' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$.

Покажемо, що при $r = 1$

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq a_{12} 3^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} e^{\sigma_2(\varepsilon)n} \times \left(1 + 2n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} (5^n + 3^n + 1). \quad (3.24)$$

Дійсно, за допомогою (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 1$ отримуємо

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q_{2;r}^* \sum_{l=1}^4 S_{2;r;l}(n; 1), \quad (3.25)$$

де $Q_{2;r}^* = a_{13} 3^{(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma)n} (1 + 2n^{-3\varepsilon(1 + \frac{z}{\ln n})})^{(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma)n}$.

Далі дамо оцінку кожному з чотирьох доданків $S_{2;r;l}(n; 1)$, $l = 1, 2, 3, 4$ з правої частини (3.25).

Із нерівності $\Gamma^{(1)} < \varepsilon n$ та співвідношення (2.9) випливає, що усі параметри j , $j \in I^* \setminus \{i_{11}, i_{22}, i_{12}, i_{21}, i_{00}\}$, $I^* = I \cup \{i_{00}\}$, які беруть участь у записі суми $S(n; Q^*)$ /див. (3.16)/, не перевищують εn . Звідки, використовуючи поліноміальну формулу, маємо

$$S_{2;1;1}(n; 1) \leq 5^n \exp\{\sigma_3(\varepsilon)n\}. \quad (3.26)$$

Для того, щоб переконатися в справедливості оцінки

$$S_{2;1;2}(n; 1) \leq 3^n \exp\{\sigma_4(\varepsilon)n\}, \quad (3.27)$$

достатньо помітити, беручи до уваги (2.10) та нерівність $\Gamma^{(2)} < \varepsilon n$, що усі параметри j , $j \in I^* \setminus \{i_{10}, i_{00}, i_{20}\}$ із правої частини (3.16) не перевищують εn .

За допомогою (2.11) аналогічно (3.27) знаходимо

$$S_{2;1;3}(n; 1) \leq 3^n \exp\{\sigma_5(\varepsilon)n\}. \quad (3.28)$$

Із нерівності $\Gamma^{(4)} < \varepsilon n$ та співвідношення (2.12) випливає, що усі параметри j , $j \in I^* \setminus \{i_{00}\}$, які беруть участь у записі суми $S(n; Q^*)$, не перевищують εn , звідки маємо

$$S_{2;1;4}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_6(\varepsilon)n\}. \quad (3.29)$$

З урахуванням (3.25)–(3.29), отримуємо

$$S_{2;1}(n; 1) \leq a_{14} \exp\{\sigma_7(\varepsilon)n\} (5^n + 3^n + 1). \quad (3.30)$$

Співвідношення (3.25) та (3.30) доводять (3.24).

Покажемо, що для $r = 2$ має місце оцінка

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq a_{15} e^{\sigma_8(\varepsilon)n} 5^{(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma)n} \times \left(1 + \frac{4}{5} n^{-3\varepsilon(1 + \frac{z}{\ln n})}\right)^{(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma)n}. \quad (3.31)$$

Дійсно, за допомогою (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 2$ приходимо до

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q_{2;r}^* \sum_{1 \leq t_1 < t_2 \leq 4} S_{2;r;t_1,t_2}(n; 1), \quad (3.32)$$

де $Q_{2;r}^* = a_{16} 5^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \left(1 + \frac{4}{5} n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Враховуючи нерівності $\Gamma^{(t_1)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_2)} < \varepsilon n$, $1 \leq t_1 < t_2 \leq 4$, та співвідношення (2.9)–(2.12) встановлюємо, що усі параметри $j, j \in I^* \setminus \{i_{00}\}$, із правої частини (3.16), не перевищують εn . Це дозволяє записати наступну оцінку

$$\max_{1 \leq t_1 < t_2 \leq 4} S_{2;2;t_1,t_2}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_9(\varepsilon)\}. \quad (3.33)$$

Беручи до уваги (3.32) та (3.33), маємо для $r = 2$

$$S_{2;r}(n; 1) \leq a_{17} \exp\{\sigma_{10}(\varepsilon)\}. \quad (3.34)$$

Із (3.32) та (3.34) випливає (3.31).

Переконаємось у тому, що для $r = 3$

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq a_{18} e^{\sigma_{11}(\varepsilon)n} 7^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \times \left(1 + \frac{2}{7} n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}. \quad (3.35)$$

На основі (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 3$ знаходимо

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q_{2;r}^* \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4} S_{2;r;t_1,t_2,t_3}(n; 1), \quad (3.36)$$

де $Q_{2;r}^* = a_{19} 7^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \left(1 + \frac{2}{7} n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Покажемо, що

$$\max_{1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4} S_{2;2;t_1,t_2,t_3}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_{12}(\varepsilon)\}. \quad (3.37)$$

Дійсно, нерівності $\Gamma^{(t_1)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_2)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_3)} < \varepsilon n$, $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4$, співвідношення (2.9)–(2.12) та поліноміальна формула дозволяють аналогічно (3.33) отримати (3.37).

Беручи до уваги (3.36) та (3.37), приходимо до оцінки для $r = 3$

$$S_{2;r}(n; 1) \leq a_{20} \exp\{\sigma_{13}(\varepsilon)\}. \quad (3.38)$$

Співвідношення (3.36) та (3.38) доводять (3.35) для $r = 3$.

Нарешті, переконаємось у тому, що для $r = 4$

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq 9^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \exp\{\sigma_{14}(\varepsilon)\} n^{-a_{21}\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}. \quad (3.39)$$

Із (2.6), (2.7) та (2.10)–(2.12) отримуємо $\Gamma^{(l)} \geq 1$, $l = 2, 3, 4$, звідки використовуючи (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 4$ знаходимо

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q_{2;r}^* S_{2;r}(n; 1), \quad (3.40)$$

де $Q_{2;r}^* = 9^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} n^{-a_{21}\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}$.

Беручи до уваги нерівності $\Gamma^{(l)} < \varepsilon n$, $l = 1, 2, 3, 4$, та співвідношення (2.9)–(2.12) аналогічно (3.33) приходимо до оцінки для $r = 4$

$$S_{2;r}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_{14}(\varepsilon)\}. \quad (3.41)$$

Співвідношення (3.40) та (3.41) доводять (3.39).

Для $S_2(n; Q^*)$ з урахуванням (3.22), (3.24), (3.31), (3.35) та (3.39) отримуємо

$$\begin{aligned} S_{2;r}(n; 1) &\leq 9^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} n^{-a_{21}\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)} \\ &\quad + a_{22} \exp\{\sigma_{15}(\varepsilon)\} \left(1 + a_{23} n^{-3\varepsilon\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}\right)^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \\ &\quad \times \left(7^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} + 5^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} + 3^{\left(\frac{\ln 1.8}{\ln 3} - \gamma\right)n} (5^n + 3^n + 1)\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

За допомогою (3.15), (3.17), (3.21) та (3.42) знаходимо (3.14). Нерівності (3.12) та (3.14) доводять (3.7).

Таким чином, із того, що виконується (2.22), отримали (3.6) та (3.7), які разом з оцінкою (3.8) дозволяють зробити висновок, що має місце співвідношення (3.5), а це, у свою чергу, суперечить тому, що з ймовірністю 1 існує єдиний розв'язок $\bar{x}^{(0)}$ системи (1.1) при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Доведення Теорема 1.2. Достатність. Покажемо, що при виконанні (1.7) має місце (3.1). Дійсно, використовуючи умови (1.6) та (1.7) переконаємось, аналогічно лемам 2.6 та 2.7, у справедливості співвідношень, відповідно:

$$3^{-T} \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{E_n \ln n}\right]} \binom{n}{t} 2^t Q = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

$$3^{-T} \sum_{t=\left[\varepsilon_1 \frac{n}{E_n \ln n}\right]+1}^{\left[\varepsilon_2 n\right]} \binom{n}{t} 2^t Q = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Беручи до уваги лему 2.9, рівності (2.35), (3.2), (3.43) та (3.44), отримуємо (3.1). Нерівності Чебишева та (3.1) завершують доведення достатності.

Необхідність. Необхідність умови (1.4) при виконанні (1.6) випливає з того, що співвідношення (1.6) є окремим випадком (1.2). $\square$

Література

- [1] А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей. Учебное пособие.* МЦНМО, Москва, 2006.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Володимир
Іванович Масол,
Л. О. Ромашова**

Кафедра теорії ймовірностей та
математичної статистики,
Механіко-математичний факультет
Київський національний університет
ім. Т. Шевченка,
вул. Володимирська, 64,
Київ, 01033,
Україна
E-Mail: vimasol@ukr.net,
deezee@ukr.net