

Том 24
Донецк, 2012

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>Б.И. Басок, А.А. Авраменко, В.В. Гоцуленко</i> Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении газа, возбуждаемых запаздыванием сгорания	3
<i>Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев</i> Оценка влияния тепловой анизотропии на температурное поле в анизотропной пластине с теплоизолированным разрезом	13
<i>В.П. Бурский, И.И. Куракина</i> Общая эквивариантная смешанная задача для уравнения теплопроводности в круговом цилиндре	25
<i>В.П. Бурский, Е.В. Лесина</i> Задача Неймана для неправильно эллиптического уравнения второго порядка	37
<i>А.А. Возняк</i> Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиристатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил	45
<i>М.В. Voitovich</i> Energy estimates of bounded solutions of the Dirichlet problem for a class of nonlinear fourth-order elliptic equations	58
<i>О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка</i> Про ідемпотенти напівгрупи відповідностей	68
<i>Р.И. Гладилина</i> О неустойчивости импульсных систем по части переменных	78
<i>Н.М. Глазунов</i> Квазилокальные поля классов эллиптических кривых и формальные группы. I.	87
<i>А.И. Двирный, В.И. Слынько</i> Об устойчивости решений квазиоднородных монотонных импульсных систем	99

<i>А.В. Зыза</i> Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле	116
<i>К.К. Кадомский</i> Повышение эффективности инкрементной кластеризации нечетких данных	124
<i>А.А. Кадубовский</i> Двухцветные хордовые n -диаграммы с одним черным циклом	134
<i>Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин</i> Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя эллиптическими вырезами	147
<i>О.М. Литвин, Ю.І. Першина</i> Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції	157
<i>А.В. Мазнев</i> Случай трех инвариантных соотношений уравнений движения неавтономного гиростата	166
<i>И.М. Савостьянова</i> Взвешенные сферические средние на евклидовых пространствах	176
<i>R.R. Salimov, E.A. Sevost'yanov</i> About one modulus inequality of the order $p \geq 1$	183
<i>В.В. Скобелев</i> Об автоматах на многообразиях над кольцом	190
<i>В.Г. Скобелев</i> Анализ автоматов алгебраических моделей	202
<i>I.I. Skrypnik, S.V. Skrypnik</i> On local gradient estimates for anisotropic elliptic and parabolic equations	209
<i>Н.А. Трипольская, Вит.В. Волчков</i> Об одном обобщении теоремы о среднем	225
<i>О.Д. Трофименко</i> Теорема єдиності для розв'язків деяких рівнянь середніх значень	234
<i>С.М. Чуйко, П.В. Кулиш</i> Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса	243
<i>В.Ф. Щербак</i> Синтез инвариантных многообразий в задаче стабилизации динамических систем	253
К 75-летию Олега Николаевича Введенского	260

УДК 517.928: 533.6.013.2

©2012. Б. И. Басок, А. А. Авраменко, В. В. Гоцуленко

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ НАПОРНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГАЗА, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ СГОРАНИЯ

В динамической системе, являющейся математической моделью автоколебаний вибрационного горения в приближении одной степени свободы, рассматривается задача самовозбуждения автоколебаний механизмом запаздывания сгорания. С помощью приближенного метода малого параметра, адаптированного для дифференциально-разностных уравнений, получены асимптотические соотношения для автоколебательных периодических решений в рассматриваемой динамической системе.

Ключевые слова: запаздывание сгорания, асимптотический метод, неустойчивость, квазилинейная система, вибрационное горение, автоколебания.

1. Введение. Периодические автоколебательные процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания. Значительные проблемы возникают перед практиками, когда они сталкиваются с явлением возбуждения термоакустических автоколебаний и автоколебаний вибрационного горения, соответственно возникающих при конвективном теплоподводе или при сжигании топливных смесей в самых разных тепловых агрегатах – от простейших топочных устройств до камер горения воздухонагревателей доменных печей и камер сгорания мощных современных ракетных двигателей. С большим сомнением этот процесс сегодня можно назвать управляемым [1]. Неустойчивость возникает при сжигании и угольной пыли, и нефти, и бензина, и пропан – бутановой смеси, и водорода. Так что исходное агрегатное состояние и состав горючего не имеет принципиального значения. Автоколебания давления не только создают большую знакопеременную механическую нагрузку на конструкцию топочного устройства, нередко приводящую к ее механическому разрушению, но и изменяют условия теплообмена. В камерах сгорания, надежно работающих в стационарном режиме, при возникновении автоколебаний резко возрастает поток тепла в стенки, что нередко приводит к их термическому разрушению.

Математическая формализация рассмотренных выше задач приводит к нелинейным уравнениям гидродинамического типа [2, 8]. Однако в случае, когда длина волны периодических распределенных по пространству автоколебаний существенно больше размеров системы, в которой они возбуждаются, можно перейти от исходной распределенной математической модели к динамической системе, определяемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (модель с сосредоточенными параметрами) [3].

2. Постановка задачи. Математические модели с сосредоточенными параметрами рассмотренных выше задач термогазодинамики в приближении одной степени свободы, с учетом процессов запаздывания сгорания топлива, сводятся к

следующей динамической системе [9-13]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha (\mathbb{H}(x) - y), \\ \frac{dy}{dt} = \beta \left(x(t - \Delta) - \xi \left| \frac{\mathbb{H}_0 - y}{\mathbb{H}_0 - \eta} \right|^a \right), \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbb{H}(x) = \eta - \gamma \Psi(x - \xi)$; $\Psi(x) = x(x - b_1)(x - b_2)$; $b_1 \cdot b_2 < 0$, $\mathbb{H}_0, \eta = \text{const}$; $\gamma, \Delta, \xi > 0$; $0 \leq a < 1$. Асимптотический анализ автоколебаний в системе (1) при отсутствии запаздывания $\Delta = 0$ рассматривался в [10], а стабилизация неустойчивого положения равновесия системы (1) параметрическими колебаниями – изучалась в [11]. В данной работе рассматривается асимптотический анализ периодических решений системы (1) при $\Delta > 0$ и одновременном стремлении параметров γ и a к нулю.

3. Построение асимптотических разложений автоколебаний. Согласно выше приведенным предположениям, полагаем, что

$$\gamma = \sum_{k \geq 0} \gamma_k \varepsilon^{k+1}, \quad a = \sum_{k \geq 0} a_k \varepsilon^{k+1}; \quad \gamma_0, a_0 > 0. \quad (2)$$

Однородная часть линейной порождающей системы, соответствующей системе (1), имеет следующий характеристический квазиполином

$$\lambda^2 + \alpha\beta \exp(-\Delta\lambda) = 0. \quad (3)$$

Несложно проверить, что квазиполином (3) имеет резонансные корни (т.е. корни вида $\lambda = \pm i\omega$) лишь при выполнении соотношения

$$\Delta = 2\pi n / \sqrt{\alpha\beta} \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

Предполагая (4) выполненным, получим, что линейная порождающая система (т.е. система (1) при $\varepsilon = 0$) имеет двухпараметрическое семейство периодических решений с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \xi + C_0 [\varphi_1 \exp\{i(\omega_0 t + C_1)\} + \bar{\varphi}_1 \exp\{-i(\omega_0 t + C_1)\}], \\ y_0(t) &= \eta + C_0 [\varphi_2 \exp\{i(\omega_0 t + C_1)\} + \bar{\varphi}_2 \exp\{-i(\omega_0 t + C_1)\}], \end{aligned} \quad (5)$$

где C_0, C_1 – произвольные вещественные постоянные; $\varphi_1 = i\sqrt{\alpha}$, $\varphi_2 = \sqrt{\beta}$ – компоненты собственного вектора однородной части линейной порождающей системы, соответствующие корню $\lambda = i\omega_0$; $\omega_0 = \sqrt{\alpha\beta}$, $i = \sqrt{-1}$.

Нам необходимо найти периодические решения основной системы (1), близкие к периодическим решениям порождающей системы (5), такие, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ они стремились к (5). Периодические решения системы (1), если они существуют, имеют, вообще говоря, период T , отличный от T_0 . Но при достаточно малых значениях

$\varepsilon > 0$ это отличие будет иметь порядок $O(\varepsilon)$. Поэтому правомерно представить T в следующем виде:

$$T = T_0 (1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots).$$

Чтобы упростить решение задачи, сделаем в системе (1) замену переменных

$$X = \sqrt{\beta}(x - \xi), \quad Y = \sqrt{\alpha}(y - \eta), \quad \tau = \omega_0 (1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)^{-1} t. \quad (6)$$

Тогда решение системы (1), близкое к одному из порождающих периодических решений (5) будет иметь период 2π , не зависящий от ε . Постоянные h_1, h_2, \dots подлежат определению. После замены (6) система (1) запишется в форме

$$\begin{cases} dX/d\tau = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon^k\right) \left[-Y - \gamma(\varepsilon)\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)\right], \\ dY/d\tau = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon^k\right) \left[X(\tau - \Delta'(\varepsilon)) + \xi\sqrt{\beta}\left(1 - \left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)}\right|^{a(\varepsilon)}\right)\right], \end{cases} \quad (7)$$

где $\Delta'(\varepsilon) = \omega_0\Delta(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)^{-1}$.

Периодические решения системы (7) периода 2π ищем в виде асимптотических рядов

$$X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\tau)\varepsilon^k, \quad Y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\tau)\varepsilon^k. \quad (8)$$

Подставив разложения (8) в уравнения (7), разложив обе части полученных равенств по степеням ε и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , придем к бесконечной рекуррентной системе линейных дифференциально – разностных уравнений относительно неизвестных 2π – периодических коэффициентов $X_k(\tau)$ и $Y_k(\tau)$ ($k \geq 0$) разложений (8). Однако для этого необходимо выполнить ряд промежуточных выкладок. Рассмотрим формальный степенной ряд $z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \varepsilon^k$, тогда

$$z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{nk}(z_0, z_1, \dots, z_k)\varepsilon^k, \quad (\text{при } n \in \mathbb{N}) \quad \psi_{n0}(z_0) = z_0^n, \quad \psi_{n1}(z_0, z_1) = nz_0^{n-1}z_1, \dots,$$

$$z(z - s_0)(z - s_1) = \sum_{k \geq 0} \sigma_k(z_0, z_1, \dots, z_k; s_0, s_1)\varepsilon^k,$$

$$\sigma_0(z_0; s_0, s_1) = z_0(z_0 - s_0)(z_0 - s_1),$$

$$\sigma_1(z_0, z_1; s_0, s_1) = z_0(z_0 - s_0)z_1 + z_0z_1(z_0 - s_1) + z_1(z_0 - s_0)(z_0 - s_1),$$

.....

$$\prod_{k=0}^r (z - k) = \sum_{k \geq 0} v_{r,k}(z_0, z_1, \dots, z_k)\varepsilon^k, \quad \text{где } v_{r,0}(z_0) = z_0(z_0 - 1) \dots (z_0 - r), \dots$$

Для дальнейших построений систему (7) удобно представить в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\tau} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon^k \right) (\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{Z}(\tau - \Delta'(\varepsilon)) + \varepsilon \Phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)), \quad (9)$$

где $\mathbf{Z}(\tau) = \begin{bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Phi(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{Z}, \varepsilon) \\ \varphi_2(\mathbf{Z}, \varepsilon) \end{bmatrix}$,
 $\varphi_1(\mathbf{Z}, \varepsilon) = -\sqrt{\alpha} \frac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon} \Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)$, $\varphi_2(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \frac{\xi\sqrt{\beta}}{\varepsilon} \left(1 - \left| 1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)} \right|^{a(\varepsilon)} \right)$.

С учетом приведенных выше соотношений относительно арифметических операций над формальными степенными рядами получаем, что

$$\tau - \Delta'(\varepsilon) = (\tau - \omega_0 \Delta) - \omega_0 \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{-1,k}(1, h_1, \dots, h_k) \varepsilon^k, \text{ откуда}$$

$$\mathbf{Z}(\tau - \Delta'(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbf{Z}_j^{(k)}(\tau - \omega_0 \Delta) d_{ki}(h_1, \dots, h_{i+1}) \varepsilon^{i+j+k},$$

где $d_{ki}(h_1, \dots, h_{i+1}) = \psi_{ki}(\psi_{-1,1}(1, h_1), \psi_{-1,2}(1, h_1, h_2), \dots, \psi_{-1,i+1}(1, h_1, \dots, h_{i+1}))$.

Таким образом, окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\mathbf{Z}_m}{d\tau} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_m(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{Z}_m(\tau - \omega_0 \Delta) + \mathbf{F}_m(\tau), \quad (m \geq 0), \quad (10)$$

где (при $m \geq 1$) $\mathbf{F}_m(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} h_{m-i} (\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_i(\tau) + \Phi_{i-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_i) + \mathbf{A}_2 \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i \geq 0, j, k > 0}} \mathbf{e}_{ijk} +$

Φ_{m-1} , $\mathbf{F}_0 = 0$, $\Phi_{-1} = 0$, $\mathbf{E}_r = \sum_{\substack{i+j+k=r \\ i, j, k \geq 0}} \mathbf{e}_{ijk}$ (при $r \geq 0$), $\mathbf{e}_{ijk} = d_{kj} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbf{Z}_i^{(k)}(\tau - \omega_0 \Delta)$,

$\Phi(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \varepsilon^k$, $\Phi_k = \Phi_k(\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_k)$, $\mathbf{Z}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}_k(\tau) \varepsilon^k$.

Далее получим выражения для компонент $\varphi_{1,k}(\mathbf{Z})$ и $\varphi_{2,k}(\mathbf{Z})$ вектора Φ_k . Имеем, т.к.

$$\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right) = \beta^{-3/2} \sum_{k \geq 0} \sigma_k(X_0, X_1, \dots, X_k; b_1 \sqrt{\beta}, b_2 \sqrt{\beta}) \varepsilon^k,$$

то $\varphi_{1,k}(\mathbf{Z}) = -\alpha^{1/2} \beta^{-3/2} \mu_k$, где $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_{k-i} \sigma_i(X_0, X_1, \dots, X_i; b_1 \sqrt{\beta}, b_2 \sqrt{\beta})$.

Также с помощью разложения

$$|1 - h|^a(\varepsilon) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (a(\varepsilon) - k) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n!} v_{n-1,k} \varepsilon^k,$$

где $v_{n-1,k} = v_{n-1,k}(0, a_0, \dots, a_{k-1})$, получается представление

$$\varphi_{2,k}(\mathbf{Z}) = \xi \sqrt{\beta} \sum_{\substack{m+i-1=k \\ m \geq 1, i \geq 0}} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} v_{n-1,m}(0, a_0, \dots, a_{m-1}) \psi_{ni}(Y_0, Y_1, \dots, Y_i)}{n! \alpha^{\frac{n}{2}} |\mathbb{H}_0 - \eta|^n}.$$

Полученные соотношения показывают, что $\mathbf{F}_0 = 0$ и при $m \geq 1$

$$\mathbf{F}_m(\tau) = \mathbf{F}_m \left(\{h_k\}_{k=1}^m; \left\{ \mathbf{Z}_j^{(k)}(\tau - \omega_0 \Delta) \right\}_{j,k \geq 0}^{j+k \leq m-1}; \{ \mathbf{Z}_k(\tau) \}_{k=0}^{m-1} \right). \quad (11)$$

Из (11) следует, что если функции $\{ \mathbf{Z}_k(\tau) \}_{k=0}^{m-1}$ уже вычислены, то $\mathbf{F}_m(\tau)$ – известная 2π – периодическая функция, зависящая от параметров $\{h_k\}_{k=1}^m$, и система (10) является линейной неоднородной относительно $\mathbf{Z}_m(\tau)$. Т.к. характеристическое уравнение системы (10) имеет корень $\lambda = i$, а функция $\mathbf{F}_m(\tau)$ имеет период 2π , то мы имеем резонансный случай. Поэтому, чтобы система (10) имела 2π – периодическое решение, необходимо коэффициенты $\{h_k\}_{k=1}^m$ выбрать специальным образом. Для этого нам понадобится следующий результат [4].

Теорема 1. *Рассмотрим линейную неоднородную систему с постоянным запаздыванием $\Delta > 0$, причем $\mathbf{F}(\tau + 2\pi) = \mathbf{F}(\tau)$*

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\tau} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{Z}(\tau - \Delta) + \mathbf{F}(\tau),$$

предполагая также, что характеристический квазиполином ее однородной части имеет резонансный корень $\lambda = i\omega$. Тогда для отсутствия вековых членов (т.е. слагаемых вида $\tau^m \exp(i\omega\tau)$ при $m \geq 1$) в решении данной системы необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{F}(\tau) \cdot \mathbf{Z}^*(\tau) d\tau = 0,$$

где $\mathbf{Z}^*(\tau)$ – периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\omega$ сопряженной системы

$$-\frac{d\mathbf{Z}^*}{d\tau} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{Z}^*(\tau) + \mathbf{A}_2^T \mathbf{Z}^*(\tau + \Delta).$$

Причем собственные значения характеристических квазиполиномов исходной и сопряженной системы являются попарно комплексно сопряженными. Таким образом, множества их резонансных собственных значений совпадают.

Вещественное 2π – периодическое решение однородной части системы (10), как нетрудно проверить, можно записать в форме

$$\mathbf{Z}_m(\tau) = C_{0,m} [\Gamma_0 \exp\{i(\tau + C_{1,m})\} + \bar{\Gamma}_0 \exp\{-i(\tau + C_{1,m})\}],$$

где $C_{0,m}, C_{1,m}$ – вещественные произвольные постоянные, $\Gamma_0 = [i \ 1]^T$.

Следовательно, обозначив через $\mathbf{R}_m(\tau)$ произвольное частное 2π – периодическое решение системы (10), в случае его существования, можно исходя из этого, получить двухпараметрическое семейство периодических решений

$$\mathbf{Z}_m(\tau) = C_{0,m} [\Gamma_0 \exp \{i(\tau + C_{1,m})\} + \bar{\Gamma}_0 \exp \{-i(\tau + C_{1,m})\}] + \mathbf{R}_m(\tau). \quad (12)$$

Обозначим через $\mathbf{Z}_m^*(\tau)$ периодическое решение сопряженной для (10) системы. Тогда, как нетрудно проверить $\mathbf{Z}_m^*(\tau) = -i\bar{\Gamma}_0 \exp(-i\tau)$.

Согласно приведенной теореме 1, необходимое и достаточное условие существования в системе (10) 2π – периодического решения, имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}_m(\tau) \cdot \mathbf{Z}_m^*(\tau) d\tau = 0 \quad (m \geq 1). \quad (13)$$

Покажем с помощью метода математической индукции, что выбором параметров h_k , $C_{0,k}$ и $C_{1,k}$ условие (13) действительно можно удовлетворить. При $m = 0$ условие (13) выполняется автоматически. Допустим, что (13) уже удовлетворено при $m = n - 1$, тогда при $m = n$ согласно (12) имеем $\mathbf{F}_n(\tau) = \mathbf{F}_n(\tau) = (\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1})$. Условие (13), записанное в комплексной форме, распадается на два вещественных, где $\mathbf{F}_n = [f_{1,n} \ f_{2,n}]^T$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} [f_{2,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1}) \cos \tau + f_{1,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1}) \sin \tau] d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} [f_{2,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1}) \cos \tau - f_{1,n}(\tau, h_n, C_{0,n-1}, C_{1,n-1}) \sin \tau] d\tau = 0. \end{cases} \quad (14)$$

В системе (14) два уравнения и три неизвестных, поэтому полагая например $C_{1,n-1} = 0$, из (14) можно определить $C_{0,n-1}$ и h_n .

Таким образом, все системы из (10) для определения $\mathbf{Z}_m(\tau)$ ($m \geq 1$) представляют собой линейные неоднородные дифференциально – разностные системы с одинаковой однородной частью и неоднородностями периода 2π . Так как в нашем случае, как выше уже отмечалось, имеет место резонанс, то для существования периодического решения в (10) необходимо удовлетворить условие (13). После чего частное 2π – периодическое решение $\mathbf{R}_m(\tau)$ системы (10) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов [4] с предварительным разложением функции $\mathbf{F}_m(\tau)$ в ряд Фурье.

4. Анализ автоколебаний в случае бесконечно малого запаздывания. В рассматриваемом случае в системе (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ запаздывание $\Delta = k\varepsilon$, $k > 0$. Тогда воспользовавшись разложением Тейлора

$$x(t - \Delta) = x(t) - k\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

выполнив также в системе (1) замену переменных (6) при $h_k = 0 \forall k \geq 1$, она с точностью до $O(\varepsilon^2)$ запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} dX/d\tau = -Y - \varepsilon\gamma_0\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right), \\ dY/d\tau = X + \varepsilon\left[k\omega_0 Y - \xi a_0\sqrt{\beta}\ln\left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)}\right|\right]. \end{cases} \quad (15)$$

При $\varepsilon = 0$ система (15) является консервативной. Известно, что определенными возмущениями консервативную систему можно превратить в автоколебательную, причем предельный цикл которой будет близким к одной из замкнутых фазовых траекторий исходной невозмущенной консервативной системы. В этом отношении имеет место следующий результат [5].

Теорема 2. *Рассматривается система при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon f_2(x, y).$$

Положим $\ell_A = \{(x, y) : x = A \cos(t), y = A \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, ℓ_A – окружность с центром в начале координат и радиусом A . Пусть также $F(A) = \oint_{\ell_A} f_1(x, y)dy - f_2(x, y)dx$. Тогда если функция $F(A)$ имеет простой положительный корень A^* , то при малых $\varepsilon > 0$ рассматриваемая система имеет предельный цикл $\Gamma_\varepsilon \simeq \ell_{A^*}$, устойчивый при $\frac{dF}{dA}\big|_{A=A^*} < 0$ и неустойчивый, если $\frac{dF}{dA}\big|_{A=A^*} > 0$.

В нашем случае:

$$f_1(X, Y) = -\gamma_0\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right), \quad f_2(X, Y) = k\omega_0 Y - \xi a_0\sqrt{\beta}\ln\left|1 - \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)}\right|,$$

и, как нетрудно проверить

$$\begin{aligned} F(A) = \pi A^2 \left[k\omega_0 - \gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-3/2} \left(\frac{3}{4}A^2 + \beta b_1 b_2 \right) \right] + \\ + a_0\xi\sqrt{\beta}A \int_0^{2\pi} \ln\left|1 - \frac{A \sin \tau}{\sqrt{\alpha}(\mathbb{H}_0 - \eta)}\right| \sin \tau d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим интеграл, зависящий от параметра $I(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 + r \sin \tau) \sin \tau d\tau$, воспользовавшись для этого правилом Лейбница дифференцирования под знаком интеграла. Имеем,

$$I(0) = 0, \quad \frac{dI}{dr} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \tau}{1 + r \sin \tau} d\tau = \frac{2\pi}{r^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$I(r) = \int_0^r \frac{dI}{dr} dr = 2\pi \int_0^r \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] dr = \frac{2\pi}{r} \left[1 - \sqrt{1-r^2} \right].$$

Таким образом, (16) окончательно можно записать в следующем виде:

$$F(A) = A^2 (q_0 - q_1 A^2) + q_2 \left(1 - \sqrt{1 - q_3 A^2} \right), \quad (17)$$

где

$$q_0 = \pi \left[k\omega_0 - \gamma_0 \alpha^{1/2} \beta^{-1/2} b_1 b_2 \right], \quad q_1 = \frac{3\pi}{4} \gamma_0 \alpha^{1/2} \beta^{-3/2}, \quad (18)$$

$$q_2 = 2\pi\omega_0 a_0 \xi (\mathbb{H}_0 - \eta), \quad q_3 = \frac{1}{\alpha (\mathbb{H}_0 - \eta)^2}.$$

Отметим, что согласно теореме 2, при анализе условий разрешимости уравнения $F(A) = 0$ нужно рассматривать лишь случай положительных корней. Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования у функции (17) при $q_i > 0$ ($\forall i = \overline{0;3}$) положительного корня $A^* > 0$ является выполнение следующего неравенства $q_1 - q_0 q_3 \geq q_3^2 q_2$, при этом

$$0 < A^* \leq (q_3 + q_0^{-1} q_2 q_3^2)^{-1/2}, \quad (19)$$

причем равенство $A^* = A_{\max}^* = (q_3 + q_0^{-1} q_2 q_3^2)^{-1/2}$ достигается при $q_1 = q_0 q_3 + q_3^2 q_2$. Также непосредственной проверкой устанавливается, что в рассматриваемой задаче $\frac{dF}{dA} \Big|_{A=A^*} < 0$. Следовательно, используя теорему 2, приходим к следующему результату. Динамическая система (1) при условиях (2) и $\Delta = k\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение, амплитуда которого определяется соотношениями (18) – (19).

В [10] было доказано существование автоколебательных решений в системе (1) при отсутствии запаздывания ($\Delta = 0$). В этом случае с физической точки зрения единственным механизмом возбуждения автоколебаний является "отрицательное" сопротивление [7], накладывающее известные дополнительные условия [9-10] на вид функции $\mathbb{H}(x)$. Однако, согласно (18)-(19), запаздывание $\Delta = k\varepsilon$ увеличивает амплитуду автоколебаний и является самостоятельным механизмом возбуждения автоколебаний. Даже при отсутствии положительной обратной связи в виде "отрицательного" сопротивления, запаздывание может приводить к возбуждению автоколебаний. Проиллюстрируем это на примере уравнения Ван дер Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \text{sign}(\varepsilon) |\varepsilon| (1 - x^2(t)) \frac{dx}{dt} + x(t - \Delta) = 0, \quad \Delta = k|\varepsilon|, \quad k \geq 0. \quad (20)$$

Хорошо известно, что уравнение (20) при $\varepsilon < 0$, $\varepsilon \rightarrow -0$ и $\Delta = 0$ периодического решения не имеет (отсутствует "отрицательное" сопротивление и запаздывание). Однако введение даже сколь угодно малого запаздывания ($0 < k < 1$) приводит к появлению периодического решения с амплитудой $A^* = 2\sqrt{1-k}$. Однако, согласно теореме 2, данное решение является неустойчивым. В этом случае в уравнении

(20) механизм запаздывания приводит к жесткой потере устойчивости [6] нулевого положения равновесия.

При $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$ и $\Delta > 0$ в (20) действуют два механизма автоколебаний: "отрицательное" сопротивление и запаздывание. В этом случае соотношения (17)-(19) позволяют вычислить амплитуду $A^* = 2\sqrt{k+1}$ установившихся периодических автоколебаний, определяемых уравнением (20).

5. Заключение. В системе обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, являющейся математической моделью автоколебаний вибрационного горения в приближении одной степени свободы, рассмотрена задача асимптотического анализа автоколебаний.

В случае конечного запаздывания установлено, что автоколебания в рассматриваемой системе (1) возбуждаются лишь при условии существования резонансных корней у характеристического квазиполинома соответствующей порождающей линейной системы. С помощью метода Линдштедта-Пуанкаре, адаптированного для дифференциально-разностных уравнений, получены асимптотические разложения для периодических автоколебательных решений.

При бесконечно малом запаздывании динамическая система (1) приводится к системе, близкой к консервативной. В этом случае ее предельный цикл аппроксимируется одной из замкнутых фазовых траекторий порождающей консервативной системы. При этом, даже при отсутствии механизма "отрицательного" сопротивления, проявляющегося в известных ограничениях [9-10] на вид функции $\mathbb{H}(x)$, периодические решения в системе (1) возникают из-за наличия запаздывания $\Delta = k\varepsilon > 0$.

1. *Гладышев В.Н.* Автоколебания при горении и термоядерных взаимодействиях. – Новосибирск: НИЦ ОИГГМ, Изд-во СО РАН, 1999. – 135 с.
2. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 552 с.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
4. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
5. *Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2000. – 149 с.
6. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
7. *Харкевич А.А.* Автоколебания. – М.: Гостехиздат, 1954. – 172 с.
8. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Автоколебания в распределенной модели трубы Рийке // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV, № 4(48). – С. 3-13.
9. *Гоцуленко В.В.* Математическое моделирование снижения амплитуд колебаний вибрационного горения в крупных промышленных агрегатах // Математическое моделирование, РАН. – 2005. – Т. 17. – № 11. – С. 16-24.
10. *Гоцуленко В.В.* Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении жидкостей или газов в пневмо или гидросистеме // Труды ИПММ. – 2007. – Т. 14. – С. 56-62.
11. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Стабилизация неустойчивого положения равновесия при теплоподводе параметрическими колебаниями // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 19-31.
12. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами // Акустический вестник. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 3-8.
13. *Басок Б.И., Авраменко А.А., Гоцуленко В.В.* Динамическое демпфирование автоколебаний в модели регенеративного воздухонагревателя с сотовыми камерами горения // Доповіді НАНУ. – 2011. – № 4. – С. 73-79.

B. I. Basok, A. A. Avramenko, V. V. Gotsulenko

Asymptotic analysis of oscillations in the pressure moving the gas excited by the combustion delay.

In a dynamic system is a mathematical model vibrational combustion oscillations in the approximation of one degree freedom, the problem of self oscillation mechanism of retardation of combustion. With the help an approximate method small parameter, adjusted for the differential-difference equations, we obtain asymptotic relations for oscillatory periodic solutions in this dynamic system.

Keywords: delay of combustion, the asymptotic method instability, the quasi-linear system vibration combustion, self-oscillations.

Б. І. Басок, А. О. Авраменко, В. В. Гоцуленко

Асимптотичний аналіз автоколивань при напірному переміщенні газу, збуджених запізненням згорання.

У динамічній системі, що є математичною моделлю автоколивань вібраційного горіння в наближенні одного ступеня волі, розглядається задача самозбудження автоколивань механізмом запізнення згорання. За допомогою наближеного методу малого параметра, адаптованого для диференціально-різницевих рівнянь, одержано асимптотичні співвідношення для автоколивальних періодичних розв'язків розглянутої динамічної системи.

Ключові слова: запізнення згорання, асимптотичний метод, нестійкість, квазілінійна система, вібраційне горіння, автоколивання.

Ин-т технической теплофизики НАН Украины, Киев
gosul@ukr.net

Получено 22.12.11

УДК 539.3

©2012. Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ

Решена задача теплопроводности для анизотропной пластины с теплоизолированным разрезом. При этом использована обобщенная теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Исследовано влияние тепловой анизотропии материала пластины и условий теплообмена на величину возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза. Исследовано относительное отклонение между температурой в анизотропной и изотропной пластине. Сделаны обобщающие выводы.

Ключевые слова: анизотропная пластина, тепловая анизотропия, теплоизолированный разрез, обобщенная теория, коэффициенты теплопроводности.

1. Введение. Тепловые воздействия относятся к основному виду нагрузки, которой подвергаются объекты и изделия современной промышленности. Наличие дефектов типа трещин приводит к значительному снижению несущей способности элементов конструкций. Необходимость учёта различных факторов (условий теплообмена с окружающей средой, тепловой анизотропии материала), влияющих на температурные поля в пластинах и оболочках, обуславливает актуальность статьи.

В работе решена задача теплопроводности для анизотропной (ортотропной и трансверсально-изотропной) пластины, содержащей теплоизолированный разрез. Целью данной работы является исследование влияния тепловой анизотропии материала пластины на величину возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза.

При решении задачи теплопроводности использована обобщенная теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра [1, 2]. Данный подход позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины. Из последних работ, в которых сведение трехмерных задач теплопроводности и термоупругости к двумерным осуществляется в рамках рассматриваемого метода, можно отметить публикации Ю.М. Волчкова [3, 4], В.В. Зозули [5, 6] и монографии М.У. Никабадзе [7, 8].

2. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную (ортотропную или трансверсально-изотропную) пластину толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой постоянной температуры θ^\pm ($z = \pm h$). Пластина имеет теплоизолированный разрез L .

В качестве исходного взято приближение порядка N трехмерного уравнения теп-

лопроводности. В преобразованных главных осях

$$X = \frac{x}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad Z = z, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda_z}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda_z},$$

где $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – главные коэффициенты теплопроводности, температура T^* представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра P_k [1]:

$$T^*(X, Y, Z) = \sum_{k=0}^N T_k^* P_k \left(\frac{Z}{h} \right), \quad T_k^* = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T^* P_k \left(\frac{Z}{h} \right) dZ.$$

Коэффициенты разложения удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в матричной форме [2]:

$$h^2 \Delta \vec{T}^* + A_N \vec{T}^* = -\vec{\theta},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \quad \vec{T}^* = (T_0^*, T_1^*, \dots, T_N^*)^T, \quad A_N = \|A_{km}\|, \quad \vec{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)^T.$$

Элементы матрицы A_N и вектора $\vec{\theta}$ даны в [2]. При этом $A_{km} = A_{km}(Bi^\pm, N)$, $\theta_k = \theta_k(\theta^\pm, Bi^\pm, N)$, где Bi^\pm – критерий Био на лицевых поверхностях $Z = \pm h$.

Перейдем в безразмерную систему координат

$$x_1 = \frac{x}{h\sqrt{\lambda_1}}, \quad x_2 = \frac{y}{h\sqrt{\lambda_2}}, \quad x_3 = \frac{z}{h},$$

тогда приближение порядка N уравнения теплопроводности запишется так

$$\Delta \vec{T}^* + A_N \vec{T}^* = -\vec{\theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (1)$$

В случае теплоизолированного разреза теплота не проходит через линию разреза. Поэтому граничные условия на линии разреза L имеют вид [9]:

$$\left(\frac{\partial \vec{T}^*}{\partial n} \right)^\pm = 0. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «-» обозначены граничные значения функций в соответствии с выбранным направлением нормали $\vec{n} = (n_1, n_2)$ к линии разреза L .

Температурное поле в пластине с разрезом представим в виде суммы

$$\vec{T}^* = \vec{T}^o + \vec{T}, \quad (3)$$

где \vec{T}^o – вектор-столбец из компонент основного температурного поля (температуры в сплошной пластине); \vec{T} – вектор-столбец из компонент возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза.

Основное температурное поле определяется из системы вида (1), а для определения возмущенного температурного поля имеем такую систему уравнений:

$$\Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = 0. \quad (4)$$

Из краевых условий (2) и представлений (3) следуют граничные условия для компонент возмущенного температурного поля на линии разреза L

$$\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial n} \right)^\pm = - \frac{\partial \vec{T}^0}{\partial n} \Big|_L. \quad (5)$$

Предполагаем, что внешний граничный контур пластины находится на значительном удалении от линии разреза L и возмущенное температурное поле на линии внешней границы считаем равным нулю.

После решения системы уравнений (4) с граничными условиями (5) возмущенная температура в любой точке пластины находится по формуле

$$T = \sum_{k=0}^N T_k P_k(x_3), \quad T_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 T P_k(x_3) dx_3. \quad (6)$$

Таким образом, приближение порядка N трехмерного уравнения теплопроводности (4) с граничными условиями (5) и требованием убывания возмущенного температурного поля составляют граничную задачу теплопроводности для пластины с теплоизолированным разрезом.

3. Методика решения. Методика решения основана на применении двумерного интегрального преобразования Фурье для разрывных функций [10] и методики обращения, использующей специальную G -функцию [11].

Применяя преобразование Фурье к системе (4), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(A_N - p^2 E) \vec{T} = \vec{D}, \quad (7)$$

где с учетом граничных условий (5)

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \vec{D} = (D_0, D_1, \dots, D_N)^T, \quad D_k = \frac{i}{2\pi} \int_L (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) [T_k] e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL,$$

$[T_k] = T_k^+ - T_k^-$ – скачок компоненты возмущенной температуры T_k при переходе через линию L ; $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ – координаты точки на линии L .

СЛАУ (7) решаем по правилу Крамера

$$\tilde{T}_k(\vec{\xi}) = \frac{\Delta_k(\vec{\xi})}{\Delta(p^2)} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (8)$$

Здесь $\Delta(\mu) = \det(A_N - \mu E)$ – характеристический многочлен матрицы A_N ;
 $\Delta_k(\vec{\xi})$ – определитель матрицы, получающейся из матрицы $A_N - p^2 E$ заменой ее k -го столбца вектором-столбцом \vec{D} , т.е.:

$$\Delta_k(\vec{\xi}) = \sum_{m=0}^N M_{mk}(p^2) D_m \quad (k = \overline{0, N}), \quad (9)$$

где $M_{mk}(\mu)$ – алгебраическое дополнение элемента m -ой строки и k -го столбца матрицы $A_N - \mu E$, причем степень полинома $M_{mk}(\mu)$ есть

$$\deg M_{mk}(\mu) = \begin{cases} N, & m = k, \\ N - 1, & m \neq k. \end{cases}$$

Трансформанты компонент возмущенной температуры (8) с учетом (9) равны

$$\tilde{T}_k(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{m=0}^N \tilde{B}_{km}[T_m] e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL \quad (k = \overline{0, N}), \quad (10)$$

где

$$\tilde{B}_{km}(\xi_1, \xi_2) = i \frac{M_{mk}(p^2)}{\Delta(p^2)} (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) \quad (k, m = \overline{0, N}). \quad (11)$$

В работе [2] было доказано, что все характеристические корни матрицы A_N действительные, отрицательные и имеют кратность не выше двух.

Предположим, что у матрицы A_N имеется s ($0 \leq s \leq (N+1)/2$) собственных значений кратности 2. В соответствии с данным предположением характеристический многочлен матрицы A_N может быть представлен в виде

$$\Delta(p^2) = (-1)^{N+1} \prod_{j=0}^{s-1} (p^2 + \rho_j^2)^2 \prod_{j=s}^{N-s} (p^2 + \rho_j^2), \quad (12)$$

где ρ_j^2 – собственные значения матрицы A_N , взятые со знаком «-».

Оригиналы компонент температуры $T_k(x_1, x_2)$ ($k = \overline{0, N}$) найдем с помощью формулы обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье. Имеем

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{km}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (13)$$

где обозначено $\bar{x}_1 = x_1 - x'_1$, $\bar{x}_2 = x_2 - x'_2$.

Представим ядра (13) с учетом соотношений (11) в виде:

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{2}{\pi} \{n_1 \Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + n_2 \Psi(\bar{x}_2, \bar{x}_1)\}, \quad (14)$$

где

$$\Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{M_{mk}(p^2)}{\Delta(p^2)} \xi_1 \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Перейдем в интеграле Ψ к полярным координатам по формулам

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда Ψ примет вид

$$\Psi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2 \cos \theta}{\Delta(\rho^2)} \sin(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho,$$

$$r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}.$$

Применяя разложение Якоби-Ангера [11], найдем

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} J_1(r\rho) d\rho. \quad (15)$$

Подставляя (15) в выражение для ядер (14), запишем

$$B_{km} = n_0 \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} J_1(r\rho) d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (16)$$

где $n_0 = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi$.

Раскладывая рациональные функции, входящие в подынтегральные выражения (16) на сумму простейших дробей с учетом (12), получим

$$\frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} = -\delta_{km} + \sum_{j=0}^{N-s} \frac{C_{kmj}}{\rho^2 + \rho_j^2} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kmj}}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (17)$$

где δ_{km} – символ Кронекера; коэффициенты C_{kmj} , D_{kmj} определяются согласно второй теореме разложения Хэвисайда [12].

Подставляя (17) в (16), найдем

$$\begin{aligned} B_{km} = & -n_0 \delta_{km} \int_0^\infty J_1(r\rho) d\rho + n_0 \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho + \\ & + n_0 \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}). \end{aligned} \quad (18)$$

Значение первого интеграла в правых частях (18) равно $1/r$ [13]. Используя интегральное представление специальной G -функции [11] для остальных интегралов, входящих в правые части (18), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho = -\frac{r}{2} G_{1,0}(\rho_j r), \quad \int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho)}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} d\rho = \frac{r}{4\rho_j^2} - \left(\frac{r}{2}\right)^3 G_{2,0}(\rho_j r). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим такие выражения для ядер B_{km} :

$$B_{km} = -n_0 \left\{ \frac{\delta_{km}}{r} + \frac{r}{2} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) + E_{km} r + \left(\frac{r}{2}\right)^3 \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r) \right\} \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad E_{km} = -\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kmj}}{\rho_j^2}. \quad (20)$$

Таким образом, оригиналы интегральных представлений компонент возмущенного температурного поля (10) имеют вид

$$T_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{m=0}^N B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) [T_m] dL \quad (k = \overline{0, N}). \quad (21)$$

В качестве примера рассмотрим в новой безразмерной системе координат $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1$, $y_2 = \sqrt{\lambda_2} x_2$, $y_3 = x_3$ следующий теплоизолированный разрез

$$L_1 = \{(y_1, y_2) \in R^2 : |y_1| \leq l, y_2 = 0\}. \quad (22)$$

Для данного разреза интегральные представления (21) примут вид

$$T_k = \frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N B_{km} \left(\frac{\bar{y}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\bar{y}_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right) [T_m] d\zeta \quad (k = \overline{0, N}), \quad (23)$$

где $\bar{y}_1 = l(\psi - \zeta)$, $\bar{y}_2 = y_2$, $l\psi = y_1$, $(l\zeta, 0) \in L_1$.

В соотношениях (23) согласно (20) ядра записываются так:

$$B_{km} \left(\frac{\bar{y}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\bar{y}_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right) = -\frac{\delta_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{y_2}{r^2} - \frac{y_2}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) - \frac{E_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} y_2 - \frac{y_2 r^2}{8\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r) \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad r = \sqrt{\frac{l^2}{\lambda_1} (\psi - \zeta)^2 + \frac{y_2^2}{\lambda_2}}.$$

Функции T_k из (23) должны удовлетворять граничным условиям (5):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{-1}^1 K_{km}(\psi - \zeta) [T_m] d\zeta = -\frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0}. \quad (24)$$

Ядра K_{km} найдем, применяя формулу дифференцирования для специальной G -функции [11]:

$$K_{km}(\psi - \zeta) = l \frac{\partial B_{km}}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} = -\frac{l \delta_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{1}{r^2} - \frac{l}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) -$$

$$-\frac{l E_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{l r^2}{8\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r), \quad r = \frac{l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - \zeta|.$$

Применим к интегралам, входящим в левые части (24), формулу интегрирования по частям, полагая при этом $u = [T_m]$, $dv = K_{km}(\psi - \zeta) d\zeta$, и учтем свойство скачков компонент возмущенной температуры

$$[T_m]|_{\pm 1} = 0 \quad (m = \overline{0, N}), \quad (25)$$

которое следует из непрерывности температуры на концах разреза L_1 . Тогда система интегральных уравнений (24) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(\zeta)}{\zeta - \psi} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{-1}^1 L_{km}(\psi - \zeta) \Phi_m(\zeta) d\zeta = F_k(\psi) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (26)$$

где

$$L_{km}(\psi - \zeta) = -\frac{l^2}{2\lambda_1} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} \int_0^\zeta G_{1,0} \left(\frac{\rho_j l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - t| \right) dt - \frac{l^2 E_{km}}{\lambda_1} -$$

$$-\frac{l^4}{8\lambda_1^2} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} \int_0^\zeta (\psi - t)^2 G_{2,0} \left(\frac{\rho_j l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - t| \right) dt \quad (k, m = \overline{0, N}),$$

$$\Phi_k(\zeta) = \frac{d[T_k]}{d\zeta}, \quad F_k(\psi) = \frac{l\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1} \frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} \quad (k = \overline{0, N}).$$

Система (26) состоит из $(N + 1)$ -го сингулярного интегрального уравнения типа Коши относительно $(N + 1)$ -й неизвестной функции $\Phi_m(\zeta)$ при дополнительных условиях, которые следуют из (25):

$$\int_{-1}^1 \Phi_m(\zeta) d\zeta = 0 \quad (m = \overline{0, N}). \quad (27)$$

Данную систему можно решить методом Мультишпа [14].

После решения системы (26) с условиями (27) возмущенное температурное поле в любой точке пластины может быть найдено с помощью интегральных представлений (23) и ряда Фурье по полиномам Лежандра для температуры (6).

4. Анализ кратности собственных значений матрицы A_N . Исследуем, при каких значениях параметров теплообмена Bi^\pm существуют кратные собственные значения матрицы A_N . При этом будем рассматривать приближения порядка $N = 1, 2, 3$ трехмерного уравнения теплопроводности, поскольку в работе [2] показано, что использование третьего приближения обеспечивает достаточную точность расчетов. Приближение $N = 0$ не рассматривается, поскольку в этом случае у матрицы A_0 есть единственное собственное значение.

Дискриминант $D(\Delta)$ характеристического многочлена $\Delta(\mu)$ матрицы A_N есть произведение [15]

$$D(\Delta) = \prod_{0 \leq j < i \leq N} (\rho_j^2 - \rho_i^2)^2.$$

Дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен $\Delta(\mu)$ имеет кратные корни.

Дискриминанты характеристических многочленов при $N = \overline{1, 3}$ выражаются через коэффициенты этих многочленов по известным формулам [15] и имеют вид:

$$D(\Delta|_{N=k}) = R_k(Bi^+, Bi^-) \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Здесь $R_k(Bi^+, Bi^-)$ ($k = \overline{1, 3}$) – рациональные функции, непрерывные в области

$$\Omega = \{(Bi^+, Bi^-) \in R^2 : Bi^+ \geq 0, Bi^- \geq 0\},$$

в которой критерий Био имеет физический смысл.

Средствами пакета Maple было показано, что функции R_k ($k = \overline{1, 3}$) возрастают по обоим переменным во всей области Ω . При этом

$$\min_{\Omega} R_k(Bi^+, Bi^-) = R_k(0, 0) > 0 \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Отсюда видно, что дискриминант характеристического многочлена матрицы A_N не обращается в нуль в области Ω . Таким образом, при проведении практических расчетов достаточно ограничиться рассмотрением случая простых собственных значений матрицы A_N .

5. Анализ результатов численных исследований. В качестве примера рассчитано возмущенное температурное поле в пластине с теплоизолированным разрезом (22) при $l = 1$. Использована безразмерная система координат $y_1 = x/h$, $y_2 = y/h$, $y_3 = z/h$, определенная с точностью до полутолщины пластины h .

В качестве исходного бралось приближение $N = 3$ трехмерного уравнения теплопроводности. Основное температурное поле предполагалось таким, что через линию разреза L_1 проходит однородный тепловой поток, т.е.

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial y_2} \right|_{L_1} = 1^\circ C, \quad \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \right|_{L_1} = 0 \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Теплообмен с окружающей средой на лицевых поверхностях пластины предполагался либо верхним односторонним:

$$Bi^+ = 1, \quad Bi^- = 0, \quad (28)$$

либо симметричным:

$$Bi^+ = Bi^- = 1. \quad (29)$$

На рис. 1 показано изменение температуры по толщине пластины в точке $y_1 = y_2 = 0,5$. На рис. 1, а параметры теплообмена имеют вид (28), а на рис. 1, б – (29). На рис. 1 рассмотрено три вида материала пластины:

1. изотропный ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) – пунктирные линии;
2. трансверсально-изотропный ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* \neq 1$, где λ^* – параметр относительной теплопроводности в плоскости изотропии) – штриховые линии ($\lambda_x = \lambda_y \neq \lambda_z$);
3. ортотропный ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) – сплошные линии.

Исследования проведены для значений относительных коэффициентов теплопроводности в плоскости изотропии λ_1, λ_2 , которые близки к реальным, приведенным в монографии [16].

Кривые 1, 2 отвечают значениям $\lambda^* = 1/2$ и $\lambda^* = 2$, соответственно; кривые 3 соответствуют случаю $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$; кривые 4 – случаю $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

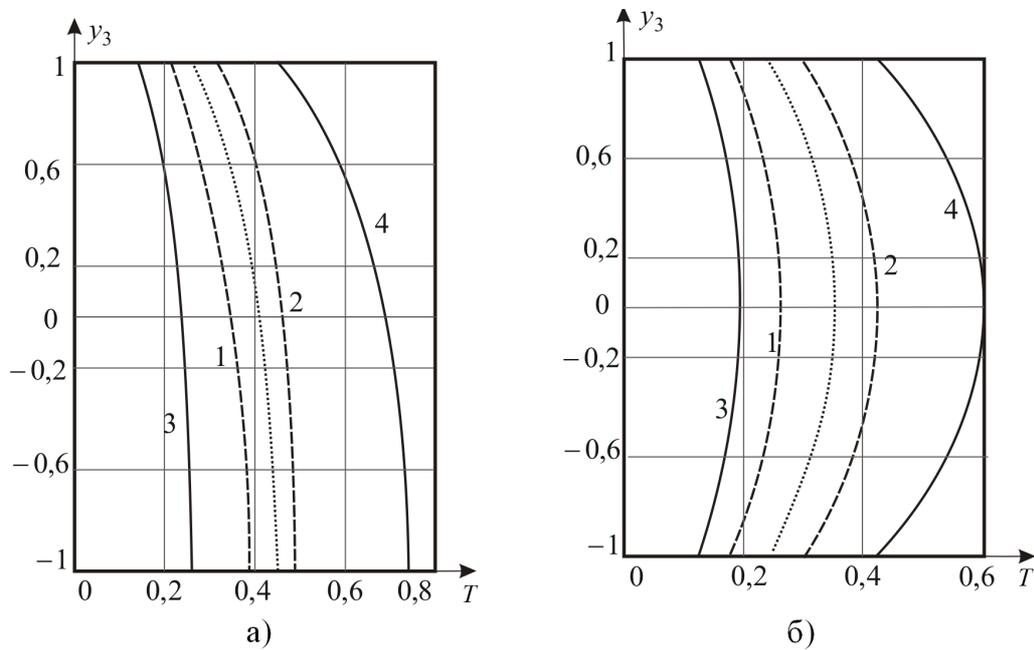


Рис. 1. Изменение температуры по толщине пластины

Из рис. 1 видно, что в трансверсально-изотропной пластине с увеличением параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии λ^* температура возрастает. В ортотропной пластине с ростом параметра λ_1 при неизменном значении λ_2 температура уменьшается, а с возрастанием λ_2 при постоянном λ_1 – увеличивается.

На рис. 2 показаны графики температуры в ортотропной пластине ($\lambda_1 = 1$) при непрерывном изменении параметра λ_2 . Температура рассчитывалась в точке $A(0,5;0,5;1)$ верхней лицевой поверхности (кривые 1), в точке $B(0,5;0,5;0)$ сре-

динной плоскости (кривые 2) и в точке $C(0, 5; 0, 5; -1)$ нижней лицевой поверхности пластины (кривые 3).

Сплошными линиями показаны графики температуры при теплообмене (28); пунктирными линиями – графики температуры при теплообмене (29).

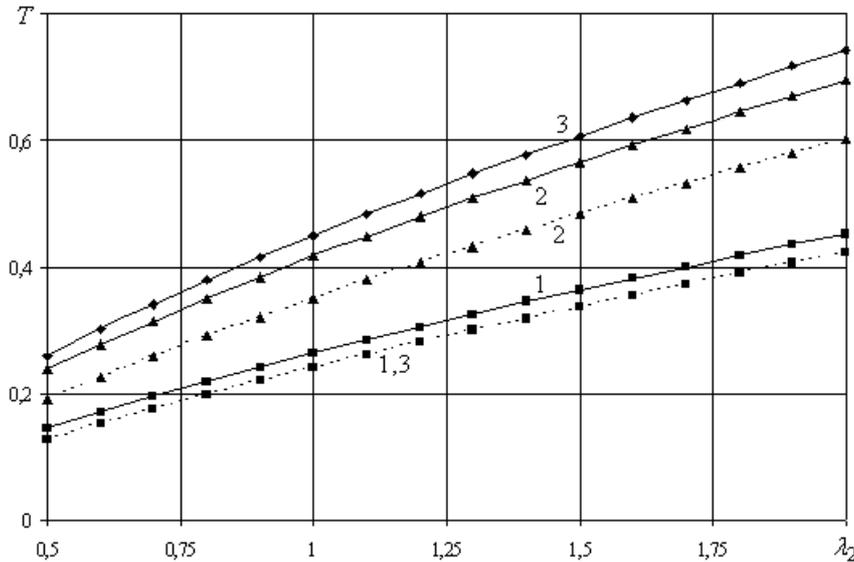


Рис. 2. Изменение температуры в ортотропной пластине в зависимости от λ_2

Из рис. 2 видно, что характер теплообмена с окружающей средой существенно влияет на величину температурного поля анизотропной пластины. При одинаковых значениях критерия Био Bi^+ температура в случае симметричного теплообмена ниже, чем в случае верхнего одностороннего теплообмена. Графики на рис. 2 подтверждают ранее сделанный вывод о том, что с ростом параметра λ_2 при неизменном λ_1 температура увеличивается.

На рис. 3 показаны графики относительных отклонений δ (%) температуры в анизотропной пластине от температуры в изотропной пластине в зависимости от изменения относительного коэффициента теплопроводности λ_2 при $\lambda_1 = 1$.

На рис. 3 приведены такие относительные отклонения:

- при теплообмене (28): $\delta^+ = \delta|_A$, $\delta^{cp} = \delta|_B$, $\delta^- = \delta|_C$;
- при теплообмене (29): $\delta_{\text{симм.}}^{\pm} = \delta|_A = \delta|_C$, $\delta_{\text{симм.}}^{cp} = \delta|_B$.

Приведенные на рис. 3 графики относительных отклонений позволяют сделать вывод, что разница в значениях температур в анизотропной и изотропной пластинах может достигать 80% при существенной тепловой анизотропии материала пластины ($\lambda_2 = 2\lambda_1$).

6. Выводы. Проведенные исследования позволяют заключить, что анизотропия тепловых свойств материалов существенно влияет на величину возмущенного температурного поля в пластинах с дефектами типа трещин, что приведет к аналогичной зависимости для температурных коэффициентов интенсивности напряже-

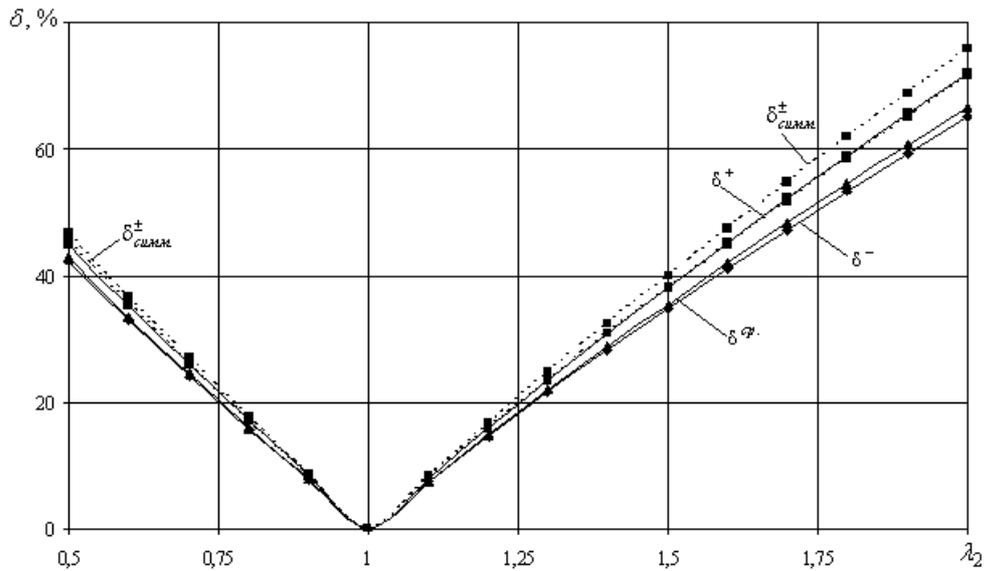


Рис. 3. Относительные отклонения температуры в анизотропной пластине

ний. Игнорирование анизотропных тепловых свойств материалов может привести к значительным погрешностям при проведении прочностных расчетов.

1. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
2. Bondarenko N.S. Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400-414.
3. Волчков Ю.М. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек / Ю.М. Волчков, Д.В. Важева // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 169-176.
4. Волчков Ю.М. Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра / Ю.М. Волчков, Л.А. Дергилева // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 179-190.
5. Zozulya V.V. Laminated shells with debonding between laminas in temperature field / V.V. Zozulya // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 135-141.
6. Zozulya V.V. Nonperfect contact of laminated shells with considering debonding between laminas in temperature field / V.V. Zozulya // Теоретическая и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 92-97.
7. Никабадзе М.У. Применение систем ортогональных полиномов при математическом моделировании упругих плоских тонких тел / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ. – 2008. – 44 с.
8. Никабадзе М.У. Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ. – 2008. – 287 с.
9. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка. – 1984. – 280 с.
10. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО. – 1988. – 84 с.
11. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ. – 1980. – 128 с.

12. Шостак Р.Я. Операционное исчисление / Р.Я. Шостак.– М.: Высшая школа. – 1972. – 192 с.
13. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.– М.: Наука. – 1983. – 752 с.
14. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
16. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К.; Донецк: Вища школа. – 1983. – 160 с.

N. S. Bondarenko, A. S. Gol'tsev

Estimation of influence of thermal anisotropy on the temperature field in an anisotropic plate with thermally insulated cut.

The heat conduction problem for an anisotropic plate with thermally insulated cut is solved. At the same time a generalized theory based on the expansion of temperature in a Fourier series by Legendre polynomials is used. The influence of the thermal anisotropy of the plate material and heat exchange conditions on the value of the perturbed temperature field caused by the presence of the cut is investigated. The relative deviation between the temperature in the anisotropic and isotropic plate is also investigated. General conclusions are made.

Keywords: *anisotropic plate, thermal anisotropy, thermally insulated cut, generalized theory, coefficients of thermal conductivity.*

Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

Оцінка впливу теплової анізотропії на температурне поле в анізотропній пластині з теплоізолюваним розрізом.

Розв'язано задачу теплопровідності для анізотропної пластини з теплоізолюваним розрізом. При цьому використано узагальнену теорію, що ґрунтується на розвиненні температури в ряд Фур'є за поліномами Лежандра. Досліджено вплив теплової анізотропії матеріалу пластини й умов теплообміну на величину збуреного температурного поля, викликаного наявністю розрізу. Досліджено відносне відхилення між температурою в анізотропній та ізотропній пластині. Зроблено узагальнюючі висновки.

Ключові слова: *анізотропна пластина, тепла анізотропія, теплоізолюваний розріз, узагальнена теорія, коефіцієнти теплопровідності.*

Донецкий национальный ун-т
bondarenko_n_s@mail.ru
a.goltsev@i.ua

Получено 27.12.11

УДК 517.95

©2012. В. П. Бурский, И. И. Куракина

ОБЩАЯ ЭКВИВАРИАНТНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Для уравнения теплопроводности в цилиндре над кругом рассмотрена смешанная задача с произвольным начальным и общим поворотно-инвариантным граничным условиями. Получена явная формула решения в виде ряда Фурье-Дини, исследованы гладкие свойства такого решения, получена априорная оценка в шкале позитивных весовых соболевских пространств.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, смешанная задача, эквивариантная граничная задача.

1. Введение. Исследование симметрий дифференциальных уравнений с частными производными, начатое Софусом Ли, в настоящее время превратилось в большое самостоятельное направление. Однако изучение симметрических свойств граничных задач не проводилось вплоть до последнего времени. Исследования в этом направлении, начатые в статье Кочубея А.Н. [6], были продолжены в работах Бурского В.П. [2], а также Бурского В.П. и Т.В. Штепиной [3].

В данной работе рассматривается уравнение теплопроводности в цилиндре над кругом с начальным и граничным условиями. Граничным условием является однородное эквивариантное условие с группой поворотов круга, а начальная задача ставится с общей функцией, инвариантность которой не требуется. Рассматриваемое эквивариантное граничное условие является общим инвариантным относительно поворотов со слабым ограничением (см. ниже условие (3')).

Удаётся применить метод Фурье разделения переменных в общей ситуации. С помощью теории рядов Дини и свойств функций Бесселя найдена точная формула для решения начально-краевой эквивариантной задачи в виде ряда Фурье-Дини.

Проведен анализ принадлежности найденного решения к пространствам типа пространств Соболева. В результате чего доказана априорная оценка, из которой следует корректность по Адамару поставленной задачи для уравнения теплопроводности в соответствующей шкале пространств Соболева.

2. Постановка задачи. В круговом цилиндре $Q_T = K \times [0, T]$, $T > 0$, где $K = \{x \in R^2 : |x| \leq 1\}$ – единичный круг с границей ∂K будем рассматривать однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

и общим инвариантным относительно группы поворотов граничным условием

$$\alpha * u|_{\partial K} + \beta * u'|_{\partial K} = 0, \quad (3)$$

где $\alpha = \sum \alpha_n e^{in\tau}$, $\beta = \sum \beta_n e^{in\tau}$ – функции на единичной окружности ∂K произвольной гладкости, разложенные в ряд Фурье; $*$ – свертка на ∂K : $\alpha * \psi = \sum \alpha_n \psi_n e^{in\tau}$, u_0 – некоторая функция из весового класса $L_{2,r}(K)$:

$$\|g\|_{L_{2,r}(K)}^2 = \int_K |g(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi.$$

Если $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\tau}$, $u'_\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\tau}$, то условие (3) перепишется в виде: $\alpha_n u_n + \beta_n v_n = 0$. Ниже будем полагать, что

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \geq -n. \quad (3')$$

Это условие будет означать вещественность нулей $\mu_m^{(n)}$ используемых ниже функций Бесселя, поскольку их комплексные нули мы здесь не рассматриваем. Требуется найти и исследовать решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (2), (3), где $u_0 \in L_{2,r}(K)$, а функции α, β подчинены ограничению (3').

3. Получение формулы решения задачи в явном виде. В полярных координатах задача (1), (2), (3) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0(r, \varphi), \quad (5)$$

$$\alpha * u|_{\partial K} + \beta * u'|_{\partial K} = 0, \quad (6)$$

где $K = \{\varphi \in (0, 2\pi), 0 \leq r < 1\}$, $t \in [0; T]$.

Решение задачи (4), (5), (6) будем искать методом Фурье разделения переменных в виде:

$$u(t, r, \varphi) = T(t)R(r)\Phi(\varphi). \quad (7)$$

Таким образом, приходим к уравнениям:

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad (8)$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (9)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}) R(r) = 0. \quad (10)$$

Для уравнения (9) имеет место условие периодичности:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (11)$$

Решение задачи (9), (11) имеет вид:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

(подключили $n = 0$, учитывая, что $\Phi_0(\varphi) = a_0 \neq 0$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\nu = 0$).

Функции $R(r)$ из уравнения (10) удовлетворяют условию

$$|R(0)| < \infty \quad (13)$$

и условию (6) задачи. Уравнение (10) подстановкой $\lambda r = x$ ($R(r) = y(x)$) приводится к уравнению Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (14)$$

общее решение которого при $\nu = n$ имеет вид:

$$R_n(r) = C_n J_n(\lambda r) + D_n Y_n(\lambda r),$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Так как в окрестности $x = 0$ функция $J_n(x)$ ограничена, а функция $Y_n(x)$ является неограниченной, то в силу условия (13) коэффициент $D_n = 0$, т.е.

$$R_n(r) = C_n J_n(\lambda r). \quad (15)$$

$$R(r)\Phi(\varphi) = [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] J_n(\lambda r) = \gamma_n e^{in\varphi} J_n(\lambda r). \quad (16)$$

Подставим представление (16) в граничное условие (6), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n J_n(\lambda r) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda r)] \gamma_n e^{in\varphi} = 0.$$

Откуда, $\alpha_n J_n(\lambda r) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda r) = 0$.

В силу произвольности r , собственные значения λ будем находить из уравнения

$$\alpha_n J_n(\lambda) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda) = 0. \quad (17)$$

Обозначим решения λ этого уравнения через $\mu_m^{(n)}$. По предположению (3') все $\mu_m^{(n)}$ вещественны ([1]).

Решениями уравнения (8) являются функции $T_m(t) = C_m e^{-\lambda^2 t}$, где λ определяются из уравнения (17). Значит

$$T_m(t) = C_m e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}. \quad (18)$$

Таким образом, функции

$$u_{m,n}(r, t, \varphi) = [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r) \quad (19)$$

являются частными решениями уравнения (4) и удовлетворяют граничным условиям (5), (6).

Решение задачи (4)-(6) ищем в виде ряда

$$u(r, t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}(r, t, \varphi). \quad (20)$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты, воспользуемся начальным условием (5).

Рассмотрим следующую теорему (см. [1]).

Теорема 1. *Произвольная функция $w(r, \varphi) \in L_2(K)$ может быть разложена в ряд Дини*

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\zeta_{n,m} \cos n\varphi + \xi_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_{n,m} &= \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2 [J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2 - \nu^2) [J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^1 r w(r, \varphi) \cos n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr d\varphi, \\ \xi_{n,m} &= \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2 [J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2 - \nu^2) [J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^1 r w(r, \varphi) \sin n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr d\varphi. \end{aligned}$$

Запишем (20) при $t = 0$:

$$u(r, \varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) = u_0(r, \varphi).$$

По теореме 1 функция $u_0(r, \varphi)$ представима в виде

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n,m} &= \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2 [J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2 - \nu^2) [J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^1 r u_0(r, \varphi) \cos n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr d\varphi \\ \tilde{B}_{n,m} &= \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2 [J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2 - \nu^2) [J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]} \times \end{aligned} \quad (21)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^1 r u_0(r, \varphi) \sin n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr d\varphi. \quad (22)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r). \end{aligned}$$

Откуда следует, что $A_{n,m} = \tilde{A}_{n,m}$, $B_{n,m} = \tilde{B}_{n,m}$.

Значит,

$$u_{n,m}(r, t, \varphi) = [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r).$$

Таким образом, решение задачи (4), (5), (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(r, t, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(r, t, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu_m^{(n)}$ – вещественные корни уравнения $\alpha_n J_n(\lambda) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda) = 0$; $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ определяются по формулам (21), (22) соответственно.

4. Принадлежность ряда Фурье-Дини пространству $H_r^k(K)$. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема (см. [1]).

Теорема 2. Число нулей функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$, лежащих между мнимой осью и прямой $\operatorname{Re} z = m\pi + (\frac{1}{2}\operatorname{Re} \nu + \frac{1}{4})\pi$, при достаточно больших значениях m равно n , и все нули функции $J_\nu(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < A_\nu$, где A_ν – ограничено, если ν – ограничено.

Пусть $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} \dots \lambda_{m+1}^{(n)}$ – нули функции $aJ_n(z) + zJ_n'(z)$. Тогда, согласно теореме, корни $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} \dots \lambda_m^{(n)}$ лежат в полосе между мнимой осью и прямой $\operatorname{Re} z = m\pi + (\frac{1}{2}\operatorname{Re} n + \frac{1}{4})\pi$. Следовательно, корень $\lambda_{m+1}^{(n)}$ лежит между прямыми $\operatorname{Re} z = m\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi$ и $\operatorname{Re} z = (m+1)\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi$. То есть выполнено условие

$$m\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi \leq \operatorname{Re} \lambda_{m+1}^{(n)} \leq (m+1)\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi.$$

Разделим неравенство на $m+1 + \frac{n}{2}$

$$\frac{m\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi}{m+1 + \frac{n}{2}} \leq \frac{\operatorname{Re} \lambda_{m+1}^{(n)}}{m+1 + \frac{n}{2}} \leq \frac{(m+1)\pi + (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi}{m+1 + \frac{n}{2}},$$

и при фиксированном n перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Получим: $\operatorname{Re} \lambda_{m+1}^{(n)} \sim (m+1 + \frac{n}{2})\pi$, $\operatorname{Re} \lambda_m^{(n)} \sim (m + \frac{n}{2})\pi$.

Т.о. доказано следующее

Утверждение 1. $\operatorname{Re} \mu_m^{(n)} \sim (m + \frac{n}{2})\pi$. \square

Будем использовать следующее весовое пространство Соболева $H_r^k(K)$, где мы рассматриваем норму, заданную следующим образом:

$$\|f\|_{H_r^k(K)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L_{2,r}(K)}^2, \quad \|g\|_{L_{2,r}(K)}^2 = \int_K |g(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi.$$

Рассмотрим вопрос принадлежности решения задачи (4), (5), (6) пространству $H_r^k(K)$.

Теорема 3. Для того, чтобы произвольная функция $f(r, \varphi)$ принадлежала пространству Соболева $H_r^k(K)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (r – вес, K – круг) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2)^k (|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2) < \infty, \quad (24)$$

где

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm} \cos n\varphi + g_{nm} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

$f_{nm} = \tilde{A}_{n,m}$, $g_{nm} = \tilde{B}_{n,m}$; $\tilde{A}_{n,m}$, $\tilde{B}_{n,m}$ определяются по формулам (21), (22) соответственно.

Доказательство. Пусть функция $f(r, \varphi)$ принадлежит пространству Соболева $H_r^k(K)$:

$$\|f\|_{H_r^k(K)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L_{2,r}(K)}^2 < \infty. \quad (25)$$

Покажем эквивалентность нормы (25) и нормы, заданной формулой (24):

$$\|f\|_{H_r^k(K)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2)^k (|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).$$

Покажем эквивалентность норм при $k = 1$.

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) \in H_r^1(K) : \|f\|_{H_r^1(K)}^2 &= \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \|\nabla f\|_{L_{2,r}(K)}^2 = \\ &= \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \|f'_\varphi\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \|f'_r\|_{L_{2,r}(K)}^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r |f(r, \varphi)|^2 dr d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm} \cos n\varphi + g_{nm} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) \times \\
 &\quad \times \overline{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [f_{pl} \cos p\varphi + g_{pl} \sin p\varphi] J_p(\mu_l^{(p)} r) dr d\varphi} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm} \overline{f_{nm}} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi + g_{nm} \overline{g_{nm}} \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi] \times \\
 &\quad \times \int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr.
 \end{aligned}$$

По утверждению 1 $\mu_m^{(n)} = (m + \frac{n}{2})\pi + o(m + \frac{n}{2}) = (m + \frac{n}{2})\pi\alpha(m + \frac{n}{2})$, где $\alpha(m + \frac{n}{2}) \rightarrow 1$ при $(m + \frac{n}{2}) \rightarrow \infty$.

Используя свойства ортогональности функций Бесселя и формулу для рекуррентного соотношения между функциями Бесселя и их производными ([1]), получим $\int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr \leq \tilde{C}_0$.

Таким образом,

$$\|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 \leq \tilde{C}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \leq C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2].$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned}
 \|f'_\varphi\|_{L_{2,r}(K)}^2 &\leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2], \\
 \|f'_r\|_{L_{2,r}(K)}^2 &\leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (2m + n)^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2].
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{H_r^1(K)}^2 &= \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \|f'_\varphi\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \|f'_r\|_{L_{2,r}(K)}^2 \leq \\
 &\leq \max\{C_0, C_1, C_2\} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + (2m + n)^2) [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \leq \\
 &\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2) (|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).
 \end{aligned}$$

Для доказательства эквивалентности норм нужно показать обратное неравенство:

$$\|f\|_{H_r^1(K)}^2 \geq \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2) (|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).$$

Оценим снизу выражения $\|f\|_{L_{2,r}(K)}^2, \|f'_\varphi\|_{L_{2,r}(K)}^2, \|f'_r\|_{L_{2,r}(K)}^2$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 &= \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi \left(\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)}) + J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2} - \frac{nJ_n(\mu_m^{(n)})J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{(\pi m + \pi \frac{n}{2})\alpha(m + \frac{n}{2})} \right) [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi \left(1 - \frac{n}{(\pi m + \pi \frac{n}{2})\alpha(m + \frac{n}{2})} \right) \frac{J_n^2(\mu_m^{(n)}) + J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2} [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \geq \\ &\geq K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \min \left(\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)}) + J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2} \right) [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] = \\ &= K_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2]. \end{aligned}$$

Аналогично получим оценки

$$\begin{aligned} \|f'_\varphi\|_{L_{2,r}(K)}^2 &\geq K_3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2], \\ \|f'_r\|_{L_{2,r}(K)}^2 &\geq K_4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+n)^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\|f\|_{H_r^1(K)}^2 \geq \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2) (|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).$$

Итак, показана эквивалентность норм (24) и (25) при $k=1, f(r, \varphi) \in H_r^1(K)$.

Далее по индукции. Предположим, что утверждение об эквивалентности норм (24) и (25) верно при $k=j$ и докажем, что эквивалентность имеет место при $k=j+1$.

Если $f(r, \varphi) \in H_r^{j+1}(K)$, то

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_r^{j+1}(K)}^2 &= \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \dots + \left\| \nabla^{(j)} f \right\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \left\| \nabla^{(j+1)} f \right\|_{L_{2,r}(K)}^2 = \\ &= \|f\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \dots + \left\| \nabla^{(j)} f \right\|_{L_{2,r}(K)}^2 + \left\| \nabla(\nabla^{(j)} f) \right\|_{L_{2,r}(K)}^2. \end{aligned}$$

Исходя из предположения индукции и по доказанному ранее при $k=1$, получаем требуемое утверждение.

Из эквивалентности норм (24) и (25) следует, что величина, заданная формулой (24), конечна.

Теорема 3 доказана. \square

5. Априорная оценка решения задачи. Разложение функции из начального условия (5) в ряд Дини имеет вид

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

где $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ определяются по формулам (21), (22) соответственно.

Согласно теореме 3, для того, чтобы функция $u_0(r, \varphi)$ принадлежала пространству $H_r^k(K)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\|u_0\|_{H_r^k(K)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) < \infty$.

Решение задачи (4), (5), (6) $u(r, t, \varphi) \in H_r^k(K_t)$ (где K_t – область при фиксированном t) тогда и только тогда, когда

$$\|u\|_{H_r^k(K_t)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{f}_{n,m}|^2 + |\tilde{g}_{n,m}|^2) < \infty,$$

где

$$\tilde{f}_{n,m} = \tilde{A}_{n,m} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}, \tilde{g}_{n,m} = \tilde{B}_{n,m} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}.$$

Оценим норму функции $u(r, t, \varphi)$ через норму функции $u_0(r, \varphi)$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_r^k(K_t)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{f}_{n,m}|^2 + |\tilde{g}_{n,m}|^2) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{A}_{n,m} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}|^2 + |\tilde{B}_{n,m} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}|^2) \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) = \|u_0\|_{H_r^k(K)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. Для решения $u(r, t, \varphi)$ задачи (4), (5), (6) для каждого $t \in [0, T]$ выполняется следующая априорная оценка:

$$\|u\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq \tilde{C} \|u_0\|_{H_r^k(K)}^2. \quad (26)$$

Замечание 1. Отметим, что при $t > 0$ конечной будет норма решения u в пространстве $H_r^k(K)$ для любого k . Действительно, в силу утверждения 1 для $t > 0$ и для любого k имеем $e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} (1+n^2+m^2)^k \rightarrow 0$ при $(1+n^2+m^2) \rightarrow \infty$. Это означает, что решение u – бесконечно дифференцируемая функция по x для $t > 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство $H_r^{l,k}(Q_T)$, $l, k \in \mathbb{Z}_+$ определяется как множество всех функций $f(t, x)$ из $L_2(Q_T)$, для которых

$$\|f\|_{H_r^{l,k}(Q_T)}^2 = \sum_{q=0}^l \int_0^T \left\| \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|_{H_r^k(K_t)}^2 dt < \infty.$$

Продифференцируем теперь ряд (23) по t 1, 2 ... l раз:

$$\begin{aligned} u_t' &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-\mu_m^{(n)})^2 [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r), \\ u_{tt}'' &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-\mu_m^{(n)})^2 [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r), \dots, \\ u_t^{(l)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-\mu_m^{(n)})^l [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r). \end{aligned}$$

И оценим полученные выражения:

$$\|u_t'\|_{H_r^k(K_t)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\mu_m^{(n)}|^2)^k e^{-2(\mu_m^{(n)})^2 t} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) \leq$$

(вспоминая, что $\mu_m^{(n)} \sim (m + \frac{n}{2})\pi$)

$$\leq \tilde{c}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k \left(m + \frac{n}{2}\right)^4 (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) \leq$$

(учитывая, что $(m + \frac{n}{2})^4 \leq \tilde{c}_2(1+n^2+m^2)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$)

$$\leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \quad (27)$$

Действуя аналогично, получим, что

$$\|u_{tt}''\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+4)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2), \dots, \quad (28)$$

$$\|u_t^{(l)}\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq C_l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \quad (29)$$

Оценим сумму норм решения и полученных выше выражений:

$$\sum_{q=0}^l \|u_t^{(q)}\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) +$$

$$\begin{aligned}
 & +C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) + \\
 & +C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+4)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) + \dots + \\
 & +C_l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) \leq \\
 & \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем (30) в пределах от 0 до T:

$$\int_0^T \sum_{q=0}^l \|u_t^{(q)}\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq MT \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{31}$$

В левой части (31) получили норму функции u во введенном в определении 1 пространстве $H_r^{l,k}(Q_T)$.

$$\|u\|_{H_r^{l,k}(Q_T)}^2 = \int_0^T \sum_{q=0}^l \|u_t^{(q)}\|_{H_r^k(K_t)}^2 \leq MT \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2).$$

Ниже будем полагать $k = 2l$. Введем в рассмотрение пространство $H_r^{l,2l}(Q_T)$.

Нами доказана следующая

Теорема 5. Для решения $u(r, t, \varphi)$ задачи (4), (5), (6) в цилиндре Q_T выполняется следующая априорная оценка с некоторой константой $C(T)$

$$\|u\|_{H_r^{l,2l}(Q_T)}^2 \leq C(T) \|u_0\|_{H_r^{2l}(K)}^2. \tag{32}$$

Из априорной оценки (32) следует существование, единственность и непрерывная зависимость решения задачи от начальных данных.

Таким образом, показана корректность по Адамару задачи (4), (5), (6) в пространстве $H_r^{l,2l}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим также, что при $t > 0$ конечной будет также норма любой производной по t решения u в пространстве $H_r^k(K)$ для любого k . Действительно, применим рассуждения замечания 1 к соотношению (30) и получим, что функция $u_t^{(q)}$ – бесконечно дифференцируемая функция по x . Т.е., решение u – бесконечно дифференцируемая функция по x, t внутри цилиндра Q_T .

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974.
2. Бурский В.П. Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. матем. журнал. – Т. 51. – 1999. – № 2. – С. 158-169.

3. Бурский В.П., Штепина Т.В. О спектре оператора эквивариантной граничной задачи с некоммутативной группой на примере уравнения Пуассона в шаре // Укр.матем.журнал. – Т. 52. – 2000. – № 11. – С. 1473-1483.
4. Ватсон Г. Теория бесселевских функций. – Т. 1. – М.: ИЛ, 1949.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
6. Кочубей А.Н. О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функциональный анализ и его приложения. – Т. 13. – № 4. – 1979. – С. 77-78.

V. P. Burskii, I. I. Kurakina

General equivariant mixed problem for the heat equation in the circular cylinder.

For the heat equation in the finite cylinder over the unit circle a mixed problem with the initial condition and an arbitrary boundary value problem which is invariant at general rotation is considered. An explicit formula for the solution in a form of Fourier-Dini series is counted, some smooth properties of such solution are studied, an a priori estimates in the positive scale of weight Sobolev spaces are obtained.

Keywords: *heat equation, mixed problem, equivariant boundary value problem.*

В. П. Бурський, І. І. Куракіна

Загальна еквіваріантна мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому циліндрі.

Для рівняння теплопровідності в циліндрі над кругом розглянуто мішану задачу із початковою та загальною поворотно-інваріантною граничною умовою. Отримано формулу для розв'язку у вигляді ряду Фур'є-Діні, досліджено гладкі властивості такого розв'язку, отримано апріорну оцінку в шкалі позитивних вагових соболевських просторів.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, мішана задача, еквівалентна гранична задача.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
v30@dn.farlep.net
inna-cin@mail.ru

Получено 01.02.12

УДК 517.95

©2012. В. П. Бурский, Е. В. Лесина

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе рассматривается проблема разрешимости неоднородной задачи Неймана в ограниченной области для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения с комплексными коэффициентами. Рассмотрен случай общего уравнения второго порядка без младших членов с постоянными комплексными коэффициентами в модельной области – единичном круге. Решен вопрос характеристики классов граничных данных, для которых существует единственное решение в обычном пространстве Соболева. Такими классами в типичном случае являются пространства функций с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: неправильно эллиптический дифференциальный оператор, весовое пространство Соболева, ряд Фурье, задача Неймана, символ дифференциального оператора.

1. Введение. В настоящее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются в современной литературе только для правильно эллиптического случая, поскольку после примеров А.В. Бицадзе положение дел с граничными задачами для неправильно эллиптического случая представляется весьма туманным. Напомним, что еще в 1948г. А.В. Бицадзе привел пример неправильно эллиптического уравнения $d^2u/d\bar{z}^2 = 0$, $z = x_1 + ix_2$, для которого однородная задача Дирихле в единичном круге K имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений $u_N(z) = (1 - z\bar{z})z^N$ (см. [1]). Позже им же был найден еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа (см. [2]). В последней работе показано также, что задача Неймана в круге K

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = t \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{t} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = 0, \quad t = e^{i\theta},$$

так же, как и задача Дирихле, имеет счетное множество линейно независимых решений вида

$$u(z) = \psi(z) - \frac{\bar{z}}{z} \int_0^z \tau^2 \psi'(\tau) d\tau,$$

где $\psi(z)$ – произвольная в круге K аналитическая функция, которая непрерывна в \bar{K} вместе с первой производной.

В настоящей работе мы рассмотрим неоднородную задачу Неймана (см. ниже задачу (7)) для линейного неправильно эллиптического уравнения второго порядка (1) в модельной области – круге – и получим разрешимость этой задачи в обычной соболевской шкале пространств, при этом правые части в граничных условиях должны быть из некоторого класса аналитических на ∂K функций.

Граничные задачи для неправильно эллиптических уравнений в ограниченной области изучались в работе одного из авторов [7], где получен критерий фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для скалярного линейного

неправильно эллиптического уравнения любого порядка в ограниченной области с гладкой границей. Применение этого критерия к задаче Дирихле и задаче Неймана показывает их нефредгольмовость. Задача Дирихле изучалась нами в работе [8]. Изучение неоднородной задачи Неймана для неправильно эллиптических уравнений в известной нам литературе не предпринималось. В книге [6] один из авторов настоящей работы доказал критерий нарушения единственности (критерий непостоянства) решения задачи Неймана в единичном круге для общего уравнения (1), и в его же работе [5], и там же в книге [6] анонсированы результаты о разрешимости задачи Неймана (7) в обычной соболевской шкале пространств и указан путь для их доказательства. В настоящей работе мы приводим доказательства результатов по разрешимости, исправляя ошибку в формулировках.

Настоящая работа продолжает исследование некорректных граничных задач для неправильно эллиптических уравнений, начатое в статье [8], где нами была доказана разрешимость задачи Дирихле для этого же уравнения в обычной соболевской шкале пространств. В ней, в зависимости от свойств числа $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, называемого углом между характеристиками уравнения (2), были рассмотрены три случая:

- 1) угол φ_0 вещественен и π -рационален, т.е. $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$;
- 2) угол φ_0 вещественен и π -иррационален;
- 3) угол φ_0 не вещественен.

Случай **1)** – это случай нарушения единственности решения задачи Дирихле [3], в этом случае имеется счетное число линейно независимых решений однородной задачи Дирихле. В случаях **2)** и **3)** пришлось вводить пространства аналитических правых частей для разрешимости в обычной соболевской шкале пространств, причем на свойства задачи Дирихле в случае **2)**, в отличие от случая **3)**, оказывали влияние теоретико-числовые свойства числа φ_0 , аналогично тому, как это происходит со свойствами задачи Дирихле для гиперболического уравнения (2) с вещественными коэффициентами (см., например, [6]). Ниже мы убедимся, что этот эффект проявляется и при исследовании задачи Неймана.

Напомним определение правильно эллиптического оператора. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и называется правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m чётно, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары линейно независимых действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \dots, t_+^k$ с положительной мнимой частью $\text{Im } t_+^j > 0$ и k корней $t_-^1, t_-^2, \dots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью $\text{Im } t_-^j < 0$.

Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор – эллиптический. Отметим, что при $n \geq 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (пример: оператор Коши-Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), и что то же спра-

ведливо для всех n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны ([10], см. также [9]).

2. Постановка задачи. Для случая $n = 2$ мы будем рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \quad (1)$$

Раскладывая оператор в левой части на линейные множители, уравнение (1) можно записать в виде

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla) u = 0$$

с единичными комплексными векторами $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2$, что позволяет при условии $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$ перейти к виду

$$Lu \equiv \left(\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0, \quad (2)$$

где углы φ_1 и φ_2 – комплексные числа, определенные равенствами $a_2^j/a_1^j = -\operatorname{tg} \varphi_j$, это – углы наклона характеристик, а угол $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – угол между характеристиками.

Ниже мы будем находиться в предположениях $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$, последнее из которых означает существование (комплексных) углов φ_j , поскольку неравенство $q \neq \pm i$ есть условие разрешимости уравнения $\operatorname{tg} \phi = q$.

Невещественность чисел φ_1 и φ_2 означает, что исходное уравнение является эллиптическим, то есть $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, где $l(\xi) = (\xi_1 \sin \varphi_1 + \xi_2 \cos \varphi_1) (\xi_1 \sin \varphi_2 + \xi_2 \cos \varphi_2)$ – символ нашего дифференциального оператора L . Под правильной эллиптичностью понимается, что корни λ_1, λ_2 квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеют мнимые части противоположных знаков, а это эквивалентно тому, что комплексные углы φ_1 и φ_2 имеют мнимые части противоположных знаков, и, стало быть, они имеют мнимые части одного знака в неправильно эллиптическом случае.

Для неправильно эллиптического уравнения (2) в единичном круге K мы будем изучать корректную разрешимость задачи Неймана, а именно, следуя определению корректности по Адамару линейной граничной задачи

$$Lu = f, \quad Bu|_{\partial\Omega} = g,$$

укажем пространство \mathfrak{B} , для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathfrak{S}} \leq \|f\|_{\mathfrak{R}} + \|g\|_{\mathfrak{B}}$$

($\mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \mathfrak{B}$ – банаховы пространства решений и правых частей) с пространством Соболева в качестве пространства \mathfrak{S} .

3. Метод исследования. В работе [4] получено условие связи следов решения уравнения (2) из обычных соболевских пространств, которое мы приводим ниже в виде следующей теоремы 1.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $u \in H^s(K)$ была решением задачи

$$u|_{\partial K} = \psi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K), \quad u'_\nu|_{\partial K} = \chi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\begin{aligned} P(x) &= -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K), \\ C(x) &= l(\nu(x))\chi(x) + [(\nu_1^2 - \nu_2^2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + 2\nu_1\nu_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]\psi'_\tau + \\ &+ [(\nu_2^2 - \nu_1^2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\nu_1\nu_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\psi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \end{aligned}$$

удовлетворяли условию

$$\int_{\partial K} [P(x)(-i\langle \nu, \bar{\xi} \rangle) + C(x)] \exp(-i\langle x, \bar{\xi} \rangle) d\tau = 0 \quad (3)$$

$$\forall \xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 : l(\xi) = 0\}.$$

Здесь и ниже τ – натуральный параметр на ∂K , $\langle x, \xi \rangle = x_1\bar{\xi}_1 + x_2\bar{\xi}_2$, $x \cdot \eta = x_1\eta_1 + x_2\eta_2$.

Позже, в работе [5], было показано, что равенство (3) эквивалентно паре условий

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} [u'_{\nu_*} + \frac{\Delta}{2}u'_\tau] Q(x \cdot \tilde{a}^1) d\tau &= 0, \\ \int_{\partial K} [u'_{\nu_*} - \frac{\Delta}{2}u'_\tau] Q(x \cdot \tilde{a}^2) d\tau &= 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{a}^1 = (-\bar{a}_2^1, \bar{a}_1^1)$, $\tilde{a}^2 = (-\bar{a}_2^2, \bar{a}_1^2)$ – направляющие векторы множества комплексных характеристических направлений $\Lambda^j = \{\lambda\tilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$, $\langle \tilde{a}^j, a^j \rangle = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\Delta = \sin \varphi_0$, векторные поля $\frac{\partial}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial}{\partial \nu_*} = l(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{2k} [l(\nu(\tau))]'_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}$ – производные по касательной и по конормали соответственно, k – кривизна кривой ∂K .

Данная эквивалентность вместе с теоремой 1 гарантировала справедливость следующей теоремы, доказанной в [5].

Теорема 2. Для того, чтобы функция $u \in H^s(K)$ ($s \geq 2$) была решением задачи

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \quad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы функции γ и κ удовлетворяли интегральному равенству

$$\int_{\partial K} [\kappa - (-1)^j \frac{\Delta}{2} \gamma] Q(x \cdot \tilde{a}^j) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

с любым полиномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. При этом функция u восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной.

Таким образом, было получено другое условие связи следов решения, имеющее вид проблемы неопределенности некоторой проблемы моментов, свойства которой определяли свойства граничной задачи.

В работе [8] изучалась следующая проблема моментов на границе круга:

Для $j = 1, 2$, для двух заданных наборов чисел μ_n^j , $n = 0, 1, \dots$, найти функцию α из пространства $H^l(\partial K)$, $l \in \mathbb{R}$, такую, что

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau + \varphi_j) d\tau = \mu_n^j. \quad (5)$$

Ниже перечислим необходимые обозначения и определения. Пусть M_l^j – подпространство пространства $H^l(\partial K)$, элементами которого являются функции $\alpha(\tau)$, удовлетворяющие при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ интегральному равенству

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) (x \cdot \tilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Определим пространство Соболева $H_\rho^m(\partial K)$ с весом $\rho = \rho(n)$ для коэффициентов Фурье как пространство функций

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau),$$

из $L_2(\partial K)$ таких, что коэффициенты α_n^C, α_n^S разложения удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2) \rho^2(n) (1 + n^2)^m < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем в качестве веса $\rho(n)$ примем значение

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\operatorname{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\operatorname{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)|)}.$$

Отметим, что $|\operatorname{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\operatorname{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)| > 0$ для неправильно эллиптического уравнения (2). Пространство $H_\rho^m(\partial K)$ с таким весом состоит из аналитических функций. Функции с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье систематически используются в теории функций, начиная с работ С.Н. Берштейна (см., например, книгу [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^m - H^l$ -свойством на кривой ∂K , $l \leq m$, если для каждой функции $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ существуют единственные функции $\alpha^1 \in M_l^1 \subset H^l(\partial K)$, $\alpha^2 \in M_l^2 \subset H^l(\partial K)$ такие, что имеет место представление $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \text{const}$.

Задача $H_\rho^m - H^l$ на кривой ∂K ($l \leq m$) состоит в нахождении условий на векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, необходимых и достаточных для $H_\rho^m - H^l$ -свойства на кривой ∂K . Эти условия получены и подробно описаны в работе [8]. Результаты исследования отражены в теореме 3.

Теорема 3. Пусть φ_0 – вещественное число, $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ – любая функция, и пусть выполнено неравенство:

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu}. \quad (6)$$

Тогда существуют функции α^j , $j = 1, 2$, из определения 2, принадлежащие пространству $H^{m-\mu}(\partial K)$. Если же φ_0 – комплексное невещественное число и попрежнему $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$, то существуют функции $\alpha^j \in H^m(\partial K)$.

4. Разрешимость задачи Неймана. Рассмотрим задачу Неймана

$$u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \quad (7)$$

для уравнения (2) в пространстве Соболева $H^s(K)(= W_2^s(K))$, $s \geq 2$, где $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ – единичный круг с границей ∂K , функция $\kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, и выясним, для каких классов граничных данных такая задача имеет единственное решение.

Сформулируем и докажем результат, отражающий связь свойств проблемы моментов (5) с разрешимостью задачи (2), (7) для вещественного φ_0 . Отметим, что, как показано в работе [5] (см. также [6]), π -рациональность угла φ_0 равносильна существованию непостоянного полиномиального решения однородной задачи (2), (7), причем, если существует одно такое решение, то существует счетный набор линейно независимых полиномиальных решений (возрастающей степени).

Теорема 4. Пусть число φ_0 вещественно и π -иррационально. При наличии $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}$ -свойства на границе ∂K круга у векторов $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.

Доказательство. Ввиду свойства $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}$ векторов \tilde{a}^1, \tilde{a}^2 всякая функция $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ представима в виде суммы $\kappa = v_1 + v_2$, где $v_j \in M_{s-\mu-\frac{3}{2}}^j \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, $j = 1, 2$. Нам необходимо по известной функции κ построить функцию γ таким образом, чтобы было выполнено интегральное равенство (4) из теоремы 2. Полагая $\gamma = \frac{2}{\Delta}(2v_1 - \kappa)$ и подставляя разложение $\kappa = v_1 + v_2$, получим: $\gamma = \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2)$.

Убедимся, что при таком выборе γ и κ выполняется равенство (4). В самом деле, при $j = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} \left[\kappa + \frac{\bar{\Delta}}{2} \gamma \right] Q(x \cdot \tilde{a}^1) d\tau = \\ & = \int_{\partial K} \left(v_1 + v_2 + \frac{\bar{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\Delta} (v_1 - v_2) \right) Q(x \cdot \tilde{a}^1) d\tau = 2 \int_{\partial K} v_1 \cdot Q(x \cdot \tilde{a}^1) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что равенство нулю интеграла достигается в силу принадлежности $v_1 \in M_{s-\mu-\frac{3}{2}}^1$.

$$\begin{aligned} & \text{Далее, при } j = 2 \text{ получаем: } \int_{\partial K} \left[\kappa - \frac{\bar{\Delta}}{2} \gamma \right] Q(x \cdot \tilde{a}^2) d\tau = \\ & = \int_{\partial K} \left(v_1 + v_2 - \frac{\bar{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\Delta} (v_1 - v_2) \right) Q(x \cdot \tilde{a}^2) d\tau = 2 \int_{\partial K} v_2 \cdot Q(x \cdot \tilde{a}^2) d\tau = 0, \end{aligned}$$

поскольку $v_2 \in M_{s-\mu-\frac{3}{2}}^2$.

Отметим, что, ввиду очевидных вложений, $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$. Кроме того, $\gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, так как имеет место представление $\gamma = \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2)$, где $v_j \in M_{s-\mu-\frac{3}{2}}^j \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, $j = 1, 2$.

Итак, обе функции γ и κ принадлежат пространству $H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и удовлетворяют равенству (4). Следовательно, для этих функций справедлива теорема 2, а это,

в свою очередь, означает, что существует единственное решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K), \quad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

с двумя граничными условиями для уравнения (2). Таким образом, функция $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению и каждому из граничных условий, в частности, условию Неймана $u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa$. Значит, существует единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи (2), (7). Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть φ_0 незначественно. Если векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$ -свойством на границе ∂K круга, то решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с той разницей, что в этом случае $\mu = 0$.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 6. Пусть φ_0 незначественно. Если решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$, то векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$ -свойством на границе ∂K круга.

Доказательство сразу следует из теоремы 2. Действительно, если нам дана произвольная функция $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, $s \geq 2$, то мы по ней строим решение задачи Неймана $u \in H^s(K)$, которое имеет след $\psi = u|_{\partial K} \in H^{s-1/2}(\partial K)$, и ее производная $\gamma = \psi'$ вместе с функцией κ должна, по теореме 2, удовлетворять равенствам (4), что и означает $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$ -свойство на границе ∂K круга.

Объединяя утверждения теорем 3, 4 и 5, получим основной результат в виде теорем 7 и 8, отвечающих случаям **2)** и **3)**.

Теорема 7. Пусть φ_0 вещественно и π -иррационально, $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и пусть выполнено неравенство (6). Тогда решение задачи (2), (7) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.

Теорема 8. Если φ_0 – незначественное число и $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, то решение задачи (2), (7) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$.

В самом деле, если φ_0 – вещественное и π -иррациональное (незначественное) число и $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, то, ввиду теоремы 3, слагаемые $\alpha^j \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)(H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K))$, $j = 1, 2$, что означает (в смысле определения 2), что векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}})$ -свойством на кривой ∂K . Но тогда из теоремы 4 следует существование, единственность и принадлежность решения $u(x)$ задачи (2), (7) пространству $H^{s-\mu}(K)$ ($H^s(K)$).

1. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 3, № 6. – 1948. – С. 211-212.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука. – 1981. – 448 с.
3. Бурский В.П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 48, № 3. – 1990. – С. 32-36.
4. Бурский В.П. О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журнал. – 44, № 10. – 1992. – С. 1307-1313.
5. Бурский В.П. О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журнал. – 45, № 11. – 1993. – С. 1476-1483.
6. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 316 с.
7. Бурский В.П. Условия регулярности общей дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптических уравнений // Укр. мат. журнал. – 62, № 6. – 2010. – С.754-761.
8. Бурский В.П., Кириченко Е.В. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // Укр. мат. журнал. – 63, № 2. – 2011. – С. 156-164.
9. Лионс Ж.-М., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир. – 1971. – 372 с.
10. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журнал. – 5, № 2. – 1953. – С. 123-151.
11. Мандельброт С. Квазианалитические классы функций. – ОНТИ НКТП СССР, Ленинград-Москва, 1937.

V. P. Burskii, Ye. V. Lesina

The Neumann problem for improperly elliptic second-order equation.

The solvability of inhomogeneous Neumann problem in bounded domain for scalar improperly elliptic differential equation with constant complex coefficients is investigated. It turned out that this problem has a unique solution in Sobolev space for special classes of Dirichlet data belonging to the spaces of functions with the exponential decreasing of the Fourier coefficients.

Keywords: *improperly elliptic differential operator, weight Sobolev space, Fourier series, Neumann problem, symbol of differential operator.*

В. П. Бурський, Є. В. Лесіна

Задача Неймана для неправильно еліптичного рівняння другого порядку.

У роботі розглядається проблема розв'язності неоднорідної задачі Неймана в обмеженій області для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння з постійними комплексними коефіцієнтами. Досліджено рівняння другого порядку без молодших членів у модельній області – в одиничному колі. Доведено, що класами граничних даних, для яких задача має єдиний розв'язок у просторі Соболева, є простори функцій з експоненціальним спаданням коефіцієнтів Фур'є.

Ключові слова: *неправильно еліптичний диференціальний оператор, ваговий простір Соболева, ряд Фур'є, задача Неймана, символ диференціального оператора.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
burskii@iamm.ac.donetsk.ua
lesina@bk.ru

Получено 27.03.12

УДК 531.38

©2012. А. А. Возняк

ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ПЕРВОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены условия существования полурегулярных прецессий первого типа гиростата с переменным гиростатическим моментом в обобщенной задаче динамики гиростата, описываемой уравнениями Кирхгофа-Пуассона. Найдены новые решения уравнений движения гиростата, которые выражаются либо в элементарных, либо в эллиптических функциях времени.

Ключевые слова: гиростат, полурегулярная прецессия, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы.

Введение. В аналитической механике и ее приложениях часто применяется метод стабилизации и управления движением с помощью маховиков [1, 2], который приводит к понятию гиростата с переменным гиростатическим моментом. Теоретические вопросы моделирования системы тел типа гиростатов рассматривались многими учеными (см., например, статьи [3, 4]). В настоящее время в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом изучены равномерные вращения [5], регулярные прецессии тяжелого гиростата [6], маятниковые движения гиростата под действием силы тяжести [7].

Как показано в работах А.В. Мазнева [8-10], исследование движений гиростата в обобщенной задаче динамики (см., например, [11]) позволяет получить такие классы прецессионных движений, которые не имеют аналогов в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести.

В данной работе на основе метода, предложенного в работе [8], изучены условия существования прецессий гиростата с постоянной скоростью прецессии (прецессии первого типа). Получены новые случаи интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона для случая переменного гиростатического момента.

1. Постановка задачи. Запишем уравнение движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [4, 11]

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega - L(t)\alpha + \omega \times (B\nu - \lambda(t)\alpha) + \nu \times (C\nu - s), \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad \dot{\lambda}(t) = L(t). \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, компоненты которого формируются в зависимости от способа вращения носимых тел; $L(t)$ – функ-

ция, характеризующая проекции действующих на носимые тела сил; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точки над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\lambda(t)$ обозначают относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Поставим задачу определения функции $L(t)$ и параметров A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , s_i , α_i , при наличии которых уравнения (1), (2) описывают полурегулярную прецессию первого типа.

Пусть в процессе движения угол между единичным вектором \mathbf{a} , неизменно связанным с носимым телом произвольным по распределению масс, и вектором $\boldsymbol{\nu}$ постоянен и равен θ_0 . Тогда имеет место инвариантное соотношение [8]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad (a_0 = \cos \theta_0). \quad (4)$$

Для полурегулярных прецессий первого типа имеют место следующие выражения [8]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad \mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad (5)$$

где $a'_0 = \sin \theta_0$, $\dot{\varphi}$ – скорость собственного вращения гиростата, $m_0 = \text{const}$, при подстановке которых в уравнение Пуассона из (2) приходим к тождеству.

Рассмотрим уравнение (1) при условиях (5). Следуя методу [8], внесем выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \ddot{\varphi}A\mathbf{a} + \dot{\varphi}m_0[S_p(A)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] - \\ & - \lambda(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}) + m_0(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - \varphi^2(A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - m_0^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) - \\ & - \dot{\varphi}(\mathbf{a} \times B\boldsymbol{\nu}) - m_0(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $S_p(A)$ – след матрицы A .

Пусть векторы \mathbf{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}$ составляют базис. Рассмотрим проекции левой части (6) на векторы этого базиса:

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \lambda(t)m_0[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - m_0^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})] - \\ & - m_0[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu})] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu})] - \mathbf{a}(\boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2\dot{\varphi}m_0[A\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \lambda(t)\dot{\varphi}[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] - \\ & - \dot{\varphi}[B\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \dot{\varphi}^2[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\lambda}(t)[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \ddot{\varphi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] + \lambda(t)\{\dot{\varphi}[a_0(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})] + \\ & + m_0[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})]\} + \dot{\varphi}m_0[a_0^2 S_p(A) - 2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] - \\ & - m_0^2[(a_0(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})) - \dot{\varphi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \\ & + \dot{\varphi}[(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(B\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] + m_0[a_0(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (B\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] + \\ & + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) - a_0(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + a_0(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (C\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений (7)-(9) является системой дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$.

Для получения скалярных уравнений, вытекающих из системы (7)-(9), введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_{11}^* &= m_0^2 A_{11} - m_0 B_{11} - C_{11}, & C_{12}^* &= m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12} - C_{12}, \\ C_{13}^* &= m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} - C_{13}, & C_{22}^* &= m_0^2 A_{22} - m_0 B_{22} - C_{22}, \\ C_{23}^* &= m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23} - C_{23}, & C_{33}^* &= m_0^2 A_{33} - m_0 B_{33} - C_{33}, \\ B_{11}^* &= B_{11} - 2m_0 A_{11}, & B_{12}^* &= B_{12} - 2m_0 A_{12}, & B_{13}^* &= B_{13} - 2m_0 A_{13}, \\ B_{22}^* &= B_{22} - 2m_0 A_{22}, & B_{23}^* &= B_{23} - 2m_0 A_{23}, & B_{33}^* &= B_{33} - 2m_0 A_{33}, \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользовавшись последними двумя векторными равенствами из (5), из уравнений (7)-(9) с учетом (10) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_3 \dot{\lambda}(t) + A_{33} \ddot{\varphi} - a_0' m_0 (\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi) \lambda(t) + \frac{1}{2} a_0'^2 (C_{22}^* - C_{11}^*) \sin 2\varphi - \\ - a_0'^2 C_{12}^* \cos 2\varphi + a_0' (a_0 C_{23}^* + s_2) \sin \varphi - a_0' (a_0 C_{13}^* + s_1) \cos \varphi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (a_0' \alpha_2 \cos \varphi + a_0' \alpha_1 \sin \varphi + a_0 \alpha_3) \dot{\lambda}(t) + a_0' (\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi) \lambda(t) \dot{\varphi} + \\ + (a_0' A_{23} \cos \varphi + a_0' A_{13} \sin \varphi + a_0 A_{33}) \ddot{\varphi} + a_0' (A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \\ + a_0' \left[a_0' \left(\frac{1}{2} (B_{22}^* - B_{11}^*) \sin 2\varphi - B_{12}^* \cos 2\varphi \right) + \right. \\ \left. + a_0 (B_{23}^* \sin \varphi - B_{13}^* \cos \varphi) \right] \dot{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi) \dot{\lambda}(t) - ((\alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi) (a_0 m_0 + \dot{\varphi}) - a_0' \alpha_3 m_0) \lambda(t) + \\ + (A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi) \ddot{\varphi} - (A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + [a_0' (B_{12}^* \sin 2\varphi + \\ + \frac{1}{2} (B_{22}^* - B_{11}^*) \cos 2\varphi) + a_0 (B_{13}^* \sin \varphi + B_{23}^* \cos \varphi) + \frac{1}{2} (a_0' (B_{11}^* + B_{22}^* + \\ + 2m_0 (A_{11} + A_{22} + A_{33}))) \dot{\varphi} - a_0 a_0' \left(C_{12}^* \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (C_{22}^* - C_{11}^*) \cos 2\varphi \right) - \\ - (a_0 s_1 + C_{13}^* (a_0^2 - a_0'^2)) \sin \varphi - (a_0 s_2 + C_{23}^* (a_0^2 - a_0'^2)) \cos \varphi + \\ + \frac{1}{2} a_0' (2s_3 + a_0 (2C_{33}^* - C_{11}^* - C_{22}^*)) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (11)-(13) допускают интеграл

$$\begin{aligned} [a_0' (\alpha_2 \cos \varphi + \alpha_1 \sin \varphi) + a_0 \alpha_3] \lambda(t) + [a_0' (A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) + a_0 A_{33}] \dot{\varphi} - \\ - \frac{1}{2} a_0' \left[a_0' (B_{12}^* \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (B_{22}^* - B_{11}^*) \cos 2\varphi) + 2a_0 (B_{13}^* \sin \varphi + B_{23}^* \cos \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_0' (B_{22}^* + B_{11}^*) \right] - \frac{1}{2} a_0^2 B_{33}^* = k, \end{aligned} \quad (14)$$

который является следствием второго интеграла из системы (3) на инвариантных соотношениях (5).

2. Случай $\alpha = (0, 0, 1)$, $a_0 = 0$. Пусть $\alpha = (0, 0, 1)$, $a_0 = 0$, ($a'_0 = 1$), тогда система уравнений (11)-(14) примет вид

$$\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}C \sin 2\varphi - C_{12}^* \cos 2\varphi + s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi = 0, \quad (15)$$

$$(A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi)\ddot{\varphi} + (A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2}B \sin 2\varphi - B_{12}^* \cos 2\varphi\right) \dot{\varphi} = 0, \quad (16)$$

$$m_0\lambda(t) + (A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi)\ddot{\varphi} - (A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2}B \cos 2\varphi + B_{12}^* \sin 2\varphi + P\right) \dot{\varphi} + C_{13}^* \sin \varphi + C_{23}^* \cos \varphi + s_3 = 0, \quad (17)$$

$$(A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi)\dot{\varphi} - \frac{1}{4}B \cos 2\varphi - \frac{1}{2}B_{12}^* \sin 2\varphi + R = 0. \quad (18)$$

В уравнениях (15)-(18) введены дополнительные обозначения

$$B = B_{22}^* - B_{11}^*, \quad P = \frac{1}{2}[B_{22}^* + B_{11}^* + 2m_0(A_{11} + A_{22} + A_{33})], \quad (19)$$

$$C = C_{22}^* - C_{11}^*, \quad R = -\frac{1}{4}(B_{22}^* + B_{11}^*) - k.$$

Очевидно, уравнение (16) является следствием интеграла (18). Потому в данном варианте исследования прецессий гиростата его можно отбросить.

Подвижную систему координат выберем так, что $A_{23} = 0$.

Из уравнения (18) найдем $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{B \cos 2\varphi + 2B_{12}^* \sin 2\varphi - 4R}{4A_{13} \sin \varphi}. \quad (20)$$

Из уравнения (17) выразим $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{m_0} \left[A_{13} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - A_{13} \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \left(\frac{1}{2}B \cos 2\varphi + B_{12}^* \sin 2\varphi + P \right) \dot{\varphi} - C_{13}^* \sin \varphi - C_{23}^* \cos \varphi - s_3 \right]. \quad (21)$$

При использовании соотношений (20), (21) возникает особый случай $A_{13} = 0$. Остановимся на нем подробнее.

Уравнение (18) должно быть тождеством по φ . Поэтому, из (18) в силу (10), (19) получим условия

$$B_{22} - B_{11} = 2m_0(A_{22} - A_{11}), \quad B_{12} = 2m_0A_{12}, \quad k = -\frac{1}{2}(B_{11} - 2m_0A_{11}). \quad (22)$$

Выражение для $\lambda(t)$ из (21) упрощается

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}(P\dot{\varphi} + C_{13}^* \sin \varphi + C_{23}^* \cos \varphi + s_3), \quad (23)$$

где в силу (22)

$$P = B_{11} + m_0(A_{22} + A_{33} - A_{11}). \quad (24)$$

Подставим в выражение для $\lambda(t)$ из (23) в уравнение (15) и учтем формулу (24)

$$\begin{aligned} & [B_{11} + m_0(A_{22} - A_{11})]\ddot{\varphi} + (C_{23}^* \sin \varphi - C_{13}^* \cos \varphi)\dot{\varphi} + \\ & + m_0 \left(C_{12}^* \cos 2\varphi - \frac{1}{2}C \sin 2\varphi + s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Если имеет место условие

$$B_{11} = m_0(A_{11} - A_{22}), \quad (26)$$

то из (25) следует

$$\dot{\varphi} = \frac{m_0(C_{12}^* \cos 2\varphi - \frac{1}{2}C \sin 2\varphi + s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi)}{C_{13}^* \cos \varphi - C_{23}^* \sin \varphi}. \quad (27)$$

Таким образом, при выполнении равенств $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$, (22), (24), (26), скорость собственного вращения выражается соотношением (27), а $\lambda(t)$ – (23). Это первый вариант решения полурегулярных прецессий в особом случае.

Второй вариант решения может быть получен из уравнения (25) при условиях $C_{13}^* = 0$, $C_{23}^* = 0$, $B_{11} \neq m_0(A_{11} - A_{22})$ или в силу (10) при выполнении равенств

$$mB_{13} + C_{13} = 0, \quad mB_{23} + C_{23} = 0. \quad (28)$$

В случае (28) соотношение (23) упрощается

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}(P\dot{\varphi} + s_3),$$

где функция $\dot{\varphi}$ может быть получена из (25)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\varkappa'_2 \sin 2\varphi - \varkappa_2 \cos 2\varphi - 2\varkappa_1 \cos \varphi + 2\varkappa'_1 \sin \varphi + \varkappa_0}, \quad (29)$$

здесь в силу условий (10)

$$\mu_0 = \frac{m_0}{B_{11} + m_0(A_{22} - A_{11})},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\mu_0}{2}[m_0^2(A_{22} - A_{11}) - m_0(B_{22} - B_{11}) - (C_{22} - C_{11})],$$

$$\varkappa'_2 = -\mu_0(m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12} - C_{12}), \quad \varkappa_1 = \mu_0 s_2, \quad \varkappa'_1 = -\mu_0 s_1,$$

а \varkappa_0 – произвольная постоянная.

Из формул (27) и (29) следует, что в первом варианте $\varphi(t)$ – элементарная функция времени, во втором варианте $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени.

Рассмотрим выражение (20) в общем случае. Оно имеет особенность в знаменателе при $\varphi = 0$. Для устранения этой особенности потребуем, чтобы

$$B - 4R = 0,$$

или на основании обозначений (10) и (19)

$$k = m_0 A_{22} - B_{22}.$$

Тогда выражение (20) можно переписать в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{2B_{12}^* \cos \varphi - B \sin \varphi}{2A_{13}}. \quad (30)$$

Из уравнения (17) с учетом (30) найдем $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2m_0 A_{13}} [2(A_{13} C_{23}^* + P B_{12}^*) \cos \varphi + (2A_{13} C_{13}^* - BP) \sin \varphi + 2A_{13} s_3]. \quad (31)$$

Подставим (30) и (31) в уравнение (15) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по φ . Учитывая обозначения (10), (19), получим следующие условия на параметры:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \varkappa_3^{(1)} m_0^3 + \varkappa_1^{(1)} m_0^2 + \varkappa_1^{(1)} m_0 + \varkappa_0^{(1)}, \\ C_{22} &= \varkappa_3^{(2)} m_0^3 + \varkappa_2^{(2)} m_0^2 + \varkappa_1^{(2)} m_0 + \varkappa_0^{(2)}, \\ (2m_0 A_{12} - B_{12})(m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} - C_{13}) &= \\ &= \frac{1}{2} (B_{22} - B_{11} + 2(A_{11} - A_{22}) m_0) (m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23} - C_{23}), \\ s_1 &= 0, \quad s_2 = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varkappa_3^{(1)} &= -\frac{A_{12}}{m_0}, \quad \varkappa_2^{(1)} = \frac{A_{12}[(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 2A_{13} B_{13}]}{A_{13}^2 m_0}, \\ \varkappa_1^{(1)} &= \frac{2A_{13}(2A_{12} C_{13} - B_{12} B_{13}) - B_{12}(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + A_{12}(B_{22}^2 - B_{11}^2)}{2A_{13}^2 m_0}, \\ \varkappa_0^{(1)} &= -\frac{B_{12}(4A_{13} C_{13} + B_{22}^2 - B_{11}^2)}{4A_{13}^2 m_0}, \quad \varkappa_3^{(2)} = -\frac{2A_{12} A_{23}}{A_{13} m_0}, \\ \varkappa_2^{(2)} &= \frac{1}{2A_{13}^2 m_0} [4(B_{22} + B_{11}) A_{12}^2 + 4A_{13} A_{12} B_{23} - (B_{22} - B_{11}) A_{13}^2 - \\ &\quad - 2((A_{11} - A_{22}) B_{13} - A_{23} B_{12}) A_{13} - (A_{11} - A_{22})^2 (B_{22} + B_{11})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varkappa_1^{(2)} &= -\frac{1}{2A_{13}^2 m_0} [-2A_{13}^2 C_{11} + ((B_{22} - B_{11})B_{13} + 2(A_{11} - A_{22})C_{13} - 4A_{12}C_{23} + \\ &+ 2B_{12}B_{23})A_{13} + (B_{22} + B_{11})((B_{22} - B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 4B_{12}A_{12})], \\ \varkappa_0^{(2)} &= -\frac{1}{8A_{13}^2 m_0} [4((B_{22} - B_{11})C_{13} + 2B_{12}C_{23})A_{13} + \\ &+ (B_{22} + B_{11})((B_{22} - B_{11})^2 - 4B_{12}^2)].\end{aligned}$$

При выполнении условий (32) в силу (10) и (19) функции $\dot{\varphi}$ из (30) и $\lambda(t)$ из (31) примут вид

$$\dot{\varphi} = \frac{(B_{12} - 2m_0 A_{12}) \cos \varphi - \frac{1}{2}((B_{22} - B_{11}) + 2(A_{11} - A_{22})m_0) \sin \varphi}{A_{13}}, \quad (33)$$

$$\lambda(t) = \rho_1^{(1)} \cos \varphi + \rho_1'^{(1)} \sin \varphi + \rho_0^{(1)},$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1)} &= -\frac{1}{A_{13} m_0} \left[(-2A_{33}A_{12} + A_{23}A_{13})m_0^2 + (A_{33}B_{12} - B_{23}A_{13} - \right. \\ &\left. - (B_{22} + B_{11})A_{12})m_0 + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11})B_{12} - C_{23}A_{13} \right], \\ \rho_1'^{(1)} &= -\frac{1}{A_{13} m_0} \left[(A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22}))m_0^2 - (A_{13}B_{13} + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11})) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}A_{33}(B_{22} - B_{11})m_0 - A_{13}C_{13} - \frac{1}{4}(B_{22}^2 - B_{11}^2) \right], \\ \rho_0^{(1)} &= -\frac{s_3}{m_0}.\end{aligned}$$

Таким образом, для третьего варианта из (33) следует, что функция $\varphi(t)$ – элементарная функция времени. Разрешимость условий (32) следует из того факта, что параметры C_{ij} в силу постановки задачи не стеснены ограничениями, а величины $x_i^{(j)}$ от них не зависят.

3. Случай $\alpha = (0, 0, 1)$, $a_0 \neq 0$. Выразив из уравнения (12) $\dot{\lambda}(t)$, из уравнения (14) $\lambda(t)$ и подставив найденные выражения в уравнения (11), (13), получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned}-\frac{a_0' \ddot{\varphi}}{a_0} (A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) + \frac{a_0' \dot{\varphi}^2}{a_0} (A_{23} \sin \varphi - A_{13} \cos \varphi) - \\ -\frac{a_0' \dot{\varphi}}{a_0} \left(\frac{a_0'}{2} B \sin 2\varphi - a_0' B_{12}^* \cos 2\varphi - a_0 B_{13}^* \cos \varphi + a_0 B_{23}^* \sin \varphi \right) + \\ + \frac{1}{2} a_0'^2 C \sin 2\varphi - a_0'^2 C_{12}^* \cos 2\varphi + \\ + a_0' (C_{23}^* a_0 + s_2) \sin \varphi - a_0' (C_{13}^* a_0 + s_1) \cos \varphi = 0,\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& a'_0 \ddot{\varphi} (A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi) - a'_0 \dot{\varphi}^2 (A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi) + \\
& + \frac{a'_0 \dot{\varphi}}{2a_0} [2a'_0 a_0 B_{12}^* \sin 2\varphi + a'_0 a_0 B \cos 2\varphi + 2(a_0^2 B_{13}^* - a_0'^2 m_0 A_{13}) \sin \varphi + \\
& + 2(a_0^2 B_{23}^* - a_0'^2 m_0 A_{23}) \cos \varphi + a_0 a'_0 (2m_0 (A_{11} + A_{22}) + B_{11}^* + B_{22}^*)] - \\
& - \frac{a_0'^2}{2a_0} (2a_0^2 C_{12}^* - a_0'^2 m_0 B_{12}^*) \sin 2\varphi - \frac{a_0'^2}{4a_0} (2a_0^2 C - a_0'^2 m_0 B) \cos 2\varphi - \\
& - a'_0 [C_{23}^* (a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2 m_0 B_{23}^* + a_0 s_2] \cos \varphi - \\
& - a'_0 [C_{13}^* (a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2 m_0 B_{13}^* + a_0 s_1] \sin \varphi + \\
& + \frac{a_0'^2}{4a_0} [a_0'^2 m_0 (B_{11}^* + B_{22}^*) + a_0^2 (4C_{33}^* - 2(C_{22}^* + C_{11}^*)) + \\
& + 2a_0^2 m_0 B_{33}^* + 4a_0 s_3 + 4m_0 k] = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Условия существования решений системы дифференциальных уравнений (34), (35) в общем случае можно найти следующим образом. Необходимо из уравнений, исключив $\ddot{\varphi}$, определить функцию $\dot{\varphi}$. Подстановка этой функции в одно из уравнений системы (34), (35) и требование того, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ , приводит к условиям существования решений системы (26), (27). В данной работе рассмотрены частные случаи решения этой системы.

В первом случае потребуем, чтобы уравнение (34) было тождеством для любых $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Тогда получим условия на параметры, которые запишем с учетом обозначений (10) и (19):

$$\begin{aligned}
& A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{23} = 0, \\
& s_2 = a_0 C_{23}, \quad s_1 = a_0 C_{13}, \quad C_{22} - C_{11} = m_0^2 (A_{11} - A_{22}), \quad C_{12} = -m_0^2 A_{12}.
\end{aligned} \tag{36}$$

При выполнении условий (36) из уравнения (35) имеем

$$\dot{\varphi} = \rho_1^{(2)} \cos \varphi + \rho_1'^{(2)} \sin \varphi + \rho_0^{(2)}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_1^{(2)} &= \frac{a_0' C_{23}}{\sigma_0}, \quad \rho_1'^{(2)} = \frac{a_0' C_{13}}{\sigma_0}, \\
\rho_0^{(2)} &= -\frac{1}{2a_0 \sigma_0} [2m_0^2 (a_0^2 (A_{11} - A_{22}) - A_{22}) + m_0 (2k + a_0^2 (B_{22} - B_{33}) + B_{22}) + \\
& + 2a_0^2 (C_{11} - C_{33}) + 2s_3 a_0], \quad \sigma_0 = m_0 (A_{11} - A_{22}) + B_{22}.
\end{aligned}$$

В (37) полагаем, что $B_{22} \neq m_0 (A_{22} - A_{11})$. Из уравнения (14) функцию $\lambda(t)$ при выполнении условий (36) можно записать так:

$$\lambda(t) = -\dot{\varphi} A_{33} - \frac{m_0}{a_0} (a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) + \frac{1}{2a_0} (a_0'^2 B_{22} + a_0^2 B_{33}) + \frac{k}{a_0}. \tag{38}$$

Следовательно, при наличии условий (36) полурегулярная прецессия гиростата описывается формулами (37), (38).

Во втором частном случае потребуем, чтобы уравнение (35) было тождеством для всех $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Тогда условия на параметры с учетом обозначений (10), (19) примут вид

$$\begin{aligned} A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad B_{12} = 2m_0A_{12}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{23} = 0, \\ B_{11} = m_0(A_{11} - A_{22}), \quad B_{22} = m_0(A_{22} - A_{11}), \quad C_{22} - C_{11} = m_0^2(A_{11} - A_{22}), \\ C_{12} = -m_0^2A_{12}, \quad C_{13} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ s_3 = \frac{-m_0k^* + 2a_0^2[m_0^2(A_{33} - A_{22}) + m_0(B_{22} - B_{33}) + (C_{22} - C_{33})]}{2a_0}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $k^* = a_0^2B_{33} + 2k - m_0(a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + 2a_0^2A_{33})$.

При выполнении условий (39) уравнение (34) обращается в тождество. Функция $\dot{\varphi}$ является произвольной. Из уравнения (14) с учетом (10), (39) следует

$$\lambda(t) = \frac{k^*}{2a_0} - A_{33}\dot{\varphi}. \quad (40)$$

Из формулы (40) вытекает, что проекция вектора момента количества движения на ось собственного вращения постоянна.

4. Случай $\alpha = (1, 0, 0)$, $\dot{\varphi} = \sqrt{a + b \sin \varphi}$. Пусть $\alpha = (1, 0, 0)$. Выразив из уравнения (14) функцию $\lambda(t)$ и подставив $\lambda(t)$ и $\dot{\lambda}(t)$ в уравнения (11) и (13), получим следующую систему уравнения

$$\begin{aligned} 4A_{33}\ddot{\varphi} \sin \varphi + 2(a_0'(A_{23} \cos 2\varphi + A_{13} \sin 2\varphi) + 2a_0A_{33} \cos \varphi + a_0'A_{23})m_0\dot{\varphi} - \\ - p_1 \sin 3\varphi - p_2 \cos 3\varphi - 2a_0'p_3 \sin 2\varphi - 2a_0'p_4 \cos 2\varphi - \\ - p_5 \sin \varphi - p_6 \cos \varphi + p_7 = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} (a_0A_{33} \sin 2\varphi + 2a_0'A_{23} \sin \varphi)\ddot{\varphi} - 2(a_0'A_{23} \cos \varphi + a_0A_{33})\dot{\varphi}^2 + \\ + \left[\frac{1}{2}a_0a_0'm_0(A_{23} \cos 3\varphi + A_{13} \sin 3\varphi) + \left(p_8 + \frac{1}{2}a_0'^2(B_{11}^* + B_{22}^*) \right) \cos 2\varphi - \right. \\ \left. - \frac{3}{2}a_0a_0'm_0A_{13} \sin \varphi + p_9 \cos \varphi - p_8 + \frac{1}{2}a_0'^2B + a_0^2B_{33}^* + 2k \right] \dot{\varphi} - \\ - \frac{1}{4}a_0p_1 \sin 4\varphi - \frac{1}{4}a_0p_2 \cos 4\varphi - \frac{1}{2}a_0'(a_0p_3 - a_0'^2C_{13}^*) \sin 3\varphi - \\ - \frac{1}{2}a_0'(a_0p_4 - a_0'^2C_{23}^*) \cos 3\varphi + \frac{1}{2}a_0p_1 \sin 2\varphi + p_{10} \cos 2\varphi + \\ + \frac{3}{2}a_0'(a_0p_3 - a_0'^2C_{13}^*) \sin \varphi + \frac{1}{2}a_0'(a_0p_4 - a_0'^2C_{23}^*) \cos \varphi + p_{11} = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 p_1 &= a_0'^2(m_0B_{12}^* + 2C_{12}^*), & p_2 &= \frac{a_0'^2}{2}(m_0B + 2C), & p_3 &= s_1 + a_0(m_0B_{13}^* + C_{13}^*), \\
 p_4 &= s_2 + a_0(m_0B_{23}^* + C_{23}^*), & p_5 &= a_0'^2(m_0B_{12}^* - 2C_{12}^*), & p_8 &= m_0(a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + A_{33}), \\
 p_6 &= \frac{m_0}{2}(a_0'^2(B_{11}^* + 3B_{22}^*) + 4a_0^2B_{33}^* + 4k) - a_0'^2C, \\
 p_7 &= 2a_0's_2 + 2a_0'a_0(C_{23}^* - m_0B_{23}^*), & p_9 &= \frac{a_0'a_0}{2}(4B_{23}^* - m_0A_{23}), \\
 p_{10} &= a_0'^2a_0(C_{33}^* - C_{11}^*) - \frac{a_0m_0}{2}(a_0'^2B_{11}^* + a_0^2B_{33}^*) + a_0'^2s_3 - a_0m_0k, \\
 p_{11} &= \frac{a_0'^2a_0}{4}(3C_{11}^* + C_{22}^* - 4C_{33}^*) + \frac{a_0m_0}{8}(3a_0'^2B_{11}^* + a_0'^2B_{22}^* + 4a_0^2B_{33}^*) - a_0'^2s_3 + a_0m_0k.
 \end{aligned}$$

Предположим, что функция $\dot{\varphi}$ имеет вид

$$\dot{\varphi} = \sqrt{a + b \sin \varphi}. \quad (43)$$

Подставив $\dot{\varphi}, \dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}$ в уравнение (41) и (42) и потребовав, чтобы полученные уравнения были тождествами, получим условия на параметры, которые с учетом (10) и (19) можно записать так:

$$\begin{aligned}
 A_{23} &= 0, & A_{13} &= 0, & a_0 &= 0, & a_0' &= 1, & s_2 &= 0, & s_3 &= 0, \\
 k &= m_0(A_{22} + A_{33}) + \frac{1}{2}B_{11}, & B_{12} &= 2m_0A_{12}, & B_{22} &= -2m_0A_{33} - B_{11}, \\
 C_{12} &= -m_0^2A_{12}, & C_{13} &= -m_0B_{13}, & C_{23} &= -m_0B_{23}, \\
 C_{22} - C_{11} &= m_0^2A_{33} + m_0B_{11}, & b &= \frac{2s_1}{A_{33}}.
 \end{aligned} \quad (44)$$

Из равенства (14) в силу (44) вытекает

$$\lambda(t) = [B_{11} - m_0(A_{11} - A_{22} - A_{33})] \sin \varphi.$$

Из формулы (43) следует, что $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени.

5. Случай $\alpha = (1, 0, 0)$, $\dot{\varphi} = a + b \sin \varphi$. Пусть

$$\dot{\varphi} = a + b \sin \varphi. \quad (45)$$

Из уравнения (14) с учетом (45) найдем

$$\lambda(t) = \frac{1}{4a_0' \sin \varphi} (d_2' \sin 2\varphi + d_2 \cos 2\varphi + d_1' \sin \varphi + d_1 \cos \varphi + d_0), \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}
 d_2' &= 2a_0'(a_0'B_{12}^* - A_{23}b), & d_2 &= a_0'(2A_{13}b + a_0'(B_{22}^* - B_{11}^*)), \\
 d_1' &= 4(a_0(a_0'B_{13}^* - A_{33}b) - a_0'A_{13}a), & d_1 &= 4a_0'(a_0B_{23}^* - A_{23}a), \\
 d_0 &= 2a_0(a_0B_{33}^* - 2A_{33}a) - a_0'(2A_{13}b - a_0'(B_{11}^* + B_{22}^*)) + 4k.
 \end{aligned}$$

Для устранения особенности в знаменателе формулы (46) потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$A_{23}a = a_0B_{23}^*, \quad (47)$$

$$2a_0A_{33}a - a_0'^2B_{22}^* - a_0^2B_{33}^* = 2k, \quad (48)$$

Предположим, что $A_{23} \neq 0$, тогда

$$a = \frac{a_0B_{23}^*}{A_{23}}. \quad (49)$$

Отождествив уравнения (11) и (13) по φ с учетом (46), (48), (49), получим условия на параметры, выписанные с учетом (10)

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_0(B_{23} - 2m_0A_{23})}{A_{23}}, \quad b = \frac{a_0'(B_{12} - 2m_0A_{12})}{A_{12}}, \\ k &= \frac{a_0^2A_{33}}{A_{23}}(B_{23} - 2m_0A_{23}) - \frac{1}{2}a_0'^2(B_{22} - 2m_0A_{22}) - \frac{1}{2}a_0^2(B_{33} - 2m_0A_{33}), \\ s_1 &= \frac{a_0}{2A_{23}^2}\{A_{23}[2m_0A_{13}B_{23} + (B_{11} + B_{22})(B_{12} - 2m_0A_{12})] - 2m_0A_{23}^2B_{13}\}, \\ s_2 &= 0, \quad s_3 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}[A_{23}^2(-2m_0^2(A_{33} + A_{22}) - m_0(B_{11} + B_{22} + 2B_{33}) - \\ &\quad - 2(C_{33} - C_{11})) - A_{23}(4A_{13}A_{12}m_0^2 - 2(A_{33}B_{23} + A_{13}B_{12})m_0 - \\ &\quad - B_{23}(B_{22} + B_{11})) - 8A_{12}A_{33}m_0(B_{12} - m_0A_{12}^2) + 2A_{33}B_{12}^2], \\ C_{13} &= m_0^2A_{13} - m_0B_{13} + \frac{1}{2A_{23}}(B_{12} - 2m_0A_{12})(2m_0A_{33} + B_{11} + B_{22}), \\ C_{22} &= m_0(m_0A_{22} - B_{22}) + \frac{1}{2A_{23}^2}[A_{23}^2(2C_{11} - 2m_0^2A_{22} + m_0(B_{11} + B_{22})) - \\ &\quad - 2m_0A_{13}A_{23}(2m_0A_{12} - B_{12}) + 2A_{33}(4m_0A_{12}(m_0A_{12} - B_{12}) + B_{12}^2)], \\ C_{12} &= m_0^2A_{12} - m_0B_{12}, \quad C_{23} = m_0^2A_{23} - m_0B_{23}. \end{aligned} \quad (50)$$

При выполнении условий (50) функция $\lambda(t)$ из (46) примет вид

$$\lambda(t) = g_1 \sin \varphi + g_0,$$

$$\text{где } g_1 = \frac{a_0'}{2A_{23}}(2A_{13}B_{12} + A_{23}(B_{22} - B_{11}) - 2m_0(2A_{12}A_{13} + (A_{22} - A_{11})A_{23})),$$

$$g_0 = \frac{a_0}{A_{23}}(A_{13}B_{23} - A_{23}B_{13} + A_{33}(B_{12} - 2m_0A_{12})).$$

Предположим, что в (47) $A_{23} = 0$. Тогда получаем два случая при $a_0 = 0$ и $B_{23}^* = 0$.

Пусть $a_0 = 0$, тогда $a'_0 = 1$. Подставив (46) в уравнения (11) и (13), и отождествив их по φ , выпишем условия на параметры

$$\begin{aligned} C_{12} &= -m_0^2 A_{12}, & C_{23} &= -m_0 B_{23}, \\ C_{13} &= -b \left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33} \right) + m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13}, \\ C_{11} &= -b(m_0 A_{13} + A_{33}b) + \frac{1}{2}m_0(B_{22} - B_{11}) + C_{22}, \\ B_{12} &= 2m_0 A_{12}, & s_1 &= a(A_{33}b + m_0 A_{13}), & s_2 &= 0, \\ s_3 &= -a \left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33} \right), & k &= -\frac{1}{2}(B_{22} - 2m_0 A_{22}). \end{aligned}$$

Из (46) следует

$$\lambda(t) = -A_{13}a - \sin \varphi \left(A_{13}b + \frac{1}{2}(B_{22} - B_{11}) - m_0(A_{22} - A_{11}) \right).$$

Случай $B_{23}^* = 0$ рассматривается аналогично и приводит к линейной зависимости $\lambda(t)$ от $\sin \varphi$

6. Выводы. В статье проведено исследование условий существования прецессий первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Получены новые решения уравнений Кирхгофа-Пуассона движения неавтономного гиростата.

1. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наука, 1980. – 175 с.
2. Жужовский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.Л.: ОГИЗ. – 1949. – Т. 2. – С. 152-309.
3. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вест. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 1970. – № 2. – С. 83-96.
4. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
5. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
6. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ. – 2009. – Т. 19. – С. 30-35.
7. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
8. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
9. Мазнев А.В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гироскопическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Труды ИПММ. – 2010. – Том 21. – С. 64-75.
10. Мазнев А.В. О прецессии сферического гиростата с переменным гироскопическим моментом в поле силы тяжести // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 14-18.
11. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Meean. Theor. Appl. – 1986. – 5, N 5. – P. 742-745.

A. A. Voznyak

Semiregular precession of the first type in the problem of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces.

The problem of the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces has been considered. Conditions for the existence of semiregular gyrostat precessions of the first type with variable gyrostatic moment in the generalized problem of gyrostat dynamics described by the Kirchhoff-Poisson are obtained. New solutions of the equations of gyrostat motion, which are expressed either in elementary or elliptic functions of time has been founded.

Keywords: *gyrostat, semiregular precession, gyrostatic moment, potential and gyroscopic forces.*

A. O. Возняк

Напіврегулярні прецесії першого типу в задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенційних і гіроскопічних сил.

Розглянуто задачу про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Отримано умови існування напіврегулярних прецесій першого типу гіростата зі змінним гіростатичним моментом в узагальненій задачі динаміки гіростата, що описується рівняннями Кірхгофа-Пуассона. Знайдено нові розв'язки рівнянь руху гіростата, які виражаються або в елементарних, або в еліптичних функціях часу.

Ключові слова: *гіростат, напіврегулярна прецесія, гіростатичний момент, потенціальні та гіроскопічні сили.*

Донецкий национальный ун-т
экономики и торговли им. Туган-Барановского
alina_voznyak@mail.ru

Получено 05.03.12

UDK 517.956.25

©2012. M. V. Voitovich

ENERGY ESTIMATES OF BOUNDED SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A CLASS OF NONLINEAR FOURTH-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

We consider a class of nonlinear elliptic fourth-order equations with the principal part satisfying a strengthened coercivity condition, absorption and a lower-order term. It is supposed that the lower-order term of the equations admits the growth rates of derivatives of unknown function coinciding with the exponents of the corresponding energy space. At the same time, we do not suppose that the lower-order term satisfies a sign condition. Energy estimates of bounded generalized solutions of the Dirichlet problem for equations of the given class are established.

Keywords: *nonlinear elliptic fourth-order equations, strengthened coercivity, Dirichlet problem, bounded solutions, energy estimates.*

1. Preliminaries and the statement of the main result. Let $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, and let Ω be a bounded open set of \mathbb{R}^n .

We shall use the following notation: Λ is the set of all n -dimensional multi-indices α such that $|\alpha| = 1$ or $|\alpha| = 2$; $\mathbb{R}^{n,2}$ is the space of all mappings $\xi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$; if $u \in W^{2,1}(\Omega)$, then $\nabla_2 u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, and for every $x \in \Omega$ and for every $\alpha \in \Lambda$, $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Let $p \in (1, n/2)$ and $q \in (2p, n)$. We denote by $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ the set of all functions in $W^{1,q}(\Omega)$ that have the second-order generalized derivatives in $L^p(\Omega)$. The set $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ is a Banach space with the norm

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

We denote by $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ the closure of the set $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

We set $q^* = nq/(n - q)$. As is known (see for instance [1, Chapter 7]),

$$\overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega), \quad (1)$$

and there exists a positive constant c depending only on n and q such that for every function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\Omega)$,

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leq c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^q dx \right)^{1/q}. \quad (2)$$

Next, let $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$, let g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 be nonnegative summable functions on Ω , and let $A_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$ and $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$, where

$\alpha \in \Lambda$, are Carathéodory functions. We assume that for almost every $x \in \Omega$, for every $s \in \mathbb{R}$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ the following inequalities hold:

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \xi)|^{q/(q-1)} \leq c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \quad (3)$$

$$\sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \xi)|^{p/(p-1)} \leq c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_2(x), \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_3 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_3(x), \quad (5)$$

$$|B(x, s, \xi)| \leq c_4 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_4(x), \quad (6)$$

$$A_0(x, s) s \geq c_0 |s|^q, \quad (7)$$

$$|A_0(x, s)| \leq c_5 |s|^{q-1} + g_5(x). \quad (8)$$

Further, let

$$f \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \quad (9)$$

We consider the following Dirichlet problem:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) + A_0(x, u) + B(x, u, \nabla_2 u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (10)$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (11)$$

Observe that, by virtue of (3) and (4), for every $u, v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ and for every $\alpha \in \Lambda$ the function $A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v$ is summable on Ω , by (8), for every $u, v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ the function $A_0(x, u)v$ belongs to $L^1(\Omega)$, and finally, by (6), for every $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ and for every $v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ the function $B(x, u, \nabla_2 u)v$ is summable on Ω . Moreover, it follows from (1) and (9) that for every $v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ the function fv is summable on Ω .

DEFINITION 1. A generalized solution of problem (10), (11) is a function $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ such that for every function $v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v + A_0(x, u)v + B(x, u, \nabla_2 u)v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (12)$$

Before stating the main result of the work we give some comments on the equations of the given class.

If in (10) $B \equiv 0$, then equation (10) belongs to the class of quasi-linear divergent high-order equations with strengthened coercivity condition on the leading coefficients

(for the fourth-order equations, the condition has the form (5)). This class was introduced in [2], where, by modifying Moser's method [3], the boundedness and Holder continuity of generalized solutions of equations of the given class with sufficiently regular data were established at first.

Using an analogue of Stampacchia's method [4-6], a weaker (exact) condition on integrability of data was established in [7] to guarantee the boundedness of generalized solutions of nonlinear fourth-order equations with a strengthened coercivity. Moreover, in [7] a dependence of summability of generalized solutions of these equations on integrability of data was described. Analogous results for nonlinear high-order equations with a strengthened coercivity were obtained in [8].

Condition (6) means that the lower-order term B in equation (10) may have growth of the derivatives of unknown function of orders q and p , which coincide with the exponents of the energy space $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ (the natural growth of the derivatives of unknown function). The question of the solvability of the Dirichlet problem for elliptic second-order equations with natural growth lower-order terms was considered by many authors (see for instance [9-12]).

Usually, to solve this problem a sequence of approximate problems for equations with bounded lower-order terms is considered. The solvability of the approximate problem is established, for example, using the theory of pseudomonotone operators under certain assumptions on the coefficients of the initial equation. Then same appropriate a priori estimates are established for the sequence of the obtained solutions $\{u_i\}$ (uniform with respect to i), and on this basis the limit passage is made in the corresponding integral identities.

For problem (10), (11) we consider the following approximate problem:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) + A_0(x, u) + B_i(x, u, \nabla_2 u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (13)$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (14)$$

where $i \in \mathbb{N}$, $B_i(x, s, \xi) = T_i(B(x, s, \xi))$ and $T_i(s) = \max\{\min\{s, i\}, -i\}$.

Using such a scheme and approximate problem (13), (14), in [13] the existence of a bounded generalized solution of problem (10), (11) is proved in the case where $A_0 \equiv 0$ and the following conditions are satisfied. The functions g_2, g_3 and f belong to $L^r(\Omega)$, $r > n/q$, for almost every $x \in \Omega$ and every $s \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, the following inequalities hold:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0, \quad (15)$$

$$B(x, s, \xi)s \geq 0.$$

Without condition (15) the proof of solvability of problem (10), (11) meets the principal difficulties. First of all, we cannot use the functions $\psi(G_k(s))$, where $\psi(s) = (e^{\lambda|s|} - 1)\text{sign}s$, $G_k(s) = s - T_k(s)$, $\lambda, k > 0$ and $s \in \mathbb{R}$, in the test functions (superpositions) to obtain the necessary estimates of solutions of the approximating problems in the same manner as for the second-order equations (see for instance [9]).

However, using in the integral identity (12) the test function $v = \psi(u)$ with a suitable λ , where u is a bounded generalized solution of problem (10), (11), we arrive at the estimate $\|u\| \leq C$, where $C > 0$ does not depend on u .

In this case, as in the case of the second-order equations (see for instance [9], [11]), the presence of additional absorption term A_0 (with condition (7)) in equation (10) is significant.

The following theorem is the main result of the present article.

Theorem 1. *Let the functions g_2, g_3, g_4, f belong to $L^{n/q}(\Omega)$, and let u be a generalized solution of problem (10), (11) such that $u \in L^\infty(\Omega)$. Then for every $\lambda > c_4/c_3$,*

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p \right) \exp(\lambda|u|) dx \leq C_1, \quad (16)$$

where C_1 is a positive constant depending only on $n, p, q, \text{meas } \Omega, c, c_0, c_2, c_3, c_4, \lambda$, the functions g_2, g_3, g_4 and f .

Corollary 1. *Let the functions g_2, g_3, g_4, f belong to $L^{n/q}(\Omega)$, and let u be a generalized solution of problem (10), (11) such that $u \in L^\infty(\Omega)$. Then*

$$\|u\| \leq C_2, \quad (17)$$

where C_2 is a positive constant depending only on $n, p, q, \text{meas } \Omega, c, c_0, c_2, c_3, c_4$, the functions g_2, g_3, g_4 and f .

REMARK 1. Let $r > n/q$, let the functions g_2, g_3 and f belong to $L^r(\Omega)$, and the function g_4 belong to $L^{n/q}(\Omega)$. Let $i \in \mathbb{N}$, and let u_i be a generalized solution of problem (13), (14). By assertion (iii) of theorem 1 in [7], the function u_i belong to $L^\infty(\Omega)$. Now, using Corollary 1 and the inequality $B_i(x, s, \xi) \leq B(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,2}$, we establish the inequality $\|u_i\| \leq C_2$. Hence the sequence $\{u_i\} \subset \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ is bounded in $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, and hence there exist an increasing sequence $\{i_j\} \subset \mathbb{N}$ and a function $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ such that $u_{i_j} \rightarrow u$ weakly in $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

2. Auxiliary results. By analogy with Lemma 2.2 of [14], we establish the following lemma.

Lemma 1. *Let $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $h \in C^2(\mathbb{R})$ and $h(0) = 0$. Then $h(u) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and the following assertions hold:*

1) for every n -dimensional multi-index α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h(u) = h'(u) D^\alpha u \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

2) for every n -dimensional multi-index α , $|\alpha| = 2$,

$$D^\alpha h(u) = h'(u) D^\alpha u + h''(u) D^{\alpha'} u D^{\alpha''} u \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

where $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Lemma 2. Let ψ be an odd function on \mathbb{R} such that $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ and ψ'' has a discontinuity at the origin of the first kind. Then if

$$u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad (18)$$

then $\psi(u) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and the following assertions hold:

1) for every n -dimensional multi-index α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha \psi(u) = \psi'(u) D^\alpha u \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

2) for every n -dimensional multi-index α , $|\alpha| = 2$,

$$D^\alpha \psi(u) = \begin{cases} \psi'(u) D^\alpha u + \psi''(u) D^{\alpha'} u D^{\alpha''} u & \text{a.e. in } \{u \neq 0\}, \\ \psi'(0) D^\alpha u & \text{a.e. in } \{u = 0\}, \end{cases}$$

where $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Proof. Let $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. We define the function $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\Psi(s) = \psi(s) - \psi'(0)s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

If $|\alpha| = 1$, we put

$$w_\alpha = \Psi'(u) D^\alpha u, \quad (20)$$

and if $|\alpha| = 2$, we put

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} \Psi'(u) D^\alpha u + \Psi''(u) D^{\alpha'} u D^{\alpha''} u & \text{if } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{if } u(x) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

where $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Clearly,

$$w_\alpha \in L^q(\Omega), \quad |\alpha| = 1; \quad w_\alpha \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| = 2. \quad (22)$$

We fix $\varepsilon > 0$. Let Ψ_ε be the function on \mathbb{R} such that

$$\Psi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \Psi(s) + (\frac{1}{2}\varepsilon\Psi''(\varepsilon) - \Psi'(\varepsilon))(s - \varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon^2\Psi''(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon) & \text{if } s > \varepsilon, \\ \Psi''(\varepsilon)s^3/(6\varepsilon) & \text{if } |s| \leq \varepsilon, \\ \Psi(s) + (\frac{1}{2}\varepsilon\Psi''(\varepsilon) - \Psi'(\varepsilon))(s + \varepsilon) - \frac{1}{6}\varepsilon^2\Psi''(\varepsilon) + \Psi(\varepsilon) & \text{if } s < -\varepsilon. \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon &\in C^2(\mathbb{R}), \quad (23) \\ \Psi'_\varepsilon(s) &= \begin{cases} \Psi'(s) + \varepsilon\Psi''(\varepsilon)/2 - \Psi'(\varepsilon) & \text{if } |s| > \varepsilon, \\ \Psi''(\varepsilon)s^2/(2\varepsilon) & \text{if } |s| \leq \varepsilon, \end{cases} \\ \Psi''_\varepsilon(s) &= \begin{cases} \Psi''(s) & \text{if } |s| > \varepsilon, \\ \Psi''(\varepsilon)s/\varepsilon & \text{if } |s| \leq \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

The following limit relations hold:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(s) = \Psi(s) \quad \text{for every } s \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi'_\varepsilon(s) = \Psi'(s) \quad \text{for every } s \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi''_\varepsilon(s) = \begin{cases} \Psi''(s) & \text{if } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{if } s = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Using the inclusions (18) and (23), the equality $\Psi_\varepsilon(0) = 0$ and Lemma 1, we establish that

$$\Psi_\varepsilon(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

for $|\alpha| = 1$

$$D^\alpha \Psi_\varepsilon(u) = \Psi'_\varepsilon(u) D^\alpha u,$$

and for $|\alpha| = 2$

$$D^\alpha \Psi_\varepsilon(u) = \Psi'_\varepsilon(u) D^\alpha u + \Psi''_\varepsilon(u) D^{\alpha'} u D^{\alpha''} u,$$

where $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$. Hence, using (18), (24)–(26) and Lebesgue's dominated convergence theorem, we deduce

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Psi_\varepsilon(u) - \Psi(u)\|_{L^q(\Omega)} = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \Psi_\varepsilon(u) - w_\alpha\|_{L^q(\Omega)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha \Psi_\varepsilon(u) - w_\alpha\|_{L^p(\Omega)} = 0. \quad (28)$$

Using these limit relations, we establish in the usual way that the generalized derivative $D^\alpha \Psi(u)$ exists for every $\alpha \in \Lambda$, and $D^\alpha \Psi(u) = w_\alpha$ a.e. on Ω . Then, by (22), (27) and (28), the function $\Psi(u)$ belong to $\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, and (19)–(21) imply that assertions 1) and 2) hold. The lemma is proved. \square

3. Proof of Theorem 1. Let the functions g_2, g_3, g_4 and f belong to $L^{n/q}(\Omega)$, and let u be a bounded generalized solution of problem (10), (11). We fix an arbitrary positive number λ such that

$$\lambda > c_4/c_3. \quad (29)$$

By c_i , $i = 6, 7, \dots$, we shall denote positive constants depending only on n, p, q , $\text{meas } \Omega, c, c_0, c_2, c_3, c_4, \lambda$, the functions g_2, g_3, g_4 and f .

We define the function $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\psi(s) = (e^{\lambda|s|} - 1)\text{sign}s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

We set $c_6 = c_3\lambda - c_4$. By (29), we have $c_6 > 0$. Elementary calculations show that

$$c_3\psi' - c_4|\psi| > c_6\psi' \quad \text{on } \mathbb{R}. \quad (30)$$

We set

$$I' = \int_{\{u \neq 0\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \right\} |\psi''(u)| dx,$$

$$\Phi = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p.$$

By virtue of Lemma 2, $\psi(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Thus, by (12), we have

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha \psi(u) + A_0(x, u) \psi(u) + B(x, u, \nabla_2 u) \psi(u) \right\} dx = \int_{\Omega} f \psi(u) dx.$$

From this equality and assertions 1) and 2) of Lemma 2 we deduce that

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha u \right\} \psi'(u) dx + \int_{\Omega} A_0(x, u) \psi(u) dx$$

$$\leq \int_{\Omega} |B(x, u, \nabla_2 u)| |\psi(u)| dx + \int_{\Omega} |f| |\psi(u)| dx + I'.$$

Hence, using (5)-(7) and the fact that $0 < \psi' = \lambda |\psi| + \lambda$ and $\text{sign } \psi(s) = \text{sign } s$ on \mathbb{R} , we obtain

$$\int_{\Omega} \Phi(c_3 \psi'(u) - c_4 |\psi(u)|) dx + c_0 \int_{\Omega} |u|^{q-1} |\psi(u)| dx$$

$$\leq \int_{\Omega} (\lambda g_3 + g_4 + |f|) |\psi(u)| dx + \lambda \int_{\Omega} g_3 dx + I'.$$

From this and (30) it follows that

$$c_6 \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx + c_0 \int_{\Omega} |u|^{q-1} |\psi(u)| dx$$

$$\leq \int_{\Omega} (\lambda g_3 + g_4 + |f|) |\psi(u)| dx + \lambda \int_{\Omega} g_3 dx + I'. \quad (31)$$

Let us estimate the integral I' . We fix an arbitrary $\varepsilon > 0$. It is obvious that

$$\frac{p-1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{q-2p}{qp} = 1.$$

Using this equality and Young's inequality, we establish that if $\alpha \in \Lambda$, $|\alpha| = 2$, and $\beta \in \Lambda$, $|\beta| = 1$, then

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 u)| |D^\beta u|^2 \leq \varepsilon^2 |A_\alpha(x, \nabla_2 u)|^{p/(p-1)}$$

$$+ \varepsilon^2 |D^\beta u|^q + \varepsilon^{2-2qp/(q-2p)} \quad \text{on } \Omega.$$

From this and (4) we deduce that

$$\begin{aligned} I' &\leq n(c_2 + n)\varepsilon^2 \int_{\{u \neq 0\}} \Phi |\psi''(u)| dx + n\varepsilon^2 \int_{\{u \neq 0\}} g_2 |\psi''(u)| dx \\ &\quad + n^3 \varepsilon^{2-2qp/(q-2p)} \int_{\{u \neq 0\}} |\psi''(u)| dx. \end{aligned}$$

Putting in the last inequality $\varepsilon = (\frac{c_6}{2\lambda n(c_2+n)})^{1/2}$, and noting that $|\psi''| = \lambda\psi'$ and $|\psi''| = \lambda^2|\psi| + \lambda^2$ on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, we obtain

$$I' \leq \frac{c_6}{2} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx + c_7 \int_{\Omega} (g_2 + 1) |\psi(u)| dx + c_8.$$

From this and (31) it follows that

$$\frac{c_6}{2} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx + c_0 \int_{\Omega} |u|^{q-1} |\psi(u)| dx \leq c_9 \int_{\Omega} F |\psi(u)| dx + c_{10}, \quad (32)$$

where $F = g_2 + \lambda g_3 + g_4 + |f| + 1$.

We now estimate the integral $\int_{\Omega} F |\psi(u)| dx$. We fix an arbitrary $H > 0$. It is clear that

$$\int_{\Omega} F |\psi(u)| dx = \int_{\{F > H, |u| \geq 1\}} F |\psi(u)| dx + \int_{\{F < H\}} F |\psi(u)| dx + \int_{\{F > H, |u| < 1\}} F |\psi(u)| dx, \quad (33)$$

$$\int_{\{F < H\}} F |\psi(u)| dx < H \int_{\Omega} |\psi(u)| dx, \quad \int_{\{F > H, |u| < 1\}} F |\psi(u)| dx < (e^\lambda - 1) \int_{\Omega} F dx. \quad (34)$$

Before estimating the first integral in the right-hand side of equality (33), we remark that there exists a positive constant $c_{q,\lambda}$ depending only on q and λ such that

$$|\psi(s)| \leq c_{q,\lambda} |\psi(s/q)|^q \quad \text{for every } s \geq 1. \quad (35)$$

Note also that, by (2), assertion 1) of Lemma 1 and equality $(\psi'(s/q))^q = \lambda^{q-1} \psi'(s)$, $s \in \mathbb{R}$, we have

$$\left(\int_{\Omega} |\psi(u/q)|^{q^*} dx \right)^{q/q^*} \leq (c\lambda^{q-1}/q^q) \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx. \quad (36)$$

Now, using Holder's inequality, (35) and (36), we obtain

$$\int_{\{F > H, |u| \geq 1\}} F |\psi(u)| dx \leq \left(\int_{\{F > H\}} F^{n/q} dx \right)^{q/n} \left(\int_{\{|u| \geq 1\}} |\psi(u)|^{n/(n-q)} dx \right)^{(n-q)/n}$$

$$\leq c_{q,\lambda} \|F\|_{L^{n/q}(\{F>H\})} \left(\int_{\Omega} |\psi(u/q)|^{q^*} dx \right)^{q/q^*} \leq c_{q,\lambda} c \lambda^{q-1} q^{-q} \|F\|_{L^{n/q}(\{F>H\})} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx.$$

From this and (33) and (34) it follows that

$$\int_{\Omega} F |\psi(u)| dx \leq c_{11} \|F\|_{L^{n/q}(\{F>H\})} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx + \int_{\Omega} H |\psi(u)| dx + c_{12}. \quad (37)$$

Now, choosing $H > 0$ such that $c_9 c_{11} \|F\|_{L^{n/q}(\{F>H\})} < c_6/4$, from (32) and (37) we obtain

$$\frac{c_6}{4} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx + \int_{\Omega} c_0 |u|^{q-1} |\psi(u)| dx \leq \int_{\Omega} c_9 H |\psi(u)| dx + c_{13}. \quad (38)$$

It is clear that

$$\int_{\Omega} c_0 |u|^{q-1} |\psi(u)| dx \geq \int_{\{c_0 |u|^{q-1} > c_9 H\}} c_0 |u|^{q-1} |\psi(u)| dx > \int_{\{c_0 |u|^{q-1} > c_9 H\}} c_9 H |\psi(u)| dx, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_9 H |\psi(u)| dx &= \int_{\{c_0 |u|^{q-1} > c_9 H\}} c_9 H |\psi(u)| dx + \int_{\{c_0 |u|^{q-1} \leq c_9 H\}} c_9 H |\psi(u)| dx \\ &\leq \int_{\{c_0 |u|^{q-1} > c_9 H\}} c_9 H |\psi(u)| dx + c_9 H (e^{\lambda(c_9 H/c_0)^{1/(q-1)}} - 1) \text{meas } \Omega. \end{aligned} \quad (40)$$

From (38)–(40) it follows that

$$\frac{c_6}{4} \int_{\Omega} \psi'(u) \Phi dx \leq c_{14}.$$

Hence, using the fact that for every $s \in \mathbb{R}$, $\psi'(s) = \lambda \exp(\lambda|s|)$, we deduce (16). Theorem 1 is proved.

1. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 513 p.
2. *Skrypnik I.V.* Higher order quasilinear elliptic equations with continuous generalized solutions, (Russian) // *Differentsialnye Uravneniya*. – 1978. – **14**, № 6. – P. 1104-1118.
3. *Moser J.* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1960. – **13**. – P. 457-468.
4. *Stampacchia G.* Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues // *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, Pergamon, Oxford. – 1961. – P. 399-408.
5. *Stampacchia G.* Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16 (Été, 1965), Les Press. Univ. Montreal, Montreal. – 1966.
6. *Kinderlehrer D. and Stampacchia G.* An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, New York-London. – 1980.
7. *Kovalevskii A.A. and Voitovich M.V.* On increasing the summability of generalized solutions of the Dirichlet problem for fourth-order nonlinear equations with strengthened ellipticity // *Ukrainian Math. J.* – 2006. – **58**, № 11. – P. 1717-1733.
8. *Voitovich M.V.* Integrability properties of generalized solutions of the Dirichlet problem for higher-order nonlinear equations with strengthened ellipticity, (Russian) // *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.* – 2007. – **15**. – P. 3-14.

9. Boccardo L., Murat F. and Puel J.-P. L^∞ -estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result // SIAM J. Math. Anal. – 1992. – **23**, № 2. – P. 326-333.
10. Drábek P. and Nicolosi F. Existence of bounded solutions for some degenerated quasilinear elliptic equations // Ann. Mat. Pura Appl. (4). – 1993. – **165**. – P. 217-238.
11. Dall'aglio A., Giachetti D. and Puel J.-P. Nonlinear elliptic equations with natural growth in general domains // Ann. Mat. Pura Appl. – 2002. – **181**. – P. 407-426.
12. Grenon N., Murat F. and Porretta A. Existence and a priori estimate for elliptic problems with subquadratic gradient dependent terms // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I. – 2006. – **342**. – P. 23–28.
13. Voitovich M.V. Existence of bounded solutions for a class of nonlinear fourth-order equations // Differential Equations and Applications. – 2011. – **3**, № 2. – P. 247-266.
14. Kovalevskii A.A. Entropy solutions of the Dirichlet problem for a class of fourth-order nonlinear elliptic equations with L^1 -right-hand sides // Izv. Math. – 2001. – **65**, № 2. – P. 231-283.

М. В. Войтович

Енергетические оценки ограниченных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка.

Рассматривается класс нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка со старшими коэффициентами, удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности, абсорбцией и младшим коэффициентом, имеющим рост порядков, совпадающих с показателями соответствующего уравнения энергетического пространства, относительно производных неизвестной функции. Не делается никаких предположений о выполнении определенных знаковых условий относительно младшего коэффициента. Устанавливаются энергетические оценки ограниченных обобщенных решений задачи Дирихле для уравнений рассматриваемого класса.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические уравнения четвертого порядка, усиленная коэрцитивность, задача Дирихле, ограниченные решения, энергетические оценки.

М. В. Войтович

Енергетичні оцінки обмежених розв'язків задачі Діріхле для одного класу нелінійних еліптичних рівнянь четвертого порядку.

Розглядається клас нелінійних еліптичних рівнянь зі старшими коефіцієнтами, які задовольняють умову підсиленої коерцитивності, абсорбцією і молодшим коефіцієнтом, що має зростання порядків, які співпадають з показниками відповідного рівняння енергетичного простору, відносно похідних невідомої функції. Не робиться жодних припущень щодо виконання певних знакових умов відносно молодшого коефіцієнта. Встановлено енергетичні оцінки обмежених узагальнених розв'язків задачі Діріхле для рівнянь, що розглядаються.

Ключові слова: нелінійні еліптичні рівняння четвертого порядку, підсилена коерцитивність, задача Діріхле, обмежені розв'язки, енергетичні оцінки.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
voitovich@bk.ru

Received 19.05.12

УДК 512.53

©2012. О. Г. Ганюшкін, Т. В. Турка

ПРО ІДЕМПОТЕНТИ НАПІВГРУПИ ВІДПОВІДНОСТЕЙ

Доведено теорему про будову ідемпотентів напівгрупи відповідностей скінченної групи, зокрема, обчислено кількість ідемпотентів напівгруп відповідностей циклічної групи та елементарної абелевої групи.

Ключові слова: ідемпотент, напівгрупа відповідностей.

1. Вступ. Нехай G – універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G \times G$ розглядати як бінарне відношення на G , то множина $S(G)$ всіх підалгебр з $G \times G$ є напівгрупою відносно деморганівського добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називається *напівгрупою відповідностей* алгебри G .

Задачу вивчення напівгруп відповідностей поставив ще в кінці 60-х років минулого століття відомий математик Курош О.Г. (див. [1]).

2. Ідемпотенти напівгрупи відповідностей. У роботі [2] показано, що коли G – група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \leq G_1 < G$, $H_2 \leq G_2 < G$, а φ – ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2 . При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ – як підмножина із $G \times G$ – має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

Теорема 1. *Нехай G – група. Елемент $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли*

$$G_2 \cap H_1 = H_1 \cap H_2 = G_1 \cap H_2,$$

і для класів суміжності G_1 за H_1 та G_2 за H_2 існує спільна система представників, яку ізоморфізм $\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$ зберігає (тобто $\varphi(a_i H_1) = a_i H_2$ для $i = 1, \dots, k$).

Доведення. Необхідність. Нехай $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ – ідемпотент. Нехай

$$\begin{aligned} G_1 &= b'_1 H_1 + b'_2 H_1 + \dots + b'_k H_1, \\ G_2 &= b''_1 H_2 + b''_2 H_2 + \dots + b''_k H_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Можна вважати, що

$$A = (b'_1 H_1, b''_1 H_2) + (b'_2 H_1, b''_2 H_2) + \dots + (b'_k H_1, b''_k H_2). \tag{2}$$

Оскільки $(g_1H_1, g_2H_2) \circ (g'_1H_1, g'_2H_2) \subseteq (g_1H_1, g'_2H_2)$, то з ідемпотентності A випливає, що $(b'_iH_1, b''_iH_2) \circ (b'_iH_1, b''_iH_2) = (b'_iH_1, b''_iH_2)$. Тому $b''_iH_2 \cup b'_iH_1 \neq \emptyset$.

Нехай $a_i \in b''_iH_2 \cap b'_iH_1$. Тоді $b''_iH_2 = a_iH_2$ і $b'_iH_1 = a_iH_1$.

Розклади (1) набувають вигляду

$$G_i = a_1H_i + a_2H_i + \dots + a_kH_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким чином, для класів суміжності G_1 за H_1 і G_2 за H_2 існує спільна система представників a_1, a_2, \dots, a_k . Крім того, розклад (2) набуває вигляду

$$A = (a_1H_1, a_1H_2) + (a_2H_1, a_2H_2) + \dots + (a_kH_1, a_kH_2),$$

а тому $\varphi(a_iH_1) = a_iH_2$ для всіх $i = 1, 2, \dots, k$.

Оскільки $A^2 = \bigcup_{i,j=1}^k (a_iH_1, a_iH_2) \circ (a_jH_1, a_jH_2)$, то з ідемпотентності A випливає,

що при $i \neq j$ має виконуватися рівність $a_iH_2 \cap a_jH_1 = \emptyset$, або, що рівносильно, рівність $H_1 \cap a_j^{-1}a_iH_2 = \emptyset$.

Але $\bigcup_{i \neq j} a_j^{-1}a_iH_2 = G_2 \setminus H_2$. Тому $(G_2 \setminus H_2) \cap H_1 = \emptyset$ і $G_2 \cap H_1 = H_1 \cap H_2$.

Аналогічно доводиться, що $G_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_2$.

Достатність. Нехай $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ – такий елемент, що

$$G_i = a_1H_i + a_2H_i + \dots + a_kH_i, \quad i = 1, 2$$

і $\varphi(a_iH_1) = a_iH_2$. Тоді

$$A = (a_1H_1, a_1H_2) + (a_2H_1, a_2H_2) + \dots + (a_kH_1, a_kH_2),$$

і $A^2 = \sum_{i,j=1}^k (a_iH_1, a_iH_2) \circ (a_jH_1, a_jH_2)$.

Але $a_iH_2 \cap a_jH_1 \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли $a_j^{-1}a_iH_2 \cap H_1 \neq \emptyset$. Оскільки $G_2 \cap H_1 = H_2 \cap H_1$, то це буде тоді і тільки тоді, коли $a_j^{-1}a_iH_2 = H_2$, тобто тоді і тільки тоді, коли $i = j$. Тому

$$\sum_{i,j=1}^k (a_iH_1, a_iH_2) \circ (a_jH_1, a_jH_2) = \sum_{i=1}^k (a_iH_1, a_iH_2) \circ (a_iH_1, a_iH_2) = A$$

Отже, $A^2 = A$. \square

3. Випадок циклічної групи.

Теорема 2. *Нехай C_n – циклічна група порядку n . Існує взаємно однозначна відповідність між ідемпотентами напівгрупи $S(C_n)$ і n -тійками (k, l, t, u, v) натуральних чисел, які задовольняють такі умови:*

- 1) $k|l, l|u, u|n, k|m, m|v, v|n$;
- 2) $\text{НСД}(m, u) = \text{НСД}(l, v) = k$;
- 3) $\frac{u}{l} = \frac{v}{m}$.

Доведення. Нехай C_n – циклічна група порядку n і елемент $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) \in$ ідемпотентом напівгрупи відповідностей $S(C_n)$, де $H_1 \leq G_1 \leq C_n$, $H_2 \leq G_2 \leq C_n$ і $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

Поставимо елементу A у відповідність такі п'ять чисел:

$$|H_1 \cap H_2| = k, \quad |H_1| = l, \quad |H_2| = m, \quad |G_1| = u, \quad |G_2| = v.$$

Оскільки $H_1 \cap H_2 \leq H_i \leq G_i \leq C_n$, $i = 1, 2$, то

$$k|l, \quad l|u, \quad u|n, \quad \text{та} \quad k|m, \quad m|v, \quad v|n.$$

Отже, п'ятірка (k, l, m, u, v) задовольняє умову 1).

За теоремою 1 маємо $G_1 \cap H_2 = H_1 \cap G_2 = H_1 \cap H_2$, тому

$$\text{НСД}(m, u) = \text{НСД}(l, v) = k.$$

Отже умова 2) також виконується.

Нарешті з ізоморфності G_1/H_1 і G_2/H_2 випливає, що $\frac{u}{l} = \frac{v}{m}$. Це доводить умову 3).

Нехай тепер п'ятірка чисел (k, l, m, u, v) задовольняє умови 1) – 3). Оскільки в циклічній групі C_n для кожного дільника d числа n існує рівно одна підгрупа порядку d , то тим самим у групі C_n однозначно визначаються підгрупи G_1, G_2, H_1, H_2 порядків u, v, l, m відповідно, причому $H_1 \leq G_1, H_2 \leq G_2$.

Із умов 1) і 2) тоді випливає, що

$$G_2 \cap H_1 = H_1 \cap H_2 = G_1 \cap H_2 \quad \text{і} \quad |H_1 \cap H_2| = k.$$

Із теореми 1 випливає, що для існування такого ізоморфізму $\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$, для якого елемент $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ буде ідемпотентом, досить показати існування спільної системи представників для класів суміжності G_1 за H_1 і G_2 за H_2 . Доведення існування такої системи представників розіб'ємо на кілька кроків.

I. Зауважимо, що коли $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_q$, де порядки $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_q|$ множників попарно взаємно прості, то кожна підгрупа $B \leq A$ має вигляд $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_q$, де $B_1 \leq A_1, B_2 \leq A_2, \dots, B_q \leq A_q$.

II. Якщо існують спільна система представників для A_1 за B_1 і A_2 за B_2 і спільна система представників представників для A'_1 за B'_1 і A'_2 за B'_2 , то існує спільна система представників для $A_1 \times A'_1$ за $B_1 \times B'_1$ і $A_2 \times A'_2$ за $B_2 \times B'_2$.

Справді, із рівностей

$$A_1 = a_1 B_1 + a_2 B_1 + \dots + a_t B_1, \quad A_2 = a_1 B_2 + a_2 B_2 + \dots + a_t B_2$$

і

$$A'_1 = b_1 B'_1 + b_2 B'_1 + \dots + b_t B'_1, \quad A'_2 = b_1 B'_2 + b_2 B'_2 + \dots + b_t B'_2$$

випливає, що

$$A_1 \times A'_1 = \sum_{i,j} (a_i, b_j) B_1 \times B'_1,$$

$$A_2 \times A'_2 = \sum_{i,j} (a_i, b_j) B_2 \times B'_2.$$

III. Нехай тепер $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_q^{\alpha_q}$. Тоді

$$C_n = C_{p_1^{\alpha_1}} \times C_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times C_{p_q^{\alpha_q}}.$$

Позначимо через C_{p^α} довільний множник цього розкладу і нехай

$$G_1^* = G_1 \cap C_{p^\alpha}, \quad G_2^* = G_2 \cap C_{p^\alpha}, \quad H_1^* = H_1 \cap C_{p^\alpha}, \quad H_2^* = H_2 \cap C_{p^\alpha}.$$

Крім того, для підгрупи $(H_1 \cap H_2)^* = (H_1 \cap H_2) \cap C_{p^\alpha}$ маємо $(H_1 \cap H_2)^* = H_1^* \cap H_2^*$.

Позначимо

$$|G_1^*| = p^{\beta_1}, \quad |G_2^*| = p^{\beta_2}, \quad |H_1^*| = p^{\gamma_1}, \quad |H_2^*| = p^{\gamma_2}, \quad |H_1 \cap H_2| = p^\delta.$$

Із кроків I і II випливає, що для існування спільної системи представників G_1 за H_1 і G_2 за H_2 досить показати існування спільної системи представників G_1^* за H_1^* і G_2^* за H_2^* . Умови 1) – 3) тепер набувають вигляду:

$$1') \delta \leq \gamma_1 \leq \beta_1 \leq \alpha, \quad \delta \leq \gamma_2 \leq \beta_2 \leq \alpha,$$

$$2') \min(\gamma_2, \beta_1) = \min(\gamma_1, \beta_2) = \delta,$$

$$3') \beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2.$$

Припустимо, що $\delta = \gamma_1$ (випадок $\delta = \gamma_2$ розбирається аналогічно). Якщо при цьому $\delta = \gamma_2$, то із 3') випливає, що $\beta_1 = \beta_2$. Але тоді $G_1^* = G_2^*$, $H_1^* = H_2^*$ і існування спільної системи представників очевидна. Якщо ж $\gamma_2 > \delta$, то із 2') випливає, що $\beta_1 = \delta$, а після цього із 3') випливає, що $\beta_2 = \gamma_2$.

Але тоді $G_1^* = H_1^*$ і $G_2^* = H_2^*$. Отже, маємо лише по одному класу суміжності, і спільним представником можна взяти одиницю e . \square

Наслідок 1. Якщо $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ – канонічний розклад числа n , то кількість ідемпотентів у напівгрупі $S(C_n)$ однозначно визначається мультимножиною $\{k_1, k_2, \dots, k_t\}$ показників.

Доведення. Нехай $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ – канонічний розклад числа n , а числа п'ятірки (k, l, m, u, v) мають наступні розклади: $k = p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}$, $l = p_1^{b_1} \dots p_t^{b_t}$, $m = p_1^{c_1} \dots p_t^{c_t}$, $u = p_1^{d_1} \dots p_t^{d_t}$, $v = p_1^{g_1} \dots p_t^{g_t}$. Тоді умови теореми 2 будуть залежати лише від показників степенів простих чисел p_1, p_2, \dots, p_m , тобто кількість ідемпотентів однозначно визначається мультимножиною $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ показників. \square

Теорема 3. Якщо p – просте число і C_{p^n} – циклічна група порядку p^n , то кількість ідемпотентів у напівгрупі відповідностей $S(C_{p^n})$ буде обчислюватися за формулою

$$|E(S(C_{p^n}))| = (n + 1) \cdot \left(\frac{2 + 3n}{2} \right).$$

Доведення. Нехай C_{p^n} – циклічна група порядку p^n . Згідно теореми 2 ідемпотенти напівгрупи відповідностей знаходяться у взаємно однозначній відповідності з п'ятірками чисел (k, l, m, u, v) , які задовольняють умови 1)-3) теореми 2. Далі замість п'ятірки $(k, l, m, u, v) = (p^{a_1}, p^{a_2}, p^{a_3}, p^{a_4}, p^{a_5})$ зручно розглядати п'ятірку показників $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Умову 1) тепер можна переписати у вигляді

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + \alpha, \quad a_3 = a + \gamma, \quad a_4 = a + \alpha + \beta, \quad a_5 = a + \gamma + \delta,$$

де $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – деякі невід’ємні цілі числа.

Умови 2)-3) тоді набувають вигляду

$$\begin{cases} \min(a + \gamma, a + \alpha + \beta) = \min(a + \alpha, a + \gamma + \delta) = a, \\ \beta = \delta. \end{cases}$$

Звідси

$$\min(a + \gamma, a + \alpha + \beta) = \min(a + \alpha, a + \gamma + \delta) = a.$$

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $\gamma \neq 0$. Тоді $\alpha + \beta = 0$, звідки $\alpha = \beta = 0$. Після цього у нас лишається лише умова $0 \leq a < a + \gamma \leq n$, а тому параметри (a, γ) можна вибрати $\binom{n+1}{2}$ способами.

2) Нехай тепер $\gamma = 0$. Цей випадок розпадається на 3 підвипадки:

2') $\gamma = \alpha = 0, \beta \neq 0$. У цьому випадку все зводиться до нерівності $0 \leq a < a + \beta \leq n$, тому пару (α, β) можна вибрати $\binom{n+1}{2}$ способами.

2'') $\gamma = \beta = 0, \alpha \neq 0$. Аналогічно попередньому отримуємо нерівність $0 \leq a < a + \alpha \leq n$ і $\binom{n+1}{2}$ способів вибору пари (a, α) .

2''') $\gamma = \alpha = \beta = 0$. У цьому випадку лишається лише умова $0 \leq a \leq n$, тому a можна вибрати $n + 1$ способом.

Підсумовуючи все, одержуємо:

$$|E(S(C_{p^n}))| = (n + 1) + 3 \binom{n+1}{2} = (n + 1) \cdot \left(\frac{2 + 3n}{2} \right). \quad \square$$

Теорема 4. Якщо C_n – циклічна група порядку n , де $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ – канонічний розклад числа n , то кількість ідемпотентів у напівгрупі відвідностей $S(C_p)$ обчислюється за формулою

$$|E(S(C_n))| = \prod_{i=1}^t (k_i + 1) \cdot \left(\frac{2 + 3k_i}{2} \right).$$

Доведення. За теоремою 2 число $|E(S(C_n))|$ дорівнює кількості тих п'ятірок (k, l, m, u, v) , які задовольняють умови 1)-3).

Нехай

$$\begin{aligned} k &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}, \quad l = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}, \quad m = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_t^{c_t}, \\ u &= p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_t^{d_t}, \quad v = p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_t^{g_t}. \end{aligned}$$

Умови 1)-3) тоді будуть рівносильні таким:

$$1) k|l \iff a_1 \leq b_1, \dots, a_t \leq b_t, l|u \iff b_1 \leq d_1, \dots, b_t \leq d_t, u|n \iff d_1 \leq k_1, \dots, d_t \leq k_t, \\ k|m \iff a_1 \leq c_1, \dots, a_t \leq c_t, m|v \iff c_1 \leq g_1, \dots, c_t \leq g_t, v|n \iff g_1 \leq k_1, \dots, g_t \leq k_t.$$

2) НСД $(u, m) = \text{НСД}(l, v) = k$ тоді і тільки тоді, коли $\min(d_1, c_1) = \min(b_1, g_1) = a_1, \dots, \min(d_t, c_t) = \min(b_t, g_t) = a_t$.

3) $u \cdot m = l \cdot v$ тоді і тільки тоді, коли $c_1 + d_1 = b_1 + g_1, \dots, c_t + d_t = b_t + g_t$.

Таким чином, для кожного i ($1 \leq i \leq t$) все зводиться до відповідних умов для циклічної групи $C_{p_i}^{k_i}$, причому для різних i відповідні параметри можна вибирати незалежно. Тому з теореми 3 отримуємо:

$$|E(S(C_n))| = |E(S(C_{p_1}^{k_1}))| \cdot |E(S(C_{p_2}^{k_2}))| \cdot \dots \cdot |E(S(C_{p_t}^{k_t}))| = \\ = \prod_{i=1}^t (k_i + 1) \cdot \left(\frac{2 + 3k_i}{2} \right). \quad \square$$

4. Випадок елементарної абелевої групи. Для довільного числа p позначимо

$$\psi_k(p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = 0, \\ (p-1)(p^2-1) \dots (p^k-1), & \text{якщо } k > 0. \end{cases}$$

Число $\psi_k(p)$ дорівнює кількості способів вибору бази в k -вимірному векторному просторі над полем Z_p .

Крім того, через $\binom{n}{k}_p$ позначається кількість k -вимірних підпросторів n -вимірного простору над простим полем Z_p . Число $\binom{n}{k}_p$ називається коефіцієнтом Гаусса. Як відомо,

$$\binom{n}{k}_p = \frac{1}{p^{k(n-k)}} \cdot \frac{\psi_n(p)}{\psi_k(p)\psi_{n-k}(p)}.$$

Теорема 5. Кількість ідемпотентів у напівгрупі відповідностей $S(Z_p^n)$ елементарної абелевої групи Z_p^n дорівнює:

$$|E(S(Z_p^n))| = \sum_{i=0}^n \left[\binom{n}{i}_p \cdot \sum_{m_1+m_2=0}^{n-i} \left(p^{m_1 m_2} \binom{n-i}{m_1+m_2}_p \cdot \binom{m_1+m_2}{m_1}_p \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n-i-m_1-m_2} p^{(m_1+m_2-i)r} \cdot \frac{\psi_{n-i-m_1-m_2}(p)}{\psi_r(p)} \right) \right) \right].$$

Доведення. Нехай Z_p^n – елементарна абелева група. Нам буде зручно розглядати Z_p^n як n -вимірний простір над полем Z_p .

Нехай елемент $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) \in$ ідемпотентом напівгрупи відвідностей $S(Z_p^n)$. Позначимо $H = H_1 \cap H_2$ і перейдемо до факторпросторів

$$U = Z_p^n/H, \quad P_1 = H_1/H, \quad P_2 = H_2/H, \quad R_1 = G_1/H, \quad R_2 = G_2/H.$$

За теоремою 1 існують розклади

$$G_1 = a_1H_1 + a_2H_1 + \dots + a_tH_1, \quad G_2 = a_1H_2 + a_2H_2 + \dots + a_tH_2.$$

Це дає нам розклади

$$R_1 = b_1P_1 + b_2P_1 + \dots + b_tP_1, \quad R_2 = b_1P_2 + b_2P_2 + \dots + b_tP_2,$$

де $b_i = a_i + H$ – відповідний елемент факторпростору U .

Система представників b_1, \dots, b_k визначена однозначно. Справді, $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Тому з рівностей $b_iP_1 = b'_iP_1$, $b_iP_2 = b'_iP_2$ маємо: $b'_i = b_i + c_1 = b_i + c_2$, де $c_j \in P_i$.

Але тоді $c_1 = c_2$, звідки $c_1 = c_2 = 0$, а тому $b'_i = b_i$.

Це означає, що для довільного i буде $b_iP_1 \cap b_iP_2 = \{b_i\}$. Але тоді з рівностей

$$b_iP_j + b_lP_j = (b_i + b_l)P_j, \quad j = 1, 2 \quad \text{та} \quad c \cdot (b_iP_j) = cb_i \cdot P_j, \quad j = 1, 2$$

випливає, що множина $Q = \{b_1, \dots, b_k\}$ замкнена відносно додавання і множення на скаляри, а тому утворює підпростір простору U .

Із розкладів

$$R_1 = b_1P_1 + b_2P_1 + \dots + b_tP_1, \quad R_2 = b_1P_2 + b_2P_2 + \dots + b_tP_2$$

випливає, що

$$R_1 = P_1 \oplus Q, \quad R_2 = P_2 \oplus Q.$$

Таким чином, із кожним ідемпотентом A пов'язується деякий підпростір $H \leq Z_p^n$ і трійка P_1, P_2, Q підпросторів простору $U = Z_p^n/H$, які попарно перетинаються по 0 .

Навпаки, нехай H – підпростір Z_p^n і P_1, P_2, Q – трійка підпросторів простору $U = Z_p^n/H$, які попарно перетинаються по 0 . Розглянемо $R_1 = P_1 \oplus Q, R_2 = P_2 \oplus Q$ і нехай H_1, H_2, G_1, G_2 – прообрази підпросторів P_1, P_2, R_1, R_2 відповідно при канонічному епіморфізмі $Z_p^n \rightarrow Z_p^n/H$. За спільну систему представників класів суміжності G_1 за H_1 і G_2 за H_2 можна взяти прообрази елементів із Q при цьому епіморфізмі. Тоді відображення $\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$, яке зберігає спільні представники, буде, очевидно, ізоморфізмом.

Оскільки побудована таким чином п'ятірка $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ задовольняє всі умови теореми 1, то відповідний елемент напівгрупи $S(Z_p^n)$ буде ідемпотентом.

Таким чином, кількість ідемпотентів напівгрупи $S(Z_p^n)$ дорівнює кількості наборів (H, P_1, P_2, Q) , де H – підпростір із Z_p^n , а P_1, P_2, Q – така трійка підпросторів із Z_p^n/H , які попарно перетинаються по 0 .

Для підрахунку таких наборів спочатку вибираємо підпростір $H \leq Z_p^n$. Нехай $\dim H = i$. Тоді H можна вибрати $\binom{n}{i}_p$ способами.

Нехай $\dim P_1 = m_1$, $\dim P_2 = m_2$. Оскільки $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, то об'єднання баз просторів P_1 і P_2 є базою простору $P_1 \oplus P_2$. Базу простору $P_1 \oplus P_2$ можна вибрати

$$(p^{n-i} - 1)(p^{n-i} - p) \cdots (p^{n-i} - p^{m_1-1}) \cdots (p^{n-i} - p^{m_1+m_2-1}) = \\ = \frac{\psi_{n-i}(p)}{p^{(m_1+m_2)(n-i-m_1-m_2)} \psi_{n-i-m_1-m_2}(p)}$$

способами.

Перші m_1 векторів цієї бази дадуть нам базу підпростору P_1 , решта m_2 векторів – базу P_2 . Оскільки $\psi_{m_1}(p)$ різних баз підпростору P_1 будуть давати один і той підпростір P_1 (і аналогічно для підпростору P_2), то загальна кількість пар (P_1, P_2) дорівнює

$$\frac{\psi_{n-i}(p)}{p^{(m_1+m_2)(n-i-m_1-m_2)} \psi_{n-i-m_1-m_2}(p) \psi_{m_1}(p) \psi_{m_2}(p)} = \\ = p^{m_1 m_2} \binom{n-i}{m_1+m_2}_p \binom{m_1+m_2}{m_1}_p.$$

Позначимо через $S(m_1, m_2, k)$ кількість тих k -вимірних підпросторів простору $P_1 \oplus P_2$, які мають нульовий перетин, як із P_1 , так і з P_2 .

Нехай \overline{Q} – один із таких підпросторів, $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k$ – база \overline{Q} , де $a_1, a_2, \dots, a_k \in P_1$, $b_1, b_2, \dots, b_k \in P_2$. Легко зрозуміти, що вектори a_1, a_2, \dots, a_k – лінійно незалежні. Справді, нехай $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1(a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 + b_2) + \dots + \alpha_k(a_k + b_k) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k \in P_2.$$

З іншого боку, $\alpha_1(a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 + b_2) + \dots + \alpha_k(a_k + b_k) \in \overline{Q}$. Оскільки $P_2 \cap \overline{Q} = \{0\}$, то $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k = 0$, звідки $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$.

Навпаки, нехай a_1, a_2, \dots, a_k – лінійно незалежні вектори з P_1 , а b_1, b_2, \dots, b_k – лінійно незалежні вектори з P_2 . Тоді вектори $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k$ – також лінійно незалежні. Справді, якщо

$$\alpha_1(a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 + b_2) + \dots + \alpha_k(a_k + b_k) = 0,$$

то

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = -(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k).$$

Але

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \in P_1, \quad \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k \in P_2$$

і $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Підпростір $\overline{Q} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k \rangle$ буде мати нульовий перетин із кожним із просторів P_1 і P_2 . Справді, нехай

$$\alpha_1(a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 + b_2) + \dots + \alpha_k(a_k + b_k) = v \in P_1.$$

Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = v - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k) \in P_1,$$

а оскільки $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k \in P_2$ і $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, то

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\overline{Q} \cap P_2 = \{0\}$.

Тому всі k -вимірні підпростори із $P_1 \oplus P_2$, які мають нульовий перетин із кожним із P_1 та P_2 , можна одержати таким чином: вибираємо довільні лінійно незалежні вектори a_1, a_2, \dots, a_k в P_1 і лінійно незалежні вектори b_1, b_2, \dots, b_k в P_2 і кладемо $\overline{Q} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k \rangle$. При цьому кожен простір \overline{Q} буде отримуватися з такою кратністю, скількома способами в ньому можна вибрати базу. Тому

$$\begin{aligned} S(m_1, m_2, k) &= \frac{1}{\psi_k(p)} \cdot \frac{\psi_{m_1}(p)}{p^{k(m_1-k)} \cdot \psi_{m_1-k}(p)} \cdot \frac{\psi_{m_2}(p)}{p^{k(m_2-k)} \cdot \psi_{m_2-k}(p)} = \\ &= \frac{1}{p^{k(m_1+m_2-2k)}} \cdot \frac{\psi_{m_1}(p)\psi_{m_2}(p)}{\psi_k(p)\psi_{m_1-k}(p)\psi_{m_2-k}(p)}. \end{aligned}$$

Але простір $\overline{Q} = Q \cap (P_1 \oplus P_2)$ треба “роздути” до Q . При $r > 0$ k -вимірний простір $Q \cap (P_1 \oplus P_2)$ можна “роздути” до $(k+r)$ -вимірного простору Q

$$\begin{aligned} &\frac{(p^{n-i} - p^{m_1+m_2})(p^{n-i} - p^{m_1+m_2+1}) \dots (p^{n-i} - p^{m_1+m_2+r-1})}{(p^{r+k} - p^k)(p^{r+k} - p^{k+1}) \dots (p^{r+k} - p^{r+k-1})} = \\ &= p^{(m_1+m_2-k)r} \cdot \frac{\psi_{n-i-m_1-m_2}(p)}{\psi_r(p)} \end{aligned}$$

способами. Тому загальна кількість $B(m_1, m_2, i)$ способів “роздути” $Q \cap (P_1 \oplus P_2)$ до простору Q дорівнює:

$$B(m_1, m_2, i) = 1 + \sum_{r=1}^{n-i-m_1-m_2} p^{(m_1+m_2-i)r} \cdot \frac{\psi_{n-i-m_1-m_2}(p)}{\psi_r(p)}.$$

Отже, кількість ідемпотентів напівгрупи $S(Z_p^n)$ дорівнює

$$\begin{aligned} |E(S(Z_p^n))| &= \sum_{i=0}^n \left[\binom{n}{i}_p \cdot \sum_{m_1+m_2=0}^{n-i} \left(p^{m_1 m_2} \binom{n-i}{m_1+m_2}_p \cdot \binom{m_1+m_2}{m_1}_p \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(1 + \sum_{r=1}^{n-i-m_1-m_2} p^{(m_1+m_2-i)r} \cdot \frac{\psi_{n-i-m_1-m_2}(p)}{\psi_r(p)} \right) \right) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

1. Курош А.Г. Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года). – М.: Наука, 1974. – 160 с.
2. Ганюшкін О.Г., Турка Т.В. Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи // Вісник Київського університету. – 2009. – Вып. 3. Серія: фіз.-мат. науки. – С. 9-13.

O. G. Ganyushkin, T. V. Turka

The idempotents of semigroup of correspondences.

The theorem about of the structure of idempotents of semigroups of correspondence of the finite group has been proved and the amount of idempotents of semigroups of correspondence cyclic and elementary abelian groups has been calculated.

Keywords: *idempotent, the semigroup of correspondences.*

О. Г. Ганюшкин, Т. В. Турка

Об идемпотентах полугруппы соответствий.

Доказана теорема о строении идемпотентов полугруппы соответствий конечной группы, в частности, вычислено количество идемпотентов полугруппы соответствий циклической группы и элементарной абелевой группы.

Ключевые слова: *идемпотент, полугруппа соответствий.*

Київський національний ун-т ім. Шевченка
Слов'янський державний педагогічний ун-т
ganyushk@univ.kiev.ua
tvturka@mail.ru

Получено 07.05.12

УДК 517.925.3

©2012. Р. И. Гладилина

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье исследуется проблема о неустойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. С помощью второго метода Ляпунова получены новые условия неустойчивости по части переменных нулевого решения импульсной системы с менее жесткими требованиями к функциям Ляпунова.

Ключевые слова: импульсные системы, функции Ляпунова, частичная устойчивость.

1. Введение. Проблема устойчивости импульсных систем относительно части переменных рассматривалась в [1-9]. Исследование устойчивости проводилось прямым методом Ляпунова. Поскольку устойчивость движений желательна во многих прикладных задачах, то важно иметь в распоряжении эффективные способы обнаружения неустойчивости. Вопросы частичной неустойчивости решений импульсных систем рассматривались в [1, 2, 4, 6].

Предметом исследования в данной работе является установление условий неустойчивости по части переменных, в которых на функции Ляпунова налагались бы менее жесткие требования, чем в опубликованных статьях.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in R_+$, $x \in \Omega \subset R^n$, $f \in C(R_+ \times \Omega, R^n)$, $f(t, 0) \equiv 0$; $f(t, x) \in Lip(x)$, $I_i \in C(\Omega, R^n)$, $I_i(x) \in Lip$, $I_i(0) \equiv 0$, $\tau_i \in C^1(\Omega, R_+)$, $\tau_i(x)$ – поверхности разрыва, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \dots$ и $\tau_i(x) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, непрерывно слева и пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия отсутствия биений решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [10, с. 23-25].

Представим вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$ ($m + s = n$). Предположим, что решения системы (1) z -продолжимы [11].

Исследование устойчивости по части переменных проведем в области

$$\Omega_H = B_H^m \times R^s, \quad (H > 0), \quad B_H^m = \{y \in R^m : \|y\| < H\}.$$

Заметим, что под устойчивостью нулевого решения импульсной системы (1) понимается устойчивость по Ляпунову [11].

Введем вспомогательные кусочно-непрерывные функции $V : R_+ \times B_H \rightarrow R$, удовлетворяющие требованиям: функция $V(t, x)$ непрерывна слева и $V(t, 0) \equiv 0$ при любом $t \in R_+$. При $t \neq \tau_i(x)$ определим производную от функции $V(t, x)$ в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), f(t, x) \rangle.$$

В дальнейшем функцию Ляпунова вдоль решения будем обозначать через $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$, а моменты попадания решения на поверхности разрыва $t = \tau_i(x)$ – через τ_i .

Функция $a : R_+ \rightarrow R_+$ называется функцией класса Хана ($a \in \mathcal{K}$), если $a(r)$ – непрерывная, строго возрастающая и $a(0) = 0$.

3. Основные результаты. В теоремах о неустойчивости прямого метода Ляпунова требуется, чтобы функция Ляпунова и ее производная по времени были знакоопределенными. Однако на практике такие функции не всегда можно построить.

Докажем теорему, в которой производная функции Ляпунова по времени сколь угодно мало отличается от нуля, т.е. практически близка к знакопостоянной функции.

Теорема 1. Пусть для системы уравнений (1) существует ограниченная в области $R_+ \times \Omega_h$, $0 < h < H$ функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию

$$V(t, x) \leq b(\|x\|), \quad (t, x) \in R_+ \times \Omega_h, \quad b \in \mathcal{K} \quad (2)$$

и условиям А:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 1/k c(\|x\|) \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N), \quad c \in \mathcal{K}, \quad (3)$$

$$\Delta V_k = V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0 \quad (k \in N), \quad (4)$$

$$\inf_{k \in N} (\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h), \quad (5)$$

или условиям В:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 0 \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N), \quad (6)$$

$$\Delta V_k \geq 1/k c(\|x\|) \quad (k \in N) \quad c \in \mathcal{K}, \quad (7)$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x , для которых $V(t, x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y -неустойчиво.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ – сколь угодно мало. По условию в окрестности $\|x\| < \alpha$ найдется такая точка x_0 , что $V(t_0, x_0) > 0$. Обозначим $V(t_0, x_0) = V_0$. Докажем, что траектория $x(t)$, выходящая из выбранной таким образом точки x_0 , с течением времени выйдет за пределы области Ω_h .

В силу условий (3), (4) или (6), (7) функция $v(t)$ – неубывающая, следовательно, $v(t) \geq v(t_0) = V_0 > 0$ при всех $t > t_0$. Из неравенства (2) получим

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq b^{-1}(V_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (8)$$

По условию, функция $V(t, x)$ ограничена:

$$V(t, x) \leq M \quad (M > 0) \quad \text{для} \quad (t, x) \in R_+ \times \Omega_h. \quad (9)$$

Если выполнены условия А, то, учитывая (8), получим

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 1/k \, c(b^{-1}(V_0)).$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль траектории, используя условие (9)

$$\begin{aligned} M \geq v(\tau_k) &\geq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t) dt \geq V_0 + \sum_{i=1}^k \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t) dt \geq \\ &\geq V_0 + c(b^{-1}(V_0)) \sum_{i=1}^k 1/i(\tau_i - \tau_{i-1}) \geq V_0 + c(b^{-1}(V_0))\theta \sum_{i=1}^k 1/i. \end{aligned}$$

Так как гармонический ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ расходится, то найдется такое k , что правая часть неравенства будет больше заданного числа M . Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Ω_h за конечное время и, в силу условия z -продолжимости решения, $x(t, t_0, x_0)$ выходит за пределы множества $\|y\| < h$.

Если имеют место условия В, то из неравенства (7) получим

$$v(\tau_k + 0) - v(\tau_k) \geq 1/k \, c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N).$$

Откуда

$$v(\tau_k + 0) \geq v(\tau_k) + 1/k \, c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N). \quad (10)$$

Из условия (6) имеем

$$v(\tau_k) \geq v(\tau_{k-1} + 0) \quad (k \in N). \quad (11)$$

Используя неравенства (10), (11), получим

$$v(\tau_k + 0) \geq v(\tau_{k-1} + 0) + 1/k \, c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N).$$

Применяя полученную итерационную формулу, для любого натурального k получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} M \geq v(\tau_k + 0) &\geq v(\tau_{k-1} + 0) + 1/k \, c(b^{-1}(V_0)) \geq \\ &\geq v(\tau_{k-2} + 0) + c(b^{-1}(V_0))(1/k + 1/(k-1)) \geq \dots \geq \\ &\geq v(t_0) + c(b^{-1}(V_0))((1/k + 1/(k-1)) + \dots + 1/2 + 1). \end{aligned}$$

В силу ограниченности функции $V(t, x)$ заключаем, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Ω_h и выходит за пределы множества $\|y\| < h$. Теорема доказана. \square

В следующей теореме отпадает необходимость требовать ограниченность функции V в области Ω_h , так как это условие становится следствием существования бесконечно малого высшего предела функции по y .

Теорема 2. Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию

$$V(t, x) \leq b(\|y\|), \quad (t, x) \in R_+ \times \Omega_h, \quad b \in \mathcal{K}$$

и условиям А:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 1/k c(\|y\|) \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N), \quad c \in \mathcal{K},$$

$$\Delta V_k \geq 0 \quad (k \in N),$$

$$\inf_{k \in N} (\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h),$$

или условиям В:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 0 \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N),$$

$$\Delta V_k \geq 1/k c(\|y\|) \quad (k \in N) \quad c \in \mathcal{K},$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x , для которых $V(t, x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y -неустойчиво.

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

ПРИМЕР 1. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений относительно переменных y_1, y_2 .

$$\dot{y}_1 = 1/ky_1^3 + y_2z^2, \quad \Delta y_1 = -y_1 + y_2;$$

$$\dot{y}_2 = 1/ky_2^3 - y_1z^2, \quad \Delta y_2 = -y_2 + y_1;$$

$$\dot{z} = y_1^2y_2, \quad \Delta z = -z + y_1^2.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = 1/2(y_1^2 + y_2^2)$.

Нетрудно проверить, что выполнены все условия А теоремы 2, а именно:

$$\dot{V} = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 = 1/ky_1^4 + y_1y_2z^2 + 1/ky_2^4 - y_1y_2z^2 = 1/k(y_1^4 + y_2^4).$$

$$\Delta V_k = y_2^2 + y_1^2 - y_1^2 - y_2^2 \equiv 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы y -неустойчиво.

Заметим, что для установления неустойчивости решения достаточно потребовать ограниченность функции Ляпунова не во всей области Ω_h , а только в некоторой ее части.

Обозначим $\Pi = (t, x) \in R_+ \times \Omega_h : V(t, x) > 0$ – множество точек, в которых функция Ляпунова положительна.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t, x)$, ограниченная в области Π , существующей при всяком $t \geq 0$ и произвольных сколь угодно малых $\|x\|$, и пусть эта функция удовлетворяет условиям А:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 1/k \varphi(V(t, x)) \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N), \quad (12)$$

$$\Delta V_k \geq 0 \quad (k \in N), \quad (13)$$

$$\inf_{k \in N} (\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h), \quad (14)$$

или условиям В:

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 0 \quad \text{для } t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \quad (k \in N), \quad (15)$$

$$\Delta V_k \geq 1/k \varphi(V(\tau_k, x)) \quad (k \in N), \quad (16)$$

где функция $\varphi : R_+ \rightarrow R_+$ непрерывна, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(s) > 0$ при $s > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) y -неустойчиво.

Доказательство. Согласно условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Докажем, что решение $x(t)$, выходящее из точки x_0 , со временем выйдет за пределы области Π .

В силу условий А или В функция $v(t)$ будет неубывающей в области Ω_h , поэтому $v(t) \geq v(t_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$. Это означает, что точки $(t, x(t)) \in \Pi$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно, при всех $t \geq t_0$ значения функции $V(t, x)$ будут ограничены:

$$V(t, x) \leq M \quad (M = \text{const} > 0). \quad (17)$$

Пусть

$$c = \inf_{V_0 \leq s \leq a_0} \varphi(s), \quad \text{где } a_0 = \sup_{(t, x) \in \Pi} V(t, x). \quad (18)$$

Очевидно, что $c > 0$.

Допустим, что выполнены условия А. Учитывая последнее неравенство, получим

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq 1/k \varphi(V(t, x)) \geq c/k.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль решения с учетом неравенств (13), (14), (17)

$$\begin{aligned} M \geq v(\tau_k) &\geq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t) dt \geq V_0 + \sum_{i=1}^k \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t) dt \geq \\ &\geq V_0 + c \sum_{i=1}^k 1/i(\tau_i - \tau_{i-1}) \geq V_0 + c\theta \sum_{i=1}^k 1/i. \end{aligned} \quad (19)$$

При больших k правая часть неравенства будет больше заданного числа M .

Пусть имеют место условия В. Из неравенства (15) получим

$$v(\tau_{k-1} + 0) - v(\tau_k) \leq 0 \quad (k \in N),$$

а условие (16) с учетом (18) примет вид

$$v(\tau_k + 0) - v(\tau_k) \geq c/k \quad (k \in N).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} M &\geq v(\tau_k + 0) \geq v(\tau_k + 0) + \sum_{i=1}^k (v(\tau_{i-1} + 0) - v(\tau_i)) \geq \\ &\geq v(t_0) + \sum_{i=1}^k (v(\tau_i + 0) - v(\tau_i)) \geq V_0 + c \sum_{i=1}^k 1/i. \end{aligned} \quad (20)$$

Из неравенств (19), (20) вытекает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ оставляет область Π за конечное время и, в силу условия z -продолжимости решения, выходит за пределы множества $\|y\| < h$, что завершает доказательство теоремы. \square

Таким образом, нулевое решение системы y -неустойчиво.

В сформулированных теоремах производная (скачки) функции $V(t, x)$ могут быть сколь угодно малыми, но остаются положительными. Покажем, что можно еще ослабить условия. Для установления неустойчивости решения достаточно, чтобы производная (скачки) функции $V(t, x)$ были неотрицательны. Докажем теорему о неустойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

Теорема 4. Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t, x)$, ограниченная в области Π , существующей при всяком $t \geq 0$ и произвольных сколь угодно малых $\|x\|$. Если эта функция удовлетворяет условиям (2), (4), (6) и, при этом вдоль решений выполнено хотя бы одно из условий:

A: для любого натурального p существует $s > p$ ($s \in N$) такое, что

$$\Delta V_s \geq c(\|x\|), \quad c \in \mathcal{K}; \quad (21)$$

B: существует $\eta > 0$ такое, что для любого $T > 0$ найдется $t_* > T$ такое, что

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq c(\|x\|) \quad \text{при } t \in [t_*, t_* + \Delta t], \quad \text{где } \Delta t \geq \eta > 0, \quad c \in \mathcal{K}, \quad (22)$$

то тривиальное решение системы (1) y -неустойчиво.

Доказательство. По условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Покажем, что решение $x(t, t_0, x_0)$ со временем выйдет за пределы области Π .

В силу условий теоремы функция $v(t)$ будет неубывающей в области Ω_h , поэтому $v(t) \geq v(t_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$. Это означает, что точки $(t, x(t)) \in \Pi$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно, при всех $t \geq t_0$ значения функции $V(t, x)$ будут ограничены. Из неравенства (2) следует оценка (8).

Пусть выполнено условие (А) теоремы. Тогда существует подпоследовательность $\{\Delta V_{k_s}\}$, которую мы в дальнейшем будем обозначать $\{\Delta V_s\}$, такая, что $\Delta V_s \geq c(\|x\|)$ ($s \in N$).

Для этой подпоследовательности, подобно доказательству теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} M &\geq v(\tau_s + 0) \geq v(\tau_{s-1} + 0) + c(b^{-1}(V_0)) \geq \\ &\geq v(\tau_{s-2} + 0) + 2c(b^{-1}(V_0)) \geq \dots \geq \\ &\geq v(t_0) + sc(b^{-1}(V_0)). \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства становится неограниченной при больших s , значит нулевое решение системы (1) покинет множество Π за конечное время.

Пусть выполнено условие (В). Положим $T = t_0$. По условию теоремы существует такое $t_1 > T$, что на $[t_1, t_1 + \eta]$ выполняется условие (22). Полагая $T = t_1$, найдем интервал $[t_2, t_2 + \eta]$, на котором производная функции $V(t, x)$ по времени также будет положительной. Продолжая процесс, получим последовательность интервалов $[t_s, t_s + \eta]$, в каждом из которых имеет место неравенство (22). Интегрируя это неравенство вдоль решения в пределах от t_0 до $t_s + \eta$, аналогично теореме 1 получим

$$\begin{aligned} M &\geq v(t_s + \eta) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{t_s + \eta} v'(t) dt \geq v(t_0) + \sum_{i=1}^s \int_{t_i}^{t_i + \eta} v'(t) dt \geq \\ &\geq V_0 + sc(b^{-1}(V_0))\eta. \end{aligned}$$

Правая часть полученного неравенства при больших s становится больше заданного числа M . Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Π за конечное время и выходит за пределы множества $\|y\| < h$. Следовательно, решение системы (1) – неустойчиво. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобным образом можно обобщить теорему 2, получить условия неустойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

ПРИМЕР 2. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений относительно переменных y_1, y_2 .

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1^3 \sin^2 t + y_2(z - y_1)^3, & \Delta y_1 &= -y_1 - \sqrt{y_2^2 + \tau_i(x)}; \\ \dot{y}_2 &= y_2^3 \sin^2 t - y_1(z - y_1)^3, & \Delta y_2 &= -y_2 - y_1; \\ \dot{z} &= y_1^2 z e^t + y_2^3, & \Delta z &= y_1^2 + y_2^2 + z^2, \\ \tau_i(x) &= (y_1 + y_2)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} i, & i &\in N. \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = y_1^2 + y_2^2$.

Найдем производную и скачки функции $V(t, x)$:

$$\dot{V} = 2y_1\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 = 2(y_1^4 + y_2^4) \sin^2 t \geq 0.$$

$$\Delta V_i = (y_1 + \Delta y_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2)^2 - (y_1^2 + y_2^2) = (y_1^2 + y_2^2) \sin^2 \frac{\pi}{2} i \geq 0,$$

причем $\Delta V_k = 0$ при $k = 2i$, $i \in N$ и $\Delta V_k = (y_1^2 + y_2^2) > 0$ при $k = 2i + 1$, $i \in N$. Выполнены условия А предыдущей теоремы, следовательно, нулевое решение системы y -неустойчиво.

Производная $\dot{V} = 0$ при $\sin t = 0$, $t = \pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Возьмем произвольное $\epsilon \in (0, 1)$. Тогда $|\sin t| > \epsilon$ при $t \in (\arcsin \epsilon + \pi k, \pi - \arcsin \epsilon + \pi k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. На этих интервалах производная положительна:

$$\dot{V} \geq 2\epsilon^2(y_1^4 + y_2^4) > 0.$$

Выполнены условия В предыдущей теоремы, поэтому нулевое решение системы y -неустойчиво.

Следующая теорема дает достаточные условия неустойчивости решения независимо от знака производной функции $V(t, x)$, то есть производная может быть отрицательной, и соответствующая система дифференциальных уравнений без импульсных воздействий может быть устойчивой и даже асимптотически устойчивой.

Теорема 5. Пусть для системы уравнений (1) существует ограниченная в области $R_+ \times \Omega_h$ функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию

$$v(\tau_{k+1} + 0) - v(\tau_k + 0) \geq c(v(\tau_k + 0)), \quad (k \in N), \quad c \in \mathcal{K}, \quad (23)$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x , для которых $V(t, x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y -неустойчиво.

Доказательство. Согласно условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Докажем, что решение $x(t, t_0, x_0)$ с течением времени выйдет за пределы области Ω_h .

Предположим противное, что $x(t, t_0, x_0) \in \Omega_h$ при всех $t > t_0$.

Согласно условию теоремы, функция $V(t, x)$ ограничена в области $R_+ \times \Omega_h$. Поэтому существует такое положительное число $M > 0$, что при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $v(t) \leq M$. Учитывая это неравенство и условие (23), получим

$$\begin{aligned} M &\geq v(\tau_{k+1} + 0) \geq v(\tau_k + 0) + c(v(\tau_k + 0)) \geq v(\tau_{k-1} + 0) + 2c(v(\tau_{k-1} + 0)) \geq \\ &\geq \dots \geq v(\tau_1 + 0) + kc(v(\tau_1 + 0)) \quad (k \in N). \end{aligned}$$

Получили противоречие, так как правая часть последнего неравенства становится неограниченной при больших k . Это означает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Ω_h за конечное время, и, в силу условия z -продолжимости решения, $x(t, t_0, x_0)$ выходит за пределы множества $\|y\| < h$.

Теорема доказана. \square

1. Simeonov P.S., Bainov D.D. Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1987. – **124**. – P. 547-560.

2. Гладиліна Р.И. Об устойчивости по части переменных в системах с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – 8. – С. 7-18.
3. Гладиліна Р.И. Метод функций Ляпунова в задачах стійкості за частиною змінних для імпульсних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Кібернетика. – 2004. – Вип. 5. – С. 4-7.
4. Гладиліна Р.И. Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости по части переменных для систем с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – 9. – С. 46-52.
5. Гладиліна Р.И., Игнатъев А.О. О сохранении устойчивости импульсных систем с возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 78-85.
6. Gladilina R.I. Partial instability of impulsive systems // Second International Conference "Nonlinear Dynamics – 2007". Proceedings. – Kharkov: NTU "Kharkov Polytechnical Institute". – 2007. – P. 67-72.
7. Гладиліна Р.И., Игнатъев А.О. О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 2. – С. 132-142.
8. Гладиліна Р.И. Необходимые условия частичной устойчивости импульсных систем // Динамические системы: Межвед. научн. сборник. ТНУ, 2011. – 29. – С. 21-42.
9. Гладиліна Р.И. Необходимые условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями на поверхностях // Нелінійні коливання. – 2011. – 14, № 1. – С. 31-41.
10. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
11. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

R. I. Gladilina

On instability with respect to part of the variables of impulsive systems.

The instability problem of the trivial solution of the systems of differential equations with unfixed times of impulse effect was studied by means of Lyapunov functions. The new conditions of instability were obtained.

Keywords: *Lyapunov's functions, stability, impulsive system.*

R. I. Gladilina

Нестійкість імпульсних систем за частиною змінних.

За допомогою другого методу Ляпунова встановлено нові достатні умови нестійкості за частиною змінних тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, в яких послаблено вимоги до функцій Ляпунова.

Ключові слова: *імпульсні системи, функції Ляпунова, стійкість за частиною змінних.*

Донецкий национальный технический ун-т
gladilina@yandex.ru

Получено 19.05.12

УДК 513.6

©2012. Н. М. Глазунов

КВАЗИЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ КЛАССОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ. I.

Исследуются норменные подгруппы одномерных формальных групп высоты редукции больше или равной три над кольцом целых локального или квазилокального поля.

Ключевые слова: локальная теория полей классов, высота редукции формальной группы, группа Галуа, группы ветвления, норменный гомоморфизм, норменная подгруппа.

1. Введение. В [1, 2] построены основы локальной теории полей классов эллиптических кривых. Автору настоящей работы О.Н. Введенским было предложено исследовать ситуацию с обобщением классического вычисления кондуктора локальной теории полей классов на одномерные формальные группы высоты редукции ≥ 3 (для одномерных формальных групп высоты редукции 2 эта задача решена в [1]). Поставленная задача была решена автором, а результаты кратко изложены в [3]. В настоящей работе содержится доказательство этих результатов.

Основные понятия и результаты, связанные с линейными алгебраическими группами и формальными группами изложены в [2, 4, 5]. Поэтому в работе представлен только необходимый для понимания исследуемой проблематики математический аппарат: теории локальных полей (п. 2), теории алгебраических групп и конечных групповых схем (п. 3), теории квазиалгебраических и проалгебраических групп (п. 4). Результаты автора, связанные с вычислением аналога кондуктора локальной теории полей классов для одномерных формальных групп высоты редукции больше, чем 2 изложены в п. 5 (случай одномерных формальных групп высоты редукции 2 исследован О.Н. Введенским в [6]).

2. Локальные поля. Поле K называется локальным [7], если оно полно в топологии, определяемой его показателем ν_K и если его поле вычетов конечно. Далее предполагается, что показатель ν_K нормализован, т.е. гомоморфизм $\nu_K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ сюръективен. Такие поля имеют следующую структуру. Поле K характеристики ноль является конечным расширением p -адического поля \mathbb{Q}_p , которое есть пополнение поля рациональных чисел относительно p -адического показателя. Если $[K : \mathbb{Q}_p] = n$, то $n = ef$, где f – степень класса вычетов (т.е. $f = [k : \mathbb{F}_p]$) и $e = \nu_K(p)$. Поле K характеристики $p > 0$ изоморфно полю $k((T))$ формальных степенных рядов, где T – униформизирующий параметр.

Пусть L – конечное расширение локального поля K , l и k – их поля вычетов, $p = \text{char } k$, а $e_{L/K}$ – индекс ветвления L над K . Расширение L/K называется:

- 1) неразветвленным, если $e_{L/K} = 1$, а расширение l/k сепарабельно;
- 2) слабо разветвленным, если $p \nmid e_{L/K}$, а расширение l/k сепарабельно;
- в) дико разветвленным, если $e_{L/K} = [L : K] = (\text{char } k)^s$ ($s \geq 1$).

Обозначим через $\text{Tr}(L/K)$ и $\text{Norm } L/K$, соответственно, след и норму расшире-

ния L/K (будем использовать запись $Tr(L)$ и $Norm L$, если ясно, о каком расширении идет речь), а через K_{nr} – максимальное неразветвленное расширение поля K (в фиксированном алгебраическом замыкании Ω поля K) с полем вычетов k_S , которое является алгебраическим замыканием поля k .

Локальное поле с алгебраически замкнутым полем вычетов называют квазилокальным [1].

Лемма 1. *Если локальное поле K содержит примитивный корень ξ_p p -й степени из единицы, то $\nu_K(\xi_p - 1) = \frac{e}{p-1}$, где $e = \nu_K(p)$, а $p = \text{char } k$.*

Доказательство. Если ξ_p – примитивный корень p -й степени из единицы, то $\xi_p^p - 1 = 0$ и ξ_p есть корень неприводимого над K многочлена $x^{p-1} + \dots + x + 1$. Тогда $\xi_p^p - 1$ – корень многочлена $(x + 1)^{p-1} + \dots + (x + 1) + 1 = x^{p-1} + pP(x) + p$, где $P(x)$ – многочлен степени не выше $p - 2$. Значение показателя p на корне такого многочлена равно $\frac{e}{p-1}$, т.е. $\nu_K(\xi_p - 1) = \frac{e}{p-1}$. \square

Следствие 1. *Если локальное поле K содержит примитивный корень p -й степени из единицы, то $e = \nu_K(p)$ делится на $p - 1$.*

Пусть L/K – конечное расширение Галуа с группой Галуа $\mathcal{G}(L/K)$ (будем использовать запись \mathcal{G} , если это не вызывает недоразумений), а \mathcal{O}_K – кольцо целых поля K . Определим группы ветвления \mathcal{G}_i ($i = -1, 0, 1, \dots$) равенством

$$\mathcal{G}_i = \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \nu_L(\sigma a - a) \geq i + 1 \text{ для всех } a \in \mathcal{O}_L\}.$$

Нетрудно проверить, что: 1) группы \mathcal{G}_i являются нормальными делителями группы \mathcal{G} ; 2) $\mathcal{G}_{-1} = \mathcal{G}$; 3) существует такое число m , что $\mathcal{G}_{i+1} \subset \mathcal{G}_i$ для всех $i = -1, 0, 1, \dots, m - 2$ и $\mathcal{G}_m = 1$.

Нижняя и верхняя (Эрбрановская) нумерация групп ветвления может быть задана следующим образом. Пусть x ($x \geq -1$) – вещественная переменная. Нижнюю нумерацию определим равенством $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_l$, где $l = [x]$. Обозначим через g_i порядок группы \mathcal{G}_i . Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{g_0}(g_1 + \dots + g_m + (x - m)g_{m+1}), & \text{если } x \geq 0, \text{ где } m = [x] \end{cases}.$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна и строго возрастает. Следовательно, существует обратная функция $\psi(y)$ ($y \geq -1$). Верхнюю нумерацию групп ветвления определим равенством $\mathcal{G}^{\varphi(x)} = \mathcal{G}_{\psi(y)}$, где $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$.

Обозначим через π_K – униформизирующий элемент поля K (т.е. $\nu_K(\pi_K) = 1$), а через $\mathfrak{m}_K = \pi_K \cdot \mathcal{O}_K$ – максимальный идеал кольца \mathcal{O}_K .

Пусть L/K – дико разветвленное расширение простой степени p . Определим дифференту \mathcal{D} расширения L/K равенством

$$\mathcal{D} = (f'(\pi_L)), \tag{1}$$

где $f(x)$ – минимальный многочлен для π_L над K . Отметим, что

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A} \cdot \mathcal{D}^{-1} \Leftrightarrow Tr(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{A}, \tag{2}$$

где \mathfrak{A} – дробный идеал в \mathcal{O}_K , а \mathfrak{D} – дробный идеал в \mathcal{O}_L .

Пусть $m = \nu_L(\sigma\pi_L - \pi_L) - 1$, где σ – образующий элемент группы $\mathcal{G}(L/K)$. Тогда $f'(\pi_L) = \prod_{\sigma \neq 1} (\pi_L - \sigma\pi_L)$ и $\nu_L(f'(\pi_L)) = (m+1)(p-1)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{D} = (\pi_L^{(m+1)(p-1)})$.

Лемма 2. Для всех $n \geq 0$ истинно равенство

$$\text{Tr}(\pi_L^n \cdot \mathcal{O}_L) = \pi_K^{y_0(n)} \cdot \mathcal{O}_K,$$

где $y_0(n) = \lfloor \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \rfloor$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{D} = \pi_L^n \cdot \mathcal{O}_L$ и $\mathfrak{D}^{-1} = \pi_L^{-(m+1)(p-1)} \cdot \mathcal{O}_L$ для идеалов из (2). Вычислим x в равенстве $\mathfrak{A} = \pi_L^x \cdot \mathcal{O}_L$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\pi_L^n \cdot \mathcal{O}_L = \pi_L^x \cdot \mathcal{O}_L \cdot \pi_L^{-(m+1)(p-1)} \cdot \mathcal{O}_L. \quad (3)$$

Равенство (3) истинно при $x = (m+1)(p-1) + n$. Учитывая, что $\text{Tr}(\pi_L^n) \in \mathcal{O}_K$ и $\nu_L(\pi_K) = e$, получаем $\text{Tr}(\pi_L^n \cdot \mathcal{O}_L) = \pi_K^{\lfloor \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \rfloor} \cdot \mathcal{O}_K$. \square

Обозначим через $F(\mathfrak{m}_L) = \text{Gal}(L/K)$ модуль, задаваемый n -мерным групповым законом $F(X, Y)$ на произведении $\underbrace{\mathfrak{m}_L \times \dots \times \mathfrak{m}_L}_{n \text{ раз}}$ максимальных идеалов кольца \mathcal{O}_L

любого конечного расширения Галуа L поля K . Определим гомоморфизм N модуля F_L в F_K формулой $N(a) = (a +_F \sigma_s a) +_F \dots +_F \sigma_s a$, где $a +_F b$ – сложение точек в соответствии с групповой структурой модуля F_L , $a, b \in \mathfrak{m}_L$, $\mathcal{G} = \text{Gal}(L/K)$, $\sigma_s \in \mathcal{G}$ и $[\mathcal{G} : 1] = s$.

Пусть $p = \text{char } k$, $e = \nu_K(p)$ (отметим, что $e = \infty$, если характеристика поля K равна $p > 0$, и e – положительное число в противном случае), L/K – расширение Галуа простой степени q , а $f(x, y)$ – одномерный групповой закон над \mathcal{O}_K . Предположим, что $p > 0$.

Лемма 3. Если $\Pi_s \in \pi_L^s \cdot \mathcal{O}_L$ и $s \geq 1$, то

$$N(\Pi_s) \equiv \text{Tr}(\Pi_s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\text{Norm } \Pi_s)^n \pmod{\text{Tr}(\pi_L^{2s} \cdot \mathcal{O}_L)}, \quad (4)$$

где $c_n \in \mathcal{O}_K$ – коэффициенты в p -й итерации группового закона.

Доказательство. Отметим, что:

1) если $f(x, y)$ – одномерный групповой закон над кольцом \mathcal{O}_K , то p -я итерация $[p]_f[T]$ имеет вид

$$[p]_f[T] = p(T + \dots) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i T^{p^i}, \quad (5)$$

где многоточие обозначает неизвестные степени больше 1;

2) если в разложение в ряд выражения $t_1 +_f t_2 +_f \dots +_f t_n$ входит одночлен $t_1^{\alpha_1} \dots t_q^{\alpha_q}$, то входят и одночлены $t_1^{\alpha_{\delta(1)}} \dots t_q^{\alpha_{\delta(q)}}$, где δ – произвольная перестановка чисел $1, \dots, q$.

Пусть $\mathcal{G} = Gal(L/K)$. Если $\omega = r_1 + r_2\sigma + \dots + r_q\sigma^q$ – элемент групповой алгебры $\mathbb{Z}[\mathcal{G}]$, то положив $\Pi_s^\omega = \Pi_s^{r_1}(\sigma\Pi_s)^{r_2} \dots (\sigma^{q-1}\Pi_s)^{r_q}$, получим

$$N(\Pi_s) = \Pi_s +_f \sigma\Pi_s +_f \dots +_f \sigma^{q-1}\Pi_s = \sum_{(r_1, \dots, r_q)} d_{r_1, \dots, r_q} \Pi_s^\omega,$$

где $d_{r_1, \dots, r_q} \in \mathcal{O}_K$ и суммирование идет по соответствующим ω . В силу симметрии, в разложение $N(\Pi_s)$ вместе с $d_{r_1, \dots, r_q} \Pi_s^\omega$ входят и $d_{r_1, \dots, r_q} \Pi_s^{\sigma^i \omega}$ ($i = 1, \dots, q-1$). А так как из

$$\sigma^i \omega = \omega, \tag{6}$$

где i – одно из чисел $1, \dots, q-1$ вытекает, что $\omega = n(1 + \sigma + \dots + \sigma^{q-1})$, то

$$N(\Pi_s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (Norm \Pi_s)^n + \sum_{\omega} d_{r_1, \dots, r_q} Tr(\Pi_s^\omega), \tag{7}$$

где суммирование идет по ω , не удовлетворяющим равенству (6).

Если $r_1 + \dots + r_q > 1$, то $Tr(\Pi_s^\omega) \subset Tr(\pi_L^{2s} \cdot \mathcal{O}_K)$. Следовательно,

$$N(\Pi_s) \equiv Tr(\Pi_s) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (Norm \Pi_s)^n \pmod{Tr(\pi_L^{2s} \cdot \mathcal{O}_K)}. \tag{8}$$

Покажем, что в качестве d_n можно взять c_n из (5). Действительно, как c_n , так и d_n определены с точностью до $mod p$. Для c_n это вытекает из (5). Так как

$$pg(Norm \Pi_s)^n = Tr(g(Norm \Pi_s)^n) \in Tr(\pi_L^{2s} \cdot \mathcal{O}_L) \quad (g \in \mathcal{O}_K),$$

а члены из $N(\Pi_s)$, входящие в $Tr(\pi_L^{2s} \cdot \mathcal{O}_L)$, дают сумму $p(b_2 T^2 + b_3 T^3 + \dots)$ ($b_2, b_3, \dots \in \mathcal{O}_K$), то в (8) можно заменить d_n на c_n . \square

Замечание 1. В [6] такая лемма доказана для случая одномерных групповых законов, соответствующих эллиптическим кривым.

3. Алгебраические группы и групповые схемы. Рассмотрим основные понятия, относящиеся к классу многообразий, порождаемых приведенными отделимыми гладкими схемами (X, \mathcal{O}_X) конечного типа над алгебраически замкнутым полем [8]. Приведенность означает, что для открытых множеств $U \subset X$ кольца $\mathcal{O}_X(U)$ не имеют нильпотентных элементов, а отделимость схемы определяется через понятия произведения и замкнутости схем. Произведение схем определяется как произведение объектов в категории схем, а в терминах морфизмов схем над базисной схемой S (например, если S – алгебраически замкнутое поле) – как расслоенное произведение этих морфизмов. Морфизм схем $\varphi : Y \rightarrow X$ называют замкнутым вложением, если каждая точка $x \in X$ имеет такую аффинную окрестность U , что схема $\varphi^{-1}(U)$ аффинна и гомоморфизм $\psi_U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ эпиморфен. В категории схем над S определен морфизм $(1, 1) : X \rightarrow X \times_S X$, который называют диагональю. Схему X называют замкнутой, если морфизм ее диагонали – замкнутое вложение, и схемой над кольцом R , если задан морфизм схем $X \rightarrow Spec R$. Схему X над кольцом R

называют схемой конечного типа над R , если она имеет такое конечное покрытие $X = \bigcup U_i$ ($U_i = \text{Spec} A_i$), что все A_i – алгебры конечного типа над R . Так как любое кольцо есть алгебра над кольцом \mathbb{Z} , то любая схема является схемой над \mathbb{Z} .

Исследование алгебраических уравнений и алгебраических групп в конечных полях может быть охарактеризовано следующим образом [9]. Пусть X – схема конечного типа над \mathbb{Z} . Точку x схемы X называют замкнутой, если соответствующий ей идеал j_x максимален. Пусть \tilde{X} – множество замкнутых точек схемы X , $N(x)$ – число элементов поля вычетов $k(x)$ в точке $x \in \tilde{X}$, а X_0 – алгебраическое многообразие над полем \mathbb{F}_q ($q = p^n$). А. Гротендик определил для любого числа $l \neq p = \text{char } k$ группы l -адических когомологий $H^i(X, Q_l)$ и l -адических когомологий с компактным носителем [9], которые совпадают, если X – собственное многообразие. Пусть F – морфизм Фробениуса, отображающий точку (x_1, \dots, x_n) в точку (x_1^q, \dots, x_n^q) , а F^* – геометрический Фробениус, определяемый по F при поднятии F до морфизма схем. Точки многообразий являются неподвижными точками отображения F^* .

Конечной групповой схемой [10,11] называют групповую схему, локально свободную ранга m над R . Такая групповая схема G определяется пучком локально свободных алгебр A ранга m над R . Структура групповой схемы задается гомоморфизмами $\mu : A \rightarrow \otimes_R A$, $\varepsilon : A \rightarrow R$ и автоморфизмом $i : A \rightarrow A$, задающими, соответственно, групповой закон, единицу и взятие обратного элемента, которые удовлетворяют известным аксиомам [4,9]. Если в алгебраической группе (или в групповой схеме) G фиксирована групповая структура S , то пишут G_S .

4. Квазиалгебраические и проалгебраические группы. Далее все группы, если не оговорено противное, предполагаются коммутативными. В настоящем разделе через K обозначено совершенное поле (алгебраически замкнутое поле), через p – его характеристическая экспонента. Все многообразия считаем определенными над K .

Известно, что в категории алгебраических групп над K существуют морфизмы, не являющиеся морфизмами в смысле алгебраических групп (т.е. категория алгебраических групп аддитивная, но не абелева).

ПРИМЕР 1. Пусть $K = k$ – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$. Топологические пространства алгебраических групп X и Y (они обозначаются теми же буквами) задаются условием $X = Y = k$. Пусть групповая операция каждой из групп задана отображением $\mu(x, y) = x + y$ ($x, y \in k$). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ алгебраических групп X и Y , определяемый формулой $\varphi(x) = x^p$. Как точечное отображение он взаимно-однозначен и как отображение абстрактных групп является изоморфизмом. Но как регулярное отображение многообразий изоморфизмом не является, так как соответствующий ему гомоморфизм колец $\varphi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$, $\varphi^*(T) = T^p$, $k[X] = k[Y] = k[T]$ не является изоморфизмом.

Понятие квазиалгебраической группы [12] объединяет в один класс алгебраические группы, между которыми существуют биекции, которые могут и не быть изоморфизмами алгебраических групп.

Пусть G_S – алгебраическая группа и \mathcal{O} – пучок функций на G_S . Если $q = p^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то обозначим через \mathcal{O}^q пучок, сечения которого открытыми множествами

$U \in G$ – q -е степени сечений пучка \mathcal{O} над U . Положим $\mathcal{O}^{p^{-\infty}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}^{p^n}$. Если $q \geq 1$, то соответствующее пучку \mathcal{O}^q многообразие G^q – алгебраическая группа.

Пусть G – группа. Если S – структура алгебраической группы на G , совместимая со структурой группы, то через G_S обозначают соответствующую алгебраическую группу, а через T_S и \mathcal{O}_S – соответственно, топологию и пучок колец. В предположении, что под «морфизмом» понимается регулярное отображение алгебраических групп, истинно следующее утверждение ([12], стр. 6).

Предложение 1. Пусть S_1 и S_2 – структуры алгебраической группы на G , совместимые со структурой группы. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такая структура S_3 , что тождественные отображения $S_3 \rightarrow S_1$ и $S_3 \rightarrow S_2$ – морфизмы;
- (ii) существует такая структура S_4 , что тождественные отображения $S_1 \rightarrow S_4$ и $S_2 \rightarrow S_4$ – морфизмы;
- (iii) для произвольной положительной степени q числа p тождественное отображение $G_{S_1} \rightarrow G_{S_2}$ – морфизм алгебраических групп.
- (iv) $T_{S_1} = N_{S_2}$ и $\mathcal{O}_{S_1}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_{S_2}^{p^{-\infty}}$.

Пусть G – абстрактная группа, а S_1 и S_2 – структуры алгебраической группы на G , совместимые со структурой группы G . Говорят, что S_1 и S_2 эквивалентны, если они удовлетворяют условиям предложения 1. Квазиалгебраической группой, соответствующей группе G , называют класс эквивалентных структур алгебраической группы на G , совместимых со структурой группы G . Если G – квазиалгебраическая группа, то структуру алгебраической группы на G , выбранную из класса эквивалентных структур алгебраической группы на G , называют совместимой с квазиалгебраической структурой на G .

Истинно следующее утверждение ([12], стр. 8).

Предложение 2. Пусть G и G' – квазиалгебраические группы и $f : G \rightarrow G'$ гомоморфизм групп в теоретико-множественном смысле. Следующие условия эквивалентны:

- а) на G и G' существуют такие структуры S и S' алгебраических групп, совместимые с квазиалгебраическими структурами, что $f : G \rightarrow G'$ – регулярное отображение алгебраических групп;
- б) отображение f непрерывно, и если φ – сечение пучка $\mathcal{O}_{G'}^{p^{-\infty}}$ над открытым множеством U' , то $\varphi \circ f$ – сечение пучка $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$ над открытым множеством $f^{-1}(U')$;
- с) график отображения f есть замкнутая подгруппа в $G \times G'$.

Если G и G' – квазиалгебраические группы, то морфизмом из G в G' называют гомоморфизм $f : G \rightarrow G'$, удовлетворяющий условиям предложения 2. Объекты – квазиалгебраические группы, а также морфизмы между ними, удовлетворяют известным теоретико-категорийным свойствам [10]. Тем самым определена категория квазиалгебраических групп \mathcal{QG}_K , которая является абелевой по построению.

Замечание 2. Определение квазиалгебраической группы может быть следующим образом дано и в терминах групповых схем. Расширяем категорию алгебраи-

ческих групп до категории групповых схем над K . Так как мы рассматриваем только коммутативные группы, то ограничимся категорией коммутативных групповых схем \mathcal{CG}_K над K . Пусть $H, G \in \mathcal{CG}_K$ и $\varphi : H \rightarrow G$ чисто несепарабельная изогения из H в G . Назовем H и G эквивалентными, если существует групповая схема $F \in \mathcal{CG}_K$ и чисто несепарабельные изогении $\psi : F \rightarrow H$ и $\tau : F \rightarrow G$. Квазиалгебраической группой является класс эквивалентных групповых схем.

ПРИМЕР 2. По всякой алгебраической группе G можно каноническим образом определить квазиалгебраическую группу $G^{p^{-\infty}}$, структурным пучком которой является пучок $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$.

Проалгебраической группой называют группу G и такое непустое семейство \mathcal{C} ее подгрупп, что для каждого $H \in \mathcal{C}$ множество G/H имеет структуру квазиалгебраической группы, причем выполнены следующие четыре аксиомы:

П1. Если $H, H' \in \mathcal{C}$, то $H \cap H' \in \mathcal{C}$.

П2. Пусть $H \in \mathcal{C}$. Подгруппа H' , содержащая H и лежащая в \mathcal{C} есть прообраз замкнутой подгруппы из G/H .

П3. Если $H, H' \in \mathcal{C}$ и $H \subset H'$, то $G/H \rightarrow G/H'$ – морфизм квазиалгебраических групп.

П4. Естественное отображение $G \rightarrow \varprojlim G/H$ – биекция G на проективный предел групп G/H ($H \in \mathcal{C}$).

ПРИМЕР 3.

1. Любую квазиалгебраическую группу G можно каноническим образом наделять структурой проалгебраической группы: в качестве \mathcal{C} достаточно выбрать множество замкнутых подгрупп группы G . Для каждого $H \in \mathcal{C}$ фактор-группа G/H имеет структуру квазиалгебраической группы, причем аксиомы П1-П4 выполнены.

2. Пусть G – компактная вполне несвязная топологическая группа, а \mathcal{C} – множество открытых полугрупп в G . Если $H \in \mathcal{C}$, то фактор-группа G/H – конечная, и следовательно, является квазиалгебраической группой размерности ноль [10]. Аксиомы П1-П4 выполнены. Такую проалгебраическую группу называют проалгебраической группой размерности ноль.

Пусть G_1 и G_2 – проалгебраические группы с полными определяющими множествами \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 . Морфизмом из G_1 в G_2 называют такой гомоморфизм $f : G_1 \rightarrow G_2$, что для каждого $H_2 \in \mathcal{C}_2$ имеет место $f^{-1}(H_2) \in \mathcal{C}_1$ и отображение из $G_1/f^{-1}(H_2)$ в G_2/H_2 , определяемое по f , является морфизмом квазиалгебраических групп. Полученная таким способом категория \mathcal{PG}_K проалгебраических групп над K является абелевой категорией [12]. Она эквивалентна прокатегории $Pro(QG_k)$.

Пусть G – квазиалгебраическая группа. Обозначим через G^0 связную компоненту единичного элемента группы G . Далее G^0 называется просто связной компонентой группы G . Пусть G – проалгебраическая группа с полным определяющим множеством \mathcal{C} . Для $H \in \mathcal{C}$ связная компонента $(G/H)^0$ фактор-группы G/H является замкнутой подгруппой в G/H , и если $H' \subset H$, то образ G/H' в G/H – это $(G/H)^0$. Поэтому можно положить $G/G_0 = \varprojlim (G/H)/(G/H)^0$. Фактор-группа G/G_0 обозначается через $\pi_0(G)$ и называется 0-й гомотопической группой проалгебраической

группы G .

Операция факторизации $\pi_0(G) = G/G_0$ определяет функтор $\pi_0 : \mathcal{P}G_K \rightarrow \mathcal{P}G_K^0$ из категории $\mathcal{P}G_K$ в категорию $\mathcal{P}G_K^0$ проалгебраических групп размерности ноль. Левые производные функторы функтора π_0 будем называть i -ми гомотопическими группами проалгебраической группы G и обозначать $\pi_i(G)$ (наличие в категории $\mathcal{P}G_K$ достаточного числа проективных объектов делает такое определение корректным). Фундаментальной группой группы G называют первую гомотопическую группу $\pi_1(G)$.

Группу $G \in \mathcal{P}G_K$ называют: 1) связной, если $G = G^0$; 2) односвязной, если $\pi_0(G) = 0$. В [12] доказаны следующие утверждения.

Предложение 3. Если G – проалгебраическая группа размерности ноль, то $\pi_i(G) = 0$ для всех $i \geq 1$.

Предложение 4. Пусть $\bar{G} \in \mathcal{P}G_K$. Существуют такие связная и односвязная проалгебраическая группа \bar{G} и морфизм $u : \bar{G} \rightarrow G$, что ядро и коядро u – проалгебраические группы размерности ноль. Пара (\bar{G}, u) единственна с точностью до изоморфизма.

Пара (\bar{G}, u) называется универсальной накрывающей группы G .

Замечание 3. Взятие универсальной накрывающей определяет ковариантный функтор «универсальное накрытие» из категории $\mathcal{P}G_K$ в категорию связных односвязных проалгебраических групп.

Рассмотрим вычисление фундаментальной группы в простейших случаях.

Пусть $G \in \mathcal{P}G_K$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ отображение $x \rightarrow nx$ ($x \in G$) является эндоморфизмом G , который будем обозначать $n : G \rightarrow G$. Истинно следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть G – связная проалгебраическая группа, а $n \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с $p = \text{char } K$. Тогда морфизм $n : G \rightarrow G$ сюръективен.

Пусть ${}_nG$ – ядро отображения $n : G \rightarrow G$, т.е. ${}_nG$ – подгруппа G , образованная такими $x \in G$, что $nx = 0$. Истинно следующее утверждение ([12], стр. 45).

Предложение 5. Пусть G – связная проалгебраическая группа, а l – простое число. Предположим, что морфизм $l : G \rightarrow G$ сюръективен. Тогда l -я компонента $\pi_1(G)_l$ группы $\pi_1(G)$ проективна и фактор-группа $\pi_1(G)_l/l\pi_1(G)_l$ изоморфна группе ${}_lG$.

Следствие 2. В условиях предложения 5 предположим, что ${}_lG$ изоморфна $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}^{\mathcal{J}}$, где \mathcal{J} – произвольное множество индексов. Тогда $\pi_1(G)_l$ изоморфна $(\mathbb{Z}_l)^{\mathcal{J}}$.

Следствие 3. Пусть $G \in \mathcal{P}G_K$ и l – простое, отличное от характеристики поля K . Тогда $\pi_1(G)_l = 0$ при $i \geq 2$ и $\pi_1(G)$ изоморфна произведению групп \mathbb{Z}_l .

5. Теорема об ограниченности снизу норменных подгрупп. В настоящем разделе рассматриваются одномерные формальные группы любой натуральной высоты больше или равной 3, определенные над кольцом целых локального или квазилокального поля.

Пусть L/K – конечное расширение Галуа локального или квазилокального поля K с группой Галуа \mathcal{G} , $f(x, y)$ – одномерный групповой закон над кольцом целых \mathcal{O}_K

поля K . На максимальном идеале \mathfrak{m}_L кольца целых \mathcal{O}_L любого конечного расширения Галуа L поля K формальная группа f определяет $f(\mathfrak{m}_L)$ - \mathcal{G} -модуль, который будем обозначать f_L .

Если K – квазилокальное поле и L/K – конечное расширение Галуа, то на группе f_L можно навести структуру проалгебраической группы. Обозначим такую группу через \widetilde{f}_L , а ее фундаментальную группу – через $\pi_1(\widetilde{f}_L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K – локальное (соответственно, квазилокальное) поле. Подгруппа $P \subset f_K$ (соответственно, $P' \subset \pi_1(\widetilde{f}_K)$) называется норменной, если существует такое конечное расширение Галуа L/K , что $P = N_{L/K}(f_L)$ (соответственно, $P' = N_{L/K}(\pi_1(\widetilde{f}_L))$).

Теорема. Для любого расширения Галуа L/K с такой группой Галуа \mathcal{G} , что $\mathcal{G}^n = \{1\}$ и любой одномерной формальной группы f высоты редукции больше или равной 3, определенной над кольцом целых \mathcal{O}_K локального (соответственно, квазилокального) поля K имеет место включение

$$N_{L/K}(f_L) \supset f_K^n \quad (\text{соответственно, } N_{L/K}(\pi_1(\widetilde{f}_L)) \supset \pi_1(\widetilde{f}_K^n)). \quad (9)$$

Доказательство. Для всех действительных $s \geq -1$ положим $f_L^s = f^{[s]}$. Пусть $\varphi_{L/K}$ и $\psi_{L/K}$ – соответствующие расширению L/K функции, задающие, соответственно, верхнюю и нижнюю нумерации групп ветвления. Рассмотрим циклическое расширение L/K простой степени. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. Пусть $n \geq 1$ и циклическое расширение Галуа M/K простой степени локального (соответственно, квазилокального) поля таково, что $\mathcal{G}^n = \{1\}$. Тогда для всех действительных $s \geq \psi_{M/K}(n)$ имеет место включение

$$N_{\mathcal{G}}(f_M^s) = f_K^{\varphi_{M/K}(s)} \quad (\text{соответственно, } N_{\mathcal{G}}(\pi_1(\widetilde{f}_M^s)) = \pi_1(\widetilde{f}_K^{\varphi_{M/K}(s)})). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть M/K неразветвлено (в этом случае, очевидно, K не является квазилокальным полем). Тогда $\varphi_{M/K}(x) = x$ для всех действительных $x \geq -1$ и следует использовать фильтрацию Лютца (отметим, что здесь $\Pi_M = \Pi_R$), что и доказывает лемму.

Пусть M/K – чисто слабо разветвленное расширение. Для нижней фильтрации \mathcal{G} получаем: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \dots = \{1\}$.

Если $[\mathcal{G}_0 : 1] = [M : K] = q$, то $\varphi_{M/K}(x) = q^{-1}x$ и $\psi_{M/K}(x) = qx$ для всех действительных $x \geq 0$. Нужно показать, что

$$N_{\mathcal{G}}(f_M^s) = f_K^{\frac{s}{q}} \quad (11)$$

при $s \geq \psi_{M/K}(n) = qn$.

Норменный гомоморфизм $N_{M/K} : f_M \rightarrow f_K$ индуцирует для всех действительных $r \geq 1$ изоморфизмы

$$f_M^{\psi_{M/K}(r)} / f_M^{\psi_{M/K}(r)+1} \simeq f_K^r / f_K^{r+1}. \quad (12)$$

Доказательство (12) аналогично рассуждениям, приведенным в [6].

Из (12) вытекает, что

$$N_{\mathcal{G}} \left(f_M^{\psi_{M/K}(\frac{\tau}{q}) - (q-1)} \right) = \left(f_M^{\psi_{M/K}(\frac{\tau}{q})} \right) = f_K^{\frac{\tau}{q}} = f_K^{\frac{s}{q}},$$

где $\tau = \lceil s \rceil$. А так как $\psi_{M/K}(\frac{\tau}{q}) - (q-1) \leq \psi_{M/K}(\frac{\tau}{q})$, то

$$N_{\mathcal{G}}(f_M^{\tau}) = N_{\mathcal{G}}(f_M^s) = f_K^{\frac{\tau}{q}} = f_K^{\frac{s}{q}},$$

т.е. равенство (11) истинно.

Пусть M/K – чисто дикое разветвленное расширение Галуа простой степени, а m – номер последней нетривиальной группы ветвления расширения M/K . Тогда

$$\psi_{M/K}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < m \\ m + p(x - m), & \text{если } x \geq m \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Так как $\mathcal{G}_{\psi_{M/K}(n)} = \mathcal{G}^n = \{1\}$, то $\psi_{M/K}(n) \geq m + 1$. Покажем что для всех действительных $s \geq \psi_{M/K}(n)$ имеет место равенство

$$N_{\mathcal{G}}(f_M^s) = f_K^{\frac{1}{p}(s-m)+m}. \quad (13)$$

Из результатов, полученных в работе [6], вытекает, что норменный гомоморфизм $N_{L/K} : f_M \rightarrow f_K$ индуцирует для всех целых $r > m$ изоморфизм (12). Следовательно, для всех $s \geq \psi_{M/K}(n)$

$$f_K^{\frac{1}{p}(s-m)+m} = N_{\mathcal{G}} \left(f_L^{\psi_{L/K}(\frac{1}{p}(s-m)+m)} \right) = N_{\mathcal{G}} \left(f_L^{\psi_{L/K}(\frac{1}{p}(s-m)+m) - (p-1)} \right).$$

Из

$$\psi_{L/K} \left(\frac{1}{p}(s-m) + m \right) \geq \tau \geq \psi_{L/K} \left(\frac{1}{p}(s-m) + m \right) - (p-1),$$

вытекает, что

$$N_{\mathcal{G}}(f_L^{\tau}) = N_{\mathcal{G}}(f_L^s) = f_K^{\frac{1}{p}(s-m)+m} = f_K^{\varphi_{L/K}(s)},$$

т.е. равенство (13) истинно.

В условиях леммы 5 для простого циклического расширения M/K легко проверить связность ядра эпиморфизма $N_{\mathcal{G}} : \widetilde{f}_M^s \rightarrow \widetilde{f}_K^{\varphi_{M/K}(s)}$ проалгебраических групп. Отсюда получаем эпиморфизм

$$N_{\mathcal{G}} \left(\pi_1(\widetilde{f}_M^s) \right) = \pi_1 \left(\widetilde{f}_K^{\varphi_{M/K}(s)} \right). \quad (14)$$

Эпиморфность (14) завершает доказательство леммы. \square

Теперь достаточно доказать теорему для локального поля (в случае квазилокального поля та же схема доказательства, но возникают дополнительные громоздкие выкладки). Доказательство проведем индукцией по числу простых множителей в степени произвольного конечного расширения Галуа L/K , воспользовавшись разрешимостью групп Галуа локальных полей.

Выделим в L/K циклическое подрасширение L_1/K простой степени. Получим тогда башню полей с соответствующими группами Галуа \mathcal{G} и h :

$$K - L_1 - L, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(L/K), \quad h = \mathcal{G}(L/L_1), \quad \mathcal{G}/h = \mathcal{G}(L_1/K).$$

По индукции можно считать, что утверждение леммы 5 доказано для этажа L/L_1 башни. Так как $\mathcal{G}^n = \{1\}$, то по теореме Эрбрана $(\mathcal{G}/h)^n = \{1\}$. Следовательно, для всех действительных $s \geq \psi_{L_1/K}(n)$

$$N_{\mathcal{G}/h}(f_{L_1}^s) = f_K^{\varphi_{L_1/K}(s)}. \quad (15)$$

Используя верхнюю и нижнюю нумерации групп ветвления, получим

$$h^{\varphi_{L/K}(n)} = h_{\psi_{L/L_1}(\psi_{L_1/K}(n))} = h_{\psi_{L/K}(n)} \subset \mathcal{G}^n = \{1\}.$$

Так как $n \geq 1$, то $\psi_{L_1/K}(n) \geq 1$, причем $\psi_{L_1/K}(n)$ – целое. Следовательно, по предположению индукции для всех действительных $s \geq \psi_{L/L_1}(\psi_{L_1/K}(n))$ истинно равенство (роль n в условиях леммы 5 играет $\psi_{L_1/K}(n)$)

$$N_h(f_L^s) = f_{L_1}^{\varphi_{L/L_1}(n)}. \quad (16)$$

Из (16) вытекает, что для любого действительного числа $\Sigma \geq \psi_{L_1/K}(n)$ истинно равенство $N_h(f_L^\Sigma) = f_{L_1}^{\varphi_{L/L_1}(\Sigma)}$. А так как φ – строго возрастающая функция, то

$$\varphi_{L/L_1}(\Sigma) = \varphi_{L/L_1}(\psi_{L/K}(n)) = \psi_{L_1/K}(n).$$

Применяя (15), получим

$$N_{\mathcal{G}/h}(f_L^{\varphi_{L/L_1}(\Sigma)}) = f_K^{\varphi_{L_1/K}(\varphi_{L/L_1}(\Sigma))} = f^{\varphi_{L/K}(\Sigma)} = N_{\mathcal{G}}(f_L^\Sigma).$$

Следовательно,

$$N_{\mathcal{G}}(f) = N_{\mathcal{G}}(f^1) \supset N_{\mathcal{G}}(f_L^{\psi_{L/K}(n)}) = f^{\varphi_{L/K}(\psi_{L/K}(n))} = f_K^n,$$

что и требовалось доказать. \square

1. Введенский О.Н. О локальных «полях классов» эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – № 1. – С. 20-88.
2. Введенский О.Н. Об «универсальных нормах» формальных групп, определенных над кольцом целых чисел локального поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – № 4. – С. 737-751.

3. Глазунов Н.М. Про «нормені підгрупи» одновимірних формальних груп визначених над кільцем цілих локального поля // Доповіді АН УРСР. Серія А. – 1973. – № 11. – С. 965-968.
4. Борель А. Линейные алгебраические группы. – М.: Мир, 1972. – 269 с.
5. Demazure M. Lectures on p -divisible groups. – Berlin: Springer-Verlag, 1972. – 280 p.
6. Введенский О.Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. I. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – № 5. – С. 1091-1112.
7. Агебраическая теория чисел. – М.: Мир, 1969. – 483 с.
8. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. – Т. 2. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
9. Deligne P. La conjecture de Weil // Publ. Math. IHES. – 1974. – P. 273-307.
10. Милн Дж. Этальные когомологии. – М.: Мир, 1983. – 392 с.
11. Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
12. Serre J.-P. Groups proalgebriques // Publ. Math. IHES. – 1960. – № 7. – 65 p.

N. M. Glazunov

Quasi-local class fields of elliptic curves and formal groups. I.

Norm subgroups of one-dimensional formal groups of height reduction greater or equal three defined over integer ring of local or quasi-local field are investigated.

Keywords: local class field theory, the height of reduction of formal group, Gallous group, ramification groups, norm homomorphism, norm subgroup.

М. М. Глазунов

Квазілокальні поля класів еліптичних кривих та формальні групи. I.

Досліджено нормені підгрупи одновимірних формальних груп висоти редукції більше або рівній трьом над кільцем цілих локального або квазілокального поля.

Ключові слова: локальна теорія полів класів, висота редукції формальної групи, група Галуа, групи розгалуження, нормений гомоморфізм, норма підгрупа.

Национальный авиационный ун-т, Киев
glaznt@ua.fm.com

Получено 31.05.12

УДК 517.36

©2012. А. И. Двирный, В. И. Слынько

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИОДНОРОДНЫХ МОНОТОННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В работе получены условия устойчивости нулевого решения монотонных импульсных систем. При этом предполагается, что правые части системы зависят от времени и являются квазиоднородными функциями независимых переменных.

Ключевые слова: импульсная система, группа квазиоднородных преобразований, условие Ваянесского.

1. Введение. Исследование критических случаев в теории устойчивости движения для различных классов динамических систем является одной из важных задач нелинейного анализа [1-4]. Эти задачи, при некоторых дополнительных условиях, могут быть сведены к исследованию некоторых систем дифференциальных уравнений, правые части некоторых имеют свойства инвариантности относительно действия некоторых групп Ли [5, 6]. С другой стороны, применение метода сравнения [7] в теории устойчивости движения приводит к необходимости изучения систем дифференциальных уравнений, решения которых являются монотонными по начальным данным относительно некоторой частичной полуупорядоченности. Эта полуупорядоченность вводится при помощи некоторого телесного конуса. Для автономных систем дифференциальных уравнений критерии устойчивости равновесных решений получены в работе [4] и обобщены в работах [8-10]. Существенным в этом случае является полугрупповое свойство решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для неавтономных систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с импульсным воздействием такое свойство отсутствует. Поэтому непосредственное обобщение результатов работ [4, 9] на эти классы систем не представляется возможным. В работах [11-13] предложен новый вариант принципа сравнения. Этот принцип позволяет установить ряд общих теорем об устойчивости решений некоторых классов абстрактных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом предполагается наличие свойства монотонности по начальным данным относительно некоторой частичной упорядоченности. Для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вопросы устойчивости равновесных решений являются актуальными. Целью настоящей работы является исследование монотонных неавтономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, правые части которых являются квазиоднородными функциями.

В первом разделе работы сформулирована постановка задачи и основные предположения, при которых исследована задача об устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Второй раздел посвящен формулировке и доказательству принципа сравнения для монотонных квазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем разделе результаты второго раздела применяются для исследования устойчивости состояния равновесия неавтономной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Приведен иллюстративный пример.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [14]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g_k(x), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, \infty)$, $f \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, $g_k \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $f(t, 0) = 0$, $g_k(0) = 0$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности. Далее будем пользоваться следующими обозначениями [6]: если $\alpha \geq 0$ и $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_n) > 0$, то $\alpha^G = \text{diag}(\alpha^{g_1}, \dots, \alpha^{g_n})$. Так же обозначим $\pi^+(t_0, x_0)$ правый конец максимального интервала существования решения задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ для системы уравнений (2.1).

Напомним также [15], что непустое множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется конусом, если

$$\overline{K} = K, \quad (\forall \alpha \geq 0)(\forall \beta \geq 0) \quad \alpha K + \beta K \subset K, \quad K \cap (-K) = \{0\}.$$

Если $\text{int}K \neq \emptyset$, то конус K называется телесным. Далее предположим, что конус K является телесным. Конус K вводит в пространстве \mathbb{R}^n отношения частичного порядка, по следующим правилам:

$$\begin{aligned} x \overset{K}{\geq} y &\text{ если и только если } x - y \in K, \\ x \overset{K}{>} y &\text{ если и только если } x - y \in \text{int}K. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим задачу об устойчивости решения $x = 0$ в конусе K . Предварительно сформулируем соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8]. Состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1) называется

1) устойчивым в конусе K , если для любых $t_0 \in [a, +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое что из неравенства $\|x_0\| < \delta$ и включения $x_0 \in K$ следует неравенство $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) асимптотически устойчивым в конусе K , если $x = 0$ устойчиво и для любого $t_0 \in [a, +\infty)$ существует положительная постоянная $\rho = \rho(t_0)$ такая, что из неравенства $\|x_0\| < \rho$ и включения $x_0 \in K$ следует, что $\|x(t; t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что в определении 2.1 норма может быть выбрана любой, поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Далее удобно пользоваться специальной нормой – нормой Биркгофа [15]. Если $w \in \text{int}K$, то по определению

$$\|x\|_w = \inf\{\beta \geq 0 \mid -\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w\}.$$

Напомним также определение функции класса Хана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $\vartheta(\cdot)$ называется функцией класса Хана ($\vartheta \in \mathcal{K}$), если она непрерывна, $\vartheta(0) = 0$ и возрастает на некотором замкнутом интервале $[0, r_\vartheta]$, $r_\vartheta > 0$.

Обозначим $y(t; t_0, y_0)$ решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений без импульсного воздействия

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (2.2)$$

Также обозначим $\omega^+(t_0, y_0)$ – правый конец максимального интервала существования решения $y(t; t_0, y_0)$ задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2)

Исследование устойчивости в конусе K проведем при следующих дополнительных предположениях.

Предположение 2.1. Для системы (2.1) выполняются следующие условия

1) функция $f : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является квазиоднородной по переменной x , т.е. при всех $t \in [a, \infty)$, $\alpha \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$f(t, \alpha^G x) = \alpha^{G+(q-1)E} f(t, x);$$

2) функции $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ являются квазиоднородными по переменной x , т.е. при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$g_k(\alpha^G x) = \alpha^{G+(q-1)E} g_k(x);$$

3) решения задачи Коши $y(t; t_0, y_0)$ для системы дифференциальных уравнений (2.2) являются монотонными по переменной y_0 относительно конуса K , т.е. из неравенства $y_0'' \stackrel{K}{\geq} y_0'$ следует, что при всех $t \in [t_0, \omega^+(t_0, y_0'')] \cap [t_0, \omega^+(t_0, y_0')]$ выполняется неравенство

$$y(t; t_0, y_0'') \stackrel{K}{\geq} y(t; t_0, y_0');$$

4) функция $x \rightarrow x + g_k(x)$ является локально неубывающей относительно конуса K , т.е. существуют окрестность $D \subset \mathbb{R}^n$ точки $x = 0$ такая, что из неравенств $x'' \stackrel{K}{\geq} x'$ и включений $x'' \in D$, $x' \in D$ следует неравенство

$$x'' + g_k(x'') \stackrel{K}{\geq} x' + g_k(x');$$

5) существуют вектор $w \in \text{int}K$, функция $\gamma \in C([a, \infty); \mathbb{R})$ и последовательность действительных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, такие, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$\alpha^G(f(t, w) - \gamma(t)Gw) \stackrel{K}{\leq} 0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha^G(g_k(w) - \beta_k Gw) \stackrel{K}{\leq} 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$

б) существует функция $\vartheta(\cdot)$ класса Хана такая, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\alpha w \leq \vartheta^G(\alpha)w.$$

Наряду с системой дифференциальных уравнений (2.1) рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \gamma(t)u^q(t), & t \neq \tau_k, \\ \Delta u(t) &= \beta_k u^q(t), & t = \tau_k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим $u(t; t_0, u_0)$ решение задачи Коши для уравнения сравнения (2.3) и $\Pi^+(t_0, u_0)$ – правый конец максимального интервала существования этого решения.

3. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала систему дифференциальных уравнений без импульсного воздействия (2.2). Наряду с системой (2.2) рассмотрим скалярное уравнение сравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \gamma(t)\psi^q(t) \quad (3.1)$$

и обозначим $\psi(t; t_0, \psi_0)$ решение задачи Коши для уравнения (3.1), а $\Omega^+(t_0, \psi_0)$ – правый конец максимального интервала существования этого решения.

Введем рекуррентное уравнение

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + h\gamma(t_0 + (m-1)h)\alpha_{m-1}^q, \quad \alpha_0 = \alpha \geq 0. \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Пусть $R > 0$, тогда существует число T , $T > t_0$, зависящее от α , такое, что при всех t , $t_0 < t \leq T$ достаточно больших натуральных числах l и при всех h , $0 < h \leq \frac{t-t_0}{l}$ выполняются неравенства

$$\alpha_m \geq 0, \quad |\alpha_m - \alpha| \leq \frac{R}{2}, \quad m = \overline{1, l}.$$

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение леммы 3.1 очевидно. Пусть $\alpha > 0$, $\eta = \max_{t \in [t_0, T_1]} |\gamma(t)|$, $T_1 > t_0$ – некоторое фиксированное число,

$$t_0 < T < t_0 + \min\left\{\frac{\alpha}{2\eta R^q}, \frac{1}{2\eta R^{q-1}}\right\}.$$

Тогда, последовательно нетрудно получить оценки

$$\alpha_m \geq \alpha\left(1 - \frac{m}{2l}\right), \quad |\alpha_m - \alpha| \leq \frac{R}{2}, \quad m = \overline{0, l}.$$

□

Следствие 3.1. Если $\psi_0 > 0$, то при всех $t \in [t_0, \Omega^+(t_0, \psi_0))$ для решения $\psi(t; t_0, \psi_0)$ задачи Коши для уравнения сравнения (3.1) справедливо неравенство $\psi(t; t_0, \psi_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$.

Это следствие является непосредственным следствием леммы 3.1, теоремы Пеано [16] и теоремы о единственности решений задачи Коши.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и обозначим число $\omega^*(t_0, \alpha) > t_0$, определенное формулой

$$\omega^*(t_0, \alpha) = \sup\{t \mid t_0 \leq t < \omega^+(t_0, \alpha^G w), \psi(t; t_0, \alpha) \in (0, 1)\}.$$

Лемма 3.2. Предположим, что для системы дифференциальных уравнений (2.2) выполняются условия п. 1, 3 и 5 предположения 2.1.

Тогда при всех $\tau \in [a, \infty)$, $\alpha > 0$ и $\tau \leq t < \omega^*(\tau, \alpha)$ выполняется неравенство

$$y(t; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \psi^G(t; \tau, \alpha)w. \quad (3.3)$$

Доказательство. Случай $\alpha = 0$ тривиален. Зафиксируем $\alpha > 0$ и обозначим \mathcal{T} подмножество полуинтервала $[\tau, \omega^*(\tau, \alpha))$, определенное следующим образом:

$$\mathcal{T} = \{t \mid (t \in [\tau, \tau^*)) \wedge (\forall \xi \in [\tau, t] y(\xi; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \psi^G(\xi; \tau, \alpha)w)\}.$$

Множество \mathcal{T} непустое, так как $\tau \in \mathcal{T}$. Обозначим $t^* = \sup \mathcal{T}$, и предположим от противного, что $t^* < \omega^*(\tau, \alpha)$. Отметим, что, вследствие непрерывности решений системы (2.2) и уравнения сравнения (3.1), получим $t^* \in \mathcal{T}$. Обозначим $\alpha^{(0)} = \psi(t^*; t_0, \alpha) < 1$, тогда из утверждений следствия 3.1 и леммы 3.1 следует $\alpha^{(0)} > 0$ и существуют числа $T, \tau^* > T > t^*$ и $R > 0$ такие, что при всех $t, t^* \leq t \leq T$ и при $h = \frac{t-t^*}{l}$ (l – достаточно большое натуральное число) для решений системы рекуррентных уравнений (3.2) (в которых $t_0 = t^*$) выполняются включения $\alpha_m \in (0, 1)$, $m = \overline{0, l}$.

Рассмотрим разбиение сегмента $[t^*, t]$:

$$t^* < t^* + h < \dots < t^* + lh = t.$$

Используя метод математической индукции, докажем неравенство

$$y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \alpha_m^G w + R_m(h), \quad (3.4)$$

где $R_0(h) = 0$ и $R_m(h)$ удовлетворяет нелинейному разностному уравнению

$$R_m(h) = y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - (\alpha_{m-1}^G + hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) + \eta_{m-1}(h)). \quad (3.5)$$

Здесь $\eta_m(h)$, $m \in [0, l]$ некоторые функции, для которых выполняется оценка $\|\eta_m(h)\| \leq C_1 h^2$, где C_1 положительная постоянная, не зависящая от $m \in [0, l]$ и h .

Действительно, при $m = 0$ неравенство (3.4) очевидно. Предположим, что при некотором натуральном m выполняется неравенство

$$y(t^* + (m - 1)h; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h),$$

тогда, из условия 3) предположения 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) &= y(t^* + mh; t^* + (m - 1)h, y(t^* + (m - 1)h; \tau, \alpha^G w)) \stackrel{K}{\leq} \\ &\leq y(t^* + mh; t^* + (m - 1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) = \\ &= \alpha_m^G w + y(t^* + mh; t^* + (m - 1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ &\quad - (\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m - 1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$(\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m - 1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w = \alpha_{m-1}^G + h\gamma(t^* + (m - 1)h)\alpha_{m-1}^{G+(q-1)E} Gw + \eta_{m-1}(h).$$

С учетом п.1 и п.4 предположения 2.1 получим оценку

$$(\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m - 1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w \stackrel{K}{\geq} \alpha_{m-1}^G + hf(t^* + (m - 1)h, \alpha_{m-1}^G w) + \eta_{m-1}(h).$$

Как следствие, получим оценку

$$y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \alpha_m^G w + R_m(h).$$

Исследуем нелинейное разностное уравнение (3.5). Определим подмножества $M_1 \subset M \subset \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$M_1 = \{y \mid \|y - \alpha^G w\|_w \leq \frac{3}{4}R^*\}, \quad M = \{y \mid \|y - \alpha^G w\|_w \leq R^*\}.$$

Здесь $R^* = 2 \max\{\|\beta^G - \alpha^G\|_w \mid |\beta - \alpha| \leq \frac{R}{2}\}$.

Обозначим $m_0 = \sup_{(\tau, y) \in E} \|f(\tau, y)\|_w$, где $E = [t^* - \eta_0, T + \eta_0] \times M$, тогда из утверждения следствия 2.1 из [16] (стр. 22) следует, что для любого $(\tau_0, y_0) \in [t^*, T] \times M_1$ существует единственное решение $y(t; \tau_0, y_0)$ и существует постоянная $\gamma_0 > 0$, $\gamma_0 = \min\{\frac{T-t^*}{2} + \eta_0, \frac{R^*}{m_0}, \eta_0\}$ такая, что при всех $(\tau_0, y_0) \in [t^*, T] \times M_1$ решение $y(t; \tau_0, y_0)$ определено на сегменте $[\tau_0 - \gamma, \tau_0 + \gamma]$ и удовлетворяет на нем неравенству

$$\|y(t; \tau_0, y_0) - y_0\|_w \leq m_0 \gamma_0 \leq R^*.$$

Натуральное число l выберем настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $h \leq \gamma_0$.

Рассмотрим включение

$$\alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1. \tag{3.6}$$

Это включение выполняется при $m = 0$. Предположим, что существует натуральное число N , $0 < N \leq l$ такое, что включение (3.6) выполняется при всех $m = \overline{0, N-1}$ и не выполняется при $m = N$. Тогда из включений

$$\alpha_m^G w \in M_1, \quad \alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1$$

при всех $m = \overline{0, N-1}$, локального условия Липшица и компактности множества M следует, что существует постоянная $L > 0$ такая, что неравенство

$$\begin{aligned} & \|f(t, y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h))) - f(t, y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w))\|_w \leq \\ & \leq L \|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \end{aligned}$$

при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$. Из интегральных представлений решений системы (2.2) следует

$$\begin{aligned} y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) &= \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h) + \\ &+ \int_{t^* + (m-1)h}^t f(s, y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h))) ds, \end{aligned}$$

$$y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) = \alpha_{m-1}^G w + \int_{t^* + (m-1)h}^t f(s, y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)) ds.$$

Тогда при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq \\ & \leq \|R_{m-1}(h)\|_w + \int_{t^* + (m-1)h}^t L \|y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ & \quad - y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w ds. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гроуолла-Беллмана, получим оценку

$$\begin{aligned} & \|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq \\ & \leq \|R_{m-1}(h)\|_w e^{L(t-t^*-(m-1)h)}, \end{aligned}$$

которая выполняется при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$. При $t = t^* + mh$ получим

$$\begin{aligned} & \|y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ & - y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq \|R_{m-1}(h)\|_w e^{Lh}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос об оценке выражения:

$$y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) - \alpha_{m-1}^G w - hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w).$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(h) = z(\tau + h; \tau, z_0) - z_0 - hf(\tau, z_0)$$

при $(\tau, z_0) \in [t^*, T] \times M$, где $\phi(0) = 0$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\phi_i(h) = h\phi'_i(\theta_i h), \theta_i \in (0, 1), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\phi'_i(\theta_i h) = f_i(\tau + \theta_i h; z(\tau + \theta_i h; \tau, z_0)) - f_i(\tau, z_0)$$

и

$$|\phi'_i(\theta_i h)| \leq L \|z(\tau + \theta_i h; \tau, z_0) - z_0\|_w + |f_i(\tau + \theta_i h, z_0) - f_i(\tau, z_0)|$$

Тогда $|\phi'_i(\theta_i h)| = \varepsilon_0(h)$, $\varepsilon_0(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, равномерно по $(\tau, z_0) \in [t^*, T] \times M$.

Как следствие,

$$\|y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) - \alpha_{m-1}^G w - hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq h\varepsilon_0(h).$$

Преобразуем выражение для $R_m(h)$.

$$\begin{aligned} R_m(h) &= y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ &- y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) + y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) - \\ &- (\alpha_{m-1}^G w + hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) + \eta_{m-1}(h)). \end{aligned}$$

С учетом приведенных выше оценок, получим

$$\|R_m(h)\|_w \leq e^{Lh} \|R_{m-1}(h)\|_w + h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2,$$

и при всех $m = \overline{1, \overline{N}}$ выполняется неравенство

$$\|R_m(h)\|_w \leq v_m, \quad m = \overline{1, \overline{N}},$$

где v_m удовлетворяет разностному уравнению

$$v_m = e^{Lh} v_{m-1} + h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2$$

при всех $m = \overline{1, \overline{N}}$, $v_0 = 0$.

Введём последовательность $q_m, m = \overline{1, \overline{N}}$, по формуле $v_m = e^{mLh} q_m$, тогда

$$e^{mLh} q_m = e^{mLh} q_{m-1} + h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2, \quad q_0 = 0,$$

$$q_m - q_{m-1} = e^{-mLh} (h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2),$$

$$q_m = \sum_{l=1}^m e^{-lLh} (h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2) = \frac{e^{-Lh}(e^{-mL} - 1)}{e^{-Lh} - 1} (h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2),$$

$$\begin{aligned} v_m = e^{mLh} q_m &= \frac{e^{mLh} - 1}{e^{Lh} - 1} (h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2) \leq \frac{1}{Lh} (h\varepsilon_0(h) + C_1 h^2) (e^{L(t-t^*)} - 1) = \\ &= \frac{\varepsilon_0(h) + C_1 h}{L} (e^{L(t-t^*)} - 1) \end{aligned}$$

при всех $m = \overline{1, N}$.

Поэтому

$$\|\alpha_N^G w + R_N(h) - \alpha_0^G w\|_w \leq \frac{R^*}{2} + \frac{\varepsilon_0(h) + C_1 h}{L} (e^{L(t-t^*)} - 1),$$

и h выберем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varepsilon_0(h) + C_1 h}{L} (e^{L(t-t^*)} - 1) < \frac{R^*}{4},$$

тогда $\alpha_N^G w + R_N(h) \in M_1$. Вследствие полученного противоречия, включение

$$\alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1$$

выполняется при всех $m = \overline{0, l}$, и, как следствие, оценка

$$\|R_m(h)\|_w \leq \frac{\varepsilon_0(h) + C_1 h}{L} (e^{L(t-t^*)} - 1)$$

выполняется при всех $m = \overline{0, l}$. При $m = l$ получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_l(h)\|_w \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_0(h) + C_1 h}{L} (e^{L(t-t^*)} - 1) = 0.$$

Таким образом, по доказанному, при всех $m = \overline{0, l}$

$$y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \alpha_m^G w + R_m(h).$$

При $m = l$

$$y(t; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \alpha_l^G w + R_l(h). \quad (3.7)$$

Если $l \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$), то, вследствие теоремы Пеано, $\alpha_l \rightarrow \psi(t; t^*, \psi(t^*, \tau, \alpha)) = \psi(t; \tau, \alpha)$.

Переходя к пределу $l \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) в неравенстве (3.7), получим

$$y(t; \tau, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} \psi^G(t; \tau, \alpha) w. \quad (3.8)$$

Из неравенства (3.8) следует, что при всех $t, t^* < t \leq T$, выполняется включение $t \in \mathcal{T}$, что противоречит определению числа t^* . Полученное противоречие доказывает, что $t^* = \omega^*(\tau, \alpha)$. Лемма полностью доказана. \square

4. Основная теорема. Основной результат настоящей работы имеет следующий вид.

Теорема 4.1. *Предположим, что решение $u = 0$ уравнения сравнения (2.3) устойчиво (асимптотически устойчиво) и существует положительное число α_0 такое, что при всех α , $0 < \alpha < \alpha_0$ выполняются неравенства*

$$\sup_k |\beta_k| u^{q-1}(\tau_k; t_0, \alpha) < 1, \quad G \geq I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) в конусе K .

Доказательство. Предварительно, используя метод математической индукции, докажем, что для решений $x(t; t_0, \alpha^G w)$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) при достаточно малых $\alpha > 0$ неравенства

$$x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w$$

выполняются при всех натуральных k таких, что $\tau_k \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$ и $x(\tau_k; t_0, \alpha^G w) \in D$, $u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w \in D$ (при этом, дополнительно полагаем, что $\tau_0 = t_0$).

Действительно, при $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что уже доказано утверждение о том, что

$$x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w,$$

и при этом $\tau_{k+1} \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$ и $x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w) \in D$, $u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w \in D$. Тогда, с учетом предположения индукции, условий п.4 и п.5 предположения 2.1 и утверждения леммы 3.1 получим

$$\begin{aligned} x(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha^G w) &= x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w) + g_{k+1}(x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w)) = \\ &= y(\tau_{k+1}; \tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w)) + g_{k+1}(y(\tau_{k+1}; \tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w))) \stackrel{K}{\leq} \\ &\stackrel{K}{\leq} y(\tau_{k+1}; \tau_k, u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w) + g_{k+1}(y(\tau_{k+1}; \tau_k, u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w)) \stackrel{K}{\leq} \\ &\stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + g_{k+1}(u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w) \stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\ &+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) g_{k+1}(w) \stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w \stackrel{K}{\leq} \\ &\stackrel{K}{\leq} (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w + u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\ &+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w - (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w = \\ &= u^G(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha) w + u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\ &+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w - (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w. \end{aligned}$$

Условие $G \geq I$ позволяет применить неравенство Бернулли

$$(1 + x)^G \geq I + Gx, \quad |x| \leq 1,$$

и, как следствие, установить неравенство

$$(u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w \stackrel{K}{\geq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\ + u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w.$$

Последнее неравенство приводит к требуемому результату

$$x(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha) w.$$

Используя последнее неравенство и утверждение леммы 3.2 легко показать, что при всех $t \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$ выполняется неравенство

$$x(t; t_0, \alpha^G w) \stackrel{K}{\leq} u^G(t; t_0, \alpha) w, \quad (4.1)$$

если только при всех $\tau_k \in [t_0, t)$ выполняются включения $x(\tau_k; t_0, \alpha^G w) \in D$ и $u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w \in D$. Пусть R_2 некоторое положительное число, такое что $K_{R_2} \subset D$. Пусть ε_1 положительное число и $\xi(\varepsilon_1) = \sup\{\|\varrho^G\|_w \mid \varrho \in [0, \varepsilon_1]\}$. Очевидно, что $\xi(\varepsilon_1)$ непрерывная функция ε_1 и $\xi(0) = 0$. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ фиксированное число, для которого $\xi(\varepsilon_2) < R_2$.

По условию теоремы существует положительное число α_1 , $\alpha_1 < \alpha_0$ такое, что при всех α , $0 < \alpha < \alpha_1$ решения $u(t; t_0, \alpha)$ уравнения сравнения (2.3) нелокально продолжимы, т.е. $\Pi^+(t_0, \alpha) = +\infty$ и $u(t; t_0, \alpha) \in (0, \varepsilon_2)$ при всех $t \geq t_0$.

Очевидно, что существует целое неотрицательное число k_0 такое, что при всех $k \in [1, k_0]$ выполняются включения $x(\tau_k; t_0, \alpha^G w) \in D$ и $u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w \in D$. Тогда, по доказанному выше, неравенство (4.1) выполняется при $t = \tau_{k+1}$, и, как следствие, $\|u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w\|_w \leq \|u^G(\tau_k; t_0, \alpha)\|_w < \xi(\varepsilon_2) < R_2$ и $\|x(\tau_k; t_0, \alpha^G w)\|_w < R_2$. Поэтому включения $x(\tau_k; t_0, \alpha^G w) \in D$ и $u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w \in D$ выполняются при всех k , для которых $\tau_k \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$. Поэтому неравенство (4.1) выполняется при всех $t \in [t_0, \pi^+(t_0, \alpha^G w))$. Если $\pi^+(t_0, \alpha^G w) < \infty$, то, используя утверждение теоремы 1.2 [14], приходим к выводу, что $\|x(t; t_0, \alpha^G w)\|_w \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \pi^+(t_0, \alpha^G w) - 0$. С другой стороны из неравенства (4.1) следует, что

$$\|x(t; t_0, \alpha^G w)\|_w \leq \|u^G(t; t_0, \alpha)\|_w. \quad (4.2)$$

Последнее неравенство приводит к противоречию при $t \rightarrow \pi^+(t_0, \alpha^G w) - 0$, поэтому из утверждения теоремы 3.1 [14] следует, что $\pi^+(t_0, \alpha^G w) = +\infty$. Как следствие, неравенство (4.2) выполняется при всех $t \geq t_0$.

По условию теоремы 4.1 для любого положительного числа ϱ существует положительное число $\Delta(t_0, \varrho)$ такое, что неравенство $0 < \alpha < \Delta(t_0, \varrho)$ влечет за собой выполнение неравенства $u(t; t_0, \alpha) < \varrho$. Зададим положительное число ε и выберем положительное число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ настолько малым, чтобы

$$\delta \in (0, 1), \quad \vartheta(\delta) < \alpha_1, \quad \vartheta(\delta) < \Delta(t_0, \varepsilon_3),$$

где ε_3 обозначено положительное число, для которого $\xi(\varepsilon_3) < \varepsilon$.

Рассмотрим решение $x(t; t_0, x_0)$ с начальным условием $\|x_0\|_w < \delta(\varepsilon, t_0)$. Тогда из условий п. 3, 4 и 6 предположения 2.1 следуют неравенства

$$0 \leq x_0 \leq \|x_0\|_w w \leq \delta w \leq \vartheta^G(\delta)w.$$

С учетом условия 3) предположения 2.1 и неравенства (4.1) получим двустороннюю оценку

$$0 \leq x(t; t_0, x_0) \leq x(t; t_0, \vartheta^G(\delta)w) \leq u^G(t; t_0, \vartheta(\delta))w. \quad (4.3)$$

Поэтому

$$\|x(t; t_0, x_0)\|_w \leq \|u^G(t; t_0, \vartheta(\delta))\|_w.$$

Из неравенства $\vartheta(\delta) < \Delta(t_0, \varepsilon_3)$, следует, что $u(t; t_0, \vartheta(\delta)) < \varepsilon_3$ при всех $t \geq t_0$, поэтому $\|u^G(t; t_0, \vartheta(\delta))\|_w \leq \xi(\varepsilon_3) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Устойчивость состояния равновесия $x = 0$ в конусе K системы (2.1) доказана. Если положить $\rho(t_0) = \delta(1, t_0)$, то из неравенства (4.3) следует асимптотическая устойчивость в конусе K состояния равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1). Теорема полностью доказана. \square

Применим утверждение доказанной теоремы для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ в конусе K , конкретизируя условия устойчивости уравнения сравнения (2.3).

Следствие 4.1. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений выполняются условия предположения 2.1 и неравенства*

$$\sup_k |\beta_k| < +\infty, \quad \sup_k \left| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds \right| < +\infty,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\beta_k + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s) ds \right) < 0, \quad G \geq I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1) асимптотически устойчиво в конусе K .

Доказательство. Достаточно показать, что условия теоремы гарантируют асимптотическую устойчивость состояния равновесия $u = 0$ уравнения сравнения (2.3).

Действительно, нетрудно непосредственным интегрированием установить равенство

$$u(\tau_{k+1} + 0) = (u^{1-q}(\tau_k + 0) + \beta_{k+1} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds)(u^{1-q}(\tau_k + 0) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds)^{\frac{q}{1-q}}.$$

Обозначим $y_k = u(\tau_k + 0)$, тогда получим разностное уравнение

$$y_{k+1} = (y_k^{1-q} + \beta_{k+1} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds)(y_k^{1-q} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds)^{\frac{q}{1-q}}, \quad y_0 = \alpha. \quad (4.4)$$

В окрестности состояния равновесия $y = 0$ уравнения (4.4) имеет место представление

$$(y_k^{1-q} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds)^{\frac{q}{1-q}} = y_k^q + O(y_k^{2q-1}).$$

Поэтому уравнение (4.4) можно представить в виде

$$y_{k+1} = y_k + (\beta_{k+1} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds) y_k^q + o(y_k^q).$$

По условию, существует натуральное число n_0 такое, что при всех $k \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\beta_k + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s) ds \leq -\beta$$

при некотором $\beta > 0$. Если $y_0 = \alpha$ достаточно малое положительное число, то последовательность $\{y_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ не возрастает, поэтому существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ и, очевидно, что этот предел равен нулю. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $0 < y_1 < \delta$ следует неравенство $0 < y_n < \varepsilon$ при всех $n \geq 1$ и при этом для некоторого $\delta_0 > 0$ из неравенства $0 < y_1 < \delta_1$ следует, что $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Применяя утверждение теоремы о непрерывной зависимости решений уравнения сравнения (2.3) от начальных условий, нетрудно завершить доказательство утверждения об асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия уравнения сравнения.

Следствие 4.1 доказано.

Сочетание метода усреднения и прямого метода Ляпунова [17, 18] применительно к уравнению сравнения, позволяет установить следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений выполняются условия предположения 2.1 и неравенства*

$$\begin{aligned} \sup_k |\beta_k| < +\infty, \quad \sup_k \left| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds \right| < +\infty, \\ \sup_m \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{m+N} \left(\beta_k + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s) ds \right) < 0, \quad G \geq I. \end{aligned}$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1) асимптотически устойчиво в конусе K .

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение

$$y_{k+1} = y_k + a_k y_k^q + o(y_k^q), \quad y_0 = \alpha,$$

где $a_k = \beta_{k+1} + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s) ds$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $0 < y_0 < \delta$ следует неравенство $0 < y_k < \varepsilon$ при всех $k \geq 1$ и $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, если $0 < y_0 < \delta_1$, где δ_1 – некоторое достаточно малое положительное число.

Обозначим $a = \sup_k |a_k| > 0$, R положительная постоянная такая, что при всех y , $0 < y < R$ выполняется неравенство $|o(y^q)| \leq \varepsilon_1 |y^q|$, где ε_1 – некоторая положительная постоянная. Существует натуральное число N_0 такое, что

$$\sum_{k=m}^{m+N} a_k \leq -\frac{\beta_0 N_0}{2}.$$

Пусть $l \in [1, N_0]$, тогда

$$y_{k+l} = y_k + \sum_{p=k}^{k+l-1} (a_p y_p^q + o(y_p^q)).$$

Предположим, что $\{y_l\}_{l=k}^{k+N_0} \subset (0, R)$, тогда

$$|y_{k+l}| \leq |y_k| + \sum_{p=k}^{k+l-1} (a + \varepsilon_1) R^{q-1} |y_p|$$

и, как следствие, $|y_{k+l}| \leq |y_k| e^{(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}$. Существует положительная постоянная C , зависящая от R и N_0 , такая, что выполняется неравенство

$$|y_{l+k}^q - y_k^q| \leq |y_l - y_k| C |y_k|^{q-1}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что

$$|y_{l+k} - y_k| \leq N_0 (a + \varepsilon_1) |y_k|^q. \quad (4.6)$$

Сопоставляя неравенства (4.5) и (4.6), получим

$$|y_l^q - y_k^q| \leq C N_0 (a + \varepsilon_1) e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0} |y_k|^{2q-1}.$$

Оценим y_{k+N_0} , с учетом неравенств (4.5) и (4.6)

$$\begin{aligned} y_{k+N_0} &= y_k + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l y_l^q + o(y_l^q)) \leq y_k + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l + \varepsilon_1) y_k^q + \\ &+ \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l + \varepsilon_1) (y_l^q - y_k^q) \leq y_k + \left(-\frac{\beta_0}{2} + \varepsilon_1\right) N_0 y_k^q + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a + \varepsilon_1) |y_l^q - y_k^q| \leq \\ &\leq y_k + \left(-\frac{\beta_0}{2} + \varepsilon_1\right) N_0 y_k^q + C N_0^2 (a + \varepsilon_1) e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0} |y_k|^{2q-1}. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon_1 = \frac{|\beta|}{4}$ и число R_1 , $0 < R_1 < R$ так, чтобы при всех $y \in (0, R_1)$ выполнялось неравенство

$$\frac{4CN_0(a + \varepsilon_1)e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}}{\beta_0}|y|^{q-1} < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$y_{k+N_0} \leq y_k - \frac{\beta_0}{8}N_0y_k^q, \quad (4.7)$$

если только $\{y_l\}_{l=k}^{k+N_0} \in (0, R_1)$. Выберем положительное число

$$\delta(\varepsilon) = \min\{R_1e^{-(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}, \varepsilon e^{-(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}\}.$$

Пусть $y_0 \in (0, \delta(\varepsilon))$ и обозначим Q_0 натуральное число со свойствами

$$y_k \in (0, R_1), \quad k \in [1, Q_0 - 1], \quad y_{Q_0} \geq R_1.$$

Пусть $Q_0 = N_0d + r_0$, $0 \leq r_0 < N_0$, тогда последовательность $\{y_{lN_0}\}_{l=0}^{[\frac{Q_0}{N_0}]}$ не возрастает по l , поэтому

$$y_{N_0d} \leq y_0$$

и, вследствие неравенства (4.7), и предположений относительно числа $\delta(\varepsilon)$ получим

$$R_1 \leq y_{Q_0} \leq y_{N_0d}e^{N_0R^{q-1}(a+\varepsilon_1)} \leq y_0e^{N_0R^{q-1}(a+\varepsilon_1)} < R_1.$$

Полученное противоречие, доказывает, что $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \in (0, R_1)$. Таким образом, неравенство (4.7) выполняется при всех k . Из этого неравенства асимптотическая устойчивость состояния равновесия $u = 0$ уравнения сравнения (2.3) выводится стандартным образом. Следствие 4.2 доказано.

ПРИМЕР. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\cos^2 2tx_1^{\frac{7}{5}} + \varepsilon \sin^2 tx_2^{\frac{7}{3}}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varepsilon \sin^2 2tx_1 - \cos^2 2tx_2^{\frac{5}{3}}, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x_1 &= 5\varepsilon x_1^{\frac{7}{5}} + 5\varepsilon^2 x_2^{\frac{7}{3}}, \\ \Delta x_2 &= 3\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_2^{\frac{5}{3}}, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Относительно последовательности моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ предположим, что существует равномерно по $m \in \mathbb{N}$ предел

$$\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau_{m+N} - \tau_m}{N}.$$

Очевидно, что система (4.8) является квазиоднородной с матрицей $G = \text{diag}(5, 3)$, $q = 3$. Пусть $K = \mathbb{R}_+^2$, $w = (1, 1)^T$, тогда система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left(-\frac{\cos^2 2t}{5} + \frac{\varepsilon}{3}\right)u^3, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta u &= (\varepsilon + \varepsilon^2)u^3, \quad t = \tau_k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Применяя к системе сравнения (4.9) утверждение следствия 4.2 приходим к достаточным условиям асимптотической устойчивости в конусе \mathbb{R}_+^2 состояния равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы (4.8):

$$\left(-\frac{1}{10} + \frac{\varepsilon}{3}\right)\theta + \varepsilon + \varepsilon^2 < 0.$$

5. Заключение. Теорема 4.1 и ее следствия 4.1 и 4.2 позволяют установить коэффициентные условия устойчивости решений класса существенно нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании широкого класса нелинейных неавтономных крупномасштабных систем с импульсным воздействием.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.-Л., 1950.
2. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пушино, 1985.
3. *Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Динамические системы. – 1. – ВИНТИ, М., 1985 г.
4. *Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю.* Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 8. – С. 1392-1407.
5. *Каменков Г.В.* Избранные труды. – Т. I, II. – М.: Наука, 1971.
6. *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений // Москва-Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований. – 2009. – 312 с.
7. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1980.
8. *Оболенский А.Ю.* Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем. – К.: Феникс. – 2010. – 228 с.
9. *Оболенский А.Ю.* Об устойчивости систем сравнения // Доп. АН УРСР. – 1979 – № 8. – С. 607-611.
10. *Оболенский А.Ю.* Об устойчивости линейных систем сравнения // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 1. – С. 51-55.
11. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Об устойчивости по двум мерам абстрактных монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, № 7. – С. 904-923.
12. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Условия глобальной устойчивости решений нестационарных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Украинський математичний вісник. – 2011. – 8, № 2. – С. 182-202.
13. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Глобальная устойчивость решений нестационарных монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Нелінійні коливання. – 2011. – 14, № 2. – С. 187-202.
14. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К.: Вища школа. – 1987. – 288 с.

15. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.
16. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир. – 1970. – 720 с.
17. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука. – 1986 – 192 с.
18. Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. – Вып. 28. – 2010. – С. 3-10.

A. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko

Stability of Solutions of quasihomogeneous monotone impulsive systems.

In the paper the stability conditions of zero solution of monotone impulsive systems have been obtained. It is assumed that the right sides of the system depend of time and are quasihomogeneous functions of independent variables.

Keywords: impulsive system, the group of quasihomogeneous transformations, Wazewski's condition.

О. І. Двірний, В. І. Слинько

Про стійкість розв'язків квазіоднорідних монотонних імпульсних систем.

У роботі одержано умови стійкості нульового розв'язку монотонних імпульсних систем. При цьому припускається, що праві частини залежать від часу і є квазіоднорідними функціями незалежних змінних

Ключові слова: імпульсна система, група квазіоднорідних перетворень, умова Вазевського.

Hadmark University College, Hamar, Norway
Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
dvirny@mail.ru
vitstab@ukr.net

Получено 31.12.11

УДК 531.38

©2012. А. В. Зыза

СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе исследуются условия существования нового класса полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Построено одно частное решение рассматриваемой задачи, которое зависит от четырех независимых параметров и выражается в виде функций, полученных обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: полиномиальное решение, первые интегралы, гиростат, эффект Барнетта-Лондона, эллиптические интегралы Лежандра, уравнения класса Кирхгофа.

Введение. Классическая задача о движении гиростата в поле силы тяжести [1] имеет многочисленные обобщения в динамике твердого тела [2]. Особый интерес представляет задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [3-5], поскольку уравнения движения допускают только два первых интеграла и к ним не применима теория Якоби интегрирования уравнений динамики [1].

Так как правые части уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона при определенных условиях аналогичны правым частям уравнений Кирхгофа, то оказалось возможным построение частных решений различных классов и уравнений движения гиростата в магнитном поле [6-9] на основе свойств полиномиальных решений, рассмотренных в [10-12].

В данной статье начато изучение нового класса полиномиальных решений уравнений движений гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Отличие этого класса решений от решений [6-9] состоит в различных свойствах вспомогательных переменных от времени, что приводит к обращению различных типов эллиптических интегралов Лежандра.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Эффект Барнетта-Лондона состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости тела. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться к направлению вектора напряженности магнитного поля. При этом взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [5].

Уравнения движения гиростата запишем в векторном виде [3, 4], с учетом мо-

мента ньютоновских сил

$$\begin{aligned} A\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0. \quad (2)$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^\bullet = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

поэтому уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

В уравнениях (1)-(3) обозначения таковы: A – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; \mathbf{s} – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; k_0 – постоянная интеграла площадей; точка над переменными означает относительную производную.

Поскольку для уравнений (1) в общем случае допустимы только два первых интеграла (2), то для этих дифференциальных уравнений недостаточно построение дополнительного первого интеграла [1]. Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \alpha E$ (E – единичная матрица, α – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) по своей структуре будут совпадать с уравнениями задачи о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил и относиться к уравнениям класса Кирхгофа [13]. То есть в этом случае полученные для уравнений (1) результаты следует сопоставлять с результатами [2].

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 + B_2\omega_2\nu_3 - B_3\omega_3\nu_2 + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_1\omega_3 + B_3\omega_3\nu_1 - B_1\omega_1\nu_3 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + B_1\omega_1\nu_2 - B_2\omega_2\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + \\ &\quad + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \quad (5)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k_0. \quad (6)$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (4), (5)

решений следующего вида

$$\begin{aligned} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \\ \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma} \omega_3, \quad \varkappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (7) в уравнения (4), (5) и интегралы (6)

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1} \cdot (\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})\sqrt{R(\sigma)}; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)) &= \varphi'(\sigma)\sigma\Phi(\sigma), \quad \Phi(\sigma) = \sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma); \\ (R(\sigma)(\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})^2)' \sigma\Phi(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2A_1\sigma^2\Phi(\sigma) &= \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_2Q(\sigma) + s_2\} + \\ &+ \{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2Q'(\sigma)\sigma\Phi(\sigma) &= \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_1\sigma^2 - s_1\} + \\ &+ \{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma); \\ A_3R'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_1\sigma^2 + s_1\} + \\ &+ Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_2\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0; \quad (12)$$

$$(A_1\sigma^2 + \lambda_1)\varphi(\sigma)\sigma + (A_2Q(\sigma) + \lambda_2)\psi(\sigma)\sigma + A_3R(\sigma)\varkappa(\sigma) = k_0\sigma. \quad (13)$$

В уравнениях (8)-(11) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ . После интегрирования уравнений (9)-(11) зависимость σ от времени t находим из уравнения (8).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда максимальные степени полиномов из (7) таковы: $n = 3, m = 6, l = 2, n_1 = 3, m_1 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 = R(\sigma) = c_6\sigma^6 + c_5\sigma^5 + c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = g_3\sigma^3 + g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \\ \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\sqrt{R(\sigma)}, \quad \varkappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим полиномы из (14) в первое кинематическое уравнение из (9), динамическое уравнение (10), интегралы (12), (13) и потребуем выполнения полученных равенств при всех σ . В результате получим систему условий на параметры, существование решения которой при $g_2 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ дает дополнительные ограничения. Запишем некоторые из них

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2, & B_3 &= B_2, & C_3 - C_2 &= 0, \\ (B_2 b_0 + s_2) f_0 &= 0, & (B_2 b_0 + s_2) f_1 + B_2(b_1 f_0 - g_0) + \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда в силу (15) динамическое уравнение (10) упрощается

$$\Phi(\sigma) = \psi'(\sigma)(2A_1)^{-1}\mu, \quad \mu = B_2(b_2 f_0 + b_1 f_1 - g_1). \quad (16)$$

Соотношения (16) позволяют упростить другие уравнения исследуемой системы. В начале исключим функцию $\Phi(\sigma)$ из уравнений (9), (11). Затем подставим в полученные уравнения и уравнения (12), (16) полиномы из (14). Требование того, чтобы полученные равенства при условиях (15) были тождествами по σ , приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (14):

$$\begin{aligned} g_3 - b_3 f_1 &= 0, & g_2 - (b_3 f_0 + b_2 f_1) &= 0, & b_0 &= 0, & s_2 &= 0, \\ 3g_3 \mu + 2A_1(a_2 - f_1) &= 0, & g_2 \mu + A_1(a_1 - f_0) &= 0, & g_1 \mu + 2A_1 a_0 &= 0, \\ g_1 - b_2 f_0 - b_1 f_1 - \mu a_2 A_1^{-1} &= 0, & g_0 - b_1 f_0 - \mu a_1 (2A_1)^{-1} &= 0 \\ 3c_6 f_1 \mu (2A_1)^{-1} - b_3 a_2 + g_3 &= 0, & c_0 &= 0, & c_1 &= 0, \\ (5c_5 f_1 + 4c_6 f_0) \mu (2A_1)^{-1} - 2(b_3 a_1 + b_2 a_2 - g_2) &= 0, \\ (4c_4 f_1 + 3c_5 f_0) \mu (2A_1)^{-1} - 2(b_3 a_0 + b_2 a_1 + b_1 a_2 - g_1) &= 0, \\ (3c_3 f_1 + 2c_4 f_0) \mu (2A_1)^{-1} - 2(b_2 a_0 + b_1 a_1 - g_0) &= 0, \\ (2c_2 f_1 + c_3 f_0) \mu (2A_1)^{-1} - 2b_1 a_0 &= 0, & C_1 - C_2 &= \beta, \\ 3A_2 b_3 \mu (2A_1)^{-1} - (\beta a_2 - B_1) f_1 - B_2 a_2 + (A_1 - A_2) &= 0, \\ A_2 b_2 \mu A_1^{-1} - (\beta a_2 - B_1) f_0 - \beta a_1 f_1 - B_2 a_1 &= 0, \\ A_2 b_1 \mu (2A_1)^{-1} - (\beta a_0 - s_1) f_1 - \beta a_1 f_0 - B_2 a_0 + \lambda_1 &= 0, \\ \beta a_0 - s_1 &= 0, & 3A_2 \mu c_6 (2A_1)^{-1} - (B_1 - \beta a_2) g_3 + (B_2 a_2 + A_2 - A_1) b_3 &= 0, \\ 5A_2 \mu c_5 (4A_1)^{-1} + (\beta a_2 - B_1) g_2 + \beta a_1 g_3 + (B_2 a_2 + A_2 - A_1) b_2 + B_2 a_1 b_3 &= 0, \\ A_2 \mu c_4 A_1^{-1} + (\beta a_2 - B_1) g_1 + \beta a_1 g_2 + (B_2 a_2 + A_2 - A_1) b_1 + & \\ + B_2 a_1 b_2 + (B_2 a_0 - \lambda_1) b_3 &= 0, \\ 3A_2 \mu c_3 (4A_1)^{-1} + (\beta a_2 - B_1) g_0 + \beta a_1 g_1 + B_2 a_1 b_1 + (B_2 a_0 - \lambda_1) b_2 + \lambda_2 &= 0, \\ A_2 \mu c_2 (2A_1)^{-1} + \beta a_1 g_0 + (B_2 a_0 - \lambda_1) b_1 &= 0, \\ a_0^2 + g_0^2 - 1 + c_2 f_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Система алгебраических уравнений (17) разрешима относительно A_1, A_2, a_1, λ_2 . Считая $\xi = A_1 - A_2 \neq 0$ и $\gamma = 3A_1 - 2A_2 \neq 0$, запишем соотношения (15) и решение

системы (17) в виде:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= C_2, \quad A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2, \quad B_1 = \tilde{k}B_2, \\
 \tilde{k} &= -\frac{3A_1^2 - 10A_1A_2 + 6A_2^2}{A_1A_2}, \quad \beta = -\frac{2\xi B_2^2}{A_1^2}, \\
 f_1 &= -\frac{A_1A_2}{\gamma B_2}, \quad f_0 = \frac{2\xi A_2 a_1}{\gamma^2}, \\
 b_3 &= -\frac{\xi a_1 B_2}{\lambda_2 A_2}, \quad b_2 = \frac{(a_1 B_2)^2 (5A_1^2 - 6A_1A_2 + 2A_2^2)}{2\gamma \lambda_2 A_1 A_2}, \\
 b_1 &= -\frac{\xi (a_1 B_2)^3 (A_1^2 + 2A_1A_2 - 2A_2^2)}{\gamma^2 \lambda_2 A_1^2 A_2}, \quad b_0 = 0, \\
 a_2 &= -\frac{A_1}{B_2}, \quad a_0 = \frac{2((\gamma \lambda_2)^2 A_1 - \xi (a_1 B_2)^4)}{(\gamma a_1)^2 B_2^3}, \\
 c_6 &= -\left(\frac{\xi a_1 B_2}{\lambda_2 A_2}\right)^2, \quad c_5 = \frac{\xi (a_1 B_2)^3 (5A_1^2 - 6A_1A_2 + 2A_2^2)}{\gamma \lambda_2^2 A_1 A_2^2}, \\
 c_4 &= \frac{4\gamma^3 (\lambda_2 A_1)^2 (A_1 - 2A_2) - (a_1 B_2)^4 (3A_1^3 (11A_1 - 20A_2) + 4A_2^2 (4A_1^2 + 6A_1A_2 - 3A_2^2))}{(2\gamma \lambda_2 A_1 A_2)^2}, \\
 c_3 &= -\frac{\xi a_1 B_2 (2\gamma^3 \lambda_2^2 A_1^3 - (a_1 B_2)^4 (A_1^3 (5A_1 + 4A_2) - 4A_2^2 (5A_1^2 - 4A_1A_2 + A_2^2)))}{\gamma^3 \lambda_2^2 A_1^3 A_2^2}, \\
 c_2 &= \frac{\xi (a_1 B_2)^2 (2(\gamma^2 \lambda_2 A_1)^2 A_2 - \xi (a_1 B_2)^4 (A_1^3 (A_1 + 4A_2) - 4A_2^3 (2A_1 - A_2)))}{(\gamma^2 \lambda_2 A_1^2 A_2)^2}, \\
 c_1 &= 0, \quad c_0 = 0, \\
 g_3 &= \frac{\xi a_1 A_1}{\gamma \lambda_2}, \quad g_2 = -\frac{a_1^2 B_2 (9A_1^2 - 14A_1A_2 + 6A_2^2)}{2\gamma^2 \lambda_2}, \\
 g_1 &= -\frac{2((\gamma \lambda_2)^2 A_1 - \xi (a_1 B_2)^4)}{\gamma^2 \lambda_2 a_1 B_2^2}, \\
 g_0 &= \frac{(\gamma^2 \lambda_2 A_1)^2 - 2\xi^2 (a_1 B_2)^4 (A_1^2 + 2A_1A_2 - 2A_2^2)}{\gamma^4 \lambda_2 A_1^2 B_2}, \\
 \lambda_1 &= \frac{2(\gamma \lambda_2)^2 A_1^3 - \xi (a_1 B_2)^4 (A_1^2 + 2A_1A_2 - 2A_2^2)}{(\gamma A_1 a_1 B_2)^2}, \\
 s_1 &= -\frac{4\xi ((\gamma \lambda_2)^2 A_1 - \xi (a_1 B_2)^4)}{(\gamma A_1 a_1)^2 B_2}, \quad s_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь B_2 – отличный от нуля действительный корень уравнения

$$(a_1^2 \gamma)^2 B_2^6 - (a_1^2 \lambda_2 (A_1 - 2A_2))^2 B_2^4 - (2\lambda_2^2 A_1 \gamma)^2 = 0.$$

Решение (14) при условиях (18) будет действительным, например, если

$$\lambda_2 = B_2, \quad A_1 > A_2, \quad c_2 > 0. \tag{19}$$

Зависимость σ от времени находим из (8):

$$\dot{\sigma} = a_1^{-1} \sigma \sqrt{c_6 \sigma^4 + c_5 \sigma^3 + c_4 \sigma^2 + c_3 \sigma + c_2}. \quad (20)$$

Приведем численный пример решения (14), (18)-(20) уравнений (4), (5). Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{2} A_2, & A_3 &= A_2 = a, & B_1 &= \frac{3}{2} B_2, & \lambda_2 &= B_2, \\ B_3 &= B_2 = -\frac{5a\sqrt{6}}{4a_1^2}, & & & & & & (a > 0, a_1 \neq 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда из (18), (20) получим:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2, & C_1 - C_2 &= -\frac{25a}{6a_1^4}, \\ \mathbf{s} &= \frac{a}{a_1^4} \left(\frac{5\sqrt{6}}{6}, 0, 0 \right), & \boldsymbol{\lambda} &= \frac{a}{a_1^2} \left(\frac{23}{12}, -\frac{5\sqrt{6}}{4}, 0 \right); \\ \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2 &= -\frac{\sigma}{2} \left(a_1 \sigma^2 + \frac{17\sqrt{6}}{12} \sigma + \frac{13}{6a_1} \right), \\ \omega_3^2 &= \frac{\sigma^2}{4} R^*(\sigma), & R^*(\sigma) &= -a_1^2 \sigma^4 - \frac{17\sqrt{6}}{6} a_1 \sigma^3 - \frac{171}{8} \sigma^2 - \frac{41\sqrt{6}}{36a_1} \sigma + \frac{431}{36a_1^2}, \\ \nu_1 &= \frac{\sqrt{6}}{5} a_1^2 \sigma^2 + a_1 \sigma - \frac{\sqrt{6}}{5}, \\ \nu_2 &= \frac{1}{5} \left(-\frac{\sqrt{6}}{5} a_1^3 \sigma^3 - \frac{21}{10} a_1^2 \sigma^2 + \sqrt{6} a_1 \sigma + \frac{62}{15} \right), \\ \nu_3 &= \frac{a_1(\sqrt{6} a_1 \sigma + 2)}{25} \sqrt{R^*(\sigma)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как функция $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{2a_1} \sqrt{R^*(\sigma)}, \quad (24)$$

то действительность решения (21)-(24) вытекает из условия, что подкоренная функция в (24) при $\sigma = 0$ – положительная. При этом $\sigma(t)$ – функция, полученная в результате обращения эллиптического интеграла третьего рода.

Приведенный пример (23), (24) характеризуется одним произвольным параметром a_1 . Зависимость всех переменных задачи от времени находим подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (23).

Решение (23), (24) обладает одним примечательным свойством. Если начальное значение σ_0 выбрать в окрестности $\sigma = 0$ (например $\sigma_0 < 0$), то при $a_1 < 0$ в силу (24) $\dot{\sigma}|_{\sigma_0} > 0$, то есть переменная σ возрастает и стремится к нулевому значению.

Это значение переменная σ достигает за бесконечный промежуток времени, так как интеграл в левой части соотношения

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{du}{u\sqrt{R^*(u)}} = \frac{1}{2a_1}t$$

стремится к бесконечности при $\sigma \rightarrow 0$. Это значит, что в силу формул (23) движение гиростата асимптотически стремится к состоянию покоя. К аналогичному свойству приходим и при $\sigma_0 > 0$.

Закключение. Найдено частное решение полиномиального вида дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Полученное решение зависит от четырех свободных параметров и описывает асимптотическое к покою движение гиростата.

По своей структуре оно отличается от ранее полученных решений [6-9].

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32-34.
4. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28-33.
5. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, №6. – С. 1402-1404.
6. Миронова Е.Н. О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, вып. 2. – С. 105-113.
7. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61-70.
8. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2010. – № 1. – С. 52-56.
9. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений движения тела в магнитном поле // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2010. – № 2. – С. 19-23.
10. Горр Г.В., Зыза А.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12-21.
11. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – № 1. – С. 40-46.
12. Зыза А.В. Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103-109.
13. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.

A. V. Zyza

The case of integrability of gyrostat motion equation in magnetic field.

In this paper we investigate the existence conditions for a new class of polynomial solutions of a differential equation related of the problem a gyrostat motion in magnetic field accounting for the Barnett-London effect. One particular solution of this problem depending on four independent parameters is constructed. This solution is represented in a form of functions obtained by the inversion of elliptic Legendre integrals of the third kind.

Keywords: *polynomial solution, first integrals, gyrostat, Barnett-London effect, Legendre integrals of the third kind, Kirchoff equations.*

О. В. Зиза

Випадок інтегровності рівнянь руху гіростата в магнітному полі.

У роботі досліджуються умов існування нового класу поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь задачі про рух гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнета-Лондона. Побудовано один частинний розв'язок цієї задачі, який залежить від чотирьох незалежних параметрів і виражається у вигляді функцій, отриманих оберненням еліптичних інтегралів Лежандра третього роду.

Ключові слова: *поліноміальний розв'язок, перші інтеграли, гіростат, ефект Барнетта-Лондона, еліптичні інтеграли Лежандра, рівняння класу Кірхгофа.*

Донецкий национальный ун-т
zblza@mail.ru

Получено 27.03.12

УДК 004.852

©2012. К. К. Кадомский

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНКРЕМЕНТНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ

Рассмотрена задача кластеризации данных динамических измерений. Эта задача решается статистическим инкрементным методом. Предложен последовательный инкрементный алгоритм кластеризации нечетких данных, в котором модель кластера и модель входного образа учитывают их центр и форму. Для оценки расстояния между моделями предложена модификация расстояния Махаланобиса, которая сохраняет евклидово расстояние в случае одноточечных моделей и позволяет сократить вычисления по сравнению с использованием расстояния Батгачария. Предложенный алгоритм позволяет повысить эффективность кластеризации по сравнению с существующими инкрементными алгоритмами и повысить скорость кластеризации по сравнению с итеративным EM алгоритмом.

Ключевые слова: инкрементная кластеризация, статистические модели данных, нечеткие данные, расстояние Махаланобиса.

1. Введение. Методы кластерного анализа используются для автоматической группировки данных и являются основой методов извлечения знаний из набора данных. В интеллектуальных системах управления [1] и поддержки принятия решений [2] возникает задача кластеризации данных динамических измерений, которая имеет следующие особенности. Во-первых, обработка данных должна производиться в режиме on-line, т.е. элементы обучающей выборки подаются по одному, и в каждый момент времени доступна лишь часть обучающей выборки. Во-вторых, количество кластеров не может быть оценено заранее. В-третьих, предъявляются жесткие требования к временной сложности алгоритма кластеризации.

В подобных задачах итеративные методы кластеризации, такие как EM алгоритм [3], не применимы. Существующие инкрементные алгоритмы, специально разработанные для задач динамического анализа данных, либо не адаптированы к обработке нечетких входных данных [4, 5, 6, 7], либо не учитывают форму кластеров [8, 9]. Кроме того, общим их недостатком является проблема соотношения стабильности – пластичности обучения [10].

Здесь предложен последовательный инкрементный алгоритм кластеризации нечетких данных, в котором модель кластера и модель входного образа учитывают центр и форму нечеткого множества. Этот алгоритм позволяет преодолеть указанные выше недостатки и повысить скорость кластеризации по сравнению с EM алгоритмом.

2. Формальная постановка задачи. Имеется конечный набор нечетких входных образов $x_l = \{x | \mu_{X_l}(x)\}$ из пространства входных образов P , заданных на базовом множестве X – пространстве четких входных образов. Каждый элемент x пространства X есть числовой вектор. Необходимо построить нечеткое разбиение множества входных образов на подмножества (кластеры) по принципу сходства в

смысле некоторой выбранной оценки расстояния между образами $d : P^2 \rightarrow [0; \infty)$. Входные образы предъявляются по одному, и для каждого нового образа x_l необходимо:

- а) построить нечеткое разбиение X на кластеры по данным $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$,
- б) определить степень принадлежности x_l каждому из кластеров.

В статистической интерпретации данной задачи каждому обычному, либо нечеткому подмножеству – входному образу, либо кластеру – соответствует некоторое статистическое распределение C значений признаков. Набор входных образов рассматривается как последовательность независимых наблюдений $x_l = (x_{l1}, \dots, x_{ln})^T$, $l = \overline{1, N_I}$ многомерной случайной величины $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, где n – количество признаков в описании каждого входного образа, N_I – количество входных образов. Каждому кластеру C_k ставится в соответствие статистическая модель $\theta(C_k)$ распределения элементов этого кластера в пространстве X . Эта модель может быть либо строгой статистической [11], либо нечеткой [8, 9], имеющей статистическую интерпретацию. Степень принадлежности образа x кластеру тогда есть вероятность $p(x|\theta(C_k))$, а распределение X является суммой неизвестных распределений C_k . Задача кластеризации при этом сводится к оценке неизвестных параметров модели классификатора $\Theta = (M, \theta(C_1), \dots, \theta(C_M))$ на основе наблюдений случайной величины X .

3. Статистические инкрементные методы кластеризации. Инкрементные алгоритмы [4, 6, 7, 10, 12] рассматривают каждый входной образ x_l независимо, используя его для модификации текущей модели классификатора $\Theta = (M, \theta(C_1), \dots, \theta(C_M))$ согласно инкрементным соотношениям вида $\Theta' = f(\Theta, x_l)$. Инкрементный алгоритм жесткой кластеризации известен как алгоритм ведущего кластера (Sequential Leader Clustering, SLC) [12] и широко применяется в задачах сжатия обучающей выборки [5], обучения ИНС [13, 9] и нейроподобных сетей [7, 10]. В качестве модели кластера используется пара $\theta(C_k) = \langle w_k, m_k \rangle$, где w_k – мощность кластера, и $m_k = E(C_k)$ – центроид. Каждый входной образ x_l либо относится к одному из существующих кластеров C_k , либо служит прототипом нового кластера: $\theta(C_{new}) = \langle 1, x_l \rangle$. В первом случае параметры модели $\theta(C_k)$ изменяются согласно инкрементным соотношениям

$$w'_k = w_k + 1,$$

$$m'_k = m_k + \eta(w_k)(x_l - m_k),$$

где $\eta(w_k)$ – функция скорости обучения, зависящая от количества элементов в кластере w_k и удовлетворяющая критериям статистической аппроксимации Дворецкого [14].

Выбор функции $\eta(w_k)$ рассматривается в работах [9, 15]. В работах [4, 9] алгоритм SLC обобщен на случай нечеткой кластеризации. Существуют также инкрементные алгоритмы (например, GenIc [4]), которые разбивают входной поток данных на окна, решая задачу кластеризации EM алгоритмом в пределах каждого окна отдельно, и затем последовательно объединяя результаты.

Инкрементные алгоритмы, как правило, не являются итеративными (обрабатывают входные образы либо окна однократно) и не требуют хранения в памяти всей обучающей выборки. Поэтому они имеют меньшую временную и емкостную сложность, по сравнению с ЕМ алгоритмом. Однако существующие инкрементные алгоритмы имеют ряд недостатков. Так, алгоритмы, предложенные в работах [4, 5, 6, 7, 10], не адаптированы к обработке нечетких входных данных, а алгоритмы [8, 9] не поддерживают сложные нечеткие и статистические модели для представления кластеров данных, что не позволяет учесть форму кластеров. Также известна проблема соотношения стабильности – пластичности обучения при использовании инкрементных алгоритмов [7d].

Качество кластеризации существенно зависит от выбора типа модели и оценки расстояния между моделями. В качестве модели распределения $\theta(C)$ наиболее часто используется пара $\langle E(C), \text{cov}(C) \rangle$, где $E(C)$ – матожидание (центроид), $\text{cov}(C)$ – ковариация [11]. Реже вместо матожидания и ковариации используются мода и вариация относительно моды [16], что позволяет уменьшить чувствительность алгоритма к случайным выбросам.

В простейшем случае расстояние между моделью C и точкой x есть расстояние (евклидово, манхэттенское, либо расстояние Чебышева) между точками $E(C)$ и x . Для учета размера и формы кластеров используются нормализованное евклидово расстояние (1) и расстояние Махаланобиса (Mahalanobis) [17, 18] (2)

$$d_{EN}^2(C_k, x) = \text{diag}(\text{cov}(C_k))^{-1} (x - E(C_k))^2, \quad (1)$$

$$d_M^2(C, x) = (x - E(C))^T \text{cov}^{-1}(C) (x - E(C)). \quad (2)$$

Для оценки расстояния между двумя моделями C_1 и C_2 используется расстояние Баттачария (Bhattacharyya) [19] (3) и производное от него расстояние Хеллингера (Hellinger) [18].

$$d_B(C_1, C_2) = -\ln \int \sqrt{p_1(x)p_2(x)} dx, \quad (3)$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – плотность распределения C_1 и C_2 , соответственно.

Если C_1 и C_2 имеют нормальное распределение, то несмещенная оценка расстояния Баттачария [19] между ними может быть получена как

$$d_B(C_1, C_2) = \frac{1}{8}(m_1 - m_2)^T S^{-1}(m_1 - m_2) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det S}{\sqrt{\det S_1 \det S_2}} \right), \quad (4)$$

где $m_1 = E(C_1)$, $m_2 = E(C_2)$; $S = (\text{cov}(C_1) + \text{cov}(C_2))/2$.

Эти оценки требуют либо интегрирования по всему признаковому пространству (3), либо обращения матрицы ковариации для каждой пары (входной образ – кластер) (4). Кроме того, оценки Махаланобиса и Баттачария не определены в случае $\det \text{cov}(C) \rightarrow 0$, например, для одноточечных распределений. Здесь предложена оценка расстояния между моделями, которая сохраняет евклидово расстояние между точками и требует однократного обращения матрицы ковариации после каждого изменения модели кластера.

Также предложен последовательный инкрементный алгоритм кластеризации нечетких данных, который представляет кластеры и нечеткие входные образы эллипсоидами, произвольно ориентированными в пространстве X , и позволяет преодолеть указанные выше недостатки существующих инкрементных алгоритмов.

4. Модель данных. Каждому нечеткому входному образу и каждому нечеткому кластеру ставится в соответствие статистическое распределение C элементов данного нечеткого множества.

Если для функции принадлежности исходного множества выполняется условие нормировки

$$\int_{x \in X} \mu(x) dx = 1,$$

то плотность распределения C совпадает с функцией принадлежности μ . Если это условие не выполняется, то плотность распределения C есть $\mu(x) / \int \mu(x) dx$.

Распределение C задается параметрической моделью

$$\theta(C) = \langle w(C), E(C), \text{cov}(C) \rangle,$$

где $w(C)$ – количество наблюдений элементов распределения C (для входных образов эта величина равна 1); $E(C)$ – оценка ожидания распределения C ; $\text{cov}(C)$ – оценка его матрицы ковариации [11].

Параметр $E(C)$ задает центральный вектор распределения и центр исходного нечеткого множества. Параметр $\text{cov}(C)$ определяет форму и размеры распределения, а также форму и размеры сечений уровня α [20] исходного нечеткого множества для каждого $\alpha \in (0; 1)$. Каждое такое сечение является эллипсоидом, а длина и направления его осей определяются собственными числами и главными направлениями матрицы $\text{cov}(C)$. В дальнейшем распределение C и его модель $\theta(C)$ считаются синонимами.

5. Расстояние в пространстве моделей. Здесь вводится модификация расстояния Махаланобиса между моделью распределения и точкой, которая сохраняет обычное евклидово расстояние в случае одноточечного распределения. Затем эта оценка обобщается на случай расстояния между двумя различными моделями.

Рассмотрим модель распределения $C = \langle w, m, S \rangle$, где $m = E(C)$, $S = \text{cov}(C)$. Пользуясь свойствами ковариационной матрицы, нетрудно показать, что расстояние Махаланобиса между моделью C и точкой x (2) путем линейного преобразования сводится к нормированному евклидову расстоянию:

$$d_M^2(C, x) = d_{EN}^2(U^T C, U^T x) = (\Sigma^{-1} U^T (x - m))^2,$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – модальная матрица линейного оператора S ; u_1, u_2, \dots, u_n – его собственные векторы; $\Sigma^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ – каноническая форма S .

Для сохранения евклидова расстояния между одноточечными распределениями предлагается использовать обобщенное евклидово расстояние

$$d_{EN^*}(C, x) = \sqrt{f(\Sigma)(x - m)^2},$$

где $f(\sigma)$ – функция, монотонно убывающая на интервале $[0; \infty)$, такая, что $f(0) = 1$, и $f(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным расстоянием Махаланобиса между распределением $C = \langle w, m, S \rangle$ и точкой x будем называть расстояние

$$d_{M^*}(C, x) = d_{EN^*}(U^T C, U^T x). \quad (5)$$

В качестве $f(\sigma)$ предлагается использовать функцию вида

$$f(\sigma) = \alpha^2 / (\alpha^2 + \sigma^2), \alpha > 0. \quad (6)$$

Тогда получим модификацию расстояния Махаланобиса

$$d_{M^*}^2(C, x) = (x - m)^T (I + \alpha^{-2} S)^{-1} (x - m), \quad (7)$$

которая сохраняет эвклидово расстояние в случае одноточечного распределения, и асимптотически приближается к обычному расстоянию Махаланобиса при $\sigma_i \rightarrow \infty$.

Вычисление расстояния по формуле (7) с использованием (6) более эффективно, чем в общем случае по определению (5), поскольку нахождение собственных векторов является более дорогостоящей операцией, по сравнению с обращением матрицы. В качестве $f(\sigma)$ можно использовать и другие убывающие функции, например $f(\sigma) = a / (a + \sigma)$, однако, в большинстве случаев вычислительная сложность при этом увеличивается. Так, в случае $f(\sigma) = a / (a + \sigma)$ получим

$$d_{M^*}^2(C, x) = (x - m)^T (I + \alpha^{-2} S + 2\alpha^{-1} S^{1/2})^{-1} (x - m),$$

что за счет дорогостоящей операции нахождения квадратного корня матрицы имеет большую вычислительную сложность, чем (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обобщенным расстоянием Махаланобиса между двумя распределениями $C_1 = \langle w_1, m_1, S_1 \rangle$ и $C_2 = \langle w_2, m_2, S_2 \rangle$ будем называть расстояние

$$d_{M^*}(C_1, C_2) = 2 \frac{d_{M^*}(C_1, m_2) \cdot d_{M^*}(C_2, m_1)}{d_{M^*}(C_1, m_2) + d_{M^*}(C_2, m_1)}. \quad (8)$$

Поскольку, матрица $S' = I + \alpha^{-2} S$ в (7) симметрична и неотрицательно определена, ее можно рассматривать как ковариацию некоторого распределения C' . Следовательно, $d_{M^*}(C, x) = d_M(C', x) = |x - m| / |r'|$, где r' – радиус эллипсоида, заданного уравнением $d_M(C', x) = 1$, по направлению $(x - m)$. Тогда расстояние (8) можно записать как

$$d_{M^*}(C_1, C_2) = 2 \frac{|m_1 - m_2|}{|r'_1| + |r'_2|}.$$

Таким образом, предложенное расстояние между двумя моделями имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 1).

6. Оценка параметров модели. Рассмотрим метод оценки параметров модели кластера $\theta(C) = \langle w, m, S \rangle$ на основе последовательных динамических наблюдений

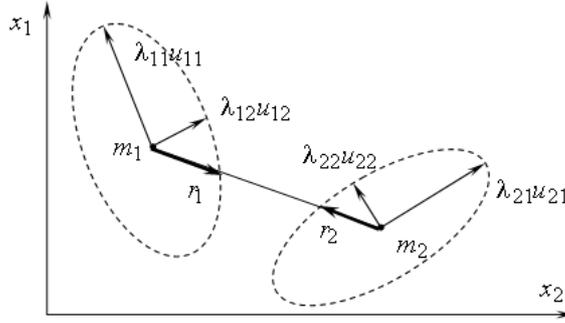


Рис. 1. Геометрическая интерпретация расстояния между двумя статистическими моделями

элементов этого кластера $\{x_r | \mu(x_r)\}_{r=1}^N$, где $x_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})$ – r -е наблюдение; $\mu(x_r)$ – степень уверенности, в том, что $x_r \in C$. Наблюдения обрабатываются по одному, и на каждом шаге производится уточнение оценки параметров, полученной на предыдущем шаге с учетом нового наблюдения. В отличие от итеративных методов, таких как EM алгоритм, данный метод не требует выбора начальных значений параметров модели, не требует дополнительной памяти и многократной обработки обучающей выборки.

Поскольку параметр w есть мощность множества наблюдений, отнесенных к кластеру, то

$$w_N = \sum_{r=1}^N \mu(x_r).$$

Для каждого $k = \overline{1, N}$ плотность распределения C на выборке $\{x_r | \mu(x_r)\}_{r=1}^k$ есть

$$p_C(x) = \mu(x) / \sum_{r=1}^k \mu(x_r), x \in \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Обозначим $p_r = p_C(x_r)$. Выборочные оценки параметров m и S есть соответственно,

$$m_k = \sum_{r=1}^k x_r p_r, \quad (9)$$

$$S_{kij} = \sum_{r=1}^k (x_{ri} - m_{ki})(x_{rj} - m_{kj}) p_r, i, j = \overline{1, N_f}. \quad (10)$$

Обозначим $m = m_{k-1}$ и $S = S_{k-1}$; $m' = m_k$ и $S' = S_k$. Применяя к (9) условие нормировки $\sum_{r=1}^k p_r = 1$, для оценки m получим

$$m' = m \sum_{r=1}^{k-1} p_r + x_k p_k = (1 - p_k)m + p_k x_k. \quad (11)$$

Для оценки S путем преобразований (10) получим

$$\begin{aligned} S'_{ij} &= (1 - p_k)S_{ij} + p_k(1 - p_k)(x_{ki} - m_i)(x_{kj} - m_j) = \\ &= \left(1 - \frac{\mu(x_k)}{w_k}\right) \left(S_{ij} + \frac{\mu(x_k)}{w_k}(x_{ki} - m_i)(x_{kj} - m_j)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

7. Алгоритм кластеризации. Данный алгоритм использует расстояние (8) для оценки степени принадлежности входного образа кластеру и инкрементные соотношения (11-12) для выборочной оценки параметров модели кластера. Алгоритм кластеризации имеет следующий вид.

1. Инициализировать модель первого кластера параметрами первого входного образа $\Theta = (1, \theta(x_1))$.
2. При получении нового входного образа \tilde{x} преобразовать его к статистической модели $\theta(\tilde{x}) = \langle w_x, m_x, S_x \rangle$.
3. Для каждого $k = \overline{1, M}$ вычислить расстояние $d_k = d_{M^*}(C_k, \tilde{x})$ (8).
4. Если все вычисленные расстояния превышают заданный порог d_{\max} , то добавить новый кластер, инициализировать его параметрами $\langle w_x, m_x, S_x \rangle$ и перейти к следующему входному образу.
5. В противном случае вычислить степени принадлежности входного образа каждому из кластеров

$$\mu_{C_k}(\tilde{x}) = d_k^{-p} / \sum_{j=1}^M d_j^{-p},$$

где $p > 1$ – параметр, определяющий степень нечеткости алгоритма кластеризации. При малых p имеем нечеткую кластеризацию, а в предельном случае $p \rightarrow \infty$ – жесткую.

6. Составить подмножество активных кластеров, для которых $\mu_{C_k}(\tilde{x}) \geq \mu_{\min}$. Для каждого активного кластера уточнить оценки параметров модели по формулам:

$$w' = w + \mu(x_k),$$

$$\beta = \max\{\mu(x_k)/w', \beta_{\min}\mu(x_k)\},$$

$$m' = (1 - \beta)m + \beta x_k,$$

$$S'_{ij} = (1 - \beta)(S_{ij} + \beta(x_{ki} - m_i)(x_{kj} - m_j)),$$

где $\beta_{\min} \in [0; 1)$ – параметр, определяющий скорость забывания предыдущих наблюдений.

7. Вычислить обратную матрицу S^{-1} .

8. Результаты. Предложенный алгоритм кластеризации апробирован в классификаторе нечетких описаний ситуации в составе системы управления мобильным роботом Lego® Mindstorms® NXT 2.0. На рис. 2 приведены две проекции уменьшенной обучающей выборки, состоящей из 80 3-мерных образов, и результаты нечеткой кластеризации предложенным алгоритмом с параметрами ($p = 2, d_{\max} = 0.2, \beta_{\min} = 0.02, \mu_{\min} = 0.0025$).

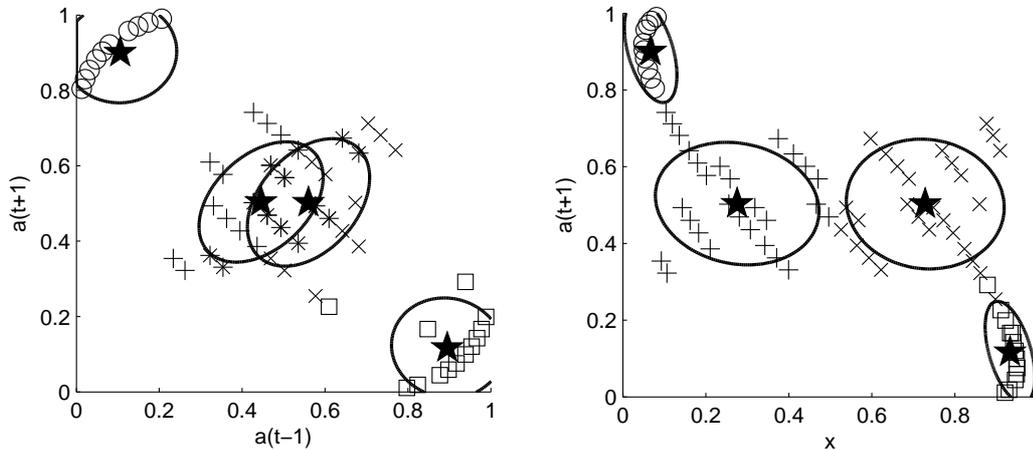


Рис. 2. Результаты кластеризации инкрементным алгоритмом

В таблице 1 даны экспериментальные показатели предложенного алгоритма в сравнении с итеративными алгоритмами k-means и fuzzy c-means, а также инкрементным алгоритмом SLC. В качестве критерия качества кластеризации использовался индекс Дэвиса-Боулдина (Davies–Bouldin index) [21].

Таблица 1. Сравнение методов кластеризации.

Алгоритм	SLC	k-means	fuzzy c-means	жесткий инкр.	нечеткий инкр.
Максимальное количество итераций	1	11	18	1	1
Индекс Дэвиса-Боулдина	0.48	0.31	0.37	0.31	0.38

Предложенный алгоритм обеспечивает более высокое качество кластеризации (меньшее значение индекса Дэвиса-Боулдина) по сравнению с алгоритмом SLC. В предложенном алгоритме входные данные обрабатываются однократно, что обеспечивает более высокую скорость работы, по сравнению с алгоритмами k-means и fuzzy c-means. Кроме того, предложенный алгоритм обеспечивает динамическую оценку количества кластеров.

9. Выводы. Рассмотрена задача повышения эффективности кластеризации дан-

ных нечетких динамических измерений. Выделены основные недостатки существующих инкрементных методов кластеризации [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Использована статистическая модель данных, основанная на ожидании и ковариации. Эта модель представляет кластеры и нечеткие входные образы эллипсоидами, произвольно ориентированными в пространстве четких входных образов. Предложен метод оценки параметров модели кластера на основе последовательных динамических наблюдений элементов этого кластера. Предложены оценки расстояния между моделью и точкой, а также между двумя различными моделями, которые сводятся к евклидовому расстоянию в случае одноточечных моделей. На основе этих моделей и методов предложен последовательный инкрементный алгоритм кластеризации нечетких данных, который позволяет повысить качество кластеризации по сравнению с существующим инкрементным алгоритмом SLC, а также повысить скорость обработки данных по сравнению с итеративными алгоритмами k-means и fuzzy c-means.

1. *Каргин А.А.* Введение в интеллектуальные машины. Книга 1. Интеллектуальные регуляторы. – Донецк: Норд-Пресс, ДонНУ, 2010. – 526 с.
2. *Marakas G.M.* Decision support systems in 21st century. – US edition. – Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall, 1999. – 528 p.
3. *Gupta M.R., Chen Y.* Theory and use of the EM algorithm // Foundations and trends in signal processing. – 2010. – Vol. 4. No. 3. – PP. 223–296.
4. *Gupta C., Grossman R.* Genic: a single pass generalized incremental algorithm for clustering // Proceedings of the Fourth SIAM International Conference on Data Mining. – 2004. – PP. 147–153.
5. *Lin J., Vlachos M., Keogh E., Gunopulos D.* Iterative incremental clustering of time series // Advances in database technology. – 2004. – Vol. 2992. – PP. 521–522.
6. *Li D., Simske S.* Training set compression by incremental clustering // Journal of pattern recognition research. – 2011. – Vol 6. No 1. – PP. 56–64.
7. *Anagnostopoulos G.C., Georgiopoulos M.* Ellipsoid ART and ARTMAP for incremental clustering and classification // Neural networks. – 2001. – Vol. 2. – PP. 1221–1226.
8. *Nefti S. A, Oussalah M., Rezgui Y.* A modified fuzzy clustering for documents retrieval: application to document categorization // Journal of the Operational Research Society. – 2009. – Vol. 60. No. 3. – PP. 384–394.
9. *Бодянский Е.В., Волкова В.В., Махиборода В.В.* Нейронная сеть Т. Кохонена с нечетким выводом и алгоритм ее самообучения // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – 2009. – Вип. 2 (20). – С. 74–78.
10. *Carpenter G. A., Grossberg S.* Adaptive resonance theory // The handbook of brain theory and neural networks / M. A. Arbib (ed.). – 2nd edition. – Cambridge, MA : MIT Press, 2003. – PP. 87–90.
11. *Wasserman L.* All of statistics: a concise course in statistical inference. – New York : Springer, 2004. – 561 p.
12. *Hartigan J.A.* Clustering Algorithms. – New York: Wiley, 1975. – 351 p.
13. *Haykin S.* Neural networks and learning machines. – 3rd edition. – Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2008. – 936 p.
14. *Dvoretzky A.* On stochastic approximation // 3-rd Berkeley symp. math. statistics and probability : proc. of. – 1956. – Vol. 1. – PP. 39–55.
15. *Goodwin G.C., Ramadge P.J., Caines P.E.* A globally convergent adaptive predictor // Automatica. – 1981. – Vol. 17. No. 1. – PP. 135–140.
16. *Li J., Ray S., Lindsay B.G.* A nonparametric statistical approach to clustering via mode identification // Journal of machine learning research. – 2007. – Vol. 8. – PP. 1687–1723.
17. *Maesschalck R. de., Jouan-Rimbaud D., Massart D.L.* The Mahalanobis distance // Chemometrics and intelligent laboratory systems. – 2000. – Vol. 50. Issue 1. – PP. 1–18.
18. *Vaart, van der A. W.* Asymptotic statistics. – Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000.

– 460 p.

19. *Nielsen F., Boltz S.* The Burbea-Rao and Bhattacharyya centroids // Information theory : IEEE trans. on. – 2011. – Vol. 57 (8). – PP. 5455-5466.
20. *Раскин Л.Г., Серая О.В.* Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.
21. *Romesburg H.C.* Cluster analysis for researchers. – New York : Lulu Press, 2004. – 344 p.

C. Kadomsky

Efficient incremental clustering of fuzzy data.

The problem of dynamic data clustering is addressed. This problem is solved by statistical incremental method. The sequential incremental fuzzy data clustering algorithm is proposed, in which the cluster model and the input model account for their center and shape. For estimating distance between models the modification of Mahalanobis distance is proposed, which preserves Euclidean distance in case of single-point models and allows reducing calculations in comparison with the use of Bhattacharyya distance. The proposed algorithm allows to improve clustering efficiency in comparison with existing incremental algorithms, and to improve clustering speed in comparison with iterative EM algorithm.

Keywords: *incremental clustering, statistical data models, fuzzy data, Mahalanobis distance.*

К. К. Кадомський

Підвищення ефективності інкрементної кластеризації нечітких даних.

Розглянуто задачу кластеризації даних динамічних вимірів. Ця задача вирішується статистичним інкрементним методом. Запропоновано послідовний інкрементний алгоритм кластеризації нечітких даних, в якому модель кластера та модель вхідного образу враховують їх центр і форму. Для оцінки відстані між моделями запропоновано модифікацію відстані Махаланобіса, яка зберігає евклідову відстань у випадку одноточкових моделей і дозволяє скоротити обчислення в порівнянні з використанням відстані Баттачарія. Запропонований алгоритм дозволяє підвищити ефективність кластеризації в порівнянні з існуючими інкрементними алгоритмами та підвищити швидкість кластеризації в порівнянні з ітеративним EM алгоритмом.

Ключові слова: *інкрементна кластеризація, статистичні моделі даних, нечіткі дані, відстань Махаланобіса.*

Донецкий национальный ун-т
kadomsky@ukr.net

Получено 11.05.12

УДК 519.175

©2012. А. А. Кадубовский

ДВУХЦВЕТНЫЕ ХОРДОВЫЕ N -ДИАГРАММЫ С ОДНИМ ЧЕРНЫМ ЦИКЛОМ

В статье рассматривается класс двухцветных хордовых N -диаграмм с n хордами, которые имеют только один цикл черного цвета. Установлены формулы для вычисления числа неэквивалентных таких диаграмм относительно действия циклической и диэдральной групп соответственно.

Ключевые слова: хордовая диаграмма, оснащенный цикл, действие диэдральной группы.

Введение. Одной из основных задач многих областей математики, в частности топологии, является задача о классификации исследуемых объектов, которая в свою очередь предполагает построение полных инвариантов. В большинстве случаев для решения последней эффективно используют некоторые графы с дополнительной информацией, в частности хордовые диаграммы.

Напомним, что хордовой диаграммой порядка n или, коротко, n -диаграммой называют конфигурацию на плоскости, которая состоит из окружности, $2n$ точек на ней (являющихся вершинами правильного $2n$ -угольника) и n хорд, соединяющих указанные точки. Две диаграммы называют изоморфными, если их можно совместить в результате поворота. Диаграммы называют эквивалентными, если их можно совместить с помощью поворота, осевой симметрии или же их композиции.

Вопросами перечисления хордовых диаграмм определенного вида занимался целый ряд известных математиков, в частности авторы работ [1-5]. Задачи о подсчете числа неизоморфных и неэквивалентных n -диаграмм были полностью решены в работах [4], [5]. Подсчет числа неизоморфных (в частности двухцветных) диаграмм *фиксированного рода* является достаточно сложной и в общем случае *не решенной задачей*. Известными являются лишь результаты для планарных (рода 0), тороидальных (рода 1) n -диаграмм и $2m$ -диаграмм максимального рода m [5].

Двухцветные хордовые O - и N -диаграммы были использованы в работе [6] для топологической классификации гладких функций определенного класса на замкнутых ориентируемых и соответственно неориентируемых поверхностях фиксированного рода. В [7] установлены формулы для подсчета числа неизоморфных (относительно действия циклической группы) и неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы) двухцветных O - и N -диаграмм. В [8] установлены формулы для подсчета числа неизоморфных и неэквивалентных O -диаграмм, среди циклов которых только один черный цикл. В [9] подсчитано число неизоморфных O -диаграмм с одним черным и одним белым циклом. Число неизоморфных и неэквивалентных планарных O -диаграмм (рода 0) подсчитано в работе [10].

В данной работе установлены формулы для вычисления числа неизоморфных и неэквивалентных N -диаграмм с n хордами, среди циклов которых только один цикл черного цвета.

1. Основные понятия и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Рассмотрим окружность и $2n$ точек на ней, которые являются вершинами правильного $2n$ -угольника. Раскрасим ее дуги поочередно в два цвета (черный и белый) и занумеруем указанные вершины числами от 1 до $2n$ по ходу часовой стрелки. Полученную конструкцию будем называть двухцветным $2n$ -шаблоном – *рис. 1 а*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Двухцветной хордовой диаграммой будем называть n -диаграмму, дуги окружности которой поочередно раскрашены в два цвета (черный и белый) – *рис. 1 б, с*).

В дальнейшем будем рассматривать только те двухцветные n -диаграммы, которые построены на основе двухцветного $2n$ -шаблона (*рис. 1 а*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. 2-цветную n -диаграмму, которая не содержит (содержит) хорд, соединяющих вершины с номерами одинаковой четности, будем называть O -диаграммой (N -диаграммой) – *рис. 1 с, б*).

Под *черным (белым) циклом* двухцветной n -диаграммы будем понимать чередующуюся последовательность черных (белых) дуг и хорд, в которой конец каждой черной дуги совпадает с началом единственной хорды, исходящей из нее, а второй конец каждой такой хорды определяет начало последующей черной дуги.

«Обход» (вычленение) некоторого черного цикла диаграммы можно совершать начиная с «четного» конца произвольной черной дуги. Назовем ее «стартовой». Двигаясь в направлении против хода часовой стрелки мы достигнем ее начала. Далее следует двигаться вдоль хорды, исходящей из этого начала, до второго ее конца на окружности диаграммы. С этого момента и в дальнейшем движение по окружности совершается исключительно вдоль черных дуг, вторые концы которых однозначно определяют последующие хорды цикла. И так до того момента, пока не будет достигнута «стартовая» дуга черного цикла.

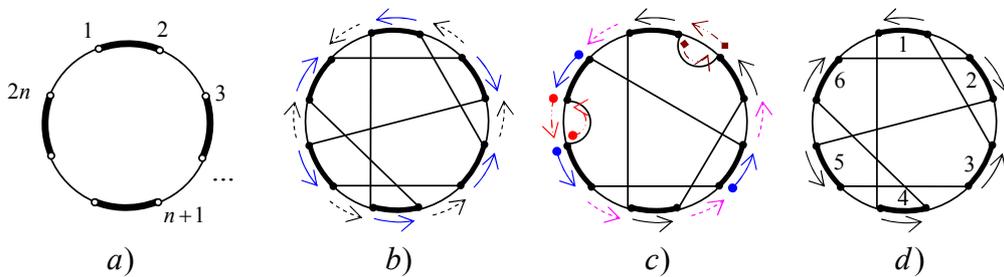


Рис. 1. а) двухцветный $2n$ -шаблон; б) N -диаграмма с 1 черным и 1 белым циклом; с) O -диаграмма с 2 черными и 3 белыми циклами; д) N -диаграмма с 1 черным и 1 белым циклами

Множество N -диаграмм, построенных на двухцветном $2n$ -шаблоне, обозначим \mathfrak{S}_n^N , N -диаграмм с 1 черным циклом – $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, а N -диаграмм с 1 черным и 1 белым циклом – $\mathfrak{S}_{n,1,1}^N$ (*рис. 1 д*).

Циклическую группу, порожденную элементом $\xi = \sigma^2$, $\sigma = (1, 2, 3, \dots, 2n)$ называют группой циклических перестановок порядка n , которую будем обозначать

$$C_n^* = \{\xi^i | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть далее

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2n) \circ (2, 2n-1) \circ (3, 2n-2) \circ \dots \circ (n, n+1).$$

Тогда все симметрии двухцветного $2n$ -шаблона исчерпываются: n поворотами $\xi^i \in C_n^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ и n (осевыми) симметриями $\tau_i = \tau \circ \xi^i$. Группу симметрий (порядка $2n$) двухцветного $2n$ -шаблона обозначим $D_{2n}^* = \{\xi^i, \tau_i | i = 1, \dots, n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Известно (напр. [5], [6], [7]), что группы C_n^* и D_{2n}^* действуют на множестве хордовых диаграмм, в частности на множестве $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, как сопряжение. А именно: пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & \dots & k_{2n-1} & k_{2n} \\ k_1 & 1 & \dots & k_{2n} & k_{2n-1} \end{pmatrix}$ — подстановка (инволюция) на множестве номеров n_j вершин (двухцветного) $2n$ -шаблона, которая определяет хорды, а поэтому и саму n -диаграмму $D = D(\alpha)$. Тогда очевидно, что каждую диаграмму можно отождествить с соответствующей подстановкой. Более того, имеют место следующие **критерии изоморфности и эквивалентности двухцветных диаграмм**:

диаграмма $D_1 = D(\alpha_1)$ изоморфна диаграмме $D_2 = D(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_1 = \xi^{-i} \circ \alpha_2 \circ \xi^i$;
 диаграмма $D_1 = D(\alpha_1)$ эквивалентна диаграмме $D_2 = D(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда $\exists \gamma \in D_{2n}^* : \alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Занумеруем черные дуги двухцветного $2n$ -шаблона номерами от 1 до n по ходу часовой стрелки. Если обход черных дуг единственного черного цикла диаграммы (из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$) начинать с «первой» черной дуги шаблона в направлении против хода часовой стрелки (рис. 1 d), то каждой такой диаграмме однозначно можно поставить в соответствие цикл (длины n), оснащенный знаками номеров черных дуг. Причем оснащение номера черной дуги знаком «минус» происходит в случае, когда направление обхода дуги меняется на противоположное в сравнении с направлением обхода предшествующей дуги цикла. Так диаграмме, изображенной на рис. 1 d, соответствует оснащенный цикл $(1, 4, -6, 2, -5, 3)$.

Более полную информацию можно найти, например в работах [6-8].
2. Число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$.

ПРИМЕР 1. Очевидно, что не существует N -диаграмм с 1 хордой (класс $\mathfrak{S}_{2,1}^N$ является пустым); класс $\mathfrak{S}_{2,1}^N$ состоит из единственной диаграммы — рис. 2 a); а число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{3,1}^N$ равно 2 — рис. 2 b).

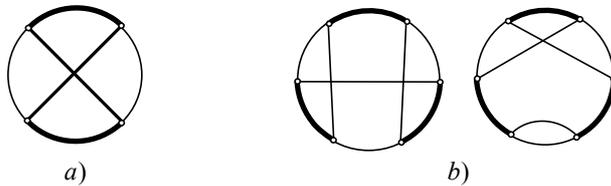


Рис. 2. a) единственная диаграмма из класса $\mathfrak{S}_{2,1}^N$; b) неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{3,1}^N$.

В дальнейшем число неизоморфных (относительно действия группы C_n^*) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$ будем обозначать через $d_{n,1}^{*(N)}$. Тогда по лемме Бернсайда и с учетом результатов работ [5], [6], имеет место равенство

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n} \left(|\mathfrak{S}_{n,1}^N| + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (1)$$

где $\rho(n, i)$ – число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которые самосовмещаются при повороте (по часовой стрелке) на угол $\omega_i = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = \frac{2\pi}{n} \cdot i$, то есть число элементов множества $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, неподвижных относительно действия группового элемента $\xi^i \in C_n^*$; $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера; а суммирование ведется по всем делителям i числа n за исключением самого n .

Предложение 2.1. Для натуральных $n \geq 2$ имеет место равенство

$$|\mathfrak{S}_{n,1}^N| = (n-1)! \cdot (2^{n-1} - 1). \quad (2)$$

Доказательство. С учетом замечания 1.2, каждую диаграмму из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$ можно отождествить с циклом вида

$$b = (1, b_{j_2}, b_{j_3}, \dots, b_{j_n}), \quad b_{j_i} \in \{\pm 2; \pm 3; \dots; \pm n\}, b_{j_i} = b_{j_k} \Leftrightarrow i = k. \quad (3)$$

Общее число циклов указанного вида равно $(n-1)! \cdot 2^{n-1}$. Однако среди них точно $(n-1)!$ циклов, определяющих O -диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $|\mathfrak{S}_{n,1}^N| = (n-1)! \cdot (2^{n-1} - 1)$. \square

Лемма 2.1. Для нечетных $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n} \left((n-1)! \cdot (2^{n-1} - 1) + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (4)$$

$$\rho(n, i) = \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i-1)! \cdot (2^{i-1} - 1). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $n = 2m + 1$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которые самосовмещаются при повороте на угол $\omega_i = \frac{2\pi}{n} \cdot i$, можно вычислить по формуле (5).

1) Вначале выясним вопрос о том, какой вид имеют оснащенные циклы, определяющие двухцветные диаграммы с одним черным циклом, которые самосовмещаются при повороте на угол ω_i – удовлетворяют условию (*).

Пусть $i = \frac{n}{k}$ – делитель числа n , $k \neq 1$. Как было установлено ранее, каждую такую n -диаграмму можно отождествить с оснащенным циклом $b = (1, l_2, l_3, \dots, l_n)$, элементы которого – номера (с учетом знаков) черных дуг диаграммы, которые встречаются при обходе единственного черного цикла n -диаграммы $D(b)$.

Если упорядоченная пара $\{1, l_2\} \in b$, то циклу b должна принадлежать и пара $\{1 + i, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i)\}$, аналогично $\{1 + 2i, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + 2i)\} \in b, \dots, \{1 + i(k - 1), \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i(k - 1))\} \in b$;

если упорядоченная пара $\{l_2, l_3\} \in b$, то циклу b должна принадлежать и пара $\{\text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i), \text{sign}(l_3) \cdot (|l_3| + i)\}$, аналогично $\{\text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + 2i), \text{sign}(l_3) \cdot (|l_3| + 2i)\} \in b, \dots, \{\text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i(k - 1)), \text{sign}(l_3) \cdot (|l_3| + i(k - 1))\} \in b$.

Таким образом, множество (оснащенных) номеров черных дуг диаграммы, удовлетворяющей условию (*), разбивается на k подмножеств – «черных блоков» $[b_j]$, в каждом из которых по i (оснащенных) номеров черных дуг:

$$[b_1] = \{1, l_2, l_3, \dots, l_i\},$$

$$[b_2] = \{1 + i, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i), \text{sign}(l_3) \cdot (|l_3| + i), \dots, \text{sign}(l_i) \cdot (|l_i| + i)\}, \dots,$$

$$[b_k] = \{1 + i(k - 1), \dots, \text{sign}(l_i) \cdot (|l_i| + i(k - 1))\}.$$

2) Взаимное расположение указанных блоков однозначно определяется выбором блока $[b_j]$, который следует за $[b_1]$. Более того, обход блоков совершается с шагом $h = j - 1$. Поясним последнее: допустим, что $b = ([b_1][b_2] \dots) = (1, l_2, l_3, \dots, l_i; 1 + i, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i), \text{sign}(l_3) \cdot (|l_3| + i), \dots, \text{sign}(l_i) \cdot (|l_i| + i); \dots)$.

Так как цикл b содержит упорядоченную пару $\{l_i, 1 + i\}$, то циклу b принадлежит и пара $\{\text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i), 1 + 2i\} \in b$. Это означает, что после блока $[b_2]$ следует блок $[b_3]$ и т.д.. То есть цикл b имеет вид $([b_1][b_2][b_3] \dots [b_k])$ и поэтому обход блоков совершается с шагом $h = 1$. Аналогично из допущения, что b имеет вид $b = ([b_1][b_3] \dots)$, нетрудно заключить, что обход его блоков совершается с шагом $h = 2$, то есть $b = ([b_1][b_3][b_5] \dots)$. И т.д..

Таким образом, имеем $(k - 1)$ возможностей перегруппировать черные блоки. Однако диаграмма будет иметь один черный цикл только в том случае, когда обход черных блоков совершается с шагом h , взаимно простым с $k = \frac{n}{i}$. То есть существует точно $\varphi(k) = \varphi\left(\frac{n}{i}\right)$ существенно различных типов таких диаграмм.

3) Зафиксируем допустимый шаг h (взаимно простой с k), с которым совершается обход k черных блоков $[b_1], [b_2], \dots, [b_k]$. Очевидно, что оснащенную дугу b_{l_2} блока $[b_1]$ можно выбрать $(n - k) \times 2$ способами, так как k чисел $1, 1 + i, \dots, 1 + i(k - 1)$ заняли первые «позиции» в блоках $[b_1], [b_2], \dots, [b_k]$;

оснащенную дугу b_{l_3} можно выбрать $(n - 2k) \times 2$ способами, так как после выбора черной дуги с (оснащенным) номером l_2 , числа $l_2, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i), \dots, \text{sign}(l_2) \cdot (|l_2| + i(k - 1))$ заняли вторые «позиции» в соответствующих блоках, и т.д.

Итак, при каждом допустимом шаге h можно образовать точно

$$2(n - k) \cdot 2(n - 2k) \cdot 2(n - 3k) \cdot \dots \cdot 2(n - (i - 1)k) = \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i - 1)! \cdot 2^{i-1}$$

разных 2-цветных диаграмм с одним черным циклом, которые самосовмещаются при повороте на угол ω_i . Однако среди них содержится точно $\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i - 1)!$ диаграмм с одним черным циклом [8]. С учетом пунктов 2) и 3), существует точно $\varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i - 1)! \cdot (2^{i-1} - 1)$ диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, удовлетворяющих условию (*). \square

Лемма 2.2. Для четных $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n} \left((n-1)! \cdot (2^{n-1} - 1) + \mu \left(n, \frac{n}{2} \right) + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad \text{где} \quad (6)$$

$$\rho(n, i) = \varphi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot (i-1)! \cdot (2^{i-1} - 1) \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^{i-1}, \quad \mu \left(n, \frac{n}{2} \right) = \left(\frac{n}{2} \right)! \cdot 2^{n-2}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $n = 2m$. Так как доказательство первой формулы (7) повторяет суждения, проведенные для случая нечетных n , то для доказательства достаточно показать необходимость включения величины $\mu \left(n, \frac{n}{2} \right)$ в формулу (6).

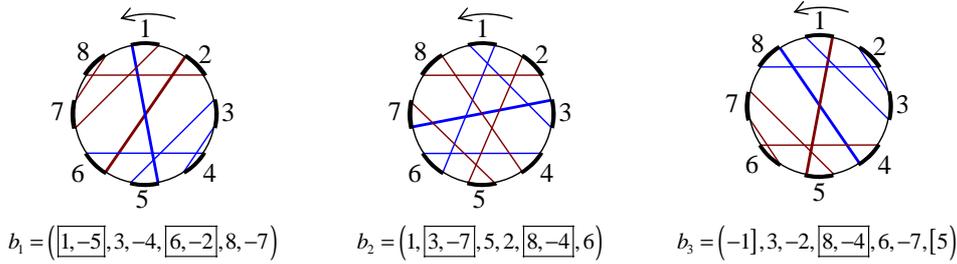


Рис. 3.

Величина $\mu(2m, m)$ является числом диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которые самосовмещаются при повороте на угол $\omega_{n/2} = \pi$ и которые не были учтены величиной $\rho(2m, m)$. Указанный тип диаграмм характеризуется наличием хорд, соединяющих диаметрально-противоположные вершины $2n$ -шаблона – рис. 3.

Так как $n = 2m$, то каждая диаметрально-противоположная хорда $2n$ -шаблона соединяет вершины с номерами одинаковой четности. Очевидно, что каждая такая хорда может быть задана парой оснащенных номеров диаметрально-противоположных (черных) дуг шаблона, а именно $\{i, -(m+i)\}$ или $\{-l, -(m+l)\}$, соответственно. Далее каждую из n указанных таких хорд обозначим $\{j_l, -|j'_l|\}$. Тогда диаграмму $D(b) \in \mathfrak{S}_{n,1}^N$, которая содержит диаметрально-противоположную хорду шаблона (а именно две) и самосовмещается при повороте на угол $\omega = \pi$, можно отождествить с одним из m циклов вида:

$$\begin{aligned} & \left(\boxed{1, -(m+1)}, j_2, j_3, j_4, \dots, j_{m-1}, \boxed{j_m, -|j'_m|}, j'_{m-1}, \dots, j'_4, j'_3, j'_2 \right), \\ & \left(1, \boxed{j_2, -|j'_2|}, \text{sign}(j_2) \cdot (m+1), j_3, j_4, \dots, \boxed{j_m, -|j'_m|}, \dots, j'_4, j'_3 \right), \\ & \left(1, j_2, \boxed{j_3, -|j'_3|}, j'_2, \text{sign}(j_2) \cdot (m+1), j_4, \dots, \boxed{j_m, -|j'_m|}, \dots, j'_4 \right), \\ & \dots \\ & \left(-1, j_2, j_3, \dots, j_{m-1}, \boxed{j_m, -|j'_m|}, j'_{m-1}, \dots, j'_3, j'_2, [\text{sign}(j_2) \cdot (m+1)] \right), \end{aligned}$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; \dots; \pm m; \pm(m+2), \dots, \pm 2m\}$, $|j'_k| = (|j_k| + m) \bmod n$ – номер (черной) дуги, диаметрально-противоположной дуге $|j_k|$, причем знаки j'_k определяются однозначно. Общее число таких циклов равно $\mu \left(n, \frac{n}{2} \right) = \left(\frac{n}{2} \right)! \cdot 2^{n-2}$. \square

С учетом лемм 2.1 и 2.2 окончательно получаем

Теорема 2.1. Для натуральных n имеют место формулы:

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n} \left(\mu \left(n, \frac{n}{2} \right) + \sum_{i|n} \varphi^2 \left(\frac{n}{i} \right) (i-1)! (2^{i-1} - 1) \left(\frac{n}{i} \right)^{i-1} \right), \quad (8)$$

$$\mu \left(n, \frac{n}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{при нечетном } n \\ \left(\frac{n}{2} \right)! \cdot 2^{n-2}, & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (9)$$

3. Число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$. В дальнейшем число неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы D_{2n}^*) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$ будем обозначать через $d_{n,1}^{**(N)}$. Тогда по лемме Бернсайда и с учетом, например, результатов работы [7] имеет место соотношение

$$d_{n,1}^{**(N)} = \frac{1}{2} \cdot \left(d_{n,1}^{*(N)} + \frac{1}{n} \cdot s(n) \right), \quad (10)$$

где $s(n)$ – общее число симметричных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$.

Так как число диаграмм, симметричных относительно каждой из осей симметрии ($2n$ -шаблона) фиксированного типа одинаково, то:

$$s(n) = \begin{cases} n \cdot s_0(n), & \text{при нечетном } n \\ \frac{n}{2} \cdot (s_1(n) + s_2(n)), & \text{при четном } n, \end{cases} \quad (11)$$

где $s_0(n)$ – число диаграмм (из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$), симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*первого типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных черной и белой дуг шаблона; $s_1(n)$ – число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*второго типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных черных дуг шаблона; $s_2(n)$ – число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*третьего типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных белых дуг шаблона.

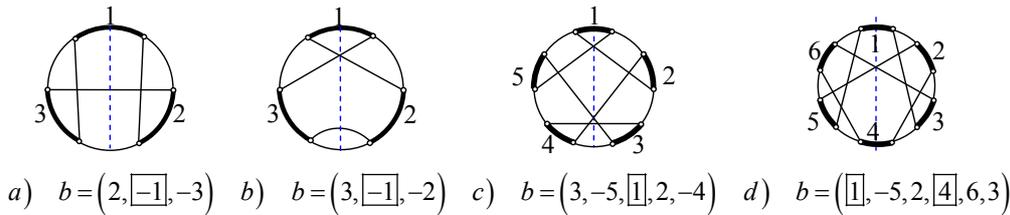


Рис. 4. а), б) – все диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{3,1}^N$, симметричные относительно фиксированной оси симметрии первого типа: $s_0(3) = 2$.

Лемма 3.1. Для нечетных $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы:

$$d_{n,1}^{**(N)} = \frac{1}{2} \left(d_{n,1}^{*(N)} + s_0(n) \right), \quad s_0(n) = \left(\frac{n-1}{2} \right)! \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right). \quad (12)$$

Доказательство. С учетом соотношений (10) и (11), для доказательства леммы достаточно показать справедливость второй формулы (12). Пусть $n = 2m + 1$. Каждую диаграмму $D(b) \in \mathfrak{S}_{n,1}^N$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии *первого типа*, можно отождествить с циклом вида

$$\left(|j'_m|, \dots, j'_3, j'_2, \boxed{\text{sign}(j_2) \cdot \mathbf{1}}, j_2, j_3, \dots, j_m \right), \quad (13)$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; \dots; \pm 2m\}$, $k = \overline{2, \dots, m}$, а $|j'_k| = n + 2 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно соответствующей оси симметрии *первого типа*. Причем $\forall k \in \{2, \dots, m-1\}$ знак j'_k определяется однозначно, так как должен совпадать со знаком j_{k+1} , а «последние» дуги j_m и j'_m всегда соединены самосимметричной хордой (откуда и следует, что $b \supset \{\dots, j_m, |j'_m|, \dots\}$). Знак, с которым номер «первой» дуги входит в цикл b , определяется знаком j_2 – *рис. 4 а) – с*).

Общее число указанных циклов равно $4^m \cdot m! = 2^{2m} \cdot m!$. Однако среди них точно $2^m \cdot m!$ циклов, определяющих O -диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_0(n) = s_0(2m+1) = \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$. \square

Предложение 3.1. Для четных $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$s_1(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $n = 2m$. Тогда диаграмму $D(b) \in \mathfrak{S}_{n,1}^N$, симметричную относительно оси симметрии *второго типа* (проходящей через середины 1-ой и $(m+1)$ -ой черных дуг шаблона), можно отождествить с циклом вида

$$\left(\boxed{1}, j_2, j_3, \dots, j_m, \pm \boxed{m+1}, j'_m, \dots, j'_3, j'_2, \text{sign}(j_2) \cdot \mathbf{1} \right), \quad (15)$$

где $j_k \in \{\pm 2; \dots; \pm m; \pm m+2; \dots; \pm 2m\}$, $k = \overline{2, \dots, m}$, а $|j'_k| = n + 2 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно указанной выше оси симметрии *второго типа*, а знаки j'_k однозначно определяются знаками j_{k+1} – *рис. 4 д*).

Общее число таких циклов равно $2^{2m-1} \cdot (m-1)!$. Однако среди них точно $2^{m-1} \cdot (m-1)!$ циклов, определяющих O -диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_1(n) = s_1(2m) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right)$. \square

Обозначим далее через $s_{21}(n)$ ($s_{22}(n)$) число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которые симметричны относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа* и содержат (не содержат) самосимметричные относительно этой оси симметрии хорды (*рис. 5* и *рис. 6*, соответственно). Тогда имеет место равенство

$$s_2(n) = s_{21}(n) + s_{22}(n). \quad (16)$$

Предложение 3.2. Для четных n имеют место формулы

$$s_{21}(n) = \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right), \quad s_{22}(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{n-2}. \quad (17)$$

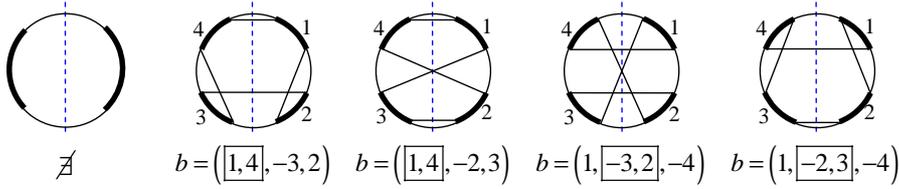


Рис. 5. все диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{4,1}^N$, симметричные относительно фиксированной оси симметрии третьего типа и которые не имеют самосимметричных хорд: $s_{21}(4) = 4$; $s_{21}(2) = 0$

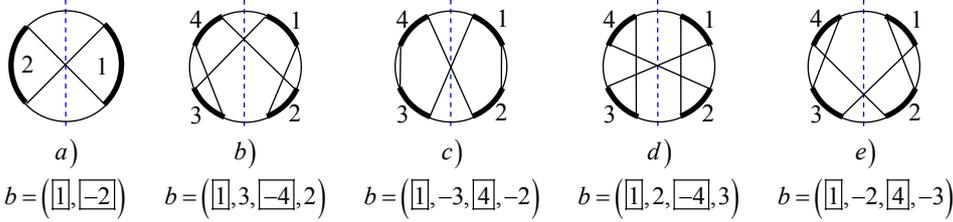


Рис. 6. а) – единственная диаграмма из класса $\mathfrak{S}_{2,1}^N$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии третьего типа и не имеет самосимметричных хорд: $s_{22}(2) = 1$; б) – е) – все диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{4,1}^N$, которые симметричны относительно фиксированной оси симметрии третьего типа и не имеют самосимметричных хорд: $s_{22}(4) = 4$

Доказательство. Покажем вначале справедливость первой формулы (17). Пусть $n = 2m$. Тогда диаграмму из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которая симметрична относительно фиксированной (рис. 5) оси симметрии *третьего типа* и содержит самосимметричные хорды относительно этой оси, можно отождествить с одним из m циклов вида:

$$\begin{aligned}
 & \left(\boxed{1}, \boxed{2m}, j_2, j_3, \dots, j_{m-1}, \boxed{j_m, |j'_m|}, j'_{m-1}, \dots, j'_3, j'_2, \text{sign}(j_2) \cdot 1 \right), \\
 & \left(\boxed{1}, \boxed{j_2, |j'_2|}, \text{sign}(j_2) \cdot \boxed{2m}, j_3, j_4, \dots, \boxed{j_m, |j'_m|}, \dots, j'_4, j'_3, \text{sign}(j_3) \cdot 1 \right), \\
 & \dots \\
 & \left(\boxed{1}, j_2, j_3, \dots, j_{m-1}, \boxed{j_m, |j'_m|}, j'_{m-1}, \dots, j'_3, j'_2, [\text{sign}(j_2) \cdot \boxed{2m}], +1 \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

где $j_k \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm 2m\}$, $k = \overline{2, \dots, m}$, $|j'_k| = n + 1 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно указанной оси симметрии *третьего типа*, причем знаки j'_k определяются однозначно.

Общее число таких циклов равно $2^{2m-2} \cdot m!$. Однако среди них точно $2^{m-1} \cdot m!$ циклов, определяющих O -диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_{21}(n) = s_{21}(2m) = \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right)$.

Теперь покажем справедливость второй формулы (17). Диаграмму из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа* и **не имеет** самосимметричных хорд шаблона (рис. 6), можно отождествить с циклом вида

$$\left(\boxed{1}, j_2, \dots, j_m, \text{sign}(-J) \cdot \boxed{2m}, j'_2, \dots, j'_m, \text{sign}(-J) \cdot 1 \right), \quad (19)$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; \dots; \pm 2m - 1\}$, $k = \overline{2, \dots, m}$, $J = \prod_{l=2}^m \text{sign}(j_l)$, $|j'_k| = n + 1 - |j_k|$

– номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа*, причем знаки j'_k определяются однозначно.

Общее число таких циклов составляет $2^{2m-2} \cdot (m - 1)!$. Методом от противного нетрудно показать, что среди циклов указанного вида нет таких, которые определяют O -диаграммы. Таким образом, $s_{22}(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{n-2}$. \square

С учетом соотношений (14), (16) и (17), имеем

$$\frac{1}{2} (s_1(n) + s_2(n)) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-2} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} + \left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right). \quad (20)$$

С учетом соотношений (10), (11), леммы 3.1 и соотношения (20) окончательно получаем

Теорема 3.1. *Для натуральных n имеют место формулы*

$$d_{n,1}^{** (N)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(d_{n,1}^{* (N)} + \left(\frac{n-1}{2}\right)! 2^{\frac{n-1}{2}} \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right) \right), & \text{при нечетном } n \\ \frac{1}{2} \left(d_{n,1}^{* (N)} + \left(\frac{n-2}{2}\right)! 2^{\frac{n}{2}-2} \left(\left(2^{\frac{n-2}{2}} - 1\right) \left(\frac{n}{2} + 3\right) + 2 \right) \right), & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (21)$$

Дополнения. Ниже в таблице приведены начальные значения общего числа, числа неизоморфных, а также числа неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1}^N$

Таблица 1. Начальные значения величин $d_{n,1}^N$, $d_{n,1}^{* (N)}$, $d_{n,1}^{** (N)}$.

n	$d_{n,1}^N$	$d_{n,1}^{* (N)}$	$d_{n,1}^{** (N)}$
1	0	0	0
2	1	1	1
3	6	2	2
4	42	13	10
5	360	72	48
6	3 720	642	361
7	45 360	6 480	3 408
8	640 080	80 246	40 735
9	10 281 600	1 142 424	574 092
10	185 431 680	18 546 824	9 285 124
11	3 712 262 400	337 478 400	168 798 720
12	81 709 689 600	6 809 212 572	3 404 876 046

Пример 2. На *рис. 7* приведены все неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{4,1}^N$. Не трудно видеть, что за исключением диаграмм 8 и 9, 10 и 11, 12 и 13 эти диаграммы являются также и неэквивалентными. Поэтому, $d_{4,1}^{** (N)} = 13 - 6 + 3 = 10$.

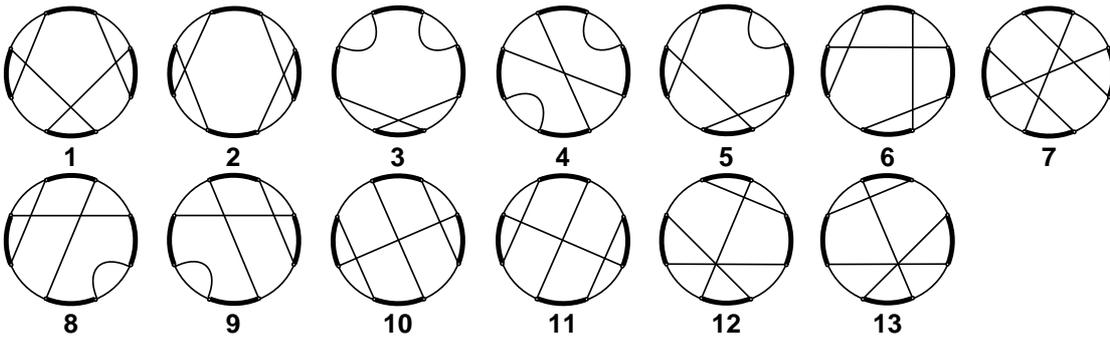


Рис. 7. все неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{4,1}^N$

ПРИМЕР 3. На рисунках 8 и 9 приведены все неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{5,1}^N$.

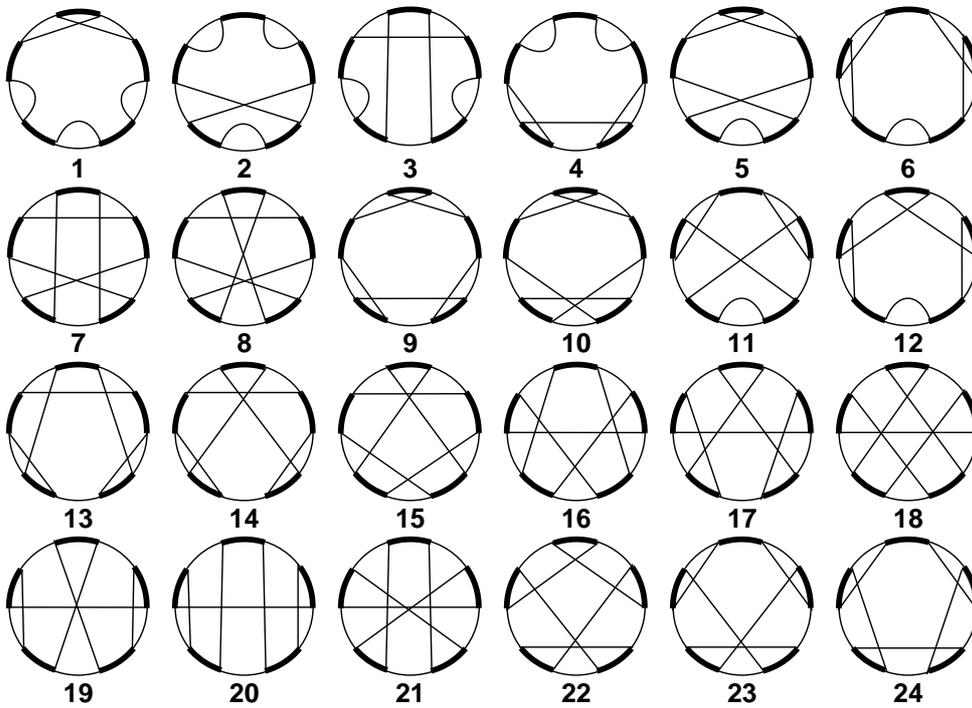


Рис. 8. все симметричные неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{5,1}^N$

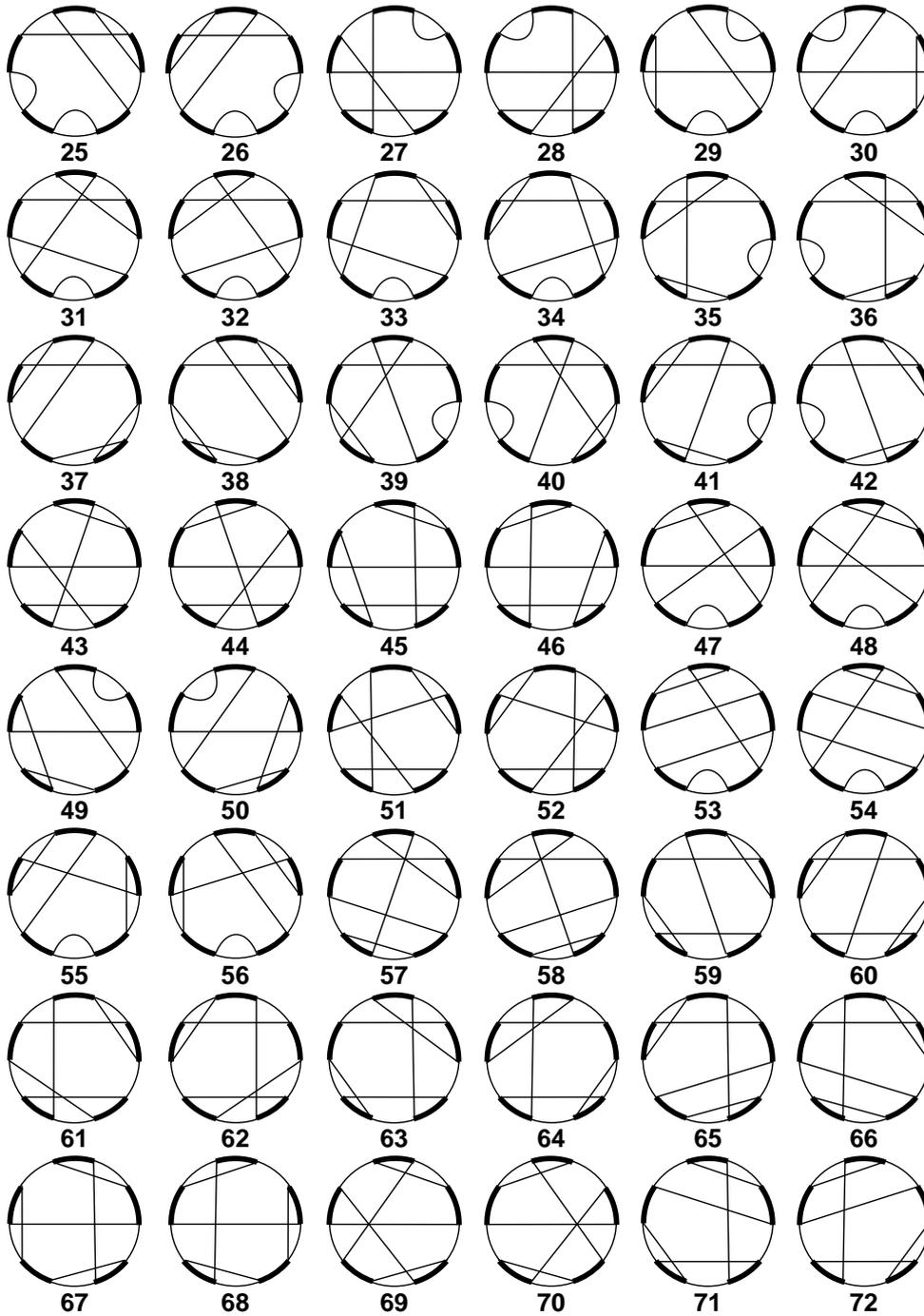


Рис. 9. все несимметричные неизоморфные диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{5,1}^N$

Для каждого $i = 12, \dots, 35$ диаграммы с номерами $(2i + 1)$ и $(2i + 2)$ являются эквивалентными относительно действия диэдральной группы (рис. 9). Поэтому

$$d_{5,1}^{**(N)} = 72 - 48 + 24 = 48.$$

Выводы. Как было отмечено ранее, в общем случае задачи о подсчете числа неизоморфных и неэквивалентных двухцветных O - и N -диаграмм *фиксированного рода* являются *нерешенными*. Однако они имеют непосредственную связь с подсчетом числа топологически неэквивалентных гладких функций (векторных полей) определенного класса на замкнутых ориентируемых и неориентируемых поверхностях *соответствующего рода*. По мнению автора вполне достижимым является подсчет числа неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{n,1,1}^N$ для случая простых n .

1. Touchard J. Sur une problème de configurations et sur les fractions continues // Can. J. Math. – 1952. – №. 4. – P. 2-25.
2. Riordan J. The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // Mathematics of Computation. – 1975. – Vol. 29, № 129. – P. 215-222.
3. Harer J., Zagier D. The Euler characteristic of the moduli space of curves // Inventiones mathematical – 1986. – № 85. – P. 457-485.
4. Stoimenov A. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // Journal of Knot and its Ramifications. – 1998. – Vol. 7, No. 1. – P. 93-114.
5. Cori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams // Theoretical Computer Science. – 1998. – Vol. 204. – P. 55-73.
6. Кадубовський О. Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Український математичний жур. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343-351.
7. Кадубовський О.А., Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В. Двокольорові O - і N -діаграми // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-матем. науки. – 2010. – Том IV, вип. 1. – С. 41-50.
8. Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю. Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-матем. науки. – 2010. – Том IV, вип. 1. – С. 51-60.
9. Кадубовський О. Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-матем. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17-27.
10. Callan D., Smiley L. Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // Arxiv: math. – 2005. – 15 p. – Access mode: <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447>.

A. A. Kadubovskiy

2-color chord N -diagrams with one black cycle.

In this paper we consider the set of two-colored chord N -diagrams with n chords that have one cycle of black color. We calculate the number of non-equivalent such diagrams under rotation and refraction.

Keywords: chord diagrams, equipped faces, under rotation and refraction.

О. А. Кадубовський

Двокольорові хордові N -діаграми з одним чорним циклом.

У роботі розглядається клас двокольорових хордових N -діаграм з n хордами, які мають лише один цикл чорного кольору. Встановлено формули для підрахунку числа нееквівалентних таких діаграм відносно дії циклічної та дієдральної груп відповідно.

Ключові слова: хордова діаграма, оснащений цикл, дія циклічної та дієдральної груп.

Донбасский государственный педагогический ун-т, г. Славянск
kadubovs@ukr.net

Получено 25.04.12

УДК 539.374

©2012. Н. И. Кодак, В. Н. Ложкин

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВЫРЕЗАМИ

Методом последовательных конформных отображений изучено упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами в случае идеальной пластичности. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

Ключевые слова: начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение.

1. Введение. Решение упругопластических задач для изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при различных условиях пластичности описываются четырьмя аналитическими функциями. Две из них характеризуют напряженное состояние упругой части плоскости, две другие конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, полностью охватывающих контуры вырезов и несоприкасающихся друг с другом. Коэффициенты разложений функций определяются из условия непрерывности упругих и пластических напряжений на неизвестной границе их раздела методом малого параметра. Такой подход позволил получить приемлемые качественные результаты в случаях, когда контуры вырезов и внешние границы охватывающих их неупругих областей достаточно удалены друг от друга [1, 2].

В данной работе предложен и реализован метод последовательных конформных отображений для изучения возникновения и развития неупругих областей в неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами от начального пластического охвата их контуров в случае идеальной пластичности. В качестве исходного приближения берется отображение, построенное методом малого параметра для плоскости с двумя круговыми вырезами [1]. Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложений функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости, с последующим уточнением коэффициентов отображений для построения следующего приближения решения задачи.

2. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами с полуосями a_1 и a_2 . Полуоси a_1 лежат на оси Ox_1 , а центры вырезов расположены на расстоянии L от начала координат Ox_1x_2 . Плоскость сжимается усилиями q_1 вдоль и q_2 поперек линии центров.

Расстояние между центрами вырезов и интенсивность сжимающих усилий таковы, что в плоскости возникают неупругие области. Они полностью охватывают контуры вырезов и не соприкасаются друг с другом. Их внешние границы находятся на расстоянии H по оси Ox_1 . Пусть

$$a_1 = (1 + \delta)R, \quad a_2 = (1 - \delta)R, \quad |\delta| < 1; \quad L = a_1 l; \quad H = a_1 h, \quad (1)$$

где R – линейный параметр, характеризующий размеры вырезов.

Геометрическая и силовая симметрия упругопластического равновесия плоскости позволяют исследовать возникновение и развитие неупругих областей около одного-правого выреза.

Введем безразмерные координаты:

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta); \quad \eta_n = a_1^{-1}x_n, \quad n = 1, 2. \quad (2)$$

Напряжения в правой пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению Мизеса и условиям на контуре выреза [3]

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p/\partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p/\partial\theta = 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p/\partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p/\partial\theta = 0; \\ (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 = 4k^2; \quad r = r_0: \quad \sigma_\nu^p = \tau_\nu^p = 0; \\ r_0(\theta) = (1 - \delta^2)(1 - 2\delta \cos 2\theta + \delta^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ν – внешняя нормаль к эллиптическому контуру выреза, k – постоянная, имеющая размерность напряжений.

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [4]:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e/\partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_2 = 0, \quad \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e/\partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) = 0; \quad |z| \rightarrow \infty: \quad \sigma_{11}^e = -q_1; \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На подлежащей определению границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

3. Аналитическое решение задачи. Решение задачи (3) не зависит от внешнего нагружения плоскости. Построенное методом малого параметра, оно имеет вид

[3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^p, \sigma_\theta^p, \tau_{r\theta}^p &= k \sum_{n=0} \delta^n (\sigma_r^{(n)}, \sigma_\theta^{(n)}, \tau_{r\theta}^{(n)}); \\
 \sigma_r^{(0)} &= -2 \ln r, \quad \sigma_\theta^{(0)} = -2(1 + \ln r), \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \\
 \sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} &= 2r^{-1} (\cos \sqrt{3} \ln r - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln r) \cos 2\theta, \\
 \tau_{r\theta}^{(1)} &= 4r^{-1} \cos(\sqrt{3} \ln r) \sin 2\theta; \\
 \sigma_r^{(2)} &= (1/2) \{ 1 - r^{-2} (4 + \cos 2\sqrt{3} \ln r - \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r) - \\
 &\quad - [r^{-1} (\cos \sqrt{15} \ln r - \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln r) - \\
 &\quad - r^{-2} (8 + 11 \cos 2\sqrt{3} \ln r - 7\sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \cos 4\theta \}, \\
 \sigma_\theta^{(2)} &= (1/2) \{ 1 + r^{-2} (4 + 7 \cos 2\sqrt{3} \ln r + \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r) - \\
 &\quad - [r^{-1} (\cos \sqrt{15} \ln r - \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln r) - \\
 &\quad - r^{-2} (3 \cos 2\sqrt{3} \ln r - 7\sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \cos 4\theta \}, \\
 \tau_{r\theta}^{(2)} &= -[2r^{-1} \cos \sqrt{15} \ln r - r^{-2} (1 + 7 \cos 2\sqrt{3} \ln r + \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \sin 4\theta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ [1], являющимися решением задачи (4),

$$\begin{aligned}
 \Phi(z), \Psi(z) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n) \psi_n(z), \\
 \psi_n(z) &= \zeta^{-(n+1)} (z-l) + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)} (z+l),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\alpha = (2k)^{-1} (q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1} (q_1 - q_2). \tag{7}$$

Функции $\zeta(z-l)$ и $\zeta_1(z+l)$ находятся из равенств [1]:

$$\begin{aligned}
 z-l &= r_0 \omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=-1} c_{n+2} \zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\varphi); \\
 z+l &= r_0 \omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=-1} (-1)^{n+1} c_{n+2} \zeta_1^{-n}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $z-l = r_0 \omega(\zeta)$ и $z+l = r_0 \omega_1(\zeta_1)$ конформно отображают внешности окружностей $|\zeta| = 1$ и $|\zeta_1| = 1$, соответственно, на внешности правой и левой пластических областей.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e &= 2k [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\
 \sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e &= 2k [(\bar{z} - z) \Phi'_z(z) + \Psi(z)].
 \end{aligned} \tag{9}$$

В окрестности правой пластической области функции (6) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\zeta), \Psi(\zeta) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n) \psi_n(\zeta), \\
 \psi_n(\zeta) &= \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)}(\zeta),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где функция $\zeta_1(\zeta)$ находится из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l/r_0 + \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n \zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (11)$$

Тогда соотношения (9) переписутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\varphi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\varphi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициенты a_n , b_n , c_n , r_0 разложений (6), (8) находятся из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на границе их раздела

$$z - l = r_0\omega(\sigma), \quad \sigma = \exp(i\varphi) : \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p, \quad \tau_{\rho\varphi}^e = \tau_{\rho\varphi}^p. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p &= (1/2)[\sigma_r^p + \sigma_\theta^p - (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) - 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \sigma_\varphi^p &= (1/2)[\sigma_r^p + \sigma_\theta^p + (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) + 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \tau_{\rho\varphi}^p &= -(1/2)[(\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) - 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \end{aligned} \quad (14)$$

где σ_r^p , σ_θ^p , $\tau_{r\theta}^p$ принимают значения (5), в которых надо положить

$$r = r_0|\omega(\sigma)|, \quad \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta = |\omega(\sigma)|^{-2n} \omega^{2n}(\sigma), \quad n = 1, 2. \quad (15)$$

Функции $\Omega_n(\zeta, \bar{\zeta})$, входящие в выражения (12), (14), имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)]/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta)/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}\omega(\zeta). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом равенств (12) условия (13) можно переписать так:

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi(\sigma) = k^{-1}(\sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\varphi}^p), \quad (17)$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = (2k)^{-1}(\sigma_\rho^p + \sigma_\varphi^p) = (2k)^{-1}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p). \quad (18)$$

4. Численное решение задачи. Решение задачи строится методом последовательных конформных отображений. Для фиксированных значений параметров l и β в качестве исходного приближения берется отображение, найденное методом малого параметра для плоскости с двумя круговыми отверстиями [1],

$$\begin{aligned} z - l &= r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = 1 + c_2 + c_3\zeta^{-1} + c_4\zeta^{-2} + c_5\zeta^{-2}(\zeta - \zeta_0)^{-1}, \\ r_0 &= r_p \exp\{-\beta\delta^2 + [(1 + \beta)^2 + (15/2)\beta^2]\delta^4\}, \\ r_p &= \exp(\alpha/2 - 1/2), \quad \delta = r_p/2l - \beta(r_p/2l)^3, \\ c_2 &= 2(1 - \beta)\beta\delta^3, \quad c_3 = -\beta + (1 + \beta^2)\delta^2 - [8(1 + \beta)^3 - 6(1 + \beta)]\delta^4, \\ c_4 &= -2(1 + \beta)(1 + 2\beta)\delta^3, \quad c_5 = 3(1 + \beta)(1 + 3\beta)\delta^4, \quad \zeta_0 = 2\beta\delta^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Затем уточняется значение параметра α_n , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается этого контура.

Строится упругое решение для полученного отображения. Из условия (17) методом коллокации находятся коэффициенты разложений (6). Для этого его перепишем так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1} a_n [2\operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] - \\ & - \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \psi_n(\sigma) - \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ & = \alpha + \beta \operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) + k^{-1} \sigma_\rho^p, \\ & \sum_{n=1} a_n [\operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] + \\ & + \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ & = -\beta \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) + k^{-1} \tau_{\rho\varphi}^p. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом равенств (5) запишем условие (18) в следующем виде

$$\begin{aligned} \ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 &= (1 + \mu)^{-1} [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) + \\ & + \mu \ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 + (1/2k)(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p) - (1/2)(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)})]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь μ – произвольная постоянная. Отображение (8) представим так:

$$\begin{aligned} r_0 \omega(\zeta) &= \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \\ \omega_0(\zeta) &= \sum_{n=-1} t_{n+2} \zeta^{-n}, \quad t_n = r_0 c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2} \zeta^{-n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные h_n предполагаются малыми величинами. С учетом того, что

$$\ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 \approx \ln |\omega_0(\sigma)|^2 + |\omega_0(\sigma)|^{-2} [\overline{\omega_0(\sigma)} \omega_h(\sigma) + \omega_0(\sigma) \overline{\omega_h(\sigma)}],$$

условие (21) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=-1} h_{n+2} [\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\varphi - \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\varphi] = \\ & = (1 + \mu)^{-1} |\omega_0(\sigma)|^2 [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \ln |\omega_0(\sigma)|^2 + \\ & + (1/2) \delta(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}) + (1/2) \delta^2(\sigma_r^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)})]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из него методом коллокации находятся постоянные h_n . Новые коэффициенты r_0 и c_n вычисляются так:

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1} (t_n + h_n). \quad (24)$$

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с заданной точностью. Затем осуществляется переход с заданным шагом к новому значению параметра α , вычисляется коэффициент r_0 по формулам (19), постоянные c_n сохраняются от предыдущего шага. Определяющим критерием решения задачи принято выполнение условий (13). Сходимость приближений обеспечивается подбором постоянной μ , входящей в уравнение (23).

С увеличением параметра α при фиксированном значении β последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты расчетов для $\delta = -0.1$, когда малые полуоси эллиптических вырезов лежат на оси Ox_1 , сведены в таблице 1.

Таблица 1

l	1.75			2.0			3.0			4.0		
β	α_n	α_k	h									
-0.20				1.34	1.349	0.082	1.29	2.073	0.090	1.25	2.6105	0.090
-0.15				1.25	1.405	0.084	1.19	2.128	0.090	1.20	2.6650	0.093
-0.10				1.20	1.461	0.092	1.09	2.184	0.070	1.10	2.7200	0.090
-0.05	1.26	1.2850	0.093	1.15	1.518	0.089	1.09	2.239	0.095	1.10	2.7750	0.097
0.0	1.26	1.3435	0.083	1.15	1.575	0.092	1.15	2.295	0.098	1.21	2.8307	0.087
0.05	1.28	1.4010	0.089	1.22	1.633	0.085	1.29	2.352	0.084	1.29	2.8867	0.095
0.10	1.32	1.4600	0.081	1.34	1.691	0.084	1.41	2.409	0.078	1.47	2.9430	0.092
0.15	1.45	1.5180	0.089	1.45	1.749	0.089	1.57	2.466	0.084	1.55	3.0000	0.081
0.20				1.59	1.808	0.084	1.65	2.524	0.074	1.70	3.0569	0.095
0.25				1.72	1.867	0.085	1.80	2.582	0.074	1.85	3.1147	0.092
0.30							1.96	2.640	0.091	2.05	3.1730	0.088
0.35							2.15	2.699	0.089	2.23	3.2320	0.075

В ней для различных l и β приведены:

- значения параметра α_n , при котором имеет место начальный пластический охват контуров вырезов;
- значения параметра α_k , до которого доведен счет;
- значения параметра h , соответствующего величинам α_k и β .

На рисунках 1-4 в системе безразмерных координат $O\eta_1\eta_2$ (2) приведены внешние границы правых пластических областей, соответствующих постоянным α_n и α_k , для таких значений l и β :

Установлено, что при

$$l = 1.75, \quad \beta < -0.05; \quad l = 2.0, \beta < -0.20$$

раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует. В этих случаях соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

Согласно обозначений (7) внешние усилия q_1, q_2 выражаются так:

$$q_1 = (\alpha + \beta)k, \quad q_2 = (\alpha - \beta)k. \tag{25}$$



Рис. 1. а) $l = 1.75, \beta = -0.05$; б) $l = 1.75, \beta = 0.15$

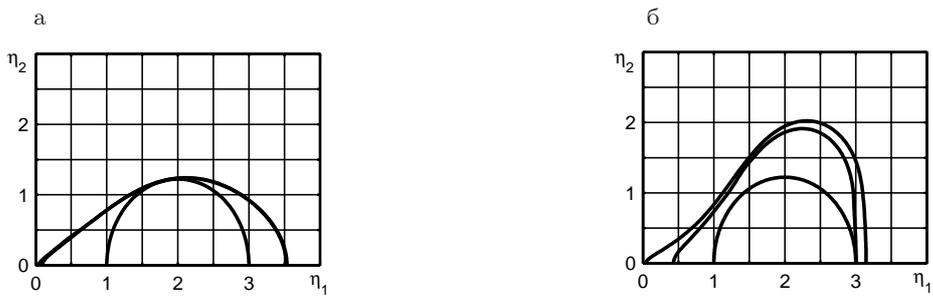


Рис. 2. а) $l = 2.0, \beta = -0.20$; б) $l = 2.0, \beta = 0.25$



Рис. 3. а) $l = 3.0, \beta = -0.20$; б) $l = 3.0, \beta = 0.35$



Рис. 4. а) $l = 4.0, \beta = -0.20$; б) $l = 4.0, \beta = 0.35$

Аналогичные результаты для $\delta = 0.1$, когда большие полуоси эллиптических вырезов лежат на оси Ox_1 , сведены в таблице 2. На рисунках 5-8 приведены внешние

Таблица 2

l	1.75			2.0			3.0			4.0		
	α_n	α_k	h									
-0.30							2.29	2.3620	0.094	2.24	2.9584	0.097
-0.25							2.05	2.4160	0.072	2.01	3.0122	0.097
-0.20							1.87	2.4691	0.097	1.85	3.0665	0.094
-0.15							1.70	2.5238	0.081	1.66	3.1211	0.096
-0.10				1.63	1.693	0.093	1.56	2.5785	0.081	1.54	3.1763	0.096
-0.05				1.46	1.747	0.094	1.40	2.6334	0.091	1.40	3.2321	0.086
0.0	1.39	1.5000	0.086	1.35	1.802	0.089	1.27	2.6891	0.091	1.25	3.2881	0.093
0.05	1.30	1.5550	0.082	1.25	1.857	0.089	1.18	2.7454	0.090	1.17	3.3447	0.096
0.10	1.20	1.6095	0.092	1.14	1.913	0.085	1.11	2.8020	0.093	1.10	3.4020	0.089
0.15	1.18	1.6650	0.093	1.14	1.969	0.089	1.10	2.8600	0.082	1.10	3.4596	0.095
0.20	1.16	1.7220	0.086	1.14	2.026	0.090	1.17	2.9180	0.085	1.23	3.5180	0.095
0.25	1.20	1.7780	0.098	1.22	2.084	0.085	1.27	2.9765	0.094	1.30	3.5770	0.093
0.30	1.30	1.8370	0.087	1.30	2.142	0.091	1.38	3.0360	0.094	1.39	3.6366	0.094
0.35	1.40	1.8960	0.085	1.41	2.201	0.096	1.47	3.0963	0.092	1.50	3.6970	0.094

границы правых пластических областей, соответствующих постоянным α_n и α_k , для таких значений l и β :



Рис. 5. а) $l = 1.75, \beta = 0.0$; б) $l = 1.75, \beta = 0.35$



Рис. 6. а) $l = 2.0, \beta = -0.10$; б) $l = 2.0, \beta = 0.35$



Рис. 7. а) $l = 3.0, \beta = -0.30$; б) $l = 3.0, \beta = 0.35$



Рис. 8. а) $l = 4.0, \beta = -0.30$; б) $l = 4.0, \beta = 0.35$

Установлено, что при

$$l = 1.75, \quad \beta < 0.0; \quad l = 2.0, \quad \beta < -0.10; \quad l = 3.0, \quad \beta < -0.30$$

раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует.

Точность удовлетворения условиям непрерывности напряжений (13) при начальном пластическом охвате контуров вырезов составила 10^{-4} , а в конце счета – 10^{-3} .

5. Выводы. Проанализировав данные, приведенные в таблицах, можно утверждать, что метод последовательных конформных отображений в сочетании с методом коллокации позволил исследовать упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами для расстояний между их контурами от $(3/2)a_1$ и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры пластических областей до расстояний, меньших $(1/10)a_1$. Здесь a_1 – полуоси эллиптических вырезов, лежащие на оси Ox_1 .

Абсолютная точность выполнения условия непрерывности упругих и пластических напряжений на границе их раздела не превышает 10^{-3} .

Определены значения геометрических и силовых параметров рассматриваемой задачи, при которых раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует, а соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.

2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
3. Иелев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва: Наука, 1966. – 707 с.

N. I. Kodak, V. N. Lozhkin

Elastoplastic state of an isotropic plane with two elliptical cut outs.

By method of successive conformal mapping elastoplastic equilibrium of an infinite isotropic plane with two same elliptical cut outs in the case of an ideal plasticity is studied. The plane by a uniform load along and across the line of centers of the cut outs is compressed. Their contours from external force are free. Stress on an unknown border of separating of the elastic and plastic domains are continuous. Efforts, at which the initial plastic inclusion of contours of the cut outs take place and at which the maximum convergence of plastic domains is possible, are determined.

Keywords: initial plastic inclusion, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping.

Н. І. Кодак, В. М. Ложкін

Пружнопластичний стан ізотропної площини з двома еліптичними вирізами.

Методом послідовних конформних відображень вивчено пружнопластичну рівновагу необмеженої ізотропної площини з двома однаковими еліптичними вирізами у випадку ідеальної пластичності. Площина стискається рівномірними зусиллями вздовж і впоперек лінії центрів вирізів. Контури вирізів вільні від зовнішніх впливів. На невідомій межі розділу пружної і пластичної областей напруження є неперервними. Знайдено умови, при яких має місце початкове пластичне охоплення контурів вирізів та при яких можливе найбільше зближення пластичних областей.

Ключові слова: початкове пластичне охоплення, пружна і пластична області, невідома межа розділу, конформне відображення.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
lozhkin@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.03.12

УДК 512.579

©2012. О. М. Литвин, Ю. І. Першина

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗРИВНИМ СПЛАЙНОМ, КОЛИ ВУЗЛИ СПЛАЙНА НЕ ЗБІГАЮТЬСЯ З РОЗРИВАМИ ФУНКЦІЇ

Побудовано та досліджено розривні апроксимаційні сплайни для наближення розривних функцій. Розроблено алгоритм пошуку розривів функції однієї змінної за допомогою наближення її побудованим розривним апроксимаційним сплайном. Також розроблено алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого розривного сплайна. Наведено приклади.

Ключові слова: розривна функція, розривна апроксимація, оцінка похибки, знаходження розривів функції.

1. Вступ. Задачі дослідження розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних функцій. Наприклад, при дослідженні внутрішньої структури тіла людини корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність у різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність, тобто щільність тіла є функцією з розривами першого роду на системі поверхонь, що відділяють різні його частини); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Дослідженню розривних функцій присвячені, наприклад, роботи [1]-[4], а наближення неперервних функцій розглядається, наприклад, у роботах [5], [6]. У роботі [1] досліджувалася задача рівномірного наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій розривними сплайнами однієї змінної. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [4], [6], в яких неперервні та диференційовні функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції розривних функцій за допомогою розривних сплайнів. Авторами вже були досліджені деякі питання наближення розривних функцій розривними сплайнами для функцій однієї змінної [7] та для функцій двох змінних [8], [9].

Ті методи, що вже були побудовані припускають, що розриви наближуваної функції відомі, і тому вони співпадають з розривами наближуючого сплайна. В даній роботі розробляється метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, коли розриви наближуваної функції ще треба знайти. А також пропонується алгоритм оптимального вибору вузлів наближуючого розривного

сплайна.

2. Постановка задачі. Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду, причому невідомо, де вони знаходяться. Метою роботи є побудова розривного апроксимаційного сплайна для наближення розривної функції, побудованого на заданих вузлах $x_k, k = \overline{1, n}$, які розбивають інтервал $[a, b]$ на n частин, та розробка алгоритму оптимального вибору вузлів наближуючого сплайна.

3. Побудова розривного апроксимаційного сплайна. Нехай $x_k, k = \overline{1, n}$ – вузли наближуючого апроксимаційного сплайна і деякі з них збігаються з точками розриву заданої розривної функції. Будемо будувати розривний апроксимаційний сплайн на кожному з відрізків у вигляді формули

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ h_k(x) + C_{k+1}^- h_{k+1}(x), k = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

$h_k(x)$ – базисні поліноми з властивостями $h_i(x_j) = \delta_{i,j}$, коефіцієнти C_k^+, C_{k+1}^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(x))^2 dt \rightarrow \min_C. \quad (2)$$

Теорема 1. *Оцінка похибки наближення розривної функції $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$ $k = \overline{1, n-1}$ розривним лінійним апроксимаційним сплайном $S(x)$ вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття має вигляд:*

– якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}, \quad (3)$$

– якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}, \quad (4)$$

$$L_\infty[a, b] = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p[a, b].$$

Доведення. Згідно формули (1) розривний лінійний апроксимаційний сплайн на кожному інтервалі розбиття набуває вигляду

$$S(x) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$J_k(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})^2 dx \rightarrow \min_C, k = \overline{1, n-1}.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+} = 0$, $\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-} = 0$, відносно невідомих C_k^+ , C_{k+1}^- :

$$\begin{cases} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2(f(x) - C_k^+ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}) \cdot (-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}) dx = 0 \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2(f(x) - C_k^+ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}) \cdot (-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}) dx = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2 + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx \\ C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2 dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx. \end{cases}$$

В отриманій системі зробимо заміну $C_k^+ = f(x_k+0) + \varepsilon_k^+$, $C_{k+1}^- = f(x_{k+1}-0) + \varepsilon_{k+1}^-$ і замінимо $f(x)$ інтерполяційним поліномом Лагранжа із залишковим членом $R(x)$. У результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів здобутої системи:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2 dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{3};$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}-x_k}{6};$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2 dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{3};$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx = \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) + \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) +$$

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx = \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) + \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) +$$

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx.$$

Отримаємо систему наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \varepsilon_k^+ + \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \varepsilon_{k+1}^- = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \varepsilon_k^+ + \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \varepsilon_{k+1}^- = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx. \end{cases} \quad (5)$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося формулами з роботи [1]:

– якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|f(x) - S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]};$$

– якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|f(x) - S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{8}\right)^2 \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}.$$

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_k^+, \varepsilon_{k+1}^-\}$, перепишемо систему (5) у вигляді:

1) якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2 \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2. \end{cases}$$

З цієї системи виходить, що

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \quad (6)$$

2) якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \cdot \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{16} \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1}-x_k}{3} \cdot \|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \cdot \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8}. \end{cases}$$

З цієї системи виходить, що

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \quad (7)$$

З нерівностей (6), (7) і випливає доведення теореми.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо функція $f(x) = a(const)$ наближується розривним лінійним сплайном вигляду (1) методом найменших квадратів, то оцінка (3) є точною, якщо ж функція має вигляд $f(x) = ax + b$, то в оцінці (4) також досягається рівність.

Наслідок. Якщо наближується функція $f(x)$ є кусково-лінійною або кусково-постійною функцією з точками розриву $x = x_k, k = \overline{1, n}$ та наближуємо її кусково-лінійним сплайном $S(x)$, визначеним формулами (1)-(2), то отримуємо точно наближену функцію $f(x)$, тобто $S(x) = f(x)$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо $C_k^+ = C_k^- = S(x_k), k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

4. Алгоритм оптимального вибору вузлів наближувачого розривного сплайна. Нехай $x_k, k = \overline{1, n}$ – вузли наближувачого сплайна, які не збігаються з розривами заданої функції $f(x)$. Викладемо алгоритм знаходження розривів заданої функції покровоко.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k, k = \overline{1, n}$ за формулою (1), який на кожному інтервалі розбиття може мати різний аналітичний вигляд $S_k(x, C)$ з невідомими $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. Знаходимо матрицю C невідомих коефіцієнтів сплайна з умови (2). При проведенні обчислювального експерименту для мінімізації використовувалася стандартна процедура системи комп'ютерної математики MathCad – під назвою $Minimize(\sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - Sp_k(t, C))^2 dt, C)$.

Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1) отримуємо розривний сплайн, що складається з функцій $S_k(x) = Sp_k(x, C), k = \overline{1, n-1}$.

Крок 3. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення

$$J_k^* = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} J_k(x); J_k(x) = |f(x) - S_k(x)|.$$

Означення. Якщо $|\lim_{x \rightarrow x_q^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_q^-} f(x)| < \varepsilon$, то функцію $f(x)$ будемо називати ε -неперервною в точці x_q .

Крок 4. Якщо виконуються умови: 1) $J_q < \varepsilon, J_{q+1} < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення; 2) $f(x) \in \varepsilon$ -неперервною в точці x_{q+1} , то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду.

Крок 5. З усіх $J_k, k = \overline{1, n-1}$ обираємо максимальне значення $W = \max_{1 \leq k \leq n-1} (J_k^*)$ та ділимо інтервал, якому належить це максимальне значення, наприклад, $W \in [x_r, x_{r+1}], r < n$ навпіл, тобто вводимо до множини вузлів сплайна новий вузол $x^* = x_r + \frac{x_{r+1} - x_r}{2}$.

Крок 6. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо невідому матрицю коефіцієнтів C . І далі перевіряємо виконання умови $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення. Якщо ця умова виконується, то ми отримали оптимальний вибір вузлів наближувачого сплайна, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо ж вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Приклад 1. Нехай в області $D = [0, 1]$ задана функція (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2, & x \in (0, 0.5]; \\ 2, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Тобто функція має один розрив першого роду в точці $x = 0.5$.

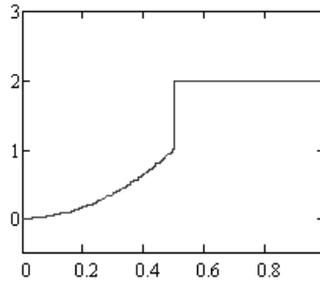


Рис. 1. Графічний вигляд функції $f(x)$

Обираємо вузли сплайна так, щоб вони не збігалися з розривами заданої функції $x_1 = 0, x_2 = 0.3, x_3 = 0.6, x_4 = 1$. Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1), який у нашому випадку буде мати вигляд:

$$S_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x_k \leq x \leq x_{k+1}, k = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

де елементи матриці C знаходимо з умови (2). Тобто будуємо розривний сплайн з точками розриву у вузлах сплайна (рис. 2). Задамо точність наближення $\varepsilon = 0.01$.

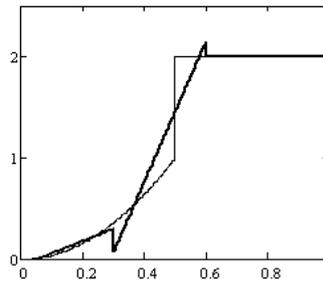


Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія)

Результат був отриманий за 24 ітерації. Наведемо результат деяких з них на рис. 3. Тобто на 24-й ітерації сплайн $S(x)$ наблизив задану функцію $f(x)$ з точністю ε . При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють $x_1 = 0, x_2 = 0,075, x_3 = 0,15, x_4 = 0,3, x_5 = 0,5, x_6 = 1$.

ПРИКЛАД 2. Нехай в тому ж інтервалі $[0, 1]$ задана функція (рис. 4).

$$g(x) = \begin{cases} -12x^2 + 2, & x \in (0, 0.4]; \\ 3 - x, & x \in (0.4, 0.7]; \\ 1, & x \in (0.7, 1]. \end{cases}$$

Наближення розривної функції розривним сплайном

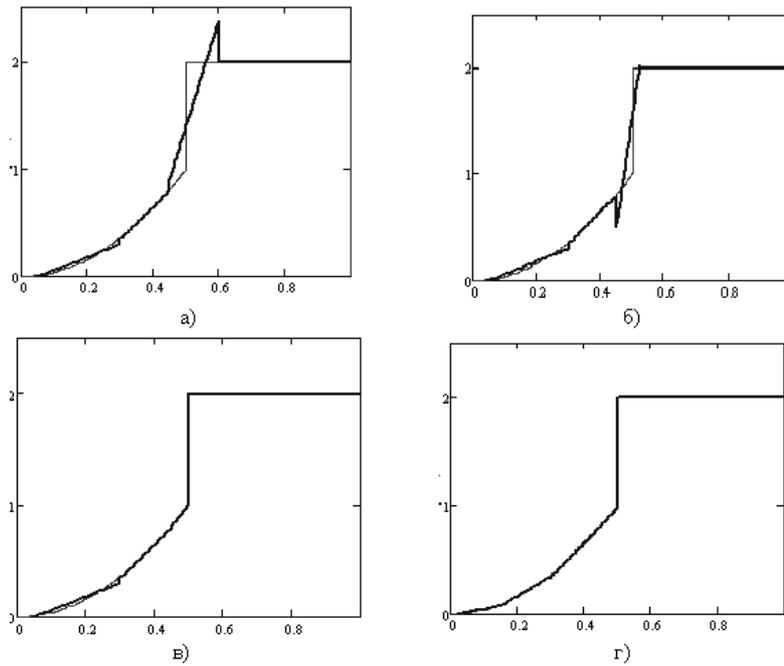


Рис. 3. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія) на: а) 2-й ітерації; б) 3-й ітерації; в) 18-й ітерації; г) 24-й ітерації

Тобто ця функція має два розриви першого роду в точках $x = 0.4$ та $x = 0.7$. Оберемо вузли сплайна $x_1 = 0, x_2 = 0.3, x_3 = 0.6, x_4 = 1$. Побудуємо розривний

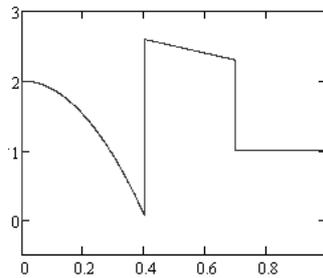


Рис. 4. Графічний вигляд функції $g(x)$

апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (8). Задамо точність таку ж як і в прикладі 1. На рис. 5 наведемо декілька проміжних результатів наближення. Тобто на 37-й ітерації сплайн $S(x)$ наблизив задану функцію $g(x)$ з точністю ε . При цьому ми оптимально обрали вузли наближуючого сплайна, серед яких є і розриви заданої функції.

$$x_1 = 0, x_2 = 0.075, x_3 = 0.15, x_4 = 0.225, x_5 = 0.3, x_6 = 0.375,$$

$$x_7 = 0.4, x_8 = 0.7, x_9 = 1.$$

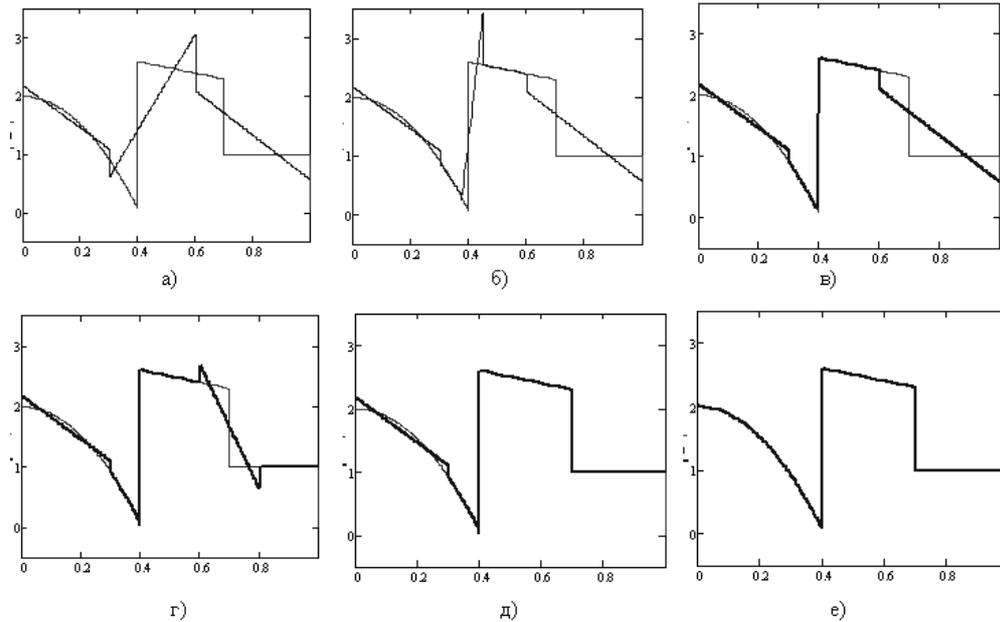


Рис. 5. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія) на: а) 1-й ітерації; б) 5-й ітерації; в) 10-й ітерації; г) 15-й ітерації; д) 30-й ітерації; е) 37-й ітерації

5. Висновки. Таким чином, у роботі розроблено алгоритм пошуку розривів функції однієї змінної за допомогою наближення її розривним апроксимаційним сплайном. Також розроблений алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого розривного сплайна. Наведено приклади, що підтверджують викладену теорію.

Надалі авторами планується дослідити питання оптимального пошуку вузлів розривного сплайна для функцій двох змінних з ректангульованою областю визначення.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. Петровская Н.Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т. 17, № 1. – С. 79-92.
3. Arnold D.N. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 39, № 5. – P. 1749-1779.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
6. Завьялов Ю.Н., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980 – 352 с.
7. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання процесів, які мають розриви, за допомогою розривних інтерполяційних сплайнів // Научно-технический журнал "Искусственный интеллект". – Донецк. – 2011. – № 2. – С. 152-158.
8. Литвин О.М., Першина Ю.І. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) // Компьютерная математика.

тика. – Киев, 2011. – № 1. – С. 96-105.

9. Литвин О.М., Першина Ю.И. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев. – 2011, № 5. – С. 34-47.

О. М. Lytvyn, Y. I. Pershina

Approach of discontinuous function by an discontinuous spline when spline knots do not coincide with function ruptures.

Are constructed and investigated discontinuous approximations splines for approach of discontinuous functions. The algorithm of search of ruptures of function of one variable by means of its approach by constructed approximations spline is developed. Also the algorithm of optimum definition of knots of an approaching discontinuous spline is developed. Examples are resulted.

Keywords: *discontinuous function, discontinuous approximation, error estimation, finding of ruptures of function.*

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

Приближение разрывной функции разрывным сплайном в случае, когда узлы сплайна не сходятся с разрывами функции.

Построены и исследованы разрывные аппроксимационные сплайны для приближения разрывных функций. Разработан алгоритм поиска разрывов функции одной переменной с помощью приближения ее построенным разрывным аппроксимационным сплайном. Также разработан алгоритм оптимального определения узлов приближающего разрывного сплайна. Приведены примеры.

Ключевые слова: *разрывная функция, разрывная аппроксимация, оценка погрешности, нахождение разрывов функции.*

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
yulia_pershina@mail.ru

Получено 26.03.12

УДК 531.38

©2012. А. В. Мазнев

СЛУЧАЙ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Найдено новое решение указанных уравнений, которое выражается элементарными функциями времени.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.

1. Введение. В работе рассмотрена механическая система, состоящая из тела-носителя произвольной формы и ротора, который вращается в теле-носителе вокруг закрепленной в нем оси. Уравнения движения такой системы (гиростата) можно получить, используя, например, работы В. Вольтерра [1], Н.Е. Жуковского [2], П.В. Харламова [3]. Исследование свойств движения гиростата представляется актуальным не только в случае постоянного гиростатического момента (см. обзор [4]), но и в случае, когда гиростатический момент зависит от времени (см., например, статьи [5, 6]). В работе [7] изучены перманентные вращения свободного гиростата (автор статьи использует термин “неавтономный гиростат”). Статья [8] посвящена доказательству теоремы о возможности равномерного вращения неавтономного гиростата вокруг наклонной оси (оси, которая не совпадает с направлением вектора силы тяжести). В [9, 10] изучены условия существования равномерных вращений и маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести. Работа [11] посвящена разработке общего метода исследования прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, который был применен в статье [12].

В этой работе получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (описание действующих сил можно найти в [13]) в случае переменного гиростатического момента. Данные условия позволили найти новый случай интегрируемости уравнений движения, которые являются обобщением уравнений Кирхгофа-Пуассона на случай переменного гиростатического момента.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} - B\boldsymbol{\nu} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times a\mathbf{x} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор, характеризующий составляющую момента количества движения гиростата [3]; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, определяющий направ-

ление магнитного поля; $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ – вектор угловой скорости, $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор; λ – величина гиристатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$; $L(t)$ – функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимого тела (ротора); $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными \mathbf{x} , $\boldsymbol{\nu}$, λ обозначает относительную производную по независимой переменной t .

Уравнения (1),(2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \quad (3)$$

Здесь k – произвольная постоянная.

Поставим задачу об определении условий, при выполнении которых система дифференциальных уравнений (1), (2) допускает три инвариантных соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \\ x_2 &= d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3, \\ x_3 &= e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где b_i, d_i, e_i ($i = \overline{0,3}$) – постоянные параметры. В силу структуры соотношений (4) для решения поставленной задачи можно принять главную систему координат, в которой $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда компоненты угловой скорости ω_i определяются соотношениями $\omega_i = a_i x_i$, или на основании (4) формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3), \\ \omega_2 &= a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3), \\ \omega_3 &= a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим выражения (4) в интеграл моментов из системы (3)

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3) &= k - b_0\nu_1 - d_0\nu_2 - e_0\nu_3 + \left(\frac{1}{2}B_{11} - b_1\right)\nu_1^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}B_{22} - d_2\right)\nu_2^2 + \left(\frac{1}{2}B_{33} - e_3\right)\nu_3^2 + (B_{12} - d_1 - b_2)\nu_1\nu_2 + \\ &+ (B_{13} - e_1 - b_3)\nu_1\nu_3 + (B_{23} - e_2 - d_3)\nu_2\nu_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формулы (6) вытекает, что функция λ является отношением многочлена второго порядка от переменных ν_i ($i = \overline{1,3}$) и линейного многочлена от этих переменных. Предположим, что λ – многочлен по переменным ν_i . Тогда из соотношения (6) следует

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3, \quad (7)$$

где параметры λ_i связаны с параметрами b_i, d_i, e_i, B_{ij} условиями

$$b_0 = -\alpha_1\lambda_0, \quad d_0 = -\alpha_2\lambda_0, \quad e_0 = -\alpha_3\lambda_0, \quad b_1 = \frac{1}{2}B_{11} - \alpha_1\lambda_1, \quad (8)$$

$$d_2 = \frac{1}{2}B_{22} - \alpha_2\lambda_2, \quad e_3 = \frac{1}{2}B_{33} - \alpha_3\lambda_3, \quad d_1 = B_{12} - b_2 - \alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 \quad (9)$$

$$e_1 = B_{13} - b_3 - \alpha_1\lambda_3 - \alpha_3\lambda_1, \quad e_2 = B_{23} - d_3 - \alpha_2\lambda_3 - \alpha_3\lambda_2. \quad (10)$$

При этом постоянная $k = 0$.

3. Условия существования инвариантных соотношений (4), (7). Подставим выражения (5) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения Пуассона из (2):

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \nu_2 - a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \nu_3 - a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \nu_1 - a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \nu_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Внесем в скалярные динамические уравнения, вытекающие из (1), $L = \dot{\lambda}$, выражения (4), (5) и учтем формулы (7)-(10). Тогда получим три равенства:

$$\begin{aligned} &-a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \left[(\alpha_2\lambda_3 + d_3) \nu_2 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{33}) \nu_3 \right] + \\ &+ a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \left[(\alpha_3\lambda_2 + e_2) \nu_3 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{22}) \nu_2 \right] + \\ &+ a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) [(\alpha_1\lambda_2 + b_2) \nu_3 - (\alpha_1\lambda_3 + b_3) \nu_2] + \\ &+ s_3\nu_2 - s_2\nu_3 + (C_{22} - C_{33}) \nu_2\nu_3 + C_{12}\nu_1\nu_3 - C_{13}\nu_1\nu_2 + C_{23} (\nu_3^2 - \nu_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \left[(\alpha_1\lambda_3 + b_3) \nu_1 + \frac{1}{2} (B_{22} + B_{33}) \nu_3 \right] - \\ &- a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \left[(\alpha_3\lambda_1 + e_1) \nu_3 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{22}) \nu_1 \right] + \\ &+ a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) [(\alpha_2\lambda_3 + d_3) \nu_1 - (\alpha_2\lambda_1 + d_1) \nu_3] + \\ &+ s_1\nu_3 - s_3\nu_1 + (C_{33} - C_{11}) \nu_1\nu_3 + C_{23}\nu_1\nu_2 - C_{12}\nu_2\nu_3 + C_{13} (\nu_1^2 - \nu_3^2) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &-a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \left[(\alpha_1\lambda_2 + b_2) \nu_1 + \frac{1}{2} (B_{22} + B_{33}) \nu_2 \right] + \\ &+ a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \left[(\alpha_2\lambda_1 + d_1) \nu_2 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{33}) \nu_1 \right] + \\ &+ a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) [(\alpha_3\lambda_1 + e_1) \nu_2 - (\alpha_3\lambda_2 + e_2) \nu_1] + \\ &+ s_2\nu_1 - s_1\nu_2 + (C_{11} - C_{22}) \nu_1\nu_2 + C_{13}\nu_2\nu_3 - C_{23}\nu_1\nu_3 + C_{12} (\nu_2^2 - \nu_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Потребуем, чтобы равенства (12)-(14) были тождествами для любых значений ν_i ($i = \overline{1, 3}$). Тогда получим условия:

$$\lambda_0 \left[\lambda_1 (a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2) + a_2\alpha_2d_1 + a_3\alpha_3e_1 - \frac{a_1\alpha_1}{2} (B_{33} + B_{22}) \right] + s_1 = 0, \quad (15)$$

$$\lambda_0 \left[\lambda_2 (a_3\alpha_3^2 + a_1\alpha_1^2) + a_3\alpha_3e_2 + a_1\alpha_1b_2 - \frac{a_2\alpha_2}{2} (B_{11} + B_{33}) \right] + s_2 = 0, \quad (16)$$

$$\lambda_0 \left[\lambda_3 (a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2) + a_1 \alpha_1 b_3 + a_2 \alpha_2 d_3 - \frac{a_3 \alpha_3}{2} (B_{22} + B_{11}) \right] + s_3 = 0, \quad (17)$$

$$a_2 d_2 (d_1 + \alpha_2 \lambda_1) + a_3 e_2 (e_1 + \alpha_3 \lambda_1) - \frac{a_1 b_2}{2} (B_{22} + B_{33}) + C_{12} = 0, \quad (18)$$

$$a_3 e_1 (e_2 + \alpha_3 \lambda_2) + a_1 b_1 (b_2 + \alpha_1 \lambda_2) - \frac{a_2 d_1}{2} (B_{11} + B_{33}) + C_{12} = 0, \quad (19)$$

$$a_1 b_1 (b_3 + \alpha_1 \lambda_3) + a_2 d_1 (d_3 + \alpha_2 \lambda_3) - \frac{a_3 e_1}{2} (B_{11} + B_{22}) + C_{13} = 0, \quad (20)$$

$$a_2 d_3 (d_1 + \alpha_2 \lambda_1) + a_3 e_3 (e_1 + \alpha_3 \lambda_1) - \frac{a_1 b_3}{2} (B_{22} + B_{33}) + C_{13} = 0, \quad (21)$$

$$a_1 b_2 (b_3 + \alpha_1 \lambda_3) + a_2 d_2 (d_3 + \alpha_2 \lambda_3) - \frac{a_3 e_2}{2} (B_{11} + B_{22}) + C_{23} = 0, \quad (22)$$

$$a_3 e_3 (e_2 + \alpha_3 \lambda_2) + a_1 b_3 (b_2 + \alpha_1 \lambda_2) - \frac{a_2 d_3}{2} (B_{11} + B_{33}) + C_{23} = 0, \quad (23)$$

$$a_1 b_2 (b_2 + \alpha_1 \lambda_2) - a_1 b_3 (b_3 + \alpha_1 \lambda_3) + a_3 e_2 (e_2 + \alpha_3 \lambda_2) - a_2 d_3 (d_3 + \alpha_2 \lambda_3) + \frac{1}{2} a_3 e_3 (B_{11} + B_{22}) - \frac{1}{2} a_2 d_2 (B_{11} + B_{33}) + C_{22} - C_{33} = 0, \quad (24)$$

$$a_1 b_3 (b_3 + \alpha_1 \lambda_3) - a_3 e_1 (e_1 + \alpha_3 \lambda_1) + a_2 d_3 (d_3 + \alpha_2 \lambda_3) - a_2 d_1 (d_1 + \alpha_2 \lambda_1) + \frac{1}{2} a_1 b_1 (B_{22} + B_{33}) - \frac{1}{2} a_3 e_3 (B_{11} + B_{22}) + C_{33} - C_{11} = 0, \quad (25)$$

которые являются условиями существования у уравнений (1), (2) инвариантных соотношений (4), (7).

Покажем разрешимость системы равенств (15)-(25). Если в качестве свободных параметров примем $\lambda_i, \alpha_i, b_2, b_3, d_3, B_{ij}$, то остальные параметры соотношений (4) можно найти из формул (8)-(10), а параметры s_i ($i = \overline{1, 3}$), C_{ij} можно определить из системы (15)-(25). В силу структуры этой системы выпишем три уравнения, которые являются результатом вычитания уравнений (18),(19); (20),(21); (22),(23):

$$a_1 \alpha_1 (b_3 \lambda_2 - b_2 \lambda_3) + a_3 e_3 (e_2 + \alpha_3 \lambda_2) - a_2 d_2 (d_3 + \alpha_2 \lambda_3) + \frac{1}{2} a_3 e_2 (B_{11} + B_{22}) - \frac{1}{2} a_2 d_3 (B_{11} + B_{33}) = 0, \quad (26)$$

$$a_2 \alpha_2 (d_1 \lambda_3 - d_3 \lambda_1) - a_3 e_3 (e_1 + \alpha_3 \lambda_1) + a_1 b_1 (b_3 + \alpha_1 \lambda_3) + \frac{1}{2} a_1 b_3 (B_{22} + B_{33}) - \frac{1}{2} a_3 e_1 (B_{22} + B_{11}) = 0, \quad (27)$$

$$a_3 \alpha_3 (e_1 \lambda_2 - e_2 \lambda_1) - a_2 d_2 (d_1 + \alpha_2 \lambda_1) + a_1 b_1 (b_2 + \alpha_1 \lambda_2) + \frac{1}{2} a_1 b_2 (B_{22} + B_{33}) - \frac{1}{2} a_2 d_1 (B_{11} + B_{33}) = 0. \quad (28)$$

Систему (26)-(28) запишем как систему относительно величин b_2, b_3, d_3

$$\begin{aligned} \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3 + \beta_3 d_3 &= \beta_0, \\ \gamma_1 b_2 + \lambda_2 b_3 + \gamma_3 d_3 &= \gamma_0, \\ \sigma_1 b_2 + \sigma_2 b_3 + \sigma_3 d_3 &= \sigma_0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -a_1\alpha_1\lambda_3, & \beta_2 &= a_1\alpha_1\lambda_2, & \beta_3 &= a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3 - B_0(a_2 + a_3), \\
 \gamma_1 &= B_0(a_1 + a_2) - a_1\alpha_1\lambda_1 - a_2\alpha_2\lambda_2, & \gamma_2 &= -a_3\alpha_3\lambda_2, & \gamma_3 &= a_3\alpha_3\lambda_1, \\
 \sigma_1 &= -a_2\alpha_2\lambda_3, & \sigma_2 &= B_0(a_1 + a_3) - a_1\alpha_1\lambda_1 - a_3\alpha_3\lambda_3, & \sigma_3 &= -a_2\alpha_2\lambda_1, \\
 \beta_0 &= \frac{1}{2}(a_2\alpha_2\lambda_3B_{22} - a_3\alpha_3\lambda_2B_{33}) - a_3B_{23}(B_0 - \alpha_3\lambda_3) + \\
 &\quad + a_3B_0(\alpha_2\lambda_3 + \alpha_3\lambda_2) - a_2\lambda_3(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3), \\
 \gamma_0 &= \frac{1}{2}(a_2\alpha_2\lambda_1B_{22} - a_1\alpha_1\lambda_2B_{11}) + a_2B_{12}(B_0 - \alpha_2\lambda_2) - \\
 &\quad - a_2B_0(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1) + \alpha_3\alpha_3(\lambda_1B_{23} - \lambda_2B_{13}) + \lambda_1\lambda_2(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2) - \\
 &\quad - a_3\alpha_2\alpha_3\lambda_1\lambda_3 + \alpha_1\lambda_2(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3), \\
 \sigma_0 &= \frac{1}{2}(a_3\alpha_3\lambda_1B_{33} - a_1\alpha_1\lambda_3B_{11}) + a_3B_{13}(B_0 - \alpha_3\lambda_3) - a_2\alpha_2\lambda_3B_{12} + \\
 &\quad + \lambda_1\lambda_3(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2) + \alpha_1\lambda_3(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3), \\
 B_0 &= \frac{1}{2}(B_{11} + B_{22} + B_{33}).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Учитывая формулы (30), найдем значение

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} = -B_0\{B_0^2(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2 + a_3) - \\
 &\quad - B_0[(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3) + (a_2 + a_3)(a_1 + a_2) \times \\
 &\quad \times (a_1\alpha_1\lambda_1 + a_3\alpha_3\lambda_3) + (a_1 + a_3)(a_2 + a_3)(a_1\alpha_1\lambda_1 + a_2\alpha_2\lambda_2)] + \\
 &\quad + (a_1\alpha_1\lambda_1 + a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3)[a_1\alpha_1\lambda_1(a_2 + a_3) + a_2\alpha_2\lambda_2(a_1 + a_3) + \\
 &\quad + a_3\alpha_3\lambda_3(a_1 + a_2)]\}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Поскольку параметр B_0 может принимать не нулевые значения, то будем предполагать, что $\Delta \neq 0$. Тогда система (29) имеет единственное решение

$$b_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{32}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \sigma_0 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_0 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_0 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Будем считать, что параметры a_i, α_i, λ_i ($i = \overline{1, 3}$), B_{ij} заданы. Тогда формулы (31)-(33) позволяют определить величины b_2, b_3, d_3 . Из соотношений (8)-(10) можно найти параметры $b_0, b_1, d_0, d_1, d_2, e_0, e_1, e_2$. Используя то обстоятельство, что параметры s_i ($i = \overline{1, 3}$), C_{ij} в силу постановки задачи не стеснены какими-либо ограничениями, из уравнений (15)-(17) определим значения s_i , из равенств (18), (20), (22), (24), (25) значения C_{12}, C_{13} и разности $C_{22} - C_{33}$ и $C_{33} - C_{11}$.

Таким образом, показана разрешимость условий (15)-(25) для случая обобщенной задачи динамики, то есть для случая $B_{ij} \neq 0$, $C_{ij} \neq 0$. При рассмотрении задачи о движении гиригостата с переменным гиригостатическим моментом под действием только силы тяжести необходимы дополнительные исследования, так как при $B_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1,3}$) определитель Δ из (31) обращается в нуль.

4. Интегрирование уравнений (11). В общем случае существования инвариантных соотношений (4), (7) уравнений (1), (2) интегрирование уравнений (11) затруднительно, так как они допускают только один первый интеграл

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Поэтому интегрирование уравнений (11) будем проводить, используя подход, который принят для случая постоянного гиригостатического момента [14].

Пусть параметры инвариантных соотношений (5) удовлетворяют дополнительным условиям

$$a_1 b_1 = a_2 d_2 = a_3 e_3 = m_0, \quad a_2 d_1 = -a_1 b_2, \quad a_3 e_1 = -a_1 b_3, \quad a_3 e_2 = -a_2 d_3. \quad (34)$$

В силу соотношений (9)-(10) равенства (34) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_1 B_{11} &= 2(m_0 + a_1 \alpha_1 \lambda_1), & a_2 B_{22} &= 2(m_0 + a_2 \alpha_2 \lambda_2), \\ a_3 B_{33} &= 2(m_0 + a_3 \alpha_3 \lambda_3), & d_3(a_3 - a_2) &= a_3(B_{23} - \alpha_2 \lambda_3 - \alpha_3 \lambda_2), \\ b_2(a_2 - a_1) &= a_2(B_{12} - \alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1), & b_3(a_3 - a_1) &= a_3(B_{13} - \alpha_1 \lambda_3 - \alpha_3 \lambda_1). \end{aligned} \quad (35)$$

На основании соотношений (34) скалярные равенства (5) имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + m_0 \boldsymbol{\nu} + G \boldsymbol{\nu}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ -a_1 b_2 & 0 & a_2 d_3 \\ -a_1 b_3 & -a_2 d_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = (a_1 b_0, a_2 d_0, a_3 e_0)$. Вместо скалярных уравнений (11) рассмотрим их векторное представление, учтя формулы (36)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}), \quad (37)$$

где

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad n_1 = -a_2 d_3, \quad n_2 = a_1 b_3, \quad n_3 = -a_1 b_2. \quad (38)$$

В статье [14] показано, что уравнение (37) кроме интеграла $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ имеет при условии $\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ дополнительный интеграл

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_0^2 + \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n})}{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}} = c, \quad (39)$$

где c – произвольная постоянная. Это значит, что интегрирование уравнения (37) можно осуществить в квадратурах.

Покажем, что для рассматриваемого случая (35) система уравнений (26)-(28) разрешима. Непосредственной подстановкой значений (9), (10), (35) в уравнения можно убедиться в том, что имеют место не менее двух случаев существования решения системы (26)-(28).

В первом случае параметры инвариантных соотношений (4), (7) и параметры уравнений (1), (2) имеют значения:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad a_2 B_{11} = a_1 B_{22}, \quad B_{12} = 0, \quad b_0 = 0, \quad d_0 = 0, \\
 e_0 = -\lambda_0, \quad b_1 = \frac{B_{11}}{2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1} (B_{13} - \lambda_1), \quad d_1 = 0, \\
 d_2 = \frac{B_{22}}{2}, \quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2} (B_{23} - \lambda_2), \quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3} (B_{13} - \lambda_1), \\
 e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3} (B_{23} - \lambda_2), \quad e_3 = \frac{a_1 B_{22}}{2a_3}, \quad \lambda_0 = \frac{2s_3}{a_3 (B_{11} + B_{22})}, \\
 \lambda_1 = \frac{B_{23} [B_{22} (2a_2 + 3a_3) + a_3 (2B_{11} + B_{33})]}{a_3 (2B_{11} + 3B_{22} + B_{33})}, \quad \lambda_3 = \frac{a_3 B_{33} - a_1 B_{11}}{2a_3}, \quad (40) \\
 s_1 = \lambda_0 (a_1 b_3 - a_3 \lambda_1), \quad s_2 = \lambda_0 (a_2 d_3 - a_3 \lambda_2), \quad C_{12} = \frac{a_2 d_3}{a_3} (a_3 \lambda_1 - a_1 b_3), \\
 C_{13} = -\frac{a_2 b_3}{2} (B_{11} + 2B_{22}), \quad C_{23} = -\frac{a_2 d_3}{2} (B_{11} + 2B_{22}), \\
 C_{33} - C_{22} = -a_1 b_3^2 - a_2 d_3 B_{23} + \frac{a_1 B_{11}}{4} (B_{22} - B_{33}), \\
 C_{11} - C_{33} = a_1 b_3 B_{13} + a_2 d_3^2 + \frac{1}{4} B_{11} (B_{33} - B_{11}).
 \end{aligned}$$

Инвариантные соотношения (4) в силу условий (40) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{B_{11}}{2} \nu_1 + \frac{a_3}{a_3 - a_1} (B_{13} - \lambda_1) \nu_3, \\
 x_2 &= \frac{a_1 B_{11}}{2a_2} \nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2} (B_{23} - \lambda_2) \nu_3, \quad (41) \\
 x_3 &= -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3} (B_{13} - \lambda_1) \nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3} (B_{23} - \lambda_2) \nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3} \nu_3.
 \end{aligned}$$

Запишем скалярные уравнения, вытекающие из (37), с учетом равенства $n_3 = 0$, которое следует из (38), (40):

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu}_1 &= -a_3 \lambda_0 \nu_2 + n_1 (\nu_2^2 + \nu_3^2) - n_2 \nu_1 \nu_2, \\
 \dot{\nu}_2 &= a_3 \lambda_0 \nu_1 + n_2 (\nu_1^2 + \nu_3^2) - n_1 \nu_1 \nu_2, \quad (42) \\
 \dot{\nu}_3 &= -\nu_3 (n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2).
 \end{aligned}$$

Уравнения (42) имеют первые интегралы $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ и

$$\frac{n_2 \nu_1 - n_1 \nu_2 + a_3 \lambda_0}{\nu_3} = c, \quad (43)$$

где c – произвольная постоянная.

Второй случай разрешимости уравнений (26)-(28) характеризуется равенствами:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad a_1 B_{11} = a_2 B_{22}, \quad B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0, \\
 b_1 = \frac{B_{11}}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2 B_{12}}{a_2 - a_1}, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1} (B_{13} - \lambda_1), \quad d_1 = \frac{a_1 B_{12}}{a_1 - a_2}, \\
 d_2 = \frac{B_{22}}{2}, \quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2} (B_{23} - \lambda_2), \quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3} (B_{13} - \lambda_1), \\
 e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3} (B_{23} - \lambda_2), \quad e_3 = \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}, \quad \lambda_0 = -\frac{2s_3}{a_3 B_{33}}, \\
 \lambda_1 = \frac{B_{13} [B_{11} (2a_1 + 3a_3) + a_3 (B_{22} - B_{11})]}{a_3 (2B_{11} + B_{22})}, \quad \lambda_3 = \frac{a_3 B_{33} - a_1 B_{11}}{2a_3}, \\
 \lambda_2 = \frac{B_{23} [B_{22} (2a_2 + 3a_3) + a_3 (B_{11} - B_{22})]}{a_3 (2B_{22} + B_{11})}, \quad s_1 = \lambda_0 (a_1 b_3 - a_3 \lambda_1), \\
 s_2 = \lambda_0 (a_2 d_3 - a_3 \lambda_2), \quad C_{12} = \frac{a_1 b_2}{2} (2B_{22} + B_{33}) - \frac{a_2 d_3}{a_3} (a_3 b_3 - a_3 \lambda_1), \\
 C_{13} = a_1 b_2 d_3 - \frac{a_1 b_3}{2} (2B_{11} + B_{33}), \quad C_{23} = -a_1 b_2 b_3 - \frac{a_2 d_3}{2} (B_{11} + 2B_{22}), \\
 C_{33} - C_{22} = a_1 (b_2^2 - b_3^2) - a_2 d_3 B_{23} + \frac{a_1 B_{11}}{4} (B_{22} - B_{33}), \\
 C_{11} - C_{33} = a_2 d_3^2 - \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2} + \frac{1}{4} B_{11} (B_{33} - B_{11}).
 \end{aligned} \tag{44}$$

При условиях (44) инвариантные соотношения таковы:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{B_{11}}{2} \nu_1 + \frac{a_1 B_{12}}{a_2 - a_1} \nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_1} (B_{13} - \lambda_1) \nu_3, \\
 x_2 &= \frac{a_1 B_{12}}{a_1 - a_2} \nu_1 + \frac{B_{22}}{2} \nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2} (B_{23} - \lambda_2) \nu_3, \\
 x_3 &= -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3} (B_{13} - \lambda_1) \nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3} (B_{23} - \lambda_2) \nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3} \nu_3,
 \end{aligned} \tag{45}$$

а уравнения (37) принимают более сложный вид, чем уравнения (42):

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu}_1 &= -a_3 \lambda_0 \nu_2 + n_1 (\nu_2^2 + \nu_3^2) - n_2 \nu_1 \nu_2 - n_3 \nu_1 \nu_3, \\
 \dot{\nu}_2 &= a_3 \lambda_0 \nu_1 + n_2 (\nu_1^2 + \nu_3^2) - n_1 \nu_1 \nu_2 - n_3 \nu_2 \nu_3, \\
 \dot{\nu}_3 &= n_3 (\nu_1^2 + \nu_2^2) - n_1 \nu_1 \nu_3 - n_2 \nu_2 \nu_3.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Так как в силу (38) и $\omega_0 = (0, 0, -a_3 \lambda_0)$ векторы \mathbf{n} , ω_0 в общем случае не ортогональны, то интеграла вида (39) для уравнений (46) не существует.

Рассмотрим интегрирование уравнений (42). Введем новые переменные

$$\nu_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \cos \theta. \tag{47}$$

Тогда равенство $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ становится тождеством. Подставим выражения (47) в уравнение (42) и интеграл (43). В результате несложных преобразований получим

$$\dot{\theta} = \operatorname{ctg} \theta \cdot \sqrt{\mu_0^2 \sin^2 \theta - (c \cos \theta + a_3 \lambda_0)^2}, \quad (48)$$

$$\varphi = -\alpha_0 + \arccos \frac{c \cos \theta + a_3 \lambda_0}{\mu_0 \sin \theta}, \quad (49)$$

где $\mu_0 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{n_1}{n_2}$.

Таким образом, из уравнения (48) вытекает, что $\theta = \theta(t)$ – элементарная функция времени. После ее нахождения $\varphi = \varphi(t)$ определим из формулы (49). Подстановка найденных функций $\theta(t)$, $\varphi(t)$ в равенства (47) дает возможность установить зависимости ν_i ($i = \overline{1, 3}$) от времени. Тогда соотношения (7), (41) позволяют определить основные переменные задачи от времени. Функция $L(t) = \dot{\lambda}(t)$ находится на основании формул (7) и (47).

Рассмотрим второй случай. Пусть параметры задачи и инвариантных соотношений удовлетворяют условиям (44). Тогда инвариантные соотношения принимают вид (45). Интегрирование уравнений (46) проведем при $\lambda_0 = 0$. Из условий (44) вытекает, что $s_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), то есть центр масс гиростата неподвижен. Запишем уравнения (46) в симметричной форме

$$\dot{\nu}_i = n_i - \nu_i (n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + n_3 \nu_3). \quad (50)$$

Пусть $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ – начальные значения переменных ν_i . Выберем их так, чтобы вектор \mathbf{n} был ортогонален вектору $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})$. Это позволяет записать решение уравнений (50) в виде

$$\nu_i(t) = \frac{n \nu_i^{(0)} + n_i \operatorname{sh} n(t - t_0)}{n \operatorname{ch} n(t - t_0)}, \quad (51)$$

где $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Как и первом случае функции (51) дают возможность построить решение уравнений (1), (2), которые выражаются элементарными функциями времени.

5. Вывод. Установлены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа-Пуассона в случае переменного гиростатического момента. Найденны новые решения этих уравнений.

1. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. – 1949. – **2**. – С. 152-309.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
5. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83-96.
6. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи и наблюдения в теории динамических систем // Киев: Наук. думка. – 1980. – 175 с.

7. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 5. – С. 825-826.
8. Ковалева Л.М., Позднякович Е.В. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
9. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
10. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
11. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
12. Мазнев А.В. О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 14-18.
13. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations. // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5. – № 5. – P. 747-754.
14. Горр Г.В., Узбек Е.К. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, вып. 3. – С. 418-426.

O. V. Maznyev

The case of the three invariant correlations non-autonomous gyrostat motion equations.

The terms of three invariant correlations existence of gyrostat motion equations under the action of potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic moment are got. The new solutions of these equations, which are expressed by elementary functions on time are found.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation.*

О. В. Мазнев

Випадок трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху неавтономного гіростата.

Отримано умови існування трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Знайдено новий розв'язок вказаних рівнянь, який виражається елементарними функціями часу.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.*

Донецкий национальный ун-т
maznev_av@rambler.ru

Получено 18.03.12

УДК 517.5

©2012. И. М. Савостьянова

ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Изучаются некоторые классы функций с нулевыми сферическими средними. Для таких классов получено описание в виде ряда по сферическим гармоникам.

Ключевые слова: сферические средние, сферические гармоники.

1. Введение. Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$, $U = \{x \in R^n : |x| > 1\}$, f – непрерывная функция на U . Предположим, что при всех $y \in R^n$, $r > 1 + |y|$, справедливо равенство

$$\int_S f(y + r\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma = 0, \quad (1)$$

где $d\sigma$ – нормированная поверхностная мера на S , $P_j(x)$ – произвольный однородный гармонический многочлен степени не выше j , $j \in \{0, 1, \dots\}$.

Функции, удовлетворяющие (1.1) при $j = 0$ изучались С. Хелгасоном [1], В.В. Волчковым [2] и другими авторами (см. [3], [4], [5]). В частности, хорошо известна теорема Хелгасона о носителе, утверждающая, что непрерывная функция с нулевыми интегралами по всем сферам, охватывающим шар $|x| \leq 1$, и убывающая быстрее любой степени на бесконечности, равна нулю при $|x| > 1$.

В данной работе получено описание пространства решений системы интегральных уравнений (1) в терминах разложения функции в ряд по сферическим гармоникам (см. теорему 1 ниже). Этот результат является обобщением теоремы, полученной Волчковым В.В. в работе [2] (для единичной весовой функции).

2. Формулировка основного результата. Пусть ρ, σ – полярные координаты в R^n (для всех $x \in R^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = x/\rho \in S$). Для любых $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ обозначим $K_{\alpha, \beta} = \{x \in R^n : \alpha < |x| < \beta\}$. Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$ – фиксированный ортонормированный базис в пространстве H_k сферических гармоник степени k на S (см., например [6, с. 162]), a_k – размерность пространства H_k . При $k = 0$ имеем $a_k = 1$. Положим $Y_1^{(0)} = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$, где ω_{n-1} – площадь S . Любой функции $f \in C(K_{\alpha, \beta})$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (2)$$

где $\alpha < \rho < \beta$,

$$f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma.$$

Обозначим через $S_{\alpha,\beta,j}$ множество непрерывных в $K_{\alpha,\beta}$ функций f , для которых выполнено равенство (1) при всех $y \in R^n$, $r > 0$ таких, что $r + |y| < \beta$, $\alpha + |y| < r$.

Теорема 1. Пусть $f \in C(K_{\alpha,\beta})$. Тогда для того, чтобы $f \in S_{\alpha,\beta,j}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложения (2) функции f имели вид

$$f_{kl}(\rho) = 0, \quad 0 \leq k \leq j$$

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{\nu=0}^{k-j-1} c_{k,l,\nu,j} \rho^{2\nu-n-k+2}, \quad k > j,$$

где $c_{k,l,\nu,j}$ – комплексные постоянные.

3. Вспомогательные построения. Как обычно, обозначим символами N, Z, Z_+ множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел, соответственно. Пусть $SO(n)$ – группа вращений R^n с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство H_k [7, с. 426], $\{t_{lp}^k\}$ – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{lp}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \tau \in SO(n). \quad (3)$$

При $n = 2$ в дальнейшем будет использоваться следующий базис в H_k , $k \geq 1$:

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k.$$

Если τ – вращение на угол θ в R^2 , то для этого базиса $t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{22}^k(\tau) = e^{ik\theta}$, $t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0$.

Если $n \geq 3$, то для коэффициентов разложения (2) при всех $1 \leq l, p \leq a_k$ имеет место равенство

$$f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{lp}^{(k)}(\tau)} d\tau \quad (4)$$

(см. [7, с. 431]).

Введем на пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ дифференциальный оператор d_k , $k \in Z$, действующий по правилу

$$(d_k f)(t) = f'(t) - \frac{k}{t} f(t), \quad f \in C^1(\alpha, \beta).$$

4. Свойства функций класса $S_{\alpha,\beta,j}$.

Лемма 1. Пусть $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. Тогда:

- а) $f(\tau x) \in S_{\alpha,\beta,j}$, $\forall \tau \in SO(n)$;
- б) если $n = 2$ и $f = f(x_1, x_2)$, то функция $g = f(x_1, -x_2)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$;
- в) если $f \in C^1(K_{\alpha,\beta})$, то все частные производные первого порядка от f принадлежат $S_{\alpha,\beta,j}$.

Доказательство. Воспользовавшись инвариантностью меры $d\sigma$ относительно вращений τ , имеем

$$\begin{aligned} \int_S f(\tau y + \tau r\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma &= \int_S f(\tau y + r\xi) P_j(y + r\tau^{-1}\xi) d\xi = \\ &= \int_S f(\tau y + r\xi) (P_j \circ \tau^{-1})(\tau y + r\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку $(P_j \circ \tau^{-1})$ – однородный гармонический многочлен степени не выше j (см. [7, с. 436]), из (1) получаем утверждение а).

Пусть теперь $n = 2$ и $f = f(x_1, x_2)$. Используя инвариантность меры $d\sigma$ относительно симметрий $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma_1, -\sigma_2)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 - r\sigma_2) P_j(y_1 + r\sigma_1, y_2 + r\sigma_2) d\sigma &= \\ = \int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) P_j(y_1 + r\sigma_1, y_2 - r\sigma_2) d\sigma &= \\ = \int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) Q_j(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) d\sigma, \end{aligned}$$

где $Q_j(x_1, x_2) = P_j(x_1, -x_2)$. Отсюда и (1) получаем утверждение б). Перейдем к доказательству утверждения в). Продифференцируем равенство (1) по каждой координате вектора $y \in R^n$. Получаем

$$\int_S \left(f(y + r\sigma) \frac{\partial P_j(y + r\sigma)}{\partial y_i} + P_j(y + r\sigma) \frac{\partial f(y + r\sigma)}{\partial y_i} \right) d\sigma = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial P_j(y + r\sigma)}{\partial y_i}$ многочлен степени $j - 1$, то

$$\int_S f(y + r\sigma) \frac{\partial P_j(y + r\sigma)}{\partial y_i} d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_S P_j(y + r\sigma) \frac{\partial f(y + r\sigma)}{\partial y_i} d\sigma = 0,$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 2. Пусть $f \in S_{\alpha, \beta, j}$. Тогда каждое слагаемое в разложении (2) принадлежит $S_{\alpha, \beta, j}$.

Доказательство. Пусть $n = 2$. Разложим f в ряд Фурье:

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\rho) e^{im\varphi}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\varphi+\alpha)}) e^{-ik\alpha} d\alpha = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\rho) \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i(m-k)\alpha} d\alpha = 2\pi f_k(\rho) e^{ik\varphi}. \quad (5)$$

Из равенства (1) и утверждения а) леммы 1 имеем

$$\int_0^{2\pi} f\left(ye^{i\alpha} + re^{i(\varphi+\alpha)}\right) P_j(y + re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Домножим данное равенство на $e^{-ik\alpha}$, проинтегрируем его по α на $[0; 2\pi]$ и поменяем порядок интегрирования. Получаем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(ye^{i\alpha} + re^{i(\varphi+\alpha)}\right) e^{-ik\alpha} d\alpha P_j(y + re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Учитывая (5), замечаем, что

$$\int_0^{2\pi} f_k(|y + re^{i\varphi}|) \left(\frac{y + re^{i\varphi}}{|y + re^{i\varphi}|}\right)^k P_j(y + re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что $f_k(\rho)e^{ik\varphi} \in S_{\alpha,\beta,j}$.

Пусть теперь $n \geq 3$. Применив к (1) утверждение а) леммы 1, при любом $\tau \in SO(n)$ получаем

$$\int_S f(\tau^{-1}y + r\tau^{-1}\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma = 0.$$

После умножения указанного равенства на $\overline{t_{lp}^k(\tau)}$, проинтегрируем его на $SO(n)$

$$\int_{SO(n)} \int_S f(\tau^{-1}y + r\tau^{-1}\sigma) \overline{t_{lp}^k(\tau)} P_j(y + r\sigma) d\sigma d\tau = 0.$$

Поменяв порядок интегрирования и воспользовавшись формулой (4), получим утверждение леммы 2. \square

Лемма 3. Пусть $f \in C^1(\alpha, \beta)$, $k \in Z_+$ – фиксировано и при некотором $Y \in H_k$ функция $f(\rho)Y(\sigma)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$. Тогда:

а) $(d_k f)(\rho)Y_l^{(k+1)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$, при всех $1 \leq l \leq a_{k+1}$;

б) если $k \geq 1$, то $(d_{2-k-n} f)(\rho)Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$, при всех $1 \leq l \leq a_{k-1}$.

Доказательство. Пусть $n = 2$. По условию $f(\rho)e^{ik\varphi} \in C^1(\alpha, \beta)$. По лемме 1 имеем $(f(\rho)e^{ik\varphi})'_{x_1} \in S_{\alpha,\beta,j}$. Поскольку

$$(f(\rho)e^{ik\varphi})'_{x_1} = (f'(\rho) + k\rho^{-1}f(\rho)) e^{i(k-1)\varphi} + (f'(\rho) - k\rho^{-1}f(\rho)) e^{i(k+1)\varphi},$$

отсюда и из леммы 1 получаем утверждения а), б).

Пусть $n \geq 3$. Из условия и леммы 1 имеем $\frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1} \in S_{\alpha,\beta,j}$. Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1} &= \frac{\partial(f(|x|))}{\partial x_1} \frac{Y(x)}{|x|^k} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{Y(x)}{|x|^k} \right) f(|x|) = \\ &= f'(|x|) \frac{Y(x)}{|x|^k} \frac{x_1}{|x|} + f(|x|) \frac{Y'_{x_1}(x)}{|x|^k} - kf(|x|) \frac{Y(x)}{|x|^{k+1}} \frac{x_1}{|x|} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |x|^{-1} f(|x|) Y'_{x_1} \left(\frac{x}{|x|} \right) + (d_k f)(|x|) \frac{x_1}{|x|} Y \left(\frac{x}{|x|} \right) = \\ &= \rho^{-1} f(\rho) U(\sigma) + (d_k f)(\rho) \sigma_1 Y(\sigma), \end{aligned}$$

где $U(\sigma) = 0$ при $k = 0$ и $U(\sigma) = \rho^{1-k} \frac{\partial(\rho^k Y(\sigma))}{\partial x_1} \in H_{k-1}$ при $k \geq 1$. Имея ввиду, что при $k = 0$ $\sigma_1 Y(\sigma) \in H_1$, а при $k \geq 1$ $\sigma_1 Y(\sigma) = U_0(\sigma) + U_1(\sigma)$, где $U_0 \in H_{k-1}$, $U_1 \in H_{k+1}$ (см. лемму 3.4 [6, с. 253]), получаем

$$\frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1} = (d_k f)(\rho)U_1(\sigma) + \rho^{-1} f(\rho)U_2(\sigma) + f'(\rho)U_3(\sigma), \quad (6)$$

где $U_2, U_3 \in H_{k-1}$ при $k \geq 1$ и равны нулю при $k = 0$. Отсюда и лемм 1, 2 следует утверждение а) леммы 3. Докажем утверждение б). Положим

$$V_1(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad V_m(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1} \sigma_m,$$

где $k \geq 1, 2 \leq m \leq n-1$. Рассмотрим функцию $F_m(x) = f(\rho)V_m(\sigma)$, $m = 1, \dots, n-1$. Учитывая, что $V_m \in H_k$, из леммы 2, получаем, что $F_m \in S_{\alpha, \beta, j}$. Тогда по лемме 1, имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \in S_{\alpha, \beta, j}.$$

Из определения $F_m(x)$ находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{\partial F_m}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f(|x|) \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right)^k \right) - i \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f(|x|) \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right)^k \right) + \\ &+ \sum_{m=2}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(f(|x|) \frac{x_m}{|x|} \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right)^{k-1} \right) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right)^{k-1} f'(|x|) \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right) \left(\frac{x_1 - ix_2}{|x|} \right) + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{x_m^2}{|x|^2} \right\} + \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right)^{k-1} \frac{f(|x|)}{|x|} \times \\ &\times \left\{ 2k + n - 2 - k \frac{x_1^2 + x_2^2}{|x|^2} - k \sum_{m=2}^{n-1} \frac{x_m^2}{|x|^2} \right\} = (d_{2-k-n} f)(\rho) (\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1} \in H_{k-1}$, из леммы 2, получаем утверждение б). \square

5. Доказательство основного результата.

Лемма 4. Пусть $k \in N$ – фиксировано, $g \in C(\alpha, \beta)$ и $g(\rho)Y(\sigma) \in S_{\alpha, \beta, j}$ для некоторого $Y \in H_k$. Тогда

$$g(\rho) = \sum_{m=0}^{k-j-1} c_m \rho^{2m-n-k+2}, \quad (7)$$

где c_m – комплексные постоянные и сумма считается равной нулю при $0 \leq k \leq j$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$. Пусть $0 \leq k \leq j$. Положим $j = k$ и $P_j(x) = \overline{Y(x)}$, где $Y(x) = |x|^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Из условия имеем

$$\int_S g(|y + r\sigma|) Y\left(\frac{y + r\sigma}{|y + r\sigma|}\right) \overline{Y(y + r\sigma)} d\sigma = 0.$$

Положив $y = 0$, получаем

$$g(r) \int_S Y(\sigma) \overline{Y(\sigma)} d\sigma = 0.$$

Отсюда $g(r) = 0$.

Пусть теперь $k = j + 1$. Тогда по лемме 3 функция $(d_{1-n-j}g)(\rho)Y_l^{(j)}(\sigma)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$. По доказанному $d_{1-n-j}g = 0$. Отсюда $g(\rho) = c\rho^{1-n-j}$, где c – константа. Продолжая аналогичные рассуждения, индукцией по k получаем, что g имеет вид (7) для $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$.

Общий случай получается отсюда стандартным приемом сглаживания (см. [2, с. 1313]). \square

Перейдем к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. По лемме 2 имеем $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$. Применяя лемму 4 при $g(\rho) = f_{kl}(\rho)$, получаем

$$f_{kl}(\rho) = 0, \quad 0 \leq k \leq j$$

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{\nu=0}^{k-j-1} c_{k,l,\nu,j} \rho^{2\nu-n-k+2}, \quad k > j,$$

что и требовалось. Докажем *достаточность*. Учитывая, что

$$H_k H_m \subset H_{k-m} + H_{k-m+2} + \dots + H_{k+m}$$

(см. [4, гл. 9, § 2.3]), из условия и леммы 2.1.7 [3] получаем, что $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$ при всех $k \geq 0, 0 \leq l, p \leq a_k$. Положим

$$F(\tau) = \int_S f(\tau^{-1}y + r\tau^{-1}\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma, \quad \tau \in SO(n).$$

Умножая это равенство на $t_{lp}^k(\tau)$ и интегрируя на $SO(n)$, из (4) получаем

$$\int_{SO(n)} F(\tau) \overline{t_{lp}^k(\tau)} d\tau = 0.$$

Учитывая полноту системы $t_{lp}^k(\tau)$ (см. [7, с. 435]) для $n \geq 3$ и указанные в п. 3 формулы для $t_{lp}^k(\tau)$ при $n = 2$, заключаем, что $F = 0$ на $SO(n)$. Отсюда $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. Таким образом, теорема 1 доказана. \square

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. Волчков В.В. Сферические средние на евклидовых пространствах // Укр. мат. журн.– 1998. – Вып. 50, № 10. – С. 1310-1315.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations.– Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
5. Rawat R., Srivastava. Spherical means in annular regions in the n-dimensional real hyperbolic spaces, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.) – 2011. – V. 121, № 3. – P. 311-325.
6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
7. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.

I. M. Savostyanova

The weighed spherical averages on Euclid's spaces.

Some classes of functions with zero spherical averages are investigated. For such classes the description in the form of a number on spherical harmonics is obtained.

Keywords: *spherical averages, spherical harmonics.*

I. М. Савостьянова

Зважені сферичні середні на евклідових просторах.

Вивчаються деякі класи функцій з нульовими сферичними середніми. Для таких класів отримано опис у вигляді ряда за сферичними гармоніками.

Ключові слова: *сферичні середні, сферичні гармоніки.*

Донецкий национальный ун-т
savost@mail.ru

Получено 15.12.11

UDK 531.38

©2012. R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov

ABOUT ONE MODULUS INEQUALITY OF THE ORDER $p \geq 1$

The present paper is devoted to the study of space mappings which are more general than quasiregular. The so-called modulus inequalities of the order p , $p \geq 1$, and its connections with space mappings are investigated. The analogue of the well-known Poletskii inequality has been proved for the mappings having N , N^{-1} and $L_p^{(2)}$ -property

Keywords: mappings with finite and bounded distortion, modulus of curves families, Poletskii inequality.

1. Introduction. Here we give some definitions. Everywhere below, D is a domain in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m is the Lebesgue measure in \mathbb{R}^n , m_1 is the linear Lebesgue measure in \mathbb{R} . The notation $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ assumes that f is continuous.

Recall that a mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to have the N -property (of Luzin) iff $m(f(S)) = 0$ whenever $m(S) = 0$ for all measurable sets $S \subset \mathbb{R}^n$. Similarly, f has the N^{-1} -property iff $m(f^{-1}(S)) = 0$ whenever $m(S) = 0$.

A curve γ in \mathbb{R}^n is a continuous mapping $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ where Δ is an interval in \mathbb{R} . Its locus $\gamma(\Delta)$ is denoted by $|\gamma|$. Given a family of curves Γ in \mathbb{R}^n , a Borel function $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ , abbr. $\rho \in \text{adm } \Gamma$, if

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$$

for each (locally rectifiable) $\gamma \in \Gamma$. Let $p \geq 1$. The p -modulus $M_p(\Gamma)$ of Γ is defined as

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x)$$

interpreted as $+\infty$ if $\text{adm } \Gamma = \emptyset$. Note that $M_p(\emptyset) = 0$; $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$ whenever $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, and $M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i)$, see Theorem 6.2 in [8].

We say that a property P holds for p -almost every (p -a.e.) curves γ in a family Γ if the subfamily of all curves in Γ for which P fails has p -modulus zero.

If $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a locally rectifiable curve, then there is the unique nondecreasing length function l_γ of Δ onto a length interval $\Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ with a prescribed normalization $l_\gamma(t_0) = 0 \in \Delta_\gamma$, $t_0 \in \Delta$, such that $l_\gamma(t)$ is equal to the length of the subcurve $\gamma|_{[t_0, t]}$ of γ if $t > t_0$, $t \in \Delta$, and $l_\gamma(t)$ is equal to $-\text{length}(\gamma|_{[t, t_0]})$ if $t < t_0$, $t \in \Delta$. Let $g : |\gamma| \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping, and suppose that the curve $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ is also locally rectifiable. Then there is a unique non-decreasing function $L_{\gamma, g} : \Delta_\gamma \rightarrow \Delta_{\tilde{\gamma}}$ such that $L_{\gamma, g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t)$ for all $t \in \Delta$. A curve γ in D is called here a (whole) *lifting* of a curve $\tilde{\gamma}$ in \mathbb{R}^n under $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ if $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

We say that a mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfies the $L_p^{(2)}$ -property for p -a.e. curve $\tilde{\gamma}$ in $f(D)$, if each lifting γ of $\tilde{\gamma}$ is locally rectifiable and the function $L_{\gamma,f}$ has the N^{-1} -property.

Set

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|},$$

$$K_{I,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

On of the main results proved in the paper is the following.

Statement 1. *Let a mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ be differentiable a.e. and satisfies N, N^{-1} and $L_p^{(2)}$ -properties. Then*

$$M_p(f(\Gamma)) \leq \int_D K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) dm(x) \tag{1}$$

for every family of curves Γ in D and $\rho \in \text{adm } \Gamma$.

Remark that an analog of the Statement 1 for $p = n$ was proved in [4], see Theorem 8.6 (see also [1] and [3]).

2. Proof of the main result. Let $I = [a, b]$. Given a rectifiable path $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ we define a length function $l_\gamma(t)$ by the rule $l_\gamma(t) = S(\gamma, [a, t])$, where $S(\gamma, [a, t])$ is the length of the path $\gamma|_{[a,t]}$. Let $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a rectifiable curve in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, and $l(\alpha)$ be its length. A *normal representation* α^0 of α is defined as a curve $\alpha^0 : [0, l(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ which can be got from α by change of parameter such that $\alpha(t) = \alpha^0(S(\alpha, [a, t]))$ for every $t \in [0, l(\alpha)]$.

Suppose that α and β are curves in \mathbb{R}^n . Then a notation $\alpha \subset \beta$ denotes that α is a subpath of β . In what follows, I denotes an open, a closed or a semi-open interval on the real axes. The following definition can be found in the section 5 of Ch. II in [6].

Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a mapping such that $f^{-1}(y)$ does not contain a non-degenerate curve, $\beta : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a closed rectifiable curve and $\alpha : I \rightarrow D$ such that $f \circ \alpha \subset \beta$. If the length function $l_\beta : I_0 \rightarrow [0, l(\beta)]$ is a constant on $J \subset I$, then β is a constant on J and consequently a curve α to be a constant on J . Thus, there exists a unique function $\alpha^* : l_\beta(I) \rightarrow D$ such that $\alpha = \alpha^* \circ (l_\beta|_I)$. We say that α^* to be a *f-representation of α by the respect to β* if $\beta = f \circ \alpha$.

REMARK 1. Given a closed rectifiable curve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $t_0 \in (a, b)$, let $l_\gamma(t)$ denotes the length of the subcurve $\gamma|_{[t_0,t]}$ of γ if $t > t_0$, $t \in (a, b)$, and $l_\gamma(t)$ is equal to $-l(\gamma|_{[t,t_0]})$ if $t < t_0$, $t \in (a, b)$. Then we observe that properties of the $L_{\gamma,f}$ connected with the length functions $l_\gamma(t)$ and $l_{\tilde{\gamma}}(t)$, $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, do not essentially depend on the choice of $t_0 \in (a, b)$. Moreover, we may consider that in this case $t_0 = a$ because given $t_0 \in (a, b)$, $S(\gamma, [a, t]) = S(\gamma, [a, t_0]) + l_\gamma(t)$. Further, we use the notion $l_\gamma(t)$ for $l_\gamma(t) = S(\gamma, [a, t])$, where $S(\gamma, [a, t])$ is the length of the path $\gamma|_{[a,t]}$, and consider that $t_0 = 0$ whenever a curve γ is closed.

The following statement gives the connection between $L_p^{(2)}$ -property and some properties of curves meaning above.

Lemma 1. *A mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ has $L_p^{(2)}$ -property if and only if $f^{-1}(y)$ does not contain a nondegenerate curve for every $y \in \mathbb{R}^n$, and the f -representation γ^* is rectifiable and absolutely continuous for p -a.e. closed curves $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Proof. Suppose that f has $L_p^{(2)}$ -property. Then γ^* is rectifiable for p -a.e. closed curves $\tilde{\gamma}$ whenever $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ because $(\gamma^*)^0 = \gamma^0$, see Theorem 2.6 in [8]. Moreover, we observe that $f^{-1}(y)$ does not contain a nondegenerate curve for every $y \in \mathbb{R}^n$ because $L_{\gamma,f}$ is well-defined and has N^{-1} -property for p -a.e. closed curves $\tilde{\gamma}$ and all γ with $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. For such γ and $\tilde{\gamma}$, we have

$$\gamma(t) = \gamma^* \circ l_{\tilde{\gamma}}(t) = \gamma^0 \circ l_{\gamma}(t) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(l_{\tilde{\gamma}}(t))$$

and, denoting by $s := l_{\tilde{\gamma}}(t)$ we obtain

$$\gamma^*(s) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(s).$$

So γ^* is absolutely continuous because $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ is absolutely continuous, see section 2.10.13 in [2], and

$$|\gamma^0(s_1) - \gamma^0(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$$

for all $s_1, s_2 \in [0, l(\gamma)]$.

Inversely, let $f^{-1}(y)$ does not contain a nondegenerate curve for every $y \in \mathbb{R}^n$. Then $L_{\gamma,f}^{-1}$ is well-defined for p -a.e. closed curve $\tilde{\gamma}$ and all γ with $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. By assumption curve γ^* is rectifiable for p -a.e. closed curve $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$; in particular, $\gamma^{*0} = \gamma^0$. Moreover, for all such $\tilde{\gamma}$, γ and γ^* , $l_{\gamma^*}(s) = L_{\gamma,f}^{-1}(s)$, and absolute continuity of $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ follows from Theorem 1.3 in [8]. Let Γ_1 be a family of all closed curves $\tilde{\alpha} = f \circ \alpha$ in $f(D)$ such that α^* either is not rectifiable or $L_{\alpha,f}^{-1}(s)$ is not absolutely continuous. Let Γ be a family of all curves $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ in $f(D)$ such that γ either is not locally rectifiable or $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ is not locally absolutely continuous. Then $\Gamma > \Gamma_1$ and, thus, $M_p(\Gamma) \leq M_p(\Gamma_1) = 0$ that implies desired equality $M_p(\Gamma) = 0$. \square

A mapping $\varphi : X \rightarrow Y$ between metric spaces X and Y is said to be a *Lipschitzian* provided

$$\text{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq M \cdot \text{dist}(x_1, x_2)$$

for some $M < \infty$ and for all x_1 and $x_2 \in X$. The mapping φ is called *bi-lipschitz* if, in addition,

$$M^* \text{dist}(x_1, x_2) \leq \text{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

for some $M^* > 0$ and for all x_1 and $x_2 \in X$. Later on, X and Y are subsets of \mathbb{R}^n with the Euclidean distance.

The following proposition can be found in [3], see Lemma 3.20, see also Lemma 8.3 Ch. VIII in [4].

Lemma 2. *Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a differentiable a.e. in D , and have N - and N^{-1} -properties. Then there is a countable collection of compact sets $C_k^* \subset D$ such that $m(B_0) = 0$*

where $B_0 = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^*$ and $f|_{C_k^*}$ is one-to-one and bi-lipschitz for every $k = 1, 2, \dots$.
 Moreover, f is differentiable at C_k^* and $J(x, f) \neq 0$.

Given a set E in \mathbb{R}^n and a curve $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, we identify $\gamma \cap E$ with $\gamma(\Delta) \cap E$. If γ is locally rectifiable, then we set

$$l(\gamma \cap E) = m_1(E_\gamma),$$

where $E_\gamma = l_\gamma(\gamma^{-1}(E))$; here $l_\gamma : \Delta \rightarrow \Delta_\gamma$ as in the previous section. Note that $E_\gamma = \gamma_0^{-1}(E)$, where $\gamma_0 : \Delta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the natural parametrization of γ and

$$l(\gamma \cap E) = \int_{\Delta} \chi_E(\gamma(t)) |dx| := \int_{\Delta_\gamma} \chi_{E_\gamma}(s) ds.$$

The bellow statement can be found in Chapter IX of [4], see Theorem 9.1.

Lemma 3. *Let E be a set in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \geq 1$. Then E is measurable if and only if $\gamma \cap E$ is measurable for p -a.e. curve γ in D . Moreover, $m(E) = 0$ if and only if*

$$l(\gamma \cap E) = 0$$

on p -a.e. curve γ in D .

The following result is a generalization of the known Poletskii inequality for quasiregular mappings, see Theorem 1 in [5] and Theorem 8.1 Ch. II in [6]. It's analog was also proved in [3-4] for the case $p = n$, see also [1].

Theorem 1. *Let a mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a differentiable a.e. in D , have N - and N^{-1} -properties, and $L_p^{(2)}$ -property, too. Then the relation (1) holds for every curve family Γ in D and a function $\rho \in \text{adm } \Gamma$.*

Proof. Let B_0 and C_k^* , $k = 1, 2, \dots$, be as in Lemma 2. Setting by induction $B_1 = C_1^*$, $B_2 = C_2^* \setminus B_1, \dots$, and

$$B_k = C_k^* \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l \tag{2}$$

we obtain the countable covering of D consisting of mutually disjoint Borel sets $B_k, k = 0, 1, 2, \dots$ with $m(B_0) = 0$, $B_0 = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. By the assumption, f has N -property in D and, consequently, $m(f(B_0)) = 0$. Let $\rho \in \text{adm } \Gamma$ and

$$\tilde{\rho}(y) = \chi_{f(D \setminus B_0)} \cdot \sup_{x \in f^{-1}(y) \cap D \setminus B_0} \rho^*(x),$$

where

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)), & \text{for } x \in D \setminus B_0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that $\tilde{\rho}(y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \rho_k(y)$ where

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \rho^*(f_k^{-1}(y)), & \text{for } y \in f(B_k), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and every $f_k = f|_{B_k}$, $k = 1, 2, \dots$, is injective. Thus, the function $\tilde{\rho}$ is Borel, see section 2.3.2 in [2].

Let $\tilde{\gamma}$ be a closed rectifiable curve such that $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, $\tilde{\gamma}^0$ be a normal representation of $\tilde{\gamma}$ and γ^* be f -representation of γ by the respect to $\tilde{\gamma}$, see above. Since $m(f(B_0)) = 0$, $\tilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ for p -a.e. curve $\tilde{\gamma}$ and a.e. $s \in [0, l(\tilde{\gamma})]$, see Lemma 3. For p -a.e. paths $\tilde{\gamma}$ and all γ with $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, we have that

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\rho}(y) |dy| &= \int_0^{l(\tilde{\gamma})} \tilde{\rho}(\tilde{\gamma}^0(s)) ds = \\ &= \int_0^{l(\tilde{\gamma})} \sup_{x \in f^{-1}(\tilde{\gamma}^0(s)) \cap D \setminus B_0} \rho^*(x) ds \geq \int_0^{l(\tilde{\gamma})} \frac{\rho(\gamma^*(s))}{l(f'(\gamma^*(s)))} ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Since $\tilde{\gamma}^0$ is rectifiable, $\tilde{\gamma}^0(s)$ is differentiable a.e. Besides that, a curve γ^* is absolutely continuous for p -a.e. $\tilde{\gamma}$ by Lemma 1. Since $\tilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ for a.e. $s \in [0, l(\tilde{\gamma})]$ and p -a.e. curves $\tilde{\gamma}$, we have $\gamma^*(s) \notin B_0$ at a.e. $s \in [0, l(\tilde{\gamma})]$. Thus, the derivatives $f'(\gamma^*(s))$ and $\gamma^{*'}(s)$ exist for a.e. s . Taking into account the formula of the derivative of the superposition of functions, and that the modulus of the derivative of the curve by the natural parameter equals to 1, we have

$$\begin{aligned} 1 &= |(f \circ \gamma^*)'(s)| = |f'(\gamma^*(s))\gamma^{*'}(s)| = \\ &= \left| f'(\gamma^*(s)) \cdot \frac{\gamma^{*'}(s)}{|\gamma^{*'}(s)|} \right| \cdot |\gamma^{*'}(s)| \geq l(f'(\gamma^*(s))) \cdot |\gamma^{*'}(s)|. \end{aligned} \quad (4)$$

It follows from (4) that a.e.

$$\frac{\rho(\gamma^*(s))}{l(f'(\gamma^*(s)))} \geq \rho(\gamma^*(s)) \cdot |\gamma^{*'}(s)|. \quad (5)$$

By absolutely continuity of γ^* , definition of ρ and Theorem 4.1 in [8] we obtain

$$1 \leq \int_{\tilde{\gamma}} \rho(x) |dx| = \int_0^{l(\tilde{\gamma})} \rho(\gamma^*(s)) \cdot |\gamma^{*'}(s)| ds. \quad (6)$$

It follows from (3), (5) and (6) that $\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\rho}(y) |dy| \geq 1$ for p -a.e. closed curve $\tilde{\gamma}$ in $f(\Gamma)$. The case of the arbitrary path $\tilde{\gamma}$ can be got from the taking of sup in $\int_{\tilde{\gamma}'} \tilde{\rho}(y) |dy| \geq 1$ over all

closed subpaths $\tilde{\gamma}'$ of $\tilde{\gamma}$. Thus, $\tilde{\rho}(y) \in \text{adm } f(\Gamma) \setminus \Gamma_0$, where $M_p(\Gamma_0) = 0$. Hence

$$M_p(f(\Gamma)) \leq \int_{f(D)} \tilde{\rho}^p(y) dm(y). \quad (7)$$

Further, by 3.2.5 for $m = n$ in [2] we have that

$$\begin{aligned} \int_{B_k} K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) dm(x) &= \int_{B_k} \frac{|J(x, f)|}{(l(f'(x)))^p} \cdot \rho^p(x) dm(x) = \\ &= \int_{f(B_k)} \frac{\rho^p(f_k^{-1}(y))}{(l(f'(f_k^{-1}(y))))^p} dm(y) = \int_{f(D)} \rho_k^p(y) dm(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Finally, by the Lebesgue theorem, see Theorem 12.3 § 12 of Ch. I in [7], we obtain from (7) and (8) the desired inequality

$$\begin{aligned} \int_D K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) dm(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) dm(x) = \\ &= \int_{f(D)} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^p(y) dm(y) \geq \int_{f(D)} \sup_{k \in \mathbb{N}} \rho_k^p(y) dm(y) = \\ &= \int_{f(D)} \tilde{\rho}^p(y) dm(y) = M_p(f(\Gamma)). \end{aligned}$$

□

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. J. Math. and Math. Scie. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
2. *Federer H.* Geometric Measure Theory. – Berlin etc.: Springer, 1969.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – V. 93. – P. 215-236.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
5. *Poletskii E.A.* The modulus method for non-homeomorphic quasiconformal mappings // Mat. Sb. – 1970. – V. 83, no. 2. – P. 261-272 (in Russian).
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993.
7. *Saks S.* Theory of the Integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1964.
8. *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., V. 229. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.

Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов

Об одном модульном неравенстве порядка $p \geq 1$.

Работа посвящена изучению пространственных отображений более общих, чем квазирегулярные. Предметом изучения работы являются так называемые модульные неравенства порядка $p \geq 1$ и их взаимосвязь с пространственными отображениями. Для отображений, имеющих N , N^{-1} и $L_p^{(2)}$ -свойства доказано хорошо известное неравенство Полецкого.

Ключевые слова: отображения с конечным и ограниченным искажением, модуль семейств кривых, неравенство Полецкого.

Р. Р. Салімов, Є. О. Севостьянов

Про одну модульну нерівність порядку $p \geq 1$.

Роботу присвячено вивченню просторових відображень, більш загальних, ніж квазірегулярні. Предметом дослідження статті є так звані модульні нерівності порядку $p \geq 1$, та їх взаємозв'язок з просторовими відображеннями. Для відображень, що мають N , N^{-1} і $L_p^{(2)}$ -властивості, доведено аналог добре відомої нерівності типу Полецкого.

Ключові слова: відображення зі скінченним і обмеженим спотворенням, модуль сім'ї кривих, нерівність Полецкого.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ruslan623@yandex.ru
esevostyanov2009@mail.ru

Received 19.04.12

УДК 512.552+519.713

©2012. В. В. Скобелев

ОБ АВТОМАТАХ НА МНОГООБРАЗИЯХ НАД КОЛЬЦОМ

Определены автоматы на многообразиях над конечным кольцом. Охарактеризованы гомоморфизмы таких автоматов в терминах гомоморфизмов многообразий в следующих двух основных случаях. В первом случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов заданных на них алгебр, а автоматы определены посредством унарных и бинарных операций этих алгебр. Во втором случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов множеств траекторий, определяемых полиномиальными параметризациями многообразий, функции переходов автоматов обеспечивают их движение по указанным траекториям, а функции выходов автоматов – отображения многообразия в модуль над кольцом.

Ключевые слова: кольца, многообразия, автоматы.

1. Введение. Известно, что основным объектом алгебраической геометрии является многообразие. Это понятие, первоначально определенное как множество решений конечной системы полиномиальных уравнений над полем, постепенно трансформировалось в процессе развития алгебраической геометрии: аффинное многообразие, квазипроективные и проективные многообразия, абстрактные алгебраические многообразия, схемы, алгебраические пространства [1, 2]. Глубокая внутренняя связь понятий многообразие и идеал (ассоциативно-коммутативного кольца полиномов над полем) стимулировала формирование раздела компьютерной алгебры, предназначенного для реализации алгоритмов коммутативной алгебры [3, 4], основанных на построении конечного базиса идеала, и имеющего многочисленные приложения [5].

Хотя основные результаты алгебраической геометрии, как математической теории, получены в предположении, что поле алгебраически замкнуто, следует особо выделить успешное применение эллиптических кривых над конечным полем при решении задач защиты информации. Как следствие, понятие многообразие (а эллиптическая кривая, как и любая алгебраическая кривая, является многообразием) послужило основой для формирования эллиптической криптографии – перспективного направления современной криптографии [6, 7].

С другой стороны, использование в процессе решения задач криптографии вычислений в кольцах вычетов [8, 9] стимулировало исследование автоматов над конечными кольцами [10, 11]. При этом особое значение имеет анализ сложности идентификации (параметрической и начального состояния) автомата, а также анализ структуры множеств неподвижных точек автоматных отображений. Эти задачи естественно сводятся к поиску решений систем уравнений с параметрами над кольцом, т.е. к исследованию многообразий над соответствующим кольцом.

Известно, что преобразования, осуществляемые конечными автоматами, являются математической моделью тех вычислений, которые могут быть реализованы на компьютерах в реальном времени. Поэтому исследование автоматов, определенных

на многообразиях над конечным кольцом, актуально как с позиции алгебраической теории автоматов, так и с позиции их возможного применения в процессе решения задач защиты информации. При этом особый интерес представляет вопрос о том, как (определенные тем или иным образом) гомоморфизмы многообразий отражаются на множествах автоматов, определенных на этих многообразиях.

Пусть $M = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$ – абстрактный автомат, где Q, X, Y – множество состояний, входной и выходной алфавит, а $\delta : Q \times X \rightarrow Q$ и $\lambda : Q \times X \rightarrow Y$ – функции переходов и выходов (всюду в работе предполагается, что $Val \lambda = Y$). В общем случае гомоморфным образом автомата $M = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$ называется такой автомат $M' = (Q', X', Y', \delta', \lambda')$, что существуют такие сюръекции $\chi_1 : Q \rightarrow Q'$, $\chi_2 : X \rightarrow X'$ и $\chi_3 : Q \rightarrow Y'$, что равенства $\chi_1(\delta(q, x)) = \delta'(\chi_1(q), \chi_2(x))$ и $\chi_3(\lambda(q, x)) = \lambda'(\chi_1(q), \chi_2(x))$ истинны для всех $q \in Q$ и $x \in X$. В частности, если χ_1, χ_2, χ_3 – биекции, то автоматы M и M' изоморфны.

Целью настоящей работы является характеристика гомоморфизмов автоматов, определенных на многообразиях над кольцом, в терминах гомоморфизмов многообразий. Рассмотрены два основных как с позиции теории, так и с позиции приложений случая. В первом случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов алгебр, заданных на многообразиях, а функции переходов и выходов автоматов определены через унарные и бинарные операции этих алгебр. Во втором случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов множеств траекторий на многообразиях, определяемых полиномиальными параметризациями многообразий, функции переходов автоматов обеспечивают движение автомата по указанным траекториям, а функции выходов автоматов – произвольные отображения многообразия в модуль над кольцом.

Все не определяемые в работе понятия – такие же, как в [11, 12].

2. Основные понятия. Всюду под кольцом $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ ($|K| \geq 2$) понимается конечное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через K^d ($K^d \subseteq K \setminus \{0\}$) множество всех делителей нуля кольца \mathcal{K} , а через K^{non-d} – множество всех ненулевых элементов кольца \mathcal{K} , не являющихся делителями нуля. Так как (K^{non-d}, \cdot) – гауссова полугруппа, то существует (наименьшее) расширение $\tilde{\mathcal{K}} = (\tilde{K}, +, \cdot)$ кольца \mathcal{K} , в котором каждый элемент множества K^{non-d} обратим. Если $K^d = \emptyset$ (т.е. \mathcal{K} – область целостности), то $\tilde{\mathcal{K}}$ – поле (оно называется полем дробей кольца \mathcal{K}).

В соответствии с [11] определим многообразие над кольцом \mathcal{K} следующим образом. Многообразием в K^n ($n \in \mathbf{N}$) назовем множество

$$\mathbf{V} = \{(v_1, \dots, v_n) \in K^n \mid f_i(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

где $f_1, \dots, f_m \in K[\tau_1, \dots, \tau_n]$ – попарно различные ненулевые многочлены. Чтобы подчеркнуть, что многообразие V определяется многочленами f_1, \dots, f_m , используют запись $\mathbf{V}(\{f_i \mid i = 1, \dots, m\})$. В дальнейшем рассматриваются только непустые многообразия. При $m = 1$ многообразие (1) называется гиперповерхностью, если $n \geq 3$, и (алгебраической) кривой, если $n = 2$.

мы тем самым определяем на многообразии \mathbf{V} множество траекторий (т.е. последовательностей точек), элементы которых вычислимы за полиномиальное время. Действительно, для каждой точки $P_0 \in K^m$ однозначно определена траектория $P_0, P_1, \dots, P_j, \dots$ во множестве K^m , где $P_{j+1} = \theta(P_j)$ ($j \in \mathbf{Z}_+$). В свою очередь, эта траектория однозначно определяет на многообразии \mathbf{V} траекторию $\mathbf{h}(P_0), \mathbf{h}(P_1), \dots, \mathbf{h}(P_j), \dots$, точки которой вычислимы за полиномиальное время.

Множество всех многообразий над кольцом \mathcal{K} , удовлетворяющих условию 1, обозначим через $\mathcal{V}_1(\mathcal{K})$, а условию 2 – через $\mathcal{V}_2(\mathcal{K})$.

ПРИМЕР 1. 1. Пусть эллиптическая кривая γ определена уравнением

$$v_2^2 + a_1 v_1 v_2 + a_3 v_2 = v_1^3 + a_2 v_1^2 + a_4 v_1 + a_6 \quad (6)$$

над областью целостности \mathcal{K} . Известно, что в поле дробей $\tilde{\mathcal{K}}$ множество $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma)$ точек кривой (6) (включая бесконечно удаленную точку O) образует абелеву группу $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma), +_\gamma)$, для которой точка O – нейтральный элемент. Таким образом, определена алгебра $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma), \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_2 = \{+_\gamma\}$, а множество унарных операций $\mathcal{F}_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ ($1 \leq k_1 < |\tilde{\mathcal{K}}(\gamma)|$) определено равенствами: $\alpha_0(P) = O$ ($P \in \tilde{\mathcal{K}}(\gamma)$) и $\alpha_i(P) = \underbrace{P +_\gamma \dots +_\gamma P}_{i \text{ раз}}$ ($P \in \tilde{\mathcal{K}}(\gamma)$) для всех $i = 1, \dots, k_1$, т.е. много-

образии $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma) \subseteq \tilde{\mathcal{K}}^2$ принадлежит множеству $\mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$.

2. Любая алгебраическая кривая $v_2 = a_0 v_1^n + a_1 v_1^{n-1} + \dots + a_n$ над кольцом \mathcal{K} может рассматриваться как полиномиально параметризованное многообразие

$$\begin{cases} v_1 = \tau \\ v_2 = a_0 \tau^n + a_1 \tau^{n-1} + \dots + a_n \end{cases} \quad (\tau \in K)$$

в K^2 , т.е. как элемент множества $\mathcal{V}_2(K)$.

3. Автоматы на многообразии $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$. Так как $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$, то определена алгебра $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ – множество унарных операций, а $\mathcal{F}_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_{k_2}\}$ – множество бинарных операций. Системы уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{i_1}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_1)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{i_2}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_2)) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+) \quad (7)$$

и

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{i_1}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_1)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{i_2}(\mathbf{q}_{t+1}), \mathbf{v}_2) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (8)$$

где $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ – фиксированные точки, $i_1, i_2 \in \mathbf{Z}_{k_1+1}$ и $j_1, j_2 \in \mathbf{N}_{k_2}$ – фиксированные числа, а $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}$ и $x_{t+1} \in \mathbf{Z}_{k_1+1}$ ($t \in \mathbf{Z}_+$), определяют множество автоматов, соответственно, $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V})$ Мили и $\mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V})$ Мура.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Таким образом, x_t, \mathbf{q}_t и \mathbf{y}_t – соответственно, входной символ, состояние и выходной символ автомата $M \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}) \cup \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V})$ в момент t .

Пусть $\mathbf{V}, \mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ – такие многообразия, что для алгебр $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ и $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ ($\mathcal{F}_1^{(i)} = \{\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(i)}\}$ ($i = 1, 2$) и $\mathcal{F}_2^{(i)} = \{\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{k_2}^{(i)}\}$ ($i = 1, 2$) – множество, соответственно, унарных и бинарных операций) существует тройка отображений $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}, \varphi_2 : \mathcal{F}_1^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_1^{(2)}, \varphi_3 : \mathcal{F}_2^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_2^{(2)}$), где φ_1 – сюръекция, а φ_2 и φ_3 – биекции, для которой равенства

$$\varphi_1(\alpha(\mathbf{v}_1)) = \varphi_2(\alpha)(\varphi_1(\mathbf{v}_1)), \quad (9)$$

$$\varphi_1(\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) = \varphi_3(\beta)(\varphi_1(\mathbf{v}_1), \varphi_1(\mathbf{v}_2)) \quad (10)$$

истинны для всех $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$, $\alpha \in \mathcal{F}_1^{(1)}$ и $\beta \in \mathcal{F}_2^{(1)}$. Тогда будем говорить, что:

- 1) многообразия \mathbf{U} является гомоморфным образом многообразия \mathbf{V} ;
- 2) многообразия \mathbf{V} и \mathbf{U} изоморфны, если отображение φ_1 – биекция.

Замечание 3. Иными словами: 1) многообразия $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ – гомоморфный образ многообразия $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда алгебра $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ – гомоморфный образ алгебры $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$; 2) многообразия $\mathbf{V}, \mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ изоморфны тогда и только тогда, когда алгебры $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ и $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ изоморфны.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$. Если \mathbf{U} – гомоморфный образ \mathbf{V} , то существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$), что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$) – гомоморфный образ автомата M_j .

Доказательство. Предположим, что многообразия $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ является гомоморфным образом многообразия $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$, а тройка отображений $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}, \varphi_2 : \mathcal{F}_1^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_1^{(2)}, \varphi_3 : \mathcal{F}_2^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_2^{(2)}$) определяет гомоморфизм алгебры $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ на алгебру $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$.

Рассмотрим такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$), что:

- 1) для автомата $M_1 \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V})$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1}^{(1)} = \beta_{j_1}^{(1)}(\alpha_{i_1}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}, \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_1^{(1)})) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(1)} = \beta_{j_2}^{(1)}(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}, \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_2^{(1)})) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (11)$$

автомат $\Psi_1(M_1) \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{U})$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1}^{(2)} = \varphi_3(\beta_{j_1}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_1}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(2)}, \varphi_2(\alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_1^{(2)}))) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(2)} = \varphi_3(\beta_{j_2}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(2)}, \varphi_2(\alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_2^{(2)}))) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+); \quad (12)$$

- 2) для автомата $M_2 \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V})$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1}^{(1)} = \beta_{j_1}^{(1)}(\alpha_{i_1}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}, \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_1^{(1)})) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(1)} = \beta_{j_2}^{(1)}(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)})) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (13)$$

автомат $\Psi_2(M_2) \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{U})$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1}^{(2)} = \varphi_3(\beta_{j_1}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_1}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(2)}, \varphi_2(\alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_1^{(2)}))) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(2)} = \varphi_3(\beta_{j_2}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(2)}))) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+). \quad (14)$$

Из (9)-(14) вытекает, что для всех $t \in \mathbf{Z}_+$ истинны равенства

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta_{j_1}^{(1)}(\alpha_{i_1}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}), \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_1^{(1)}))) &= \varphi_3(\beta_{j_1}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_1}^{(1)})(\varphi_1(\mathbf{q}_t^{(1)})), \varphi_2(\alpha_{x_{t+1}}^{(1)})(\varphi_1(\mathbf{v}_1^{(1)}))), \\ \varphi_1(\beta_{j_2}^{(1)}(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}), \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{v}_2^{(1)}))) &= \varphi_3(\beta_{j_2}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_2}^{(1)})(\varphi_1(\mathbf{q}_t^{(1)})), \varphi_2(\alpha_{x_{t+1}}^{(1)})(\varphi_1(\mathbf{v}_2^{(1)}))), \\ \varphi_1(\beta_{j_2}^{(1)}(\alpha_{i_2}^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)}), \mathbf{v}_2^{(1)}))) &= \varphi_3(\beta_{j_2}^{(1)})(\varphi_2(\alpha_{i_2}^{(1)})(\varphi_1(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)})), \varphi_1(\mathbf{v}_2^{(1)}))), \end{aligned}$$

откуда, в свою очередь, вытекает, что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$) – гомоморфный образ автомата M_j . \square

Замечание 4. Таким образом, в теореме 1 установлено, что если многообразие $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ – гомоморфный образ многообразия $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$, то существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$), что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$) является гомоморфным образом автомата M_j . При этом тройка сюръекций (χ_1, χ_2, χ_3) , определяющая гомоморфизм автомата $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$ на автомат $\Psi_j(M_j)$ удовлетворяет следующим двум условиям: 1) $\chi_1 = \chi_3 = \varphi_1$; 2) χ_2 – тождественное отображение.

Из теоремы 1 вытекает, что истинно следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$. Если многообразия \mathbf{V} и \mathbf{U} изоморфны, то существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$), что автоматы $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$ и $\Psi_j(M_j)$ изоморфны.

Пример 2. Пусть γ – эллиптическая кривая, заданная над областью целостности \mathcal{K} . Из (7) и (8) вытекает, что (см. пример 1.1) алгебра $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma), \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ ($\mathcal{F}_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ ($1 \leq k_1 < |\tilde{\mathcal{K}}(\gamma)|$), $\mathcal{F}_2 = \{+\gamma\}$) определяет на многообразии $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma) \in \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ множества автоматов Мили $\mathcal{A}^{(1)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma))$ и Мура $\mathcal{A}^{(2)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma))$, заданных, соответственно, системами уравнений:

$$\begin{cases} q_{t+1} = \alpha_{i_1}(q_t) +_{\gamma} \alpha_{x_{t+1}}(P_1) \\ y_{t+1} = \alpha_{i_2}(q_t) +_{\gamma} \alpha_{x_{t+1}}(P_2) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+) \quad (15)$$

и

$$\begin{cases} q_{t+1} = \alpha_{i_1}(q_t) +_{\gamma} \alpha_{x_{t+1}}(P_1) \\ y_{t+1} = \alpha_{i_2}(q_{t+1}) +_{\gamma} P_2 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (16)$$

где $i_1, i_2 \in \mathbf{Z}_{k_1+1}$ – фиксированные числа, $P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(\gamma)$ – фиксированные точки, $q_0 \in \tilde{\mathcal{K}}(\gamma)$ и $x_{t+1} \in \mathbf{Z}_{k_1+1}$ ($t \in \mathbf{Z}_+$).

Если γ_1 и γ_2 – эллиптические кривые, заданные над областью целостности \mathcal{K} , то говорят, что:

1) эллиптическая кривая γ_2 – гомоморфный образ эллиптической кривой γ_1 , если абелева группа $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2), +_{\gamma_2})$ – гомоморфный образ абелевой группы $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1), +_{\gamma_1})$;

2) эллиптические кривые γ_1 и γ_2 изоморфны, если абелевы группы $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1), +_{\gamma_1})$ и $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2), +_{\gamma_2})$ изоморфны.

Пусть $\varphi_1 : \tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2)$ – гомоморфизм эллиптической кривой γ_1 на эллиптическую кривую γ_2 . Тогда для любого числа $k_1 \in \{1, \dots, |\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2)| - 1\}$ алгебра

$(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2), \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ ($\mathcal{F}_1^{(2)} = \{\alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(2)}\}$, $\mathcal{F}_2^{(2)} = \{+\gamma_2\}$) – гомоморфный образ алгебры $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1), \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ ($\mathcal{F}_1^{(1)} = \{\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(1)}\}$, $\mathcal{F}_2^{(1)} = \{+\gamma_1\}$). При этом для гомоморфизма $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ алгебры $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1), \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ на алгебру $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2), \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ биекции $\varphi_2 : \mathcal{F}_1^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_1^{(2)}$ и $\varphi_3 : \mathcal{F}_2^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}_2^{(2)}$ определяются равенствами $\varphi_2(\alpha_i^{(1)}) = \alpha_i^{(2)}$ ($i \in \mathbf{Z}_{k_1+1}$) и $\varphi_3(+\gamma_1) = +\gamma_2$. В частности, если φ_1 – биекция, то алгебры $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1), \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ и $(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2), \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$ изоморфны.

Таким образом, если эллиптическая кривая γ_2 – гомоморфный образ эллиптической кривой γ_1 , то многообразие $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2) \in \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ – гомоморфный образ многообразия $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1) \in \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ (соответственно, если эллиптические кривые γ_1 и γ_2 изоморфны, то многообразия $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1) \in \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ и $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2) \in \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ изоморфны).

Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что если эллиптическая кривая γ_2 – гомоморфный образ эллиптической кривой γ_1 , то существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1)) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2))$ ($j = 1, 2$), что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1))$) – гомоморфный образ автомата M_j . При этом, из доказательства теоремы 1 вытекает, что:

1) для автомата $M_1 \in \mathcal{A}^{(1)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1))$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(1)} = \alpha_{i_1}^{(1)}(q_t^{(1)}) + \gamma_1 \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(P_1^{(1)}) \\ y_{t+1}^{(1)} = \alpha_{i_2}^{(1)}(q_t^{(1)}) + \gamma_1 \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(P_2^{(1)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+),$$

автомат $\Psi_1(M_1) \in \mathcal{A}^{(1)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2))$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(2)} = \alpha_{i_1}^{(2)}(q_t^{(2)}) + \gamma_2 \alpha_{x_{t+1}}^{(2)}(P_1^{(2)}) \\ y_{t+1}^{(2)} = \alpha_{i_2}^{(2)}(q_t^{(2)}) + \gamma_2 \alpha_{x_{t+1}}^{(2)}(P_2^{(2)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+);$$

2) для автомата $M_2 \in \mathcal{A}^{(2)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_1))$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(1)} = \alpha_{i_1}^{(1)}(q_t^{(1)}) + \gamma_1 \alpha_{x_{t+1}}^{(1)}(P_1^{(1)}) \\ y_{t+1}^{(1)} = \alpha_{i_2}^{(1)}(q_{t+1}^{(1)}) + \gamma_1 P_2^{(1)} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+),$$

автомат $\Psi_1(M_2) \in \mathcal{A}^{(2)}(\tilde{\mathcal{K}}(\gamma_2))$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(2)} = \alpha_{i_1}^{(2)}(q_t^{(2)}) + \gamma_2 \alpha_{x_{t+1}}^{(2)}(P_1^{(2)}) \\ y_{t+1}^{(2)} = \alpha_{i_2}^{(2)}(q_{t+1}^{(2)}) + \gamma_2 P_2^{(2)} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+).$$

4. Автоматы на многообразии $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$. Пусть $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ – многообразие в K^n . Тогда определена полиномиальная параметризация $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\vec{\tau})$ ($\vec{\tau} \in K^m$) многообразия \mathbf{V} . Зафиксируем семейство $\Theta = \{\theta_i\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$ легко вычисляемых отображений $\theta_i : K^m \rightarrow K^m$. Системы уравнений

$$\begin{cases} P_{t+1} = \theta_{x_{t+1}}(P_t) \\ \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(P_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}_{x_{t+1}}(\mathbf{q}_t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+) \quad (17)$$

и

$$\begin{cases} P_{t+1} = \theta_{x_{t+1}}(P_t) \\ \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(P_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (18)$$

где $P_0 \in K^m$ – фиксированная точка, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{h}(P_0)$, $\mathbf{r}_i : K^n \rightarrow K^l$ ($i \in \mathbf{Z}_k$) и $\mathbf{r} : K^n \rightarrow K^l$ – фиксированные отображения, а $x_{t+1} \in \mathbf{Z}_k$ ($t \in \mathbf{Z}_+$), определяют множество автоматов, соответственно, $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta)$ Мили и $\mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta)$ Мура.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Таким образом, x_t , \mathbf{q}_t и \mathbf{y}_t – соответственно, входной символ, состояние и выходной символ автомата $M \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta) \cup \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta)$ в момент t . Отметим также, что из (17) и (18) вытекает, что на отображения, определяющие функции выходов автомата $M \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta) \cup \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta)$ в момент t , наложено единственное ограничение: они являются отображениями модуля над кольцом \mathcal{K} в модуль над этим кольцом.

Пусть для многообразия $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ определена полиномиальная параметризация $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1(\vec{\tau}_1)$ ($\vec{\tau}_1 \in K^{m_1}$) и зафиксировано семейство $\Theta_1 = \{\theta_i^{(1)}\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$ легко вычисляемых отображений $\theta_i^{(1)} : K^{m_1} \rightarrow K^{m_1}$, а для многообразия $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ – полиномиальная параметризация $\mathbf{u} = \mathbf{h}_2(\vec{\tau}_2)$ ($\vec{\tau}_2 \in K^{m_2}$) и зафиксировано семейство $\Theta_2 = \{\theta_i^{(2)}\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$ легко вычисляемых отображений $\theta_i^{(2)} : K^{m_2} \rightarrow K^{m_2}$. Предположим, что существует пара сюръекций $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$, $\varphi_2 : K^{m_1} \rightarrow K^{m_2}$), для которой равенства

$$\varphi_2(\theta_i^{(1)}(\vec{\tau}_1)) = \theta_i^{(2)}(\varphi_2(\vec{\tau}_1)), \quad (19)$$

$$\varphi_1(\mathbf{h}_1(\vec{\tau}_1)) = \mathbf{h}_2(\varphi_2(\vec{\tau}_1)) \quad (20)$$

истинны для всех $\vec{\tau}_1 \in K^{m_1}$ и всех $i \in \mathbf{Z}_k$. Тогда будем говорить, что:

- 1) пара (\mathbf{U}, Θ_2) является гомоморфным образом пары (\mathbf{V}, Θ_1) ;
- 2) пары (\mathbf{V}, Θ_1) и (\mathbf{U}, Θ_2) изоморфны, если φ_1 и φ_2 – биекции.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Ясно, что для изоморфных пар (\mathbf{V}, Θ_1) и (\mathbf{U}, Θ_2) истинны равенства $|\mathbf{V}| = |\mathbf{U}|$ и $m_1 = m_2$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ и существует гомоморфизм $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$, $\varphi_2 : K^{m_1} \rightarrow K^{m_2}$) пары (\mathbf{V}, Θ_1) на пару (\mathbf{U}, Θ_2) . Тогда существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ ($j = 1, 2$), что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1)$) – гомоморфный образ автомата M_j .

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$, а $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1(\vec{\tau}_1)$ ($\vec{\tau}_1 \in K^{m_1}$) и $\mathbf{u} = \mathbf{h}_2(\vec{\tau}_2)$ ($\vec{\tau}_2 \in K^{m_2}$) – полиномиальная параметризация, соответственно, многообразия $\mathbf{V} \in K^{n_1}$ и многообразия $\mathbf{U} \in K^{n_2}$. Предположим, что пара (\mathbf{U}, Θ_2) – гомоморфный образ пары (\mathbf{V}, Θ_1) , где $\Theta_j = \{\theta_i^{(j)}\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$ ($j = 1, 2$) – семейство легко вычисляемых отображений $\theta_i^{(j)} : K^{m_j} \rightarrow K^{m_j}$ ($i \in \mathbf{Z}_k$), а гомоморфизм $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$, $\varphi_2 : K^{m_1} \rightarrow K^{m_2}$) состоит из легко вычисляемых сюръекций.

Рассмотрим такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ ($j = 1, 2$), что:

1) для автомата $M_1 \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta_1)$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} P_{t+1}^{(1)} = \theta_{x_{t+1}}^{(1)}(P_t^{(1)}) \\ \mathbf{q}_{t+1}^{(1)} = \mathbf{h}_1(P_{t+1}^{(1)}) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(1)} = \mathbf{r}_{x_{t+1}}^{(1)}(\mathbf{q}_t^{(1)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (21)$$

где $\mathbf{r}_i^{(1)} : K^{n_1} \rightarrow K^{l_1}$ ($i \in \mathbf{Z}_k$), автомат $\Psi_1(M_1) \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} P_{t+1}^{(2)} = \theta_{x_{t+1}}^{(2)}(P_t^{(2)}) \\ \mathbf{q}_{t+1}^{(2)} = \mathbf{h}_2(P_{t+1}^{(2)}) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(2)} = \mathbf{r}_{x_{t+1}}^{(2)}(\mathbf{q}_t^{(2)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (22)$$

где число l_2 и отображения $\mathbf{r}_i^{(2)} : K^{n_2} \rightarrow K^{l_2}$ ($i \in \mathbf{Z}_k$) будут определены ниже;

2) для автомата $M_2 \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta_2)$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} P_{t+1}^{(1)} = \theta_{x_{t+1}}^{(1)}(P_t^{(1)}) \\ \mathbf{q}_{t+1}^{(1)} = \mathbf{h}_1(P_{t+1}^{(1)}) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (23)$$

где $\mathbf{r}^{(1)} : K^{n_1} \rightarrow K^{l_1}$, автомат $\Psi_2(M_2) \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ определен системой уравнений

$$\begin{cases} P_{t+1}^{(2)} = \theta_{x_{t+1}}^{(2)}(P_t^{(2)}) \\ \mathbf{q}_{t+1}^{(2)} = \mathbf{h}_2(P_{t+1}^{(2)}) \\ \mathbf{y}_{t+1}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(2)}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \quad (24)$$

где число l_2 и отображение $\mathbf{r}^{(2)} : K^{n_2} \rightarrow K^{l_2}$ будет определено ниже.

Из (19)-(24) вытекает, что истинны равенства $\varphi_2(\theta_{x_{t+1}}^{(1)}(P_t^{(1)})) = \theta_{x_{t+1}}^{(2)}(\varphi_2(P_t^{(1)}))$ и $\varphi_1(\mathbf{h}_1(P_{t+1}^{(1)})) = \mathbf{h}_2(\varphi_2(P_{t+1}^{(1)}))$. Из этих равенств вытекает, что функция переходов автомата (22) (соответственно, автомата (24)) удовлетворяет требованиям, накладываемым на функцию переходов гомоморфного образа автомата (21) (соответственно, автомата (23)) в случае, когда $\chi_1 = \varphi_1$, а χ_2 – тождественное отображение.

Определим теперь функции выходов автоматов (22) и (24).

Рассмотрим автомат (24). Пусть $\mathcal{S}_{M_2} = \{S_{\mathbf{u}} | \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$, где $S_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^{(1)}(\varphi_1^{-1}(\mathbf{u}))$, а \equiv_{M_2} – отношение эквивалентности на множестве \mathcal{S}_{M_2} , определенное следующим образом: $S_{\mathbf{u}'} \equiv_{M_2} S_{\mathbf{u}''}$ ($\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in \mathbf{U}$) тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}', \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}''$ элементов многообразия \mathbf{U} , что $S_{\mathbf{u}_i} \cap S_{\mathbf{u}_{i+1}} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Обозначим через ξ_{M_2} такую сюръекцию множества $Val \mathbf{r}^{(1)}$ в фактор-множество $\mathcal{S}_{M_2}/\equiv_{M_2}$, что $\xi_{M_2}(\mathbf{y}) = S$ тогда и только тогда, когда существует такое $S_{\mathbf{u}} \in S$, что $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{u}}$. Положим $l_2 = \lceil (\log |\mathcal{S}_{M_2}|) \cdot (\log |K|)^{-1} \rceil$ и зафиксируем инъекцию η_{M_2} фактор-множества $\mathcal{S}_{M_2}/\equiv_{M_2}$ в множество K^{l_2} . Определим отображение $\mathbf{r}^{(2)}$ равенством

$$\mathbf{r}^{(2)}(\mathbf{u}) = (\eta_{M_2} \circ \xi_{M_2})(\mathbf{r}^{(1)}(\varphi_1^{-1}(\mathbf{u}))) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}). \quad (25)$$

Из (25) вытекает, что истинно равенство $(\eta_{M_2} \circ \xi_{M_2})(\mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)})) = \mathbf{r}^{(2)}(\varphi_1(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)}))$, т.е. функции выходов автомата (24), определенная равенством (25), удовлетворяет требованиям, накладываемым на функцию выходов гомоморфного образа автомата (23), если $\chi_1 = \varphi_1$, χ_2 – тождественное отображение, а $\chi_3 = \eta_{M_2} \circ \xi_{M_2}$.

Рассмотрим автомат (22). Пусть $\mathcal{S}_{M_1} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}_k} \mathcal{S}_{M_1, i}$, где $\mathcal{S}_{M_1, i} = \{S_{\mathbf{u}, i} | \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$

($i \in \mathbf{Z}_k$), а $S_{\mathbf{u}, i} = \mathbf{r}_i^{(1)}(\varphi_1^{-1}(\mathbf{u}))$, а \equiv_{M_1} – такое отношение эквивалентности на множестве \mathcal{S}_{M_1} , что $S_{\mathbf{u}', i_1} \equiv_{M_1} S_{\mathbf{u}'', i_2}$ ($\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in \mathbf{U}; i_1, i_2 \in \mathbf{Z}_k$) тогда и только тогда, когда существуют такая последовательность элементов $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}', \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}''$ многообразия \mathbf{U} и такая последовательность $r_1 = i_1, r_2, \dots, r_n = i_2$ элементов множества \mathbf{Z}_k , что $S_{\mathbf{u}_j, r_j} \cap S_{\mathbf{u}_{j+1}, r_{j+1}} \neq \emptyset$ для всех $j = 1, \dots, n-1$. Обозначим через ξ_{M_1} такую сюръекцию множества $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}_k} \text{Val } \mathbf{r}_i^{(1)}$ в фактор-множество $\mathcal{S}_{M_1} / \equiv_{M_1}$, что

$\xi_{M_1}(\mathbf{y}) = \mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда существует такое $S_{\mathbf{u}, i} \in \mathbf{S}$, что $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{u}, i}$. Положим $l_2 = \lceil (\log |\mathcal{S}_{M_1}|) \cdot (\log |K|)^{-1} \rceil$ и зафиксируем инъекцию η_{M_1} фактор-множества $\mathcal{S}_{M_1} / \equiv_{M_1}$ в множество K^{l_2} . Определим отображения $\mathbf{r}_i^{(2)}$ ($i \in \mathbf{Z}_k$) равенствами

$$\mathbf{r}_i^{(2)}(\mathbf{u}) = (\eta_{M_2} \circ \xi_{M_2})(\mathbf{r}_i^{(1)}(\varphi_1^{-1}(\mathbf{u}))) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \quad (i \in \mathbf{Z}_k). \quad (26)$$

Из (26) вытекает, что истинны равенства $(\eta_{M_2} \circ \xi_{M_2})(\mathbf{r}_i^{(1)}(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)})) = \mathbf{r}_i^{(2)}(\varphi_1(\mathbf{q}_{t+1}^{(1)}))$ ($i \in \mathbf{Z}_k$), т.е. функция выходов автомата (22), определенная равенствами (26), удовлетворяет требованиям, которые накладываются на функцию выходов гомоморфного образа автомата (21), если $\chi_1 = \varphi_1$, χ_2 – тождественное отображение, а $\chi_3 = \eta_{M_2} \circ \xi_{M_2}$. \square

ПРИМЕР 3. Алгебраические кривые

$$\begin{aligned} v_2 &= a_0 v_1^{n_1} + a_1 v_1^{n_1-1} + \dots + a_{n_1}, \\ u_2 &= b_0 u_1^{n_2} + b_1 u_1^{n_2-1} + \dots + b_{n_2} \end{aligned}$$

над кольцом \mathcal{K} определяют в K^2 многообразия (см. пример 1.2), соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{(\tau_1, a_0 \tau_1^{n_1} + a_1 \tau_1^{n_1-1} + \dots + a_{n_1}) | \tau_1 \in K\}, \\ \mathbf{U} &= \{(\tau_2, b_0 \tau_2^{n_2} + a_1 \tau_2^{n_2-1} + \dots + b_{n_2}) | \tau_2 \in K\}. \end{aligned}$$

Зафиксируем элементы $c, b_0, \dots, b_k \in K^{non-d}$. Определим семейство $\Theta = \{\theta_i\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$ легко вычисляемых отображений $\theta_i : K \rightarrow K$ равенствами

$$\theta_i(\tau) = b_i \tau \quad (i \in \mathbf{Z}_k, \tau \in K),$$

а пару биекций $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ($\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}, \varphi_2 : K \rightarrow K$) – равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_1((\tau, a_0 \tau^{n_1} + a_1 \tau^{n_1-1} + \dots + a_{n_1})) &= \\ = (c\tau, b_0 c^{n_2} \tau^{n_2} + a_1 c^{n_2-1} \tau^{n_2-1} + \dots + b_{n_2}) & \quad (\tau \in K), \end{aligned}$$

$$\varphi_2(\tau) = c\tau \quad (\tau \in K).$$

Пары (\mathbf{V}, Θ) и (\mathbf{U}, Θ) изоморфны, так как для биекций $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ истинны равенства (19) и (20). Поэтому из теоремы 2 вытекает, что существуют такие отображения $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta)$ ($j = 1, 2$), что автомат $\Psi_j(M_j)$ ($M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$) – гомоморфный образ автомата M_j .

5. Заключение. В настоящей работе в терминах гомоморфизмов многообразий над конечным кольцом охарактеризованы гомоморфизмы автоматов, определенных на этих многообразиях. Рассмотрены два основных как с позиции теории, так и с позиции приложений случая. В первом случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов алгебр, заданных на многообразиях, а функции переходов и выходов автоматов определены через унарные и бинарные операции этих алгебр. Во втором случае гомоморфизмы многообразий определены посредством гомоморфизмов множеств траекторий на многообразиях, определяемых полиномиальными параметризациями многообразий, функции переходов автоматов обеспечивают движение автомата по указанным траекториям, а функциями выходов автоматов – произвольные отображения многообразия в модуль над кольцом. Анализ свойств отображений $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$) в терминах абстрактных свойств алгебр $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ и $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$, а также свойств отображений $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ ($j = 1, 2$) в терминах свойств семейств легко вычисляемых отображений Θ_1 и Θ_2 представляет одно из дальнейших направлений исследований.

Алгебраическая система на множестве многообразий над кольцом K , определяемая формулами (2)-(4), естественно определяет алгебраическую систему на множествах автоматов на многообразиях. Анализ свойств композиций отображений $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$ ($j = 1, 2$) и $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$ ($j = 1, 2$), соответствующих композициям автоматов, представляет другое направление исследований.

1. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.1. – М.: Наука, 1988. – 352 с.
2. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 2. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
3. Зарисский О., Самуэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. – М.: ИЛ, 1963. – 373 с.
4. Зарисский О., Самуэль П. Коммутативная алгебра. Т. 2. – М.: ИЛ, 1963. – 438 с.
5. Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. – М.: Мир, 2000. – 687 с.
6. Болотов А.А., Гашиков С.Б., Фролов А. Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: протоколы криптографии на эллиптических кривых. – М.: КомКнига, 2006. – 280 с.
7. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦМНО, 2003. – 328 с.
8. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С. и др. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
9. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
10. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2009. – 479 с.
11. Скобелев В.В., Глазунов Н.М., Скобелев В.Г. Многообразия над кольцами. Теория и приложения. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2009. – 323 с.
12. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М. Наука, 1973. – 400 с.

V. V. Skobelev

On automata over varieties into a ring.

Automata over varieties into finite ring are determined. Homomorphisms of these automata are characterized via homomorphisms of varieties for two basic cases. In the first case homomorphisms of varieties are determined via homomorphisms of algebras determined onto varieties and automata are determined via unary and binary operations of these algebras. In the second case homomorphisms of varieties are determined via homomorphisms of sets of trajectories determined via polynomial parametrization of varieties, transition mappings of automata provide moving of automata on these trajectories, and output mappings of automata transforms varieties into some module over the ring.

Keywords: rings, varieties, automata.

В. В. Скобелёв

Про автоматы на многовидах над кольцом.

Визначено автоматы на многовидах над скінченим кільцем. Охарактеризовано гомоморфізми цих автоматів у термінах гомоморфізмів многовидів у наступних двох базових випадках. У першому випадку гомоморфізми многовидів визначено за допомогою гомоморфізмів заданих на них алгебр, а автоматы визначено за допомогою унарних і бінарних операцій цих алгебр. У другому випадку гомоморфізми многовидів визначено за допомогою гомоморфізмів множин траекторій, які визначаються за допомогою поліноміальних параметризацій многовидів, функції переходів автоматів забезпечують їх рух вздовж вказаних траекторій, а функції виходів автоматів – довільні відображення многовида у модуль над кільцем.

Ключові слова: кільця, многовиди, автоматы.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 17.05.12

УДК 512.7+519.7+681.3

©2012. В. Г. Скобелев

АНАЛИЗ АВТОМАТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрены методы анализа автоматного-алгебраического модели над конечным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей с позиции их возможного применения при решении задач защиты информации. Охарактеризована сложность решения задач идентификации (параметрической и начального состояния) и анализа множества неподвижных точек.

Ключевые слова: кольца, автоматы, управляемые операции, идентификация, неподвижные точки.

1. Введение. Основы теории конечных автоматов (в дальнейшем, для краткости, автоматов) были заложены в середине XX века. Ее предназначение – анализ вычислений, осуществляемых на компьютерах в реальное время на конечной памяти. При этом, автомат рассматривался либо как преобразователь информации (модели Мили и Мура, а также их варианты, связанные с представлением функционирования автомата во времени), либо как распознаватель языка (настроенные автоматы и источники). В 1961 году фундаментальные работы [1, 2] В.М. Глушкова заложили основу для формирования алгебраической теории автоматов – нового направления теории автоматов. Именно это направление, связанное с анализом структуры входной полугруппы автомата, дало возможность выделить ряд фундаментальных положений теории автоматов, в том числе была создана теория Крона-Роудза декомпозиции автоматов, нашедшая нетривиальное применение в общей теории систем [3]. Результаты алгебраической теории автоматов достаточно полно представлены в [4, 5].

В 90-х годах XX века во всем мире начинают достаточно интенсивно исследоваться математические основы криптологии. Эти исследования привели к переосмыслению проблематики теории булевых функций [6], а также теории автоматов, в том числе алгебраической теории автоматов. Для последней существенными оказались следующие три обстоятельства. Во-первых, в кандидатах на стандарты современных шифров применяются вычисления в конечных полях и кольцах вычетов. Во-вторых, при использовании хаотических динамических систем при построении математических моделей шифров для того, чтобы нивелировать ошибки округления, естественно перейти к вычислениям в конечных алгебраических системах. В-третьих, успешное применение эллиптических кривых над конечными полями при решении задач защиты информации (прежде всего, в формировании электронной подписи) привело к формированию эллиптической криптографии – одного из перспективных направлений современной криптографии [7-11]. Указанные обстоятельства обосновывают актуальность исследования преобразований конечных алгебраических систем, осуществляемых автоматного-алгебраическими моделями, заданными системами уравнений над этими алгебраическими системами. В качестве базовой алгебраической си-

стемы естественно выбрать конечное кольцо. Такой выбор обусловлен следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, поле является специальным случаем кольца, так что все полученные для кольца результаты в случае поля могут быть только усилены. Во-вторых, наличие в кольце делителей нуля заведомо вносит необходимость осуществить связанный с ними полный перебор вариантов при решении систем уравнений над кольцом, что существенно усложняет анализ автоматно-алгебраических моделей, заданных системами уравнений. Таким образом, исследование автоматно-алгебраических моделей, заданных системами уравнений над конечными кольцами, формирует новый раздел алгебраической теории автоматов, имеющий потенциальные приложения в процессе решения задач защиты информации.

Рассмотрим методы исследования таких автоматно-алгебраических моделей.

2. Автоматы над кольцом. Известно, что простейшими являются автономные автоматы (т.е. имеющие однобуквенный входной алфавит). Такие автоматы часто используются в роли математических моделей генераторов псевдослучайных последовательностей. В этом случае автономные автоматы представляются, как правило, линейными рекуррентными последовательностями (методы математического анализа нелинейных рекуррентных последовательностей, за исключением статистических методов, практически отсутствуют), а реализуются на основе регистров сдвига с линейными обратными связями. Свойства линейных рекуррентных последовательностей над конечными полями были достаточно глубоко исследованы в 3-й четверти XX века (см., напр., [12, 13]). При этом, в [14] была решена задача идентификации начального состояния линейного автономного автомата над конечным полем. Исследование линейных рекуррентных последовательностей над конечными кольцами началось (во многом, в связи с разработкой методов решения задач криптографии) только в последнее десятилетие XX века. Основные результаты в этом направлении представлены в [15, 16].

Аналогичная ситуация сложилась и с не автономными автоматами (т.е. имеющими многобуквенный входной алфавит) над конечными полями. Основы теории таких линейных автоматов разработаны в 3-й четверти XX века [17-19]. В [20] принята одна из первых попыток исследования нелинейных автоматов над конечными полями, где нелинейность состоит в том, что функции переходов и выходов автомата – билинейные формы компонент векторов состояния и входного символа. Значительное внимание было уделено экспериментам, предназначенным для идентификации начального или финального состояния автомата. Так как такие автоматы не являются обратимыми, то они могут иметь весьма ограниченные применения при решении задач защиты информации. В [21, 22] исследованы автоматы над конечным кольцом $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ с учетом возможности использования обратимых автоматов в качестве математических моделей поточных шифров. В качестве общих моделей были выбраны множества $\mathcal{A}_{n,1}$ автоматов Мили и $\mathcal{A}_{n,2}$ автоматов Мура, заданных, соответственно, системами уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_3(\mathbf{x}_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_4(\mathbf{x}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_3(\mathbf{x}_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где $\mathbf{f}_i : K^n \rightarrow K^n$ ($i = 1, \dots, 4$), а $\mathbf{q}_t, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t \in K^n$ есть, соответственно, состояние, входной и выходной символ в момент t . Полученные для этих моделей результаты были проработаны в деталях для:

1) подмножеств $\tilde{\mathcal{A}}_{n,1} \subset \mathcal{A}_{n,1}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{n,2} \subset \mathcal{A}_{n,2}$ автоматов, заданных, соответственно, системами уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t\mathbf{q}_t^T\mathbf{b} + C\mathbf{q}_t + \mathbf{d} + E\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = G\mathbf{q}_t + F\mathbf{x}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t\mathbf{q}_t^T\mathbf{b} + C\mathbf{q}_t + \mathbf{d} + E\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = G\mathbf{q}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где A, C, E, G, F – фиксированные $n \times n$ -матрицы над кольцом \mathcal{K} , а $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in K^n$ – фиксированные векторы;

2) подмножеств $\tilde{\mathcal{A}}_{n,3} \subset \mathcal{A}_{n,1}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{n,4} \subset \mathcal{A}_{n,2}$ обратимых автоматов, предназначенных для эффективного представления над кольцом \mathcal{K} аналогов хаотических динамических систем, и заданных, соответственно, системами уравнений

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(i)} = \mathbf{q}_t^T A_i \mathbf{q}_t + \mathbf{c}_i \mathbf{q}_t + d_i + \alpha_i e_i x_{t+1}^{(i)} & (i \in \mathbb{N}_n) \\ y_{t+1}^{(i)} = g_i q_t^{(i)} + f_i x_{t+1}^{(i)} & (i \in \mathbb{N}_r) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\begin{cases} q_{t+1}^{(i)} = \mathbf{q}_t^T A_i \mathbf{q}_t + \mathbf{c}_i \mathbf{q}_t + d_i + \alpha_i e_i x_{t+1}^{(i)} & (i \in \mathbb{N}_n) \\ y_{t+1}^{(i)} = g_i q_t^{(i)} & (i \in \mathbb{N}_r) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где $r \leq n$, $\alpha_i = 1$, если $i \in \mathbb{N}_r$ и $\alpha_i = 0$, если $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, A_i ($i \in \mathbb{N}_n$) – фиксированные $n \times n$ -матрицы над кольцом \mathcal{K} , $\mathbf{c}_i \in K^n$ ($i \in \mathbb{N}_n$) – фиксированные векторы, а d_i, e_i ($i \in \mathbb{N}_n$) и g_i, f_i ($i \in \mathbb{N}_r$) – фиксированные элементы кольца \mathcal{K} , причем обратимыми элементами являются f_i ($i \in \mathbb{N}_r$), а также e_i, g_i ($i \in \mathbb{N}_r$) для автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,4}$;

3) подмножеств $\tilde{\mathcal{A}}_{n,5} \subset \tilde{\mathcal{A}}_{n,1}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{n,6} \subset \tilde{\mathcal{A}}_{n,2}$ линейных автоматов, заданных, соответственно, системами уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t + B\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = C\mathbf{q}_t + D\mathbf{x}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t + B\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = C\mathbf{q}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где A, B, C, D – фиксированные $n \times n$ -матрицы над кольцом \mathcal{K} .

Для любого обратимого автомата M , перечисленного выше вида, пара инициальных автоматов $((M, \mathbf{q}_0), (M^{-1}, \mathbf{q}_0))$ может рассматриваться как математическая

модель поточного шифра, для которого параметры, определяющие автомат, являются секретным ключом средней длительности, а начальное состояние \mathbf{q}_0 – секретным сеансовым ключом. Поэтому сложность решения задач идентификации (параметрической и начального состояния), а также анализа неподвижных точек автоматных отображений, является теоретическим обоснованием вычислительной стойкости соответствующих шифров. Под действием любого входного слова инициальные автоматы (M, \mathbf{q}_0) и (M^{-1}, \mathbf{q}_0) движутся в пространстве состояний по одной и той же траектории в одном и том же направлении. Это обстоятельство дает возможность осуществлять дополнительный контроль ряда ошибок, возникающих именно в процессе передачи информации. Отметим, что классы эквивалентных состояний автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 5$) имеют достаточно сложную структуру. Отсюда вытекает, что минимизация автомата однозначно приводит к существенному усложнению системы уравнений, определяющей автомат.

Анализ задачи параметрической идентификации автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 3, 5$) дал возможность выделить параметры, идентификация которых осуществляется достаточно легко, а также параметры, идентификация которых сводится к поиску множеств решений систем нелинейных уравнений над кольцом \mathcal{K} , формируемых в процессе кратных экспериментов с исследуемым автоматом. Показано, что переход к обратимым автоматам не упрощает решение задачи параметрической идентификации. Таким образом, для шифра, определяемого обратимым автоматом, выделено множество параметров, которые целесообразно выбирать в качестве секретного ключа средней длительности, а также выделены параметры, обеспечению секретности которых нужно уделить особое внимание.

Аналогичным образом, анализ задачи идентификации начального состояния автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 3, 5$) дал возможность выделить множества параметров, для которых решение может быть получено достаточно легко, а также множества параметров, для которых решение сводится к поиску множеств решений систем уравнений над кольцом \mathcal{K} , формируемых в процессе кратных экспериментов с исследуемым автоматом. Показано, что переход к обратимым автоматам не упрощает решение задачи идентификации начального состояния.

Анализ множества неподвижных точек отображения входной подгруппы в выходную подгруппу, реализуемого инициальным автоматом $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 3, 5$), дал возможность установить условия, при которых это множество пусто, а также условия, когда это множество бесконечно. Это, в свою очередь, дает возможность выделить множества обратимых автоматов, которые целесообразно использовать при построении соответствующих поточных шифров.

Следует также отметить, что система уравнений, предназначенная для анализа вариации поведения автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 3, 5$) при вариации его параметров и/или начального состояния значительно сложнее системы уравнений, определяющей исследуемый автомат. Это обстоятельство делает весьма призрачной возможность разработки для шифров, определяемых обратимыми автоматами, методов криптоанализа, аналогичных дифференциальному и интегральному криптоанализу для *DES*-подобных алгоритмов блочного шифрования.

3. Общая модель автоматного преобразователя информации. Анализ представленных выше результатов, а также анализ управляемых перестановочных и подстановочных операций [6, 21, 23] показывает, что исследование достаточно широкого класса задач криптографии укладывается в рамки следующей концептуальной модели $\mathcal{M} = (F, \mathcal{A}_a)$ дискретного преобразователя информации, рассмотренной в [24].

Пусть S_1 и S_2 – такие конечные множества, что $|S_1| \leq |S_2|$. Зафиксируем конечное семейство инъекций $F = \{f_i\}_{i \in \mathbf{N}_k}$ множества S_1 в множество S_2 , а также алгоритм \mathcal{A}_a , генерирующий псевдослучайную последовательность элементов множества \mathbf{N}_k , где \mathbf{a} – вектор параметров, предназначенных для инициализации алгоритма \mathcal{A} . Преобразование последовательности s_1, \dots, s_l элементов множества S_1 состоит в ее замене последовательностью $f_{i_1}(s_1), \dots, f_{i_l}(s_l)$, где i_1, \dots, i_l – последовательность, генерируемая алгоритмом \mathcal{A} при его инициализации \mathbf{a} .

Так как модель $\mathcal{M} = (F, \mathcal{A}_a)$ предназначена для быстрого преобразования информации, то естественно потребовать, чтобы семейство инъекций $F = \{f_i\}_{i \in \mathbf{N}_k}$ удовлетворяло следующим трем требованиям: 1) семейство F представлено в неявном виде; 2) построение каждой инъекции $f_i \in F$ – легкая задача; 3) каждая инъекция $f_i \in F$ – легко вычисляемое отображение.

Отметим следующие результаты, полученные в рамках рассмотренной модели $\mathcal{M} = (F, \mathcal{A}_a)$. В [25] на основе регулярного графа со специальной структурой построено и исследовано семейство попарно различных перестановок F , имеющее субэкспоненциальную мощность. В [26] построены и исследованы семейства перестановок F , получаемых в результате всевозможных вычеркиваний элементов фиксированной суперпозиции перестановок, предназначенные для преобразования информационного вектора. Выделены семейства перестановок субэкспоненциальной мощности, а также семейства перестановок, для которых почти все точки не являются неподвижными точками. В [27] построен и исследован класс семейств легко вычисляемых разложимых (по компонентам) подстановок F над конечным кольцом, предназначенных для преобразования информационного вектора (этому классу, в частности, принадлежат некоторые семейства подстановок, которые могут быть использованы для построения поточных шифров, управляемых фракталом). Показано, что поиск подсемейства, обладающего фиксированной неподвижной точкой, сводится к решению системы многостепенных диофантовых уравнений с последующей проверкой разрешимости задач поиска дискретного логарифма. Также выделены параметры, определяющие семейство подстановок, идентификация которых сводится к решению задач поиска дискретного логарифма.

4. Заключение. В работе кратко рассмотрены методы анализа автоматного алгебраических моделей над конечным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей с позиции их возможного применения при решении задач защиты информации. Высокая сложность решения задачи параметрической идентификации автомата $M \in \tilde{\mathcal{A}}_{n,i} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{n,i+1}$ ($i = 1, 3, 5$) показывает целесообразность разработки методов построения алгоритмов, моделирующих поведение исследуемого автомата с заданной точностью. Первые попытки решения этой задачи предприняты в [22, 28-31].

Алгоритмический анализ указанной задачи представляет возможное направление исследований. Другое направление связано с исследованием автоматов, на которые наложены ограничения в терминах структуры кольца. Отметим, что в [32] исследованы множества автоматов, на функции переходов и выходов которых наложены ограничения в терминах идеалов, а в [33] рассмотрены автоматы, определенные на эллиптических кривых над конечным полем.

1. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук. – 1961. – № 5. – С. 3-62.
2. Глушков В.М. Абстрактные автоматы и разбиение свободных полугрупп // Докл. АН СССР. – 1961. – № 4. – С. 765-768.
3. Месарович М., Такахага Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
4. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. A. – NY.: Academic Press, 1974. – 451 p.
5. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. – NY.: Academic Press, 1976. – 387 p.
6. Логачев О.А., Сальников А.А., Яценко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. – М.: МЦНМО, 2004. – 470 с.
7. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б., Часовских А.А. Алгоритмические основы эллиптической криптографии. – М.: МЭИ, 2000. – 100 с.
8. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптография. – М.: ТВП, 2001. – 262 с.
9. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.
10. Бессалов А.В., Телиженко А.Б. Криптосистемы на эллиптических кривых. – Киев: Политехника, 2004. – 223 с.
11. Маховенко Е.Б. Теоретико-числовые методы в криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 320 с.
12. Элпас Б. Теория автономных линейных последовательных сетей // Кибернетический сборник. Вып. 7. – М.: Мир, 1963. – С. 90-128.
13. Zierler N., Mills W. Products of linear recurring sequences // Journal of Algebra, 1973. – № 1. – P. 147-157.
14. Агibalов Г.П. Распознавание операторов, реализуемых в линейных автономных автоматах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 3. – С. 99-108.
15. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А. Псевдослучайные и полилинейные последовательности // Труды по дискретной математике. – Т.1. – М.: ТВП, 1997. – С. 139-202.
16. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А. Свойства линейных и полилинейных рекуррент над кольцами Галуа (I) // Труды по дискретной математике. – Т.2. – М.: ТВП, 1998. – С. 191-222.
17. Медведев И.Л., Фараджес Р.Г., Чуйко А.С. Применение модулярных линейных уравнений для описания линейных последовательностных машин // АИТ. – 1971. – № 8. – С. 73-81.
18. Гилл А. Линейные последовательностные машины. – М.: Наука, 1974. – 298 с.
19. Фараджес Р.Г. Линейные последовательностные машины. – М.: Сов. Радио, 1975. – 248 с.
20. Сперанский Д.В. Эксперименты с линейными и билинейными конечными автоматами. – Саратов: СГУ, 2004. – 144 с.
21. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2009. – 479 с.
22. Скобелев В.В., Глазунов Н.М., Скобелев В.Г. Многообразия над кольцами. Теория и приложения. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2011. – 323 с.
23. Молдовян А.А., Молдовян Н.А., Гуц Н.Д., Изотов Б.В. Криптография. Скоростные шифры. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 496 с.
24. Скобелев В.Г. Про один клас автомато-алгебраїчних моделей дискретних перетворювачів інформації // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 2. – С. 151-154.
25. Скобелев В.Г. Оцінка кількості гамільтонових циклів у регулярних графах спеціального типу // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 169-171.
26. Скобелев В.Г. Об одном семействе суперпозиций подстановок // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 116-121.

27. Скобелев В.Г., Зайцева Э.Е. Анализ класса легко вычисляемых перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 12-24.
28. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ нелинейных автоматов с лагом 2 над конечным кольцом // Прикладная дискретная математика. – 2010. – № 1. – С. 68-85.
29. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. О сложности анализа автоматов над конечным кольцом // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 4. – С. 17-30.
30. Скобелев В.В. Сложность идентификации нелинейных одномерных автоматов с лагом 2 над конечным кольцом // Компьютерная математика. – 2011. – Вып. 2. – С. 81-89.
31. Скобелев В.В. О построении имитационной модели нелинейного обратимого автомата над конечным кольцом // Матеріали XVIII Міжнародної конференції з автоматичного управління «АУТОМАТИКС-2011» (м. Львів, 28-30 вересня 2011р.). – Львів: Видавництво Львівської політехніки. – 2011. – С. 289-290.
32. Скобелев В.В. Про множини автоматів над скінченим кільцем, які визначено у термінах ідеалів // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 212-218.
33. Skobelev V.V. On automata over elliptic curves // Proceedings of the VI International Conference on Computer Science and Information Technologies (м. Львів, 16-19 листопада 2011р.). – Львів: Видавництво «Вежа і Ко». – 2011. – С. 29.

V. G. Skobelev

Analysis of automata-algebraic models.

Methods of analysis of automata-algebraic models over finite associative-commutative ring are presented considering their possible applications for solving information-protection problems. Complexity of solving of problems of identification (parametric and initial state) and of fixed-points analysis is characterized.

Keywords: rings, automata, controlled operations, identification, fixed points.

В. Г. Скобелев

Аналіз автоматно-алгебраїчних моделей.

Розглянуто методи аналізу автоматно-алгебраїчних моделей над скінченим асоціативно-комутативним кільцем. Охарактеризовано складність розв'язання задач ідентифікації (параметричної і початкового стану) і аналізу множин нерухомих точок.

Ключові слова: кільця, автомати, керовані операції, ідентифікація, нерухомі точки.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
skbv@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 31.05.12

UDK 517.956

©2012. I. I. Skrypnik , S. V. Skrypnik

ON LOCAL GRADIENT ESTIMATES FOR ANISOTROPIC ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS

It is considered wide class of anisotropic elliptic and parabolic equations. Sharp local pointwise estimates for gradient of solutions of such equations are established.

Keywords: *anisotropic elliptic and parabolic equations, poinwise estimates for gradient of solutions.*

1. Introduction. We shall consider the gradient bounds of weak solutions for quasilinear anisotropic equations of the form

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in \Omega_T. \tag{2}$$

Here Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n , $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, $a_i(\cdot, u, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$ satisfy the Caratheodory conditions and there exist constants K_1, K_2 such that the inequalities

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(\cdot, u, \xi) \xi_i &\geq K_1 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} - 1 \right), \quad |a_i(\cdot, u, \xi)| \leq K_2 \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + K_2, \\ |a_0(\cdot, u, \xi)| &\leq K_2 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i(1-\frac{1}{p})} + 1 \right), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i(\cdot, u, \xi)}{\partial \xi_j} \eta_i \eta_j &\geq K_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i-2} \eta_i^2, \\ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i(\cdot, u, \xi)}{\partial \xi_j} \lambda_i \eta_j &\leq K_2 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i-2} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i-2} \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\xi_s| \left| \frac{\partial a_i(\cdot, u, \xi)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a_i(\cdot, u, \xi)}{\partial x_s} \right| &\leq K_2 |\xi_s| |\xi_i|^{p_i-2}, \quad i, s = \overline{1, n}, \\ \left| \frac{\partial a_0(\cdot, u, \xi)}{\partial \xi_j} \right| &\leq K_2 |\xi_j|^{p_j-2}, \quad j = \overline{1, n}, \\ |\xi_s| \left| \frac{\partial a_0(\cdot, u, \xi)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a_0(\cdot, u, \xi)}{\partial x_s} \right| &\leq K_2 |\xi_s| \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i-2}, \quad s = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

are valid for any $\xi, \lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$.

$$2 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \infty, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad p < n. \quad (5)$$

As a simplest model example of equations (1), (2) we can keep in the mind

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T. \quad (7)$$

It is well known that any weak solution of equations (1), (2) in isotropic case (i.e. $p_1 = \dots = p_n = p$) belongs to the space $C^{1,\alpha}$ locally. Review of these results can be found in the monograph of E. Di Benedetto [7]). Recently, many authors (see, for example [1, 3, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 19, 21, 18, 20, 22, 23, 24, 12, 28]) studied regularity of weak solutions of equations with nonstandard growth conditions. The local boundedness to weak solutions of equation (1) under conditions (3) and additional restrictions

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \frac{np}{n-p} \quad (8)$$

was obtained in [10].

This assumption is significant; there are several examples (see [22, 12]) of such equation with unbounded solutions if $p_n > \frac{np}{n-p}$.

The boundedness of weak solutions of equation (2) was derived in [28] for the case

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq p \left(1 + \frac{2}{n} \right), \quad p > \frac{2n}{n+1}. \quad (9)$$

For equation (1) and the corresponding minimization problem there are known many results on L_∞ -estimates for gradient of solution in the ball $B(r) = \{x : |x - x^{(0)}| \leq r\}$ only (see [1, 2, 3, 18, 20, 21]). Review of this results can be found in [21].

The main distinctive feature of the present paper is an integral estimate of the directional derivatives of the gradient of the solution. We provide these estimates for directional derivatives in any directions in comparison with earlier works where the integral estimates of the total second order derivatives were usually proved.

The paper is organized as follows.

Main definitions and results are formulated in Section 2, proofs of this results are given in Sections 3 and 4.

2. Formulation of assumptions and main results. We recall the embedding theorem (see, for example, [13]).

Lemma 1. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ be a bounded domain, $u(x) \in \mathring{W}_{\bar{p}}^1(\Omega) = \mathring{W}_{p_1, \dots, p_n}^1(\Omega)$. If $1 < p < n$, then $u(x) \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{np}{n-p}$ and the following estimate holds

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{np_i}}, \quad (10)$$

where the constant c depends only on n, p_1, \dots, p_n .

DEFINITION 1. We shall say that function $u(x)$ is generalized solution of equation (1) in Ω if $u(x) \in W_{\bar{p},loc}^1(\Omega) = W_{p_1, \dots, p_n,loc}^1(\Omega)$ and the following integral identity holds

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi dx = 0 \quad (11)$$

for an arbitrary function $\varphi(x) \in \mathring{W}_{\bar{p},loc}^1(\Omega)$.

DEFINITION 2. We shall say that function $u(x, t)$ is generalized solution of equation (2) in Ω_T if $u(x, t) \in V_{2, \bar{p}, loc}(\Omega_T) \equiv C_{loc}(0, T; L_{2, loc}(\Omega)) \cap L_{\bar{p}}(0, T; W_{\bar{p}, loc}^1(\Omega))$ and the following integral identity holds

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left\{ -u \varphi_t + \sum_{i=1}^n a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right. \\ & \left. - a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \right\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

for all intervals $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ and an arbitrary function $\varphi(x, t) \in W_{2, loc}^1(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_{\bar{p}, loc}(0, T; \mathring{W}_{\bar{p}, loc}^1(\Omega))$.

Theorem 1. Let $u(x)$ be an arbitrary solution of equation (1) in Ω . Assume that structural conditions (3), (4) are satisfied. Suppose also that parameters p_i satisfy conditions

$$2 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \frac{np_1}{n - p_1}, \quad (13)$$

then $u(x) \in W_{\infty, loc}^1(\Omega)$. Moreover, for any set $B(r, \theta) = \{x_i : |x_i - x_i^{(0)}| \leq \theta \alpha^{\frac{\beta - p_i}{p_i}} r^{\frac{p}{p_i}}, i = \overline{1, n}\} \subset \Omega$, there exists positive constant C depending only on $n, p_1, \dots, p_n, K_1, K_2$ such that for any $1 \leq s \leq n$ and any $\alpha, \beta, \theta > 0$ the inequality holds

$$\operatorname{ess\,sup}_{B(\frac{r}{2}, \theta)} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^{p_s} \theta^{\alpha \beta r^p} \right]^{1 - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_n})} \leq C \left(1 + \theta^{-n\alpha \frac{\beta - p}{p} + \alpha \beta} r^{-n+p} \sum_{i=1}^n \int_{B(r, \theta)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right). \quad (14)$$

Theorem 2. Let $u(x, t)$ be an arbitrary solution of equation (2) in Ω_T . Assume that structural conditions (3), (4) are satisfied. Suppose also that parameters p_i satisfy conditions

$$2 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \frac{n+4}{n+2}p_1, \tag{15}$$

then $\frac{\partial u}{\partial x} \in L_{\infty,loc}(\Omega_T)$. Moreover, for any $Q(r, \theta, \sigma) = B(r, \theta) \times (t_0 - \sigma, t_0 + \sigma)$, there exists positive constant C depending only on $n, p_1, \dots, p_n, K_1, K_2$ such that for any $1 \leq s \leq n$ and any $\alpha, \beta, \theta > 0$ the inequality holds

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{Q(\frac{r}{2}, \theta, \frac{\sigma}{2})} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^{p_s} \theta^{\alpha\beta r^p} \right]^{\frac{n+4}{p_n} - \frac{n+2}{p_1}} \\ & \leq C(\sigma^{-1} + \theta^{-\alpha(\beta-2)} r^{-p})^{\frac{n+2}{2}} \theta^{\alpha\beta \frac{p-2}{p} \frac{n}{2}} r^{(p-2)\frac{n}{2}} \iint_{Q(r, \theta, \sigma)} \left(1 + \theta^{\alpha\beta r^p} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p_k} \right) dx dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Precision of the estimates (13), (15) follows, for example, from sharp estimates for fundamental solutions to anisotropic elliptic and parabolic equations (see [26, 27]).

3. Proof of Theorem 1. Further we will denote by c, c_i different positive constants depending on $n, p_1, \dots, p_n, K_1, K_2$ only.

Taking the x_s -derivative of equation (1) and integrating over Ω we obtain

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{da_i(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})}{dx_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \frac{da_0(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})}{dx_s} \varphi dx = 0 \quad \text{for every } s, 1 \leq s \leq n \tag{17}$$

Here $\varphi(x)$ is an arbitrary sufficiently smooth function vanishing on $\partial\Omega$,

$$\frac{dA(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})}{dx_s} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} + \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{\partial A}{\partial x_s}.$$

Without loss of generality it can be assumed that $x_0 = 0$ and r satisfies the condition

$$\theta^{\alpha \frac{\beta-p_i}{p_i}} r^{\frac{p}{p_i}} \leq \min\{1, \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \theta^{\alpha\beta} r^p \leq 1 \tag{18}$$

thus $B(r, \theta) \subset \Omega$.

Let us introduce the nonnegative cut-off function $\xi(x)$ for the set $B(r, \theta)$,

$$\xi(x) \equiv 1 \quad \text{in } B\left(\frac{r}{2}, \theta\right), \quad 0 \leq \xi(x) \leq 1,$$

$$\left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right| \leq c \theta^{-\alpha \frac{\beta-p_i}{p_i}} r^{-\frac{p}{p_i}} \quad i = 1, \dots, n.$$

Denote also

$$b = \theta^{\alpha\beta} r^p, \quad w(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} b^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Lemma 2. *Let all conditions of Theorem 1 are satisfied. Then there exists a positive constant C_1 depending only on $n, p_1, \dots, p_n, K_1, K_2$, such that for any $1 \leq s \leq n$, $m \geq 0$, $l \geq n$ the following inequality holds*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x) \xi^l(x) dx \\ & \leq C_1 (l+m)^2 b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2 \frac{p}{p_s}} \int_{\Omega} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^{l-2}(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Proof. We can assume without loss of generality that

$$\begin{aligned} & \sum_{i,s=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x) \xi^l(x) dx < \infty, \\ & \int_{\Omega} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^{l-2}(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

Later we shall prove that there exist positive numbers m_0, l_0 , such that the integrals in (20) are finite for all $m \geq m_0$, $l \geq l_0$.

Let us substitute in integral identity (17) the test function

$\varphi(x) = \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x)$, $m \geq 0$, $l \geq n$, $\varepsilon > 0$, $w_{\varepsilon}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (|\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{p_k}{4}} b^{\frac{1}{2}}$. Then for every s , $1 \leq s \leq n$, we get

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x) dx \\ & = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} \left\{ l \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^{l-1}(x) \right. \\ & \quad \left. + mb^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^{m-1}(x) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \xi^l(x) \right\} dx \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{\partial a_i}{\partial x_s} \right) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x) \right. \\ & \quad \left. + mb^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^{m-1}(x) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \xi^l(x) \right. \\ & \quad \left. + l \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^{l-1}(x) \right\} dx - \int_{\Omega} \frac{da_0}{dx_s} \frac{\partial u}{\partial x_s} w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Estimating integrals in the right-hand side of (21) due to conditions (4) and applying Young's inequality, we get

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x) dx \\
 & \leq c_1 b(l+m)^2 \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{2}-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w_{\varepsilon}^{m-2}(x) \xi^l(x) dx \\
 & + c_1(l+m)^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right|^2 w_{\varepsilon}^m(x) \xi^{l-2}(x) dx \\
 & + c_1(l+m)^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 w_{\varepsilon}^m(x) \xi^l(x) dx = \sum_{t=1}^3 I_t. \tag{22}
 \end{aligned}$$

After simple computations we have

$$I_1 \leq c_2 b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} (l+m)^2 \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}} \xi^2(x) dx. \tag{23}$$

Taking into account the definition of number b , we obtain

$$\begin{aligned}
 I_2 & \leq c_3 b^{-1-\frac{2}{p_s}} (l+m)^2 \sum_{i=1}^n b^{\frac{2}{p_i}} \int_{\Omega} w_{\varepsilon}^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}} \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right|^2 \xi^{l-2}(x) dx \\
 & \leq c_4 b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2\frac{p}{p_s}} (l+m)^2 \int_{\Omega} w_{\varepsilon}^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^{l-2}(x) dx. \tag{24}
 \end{aligned}$$

In the same way, using also condition (18), we deduce

$$I_3 \leq c_5 b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2\frac{p}{p_s}} (l+m)^2 \int_{\Omega} w_{\varepsilon}^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^{l-2}(x) dx. \tag{25}$$

To estimate the right-hand side of (23) let us substitute into integral identity (17) the test function

$$\varphi(x) = \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} w^{m-1+\frac{4}{p_1}} \xi^l(x),$$

summing over all $k = 1, \dots, n$, we have

$$\begin{aligned}
 I_4 + I_5 & = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{p_k}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \left\{ \left(\frac{p_k}{2} - 1 \right) \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right\} \\
 & \times \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-2} w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^l(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b^{\frac{1}{2}} \left(m - 1 + \frac{4}{p_1} \right) \sum_{i,j,k,t=1}^n \frac{p_k p_t}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_t} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_t} \\
& \times \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_t} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_t}{4}-1} w_{\varepsilon}^{m-2+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^l(x) dx \\
& = -l \sum_{i,j,k=1}^n \frac{p_k}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}}(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^l(x) dx \\
& - \sum_{i,k=1}^n \frac{p_k}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^l(x) \right\} dx \\
& - \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} \int_{\Omega} \frac{da_0}{dx_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}} \xi^l(x) dx = \sum_{h=6}^8 I_h. \tag{26}
\end{aligned}$$

Conditions (4) imply

$$\begin{aligned}
I_9 & = c_6 \min \left(\frac{p_1}{2} - 1, 1 \right) \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}-1} \\
& \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^l(x) dx \leq I_4 + I_5. \tag{27}
\end{aligned}$$

Using conditions (4) and Young's inequality, we get

$$\begin{aligned}
|I_6| & \leq \frac{1}{8} I_9 \\
& + c_7 (l+m)^2 \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{p_k}{4}} w_{\varepsilon}^{m-1+\frac{4}{p_1}}(x) \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right|^2 \xi^{l-2}(x) dx \\
& \leq \frac{1}{8} I_9 + c_8 (l+m)^2 b^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n b^{\frac{2}{p_i}} \int_{\Omega} w_{\varepsilon}^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right|^2 \xi^{l-2}(x) dx. \tag{28}
\end{aligned}$$

By the same argument

$$|I_7| + |I_8| \leq \frac{1}{8} I_9 + c_9 (l+m)^2 b^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n b^{\frac{2}{p_i}} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_i}{p_i}} r^{-2\frac{p}{p_i}} \int_{\Omega} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x) \xi^{l-2}(x) dx. \tag{29}$$

Now from (22) due to estimates (23)–(29), conditions (18), the choice of b and letting $\varepsilon \rightarrow 0$ we get inequality (20). This completes the proof of Lemma 2. \square

The application of embedding Lemma 2.1 with $p_1 = \dots = p_n = 2$ yields

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\Omega} w^m(x) \xi^l(x) dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 & \leq c_{10} \prod_{s=1}^n \left(\int_{\Omega} w^{m \frac{n-2}{n} - 2}(x) \left| \frac{\partial w}{\partial x_s} \right|^2 \xi^{l \frac{n-2}{n}}(x) dx + \int_{\Omega} w^{m \frac{n-2}{n}}(x) \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_s} \right|^2 \xi^{l \frac{n-2}{n} - 2}(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
 & \leq c_{11} (m+l)^2 \prod_{s=1}^n \left(b \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^{m \frac{n-2}{n} - 2}(x) \xi^{l \frac{n-2}{n}}(x) dx \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega} w^{m \frac{n-2}{n}}(x) \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_s} \right|^2 \xi^{l \frac{n-2}{n} - 2}(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Combining (20) and (30), we obtain

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\Omega} w^m(x) \xi^l(x) dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 & \leq c_{12} (m+l)^c \left(\prod_{s=1}^n \theta^{-2\alpha \frac{\beta - p_s}{p_s}} r^{-2 \frac{p}{p_s}} \right)^{\frac{1}{n}} \int_{\Omega} w^{m \frac{n-2}{n} + \frac{4}{p_1} - \frac{4}{p_n}}(x) \xi^{l \frac{n-2}{n} - 2}(x) dx.
 \end{aligned}$$

This inequality implies

$$\int_{\Omega} w^m(x) \xi^l(x) dx \leq c_{13} (m+l)^c \left(\theta^{-2\alpha \frac{\beta - p}{p}} r^{-2} \int_{\Omega} w^{m \frac{n-2}{n} + \frac{4}{p_1} - \frac{4}{p_n}}(x) \xi^{l \frac{n-2}{n} - 2}(x) dx \right)^{\frac{n}{n-2}}. \tag{31}$$

Taking into account (31), we derive from (31) necessary estimate (20). This concludes the proof of Lemma 2.

Now Moser's iterative arguments give us the boundedness of $|\frac{\partial u}{\partial x}|$ and estimate (14). This proves Theorem 1.

4. Proof of Theorem 2. Without loss of generality it can be assumed that $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{2,loc}(\Omega_T)$, otherwise we will consider the Steklov average (see, for example, [7]).

Taking the x_s -derivative of equation (2) and integrating over Ω_T we deduce

$$\iint_{\Omega_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_s} \varphi dx dt + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} \frac{da_i(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})}{dx_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt = \iint_{\Omega_T} \frac{da_0(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})}{dx_s} \varphi dx dt, \tag{32}$$

for every $s, 1 \leq s \leq n$. Here $\varphi(x, t)$ is an arbitrary sufficiently smooth function vanishing on $\partial\Omega \times (0, T)$.

Assume that θ, r satisfy condition (18) and

$$0 < \sigma < \min(t_0, T - t_0). \quad (33)$$

Therefore, $Q(r, \theta) \subset \Omega$.

Let us introduce the nonnegative cut-off function $\psi(t)$ for interval $(t_0 - \sigma, t_0 + \sigma)$, $0 \leq \psi(t) \leq 1$, $\psi(t) \equiv 1$ in $(t_0 - \frac{\sigma}{2}, t_0 + \frac{\sigma}{2})$ and $|\frac{d\psi(t)}{dt}| \leq c\sigma^{-1}$.

Let us denote also

$$b = \theta^{\alpha\beta} r^p, \quad w(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} b^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Lemma 3. *Let all the conditions of Theorem 2 are satisfied. Then there exists a positive constant C_2 , depending only on $n, p_1, \dots, p_n, K_1, K_2$, such that the following inequality*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_t \int_{\Omega} w^{m+\frac{4}{p_n}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx \\ & + b^{\frac{2}{p_s}} \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ & \leq C_2(l+m)^2 [\sigma^{-1} + \theta^{-\alpha(\beta-2)} r^{-p}] \iint_{\Omega_T} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

is valid for any $1 \leq s \leq n, m \geq 0, l \geq n$.

Proof. We can assume without loss of generality that

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_t \int_{\Omega} w^{m+\frac{4}{p_n}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx \\ & + \sum_{i,s=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt < \infty, \\ & \iint_{\Omega_T} w^{m+2+\frac{4}{p_1}-\frac{4}{p_n}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt < \infty. \end{aligned}$$

Later we shall prove that there exist positive numbers m_0, l_0 , such that the integrals in (35) are finite for all $m \geq m_0, l \geq l_0$.

It can be assumed also that $p_1 \geq 4$, in the general case we consider $w_\varepsilon(x, t) = 1 + (\sum_{k=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{p_k}{4}} b^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon > 0$ instead of $w(x, t)$. The proof is analogous and we omit the details. Let us substitute in integral identity (32) the test function

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x_s} w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t), \quad m \geq 0, l \geq n,$$

were function $\xi(x)$ was defined in Section 3.

Evaluating the first integral of (32) in the right-hand side and due to definition of the test function we have for any $\tau \in (t_0 - \sigma, t_0 + \sigma)$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_s} \varphi(x, t) dx dt &= \frac{1}{2} b^{-\frac{2}{p_s}} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\ &- \frac{l}{2} b^{-\frac{2}{p_s}} \iint_{\Omega_T} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^m(x, t) \xi^l(x) \frac{d\psi(t)}{dt} \psi^{l-1}(t) dx dt \\ &- \frac{m}{4} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_T} p_k \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Let us substitute into integral identity (32) the test function

$$\varphi = \frac{m}{4} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} p_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t),$$

and sum over $k = 1, 2, \dots, n$ we obtain

$$\begin{aligned} &- \frac{m}{4} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_T} p_k \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &= \frac{m}{4} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{i,k=1}^n p_k \left(\frac{p_k}{2} - 1\right) \iint_{\Omega_T} \frac{da_i}{dx_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &+ \frac{m}{2} b^{\frac{1}{2}} \sum_{i,k=1}^n p_k \iint_{\Omega_T} \frac{da_i}{dx_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial u}{\partial x_s} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &+ \frac{m(m-1)}{8} b^{-\frac{2}{p_s} + 1} \sum_{i,k,q=1}^n p_k p_q \iint_{\Omega_T} \frac{da_i}{dx_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_q} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_q} \right|^{\frac{p_q}{2}-2} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-2}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) ds dt \\ &+ \frac{ml}{4} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{i,k=1}^n p_k \iint_{\Omega_T} \frac{da_i}{dx_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^{m-1}(x, t) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^{l-1}(x) \psi^l(x) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{m}{4}b^{-\frac{2}{ps}+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^n p_k \iint_{\Omega_T} \frac{da_0}{dx_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{pk}{2}-2} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{ps}} \right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 & = \sum_{N=1}^5 J_N. \tag{37}
 \end{aligned}$$

Combining (36) and (37) from (32) we get

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}b^{-\frac{2}{ps}} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{ps}} \right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & + \sum_{i,j=1}^n \iint_{\Omega_T} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 & = - \sum_{i,j=1}^n \iint_{\Omega_T} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} \left\{ l \frac{\partial u}{\partial x_s} w^m(x, t) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^{l-1}(x) \psi^l(t) \right. \\
 & + mb^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_s} w^{m-1}(x, t) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{pk}{2}-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \xi^l(x) \psi^l(t) \left. \right\} dx dt \\
 & - \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} \left(\frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{\partial a_i}{\partial x_s} \right) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) \right. \\
 & + l \frac{\partial u}{\partial x_s} w^m(x, t) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \xi^{l-1}(x) \psi^l(t) \\
 & + mb^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_s} w^{m-1}(x, t) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{pk}{2}-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \xi^l(x) \psi^l(t) \left. \right\} dx dt \\
 & + \iint_{\Omega_T} \frac{da_0}{dx_s} \frac{\partial u}{\partial x_s} w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 & + \frac{l}{2}b^{-\frac{2}{ps}} \iint_{\Omega_T} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{ps}} \right) w^m(x, t) \xi^l(x) \frac{d\psi(t)}{dt} \psi^{l-1}(t) dx dt - \sum_{N=1}^5 J_N. \tag{38}
 \end{aligned}$$

First we observe that

$$\begin{aligned}
 J_0 & = c_{15}b^{-\frac{2}{ps}} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{ps}} \right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & + c_{15} \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 & \leq \frac{1}{2}b^{-\frac{2}{ps}} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{ps}} \right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \iint_{\Omega_T} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt. \quad (39)$$

Conditions (4) and Young's inequality imply

$$\begin{aligned} J_1 &\geq c_{16} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} m \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}} \right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &- c_{16} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} m \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}} \right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &= c_{16} J_6 - c_{16} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} m \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}} \right) w^{m-1}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt. \end{aligned} \quad (40)$$

By the same argument we get

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{8} J_0 \\ &+ c_{17} m^2 b \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p_k-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w^{m-2}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\ &+ c_{17} m^2 b \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p_k} w^{m-2}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt. \end{aligned} \quad (41)$$

Using again conditions (4) and Young's inequality yields

$$\begin{aligned} J_3 &\geq -\frac{1}{8} c_{16} J_6 - c_{18} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{3}{2}} m^2 \sum_{i,k,q=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_q} \right|^{\frac{p_q}{2}} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}} \right) w^{m-3}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt. \end{aligned} \quad (42)$$

As before

$$\begin{aligned} |J_4| + |J_5| &\leq \frac{1}{8} c_{16} J_6 + c_{19} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} (m+l)^2 \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} \\ &\times \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}} \right) w^{m-1}(x, t) \left(1 + \left| \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \right|^2 \right) \xi^{l-2}(x) \psi^l(t) dx dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Now, from (38) due to conditions (4), inequalities (23)–(26) from Section 3, (39)–(43), taking into account the choice of number b , we obtain

$$\begin{aligned}
 J_0 &\leq c_{20}(l+m)^2 b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \\
 &\times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w^{m-1 + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 &+ c_{20}(l+m)^2 b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2\frac{p}{p_s}} \iint_{\Omega_T} w^{m+2 - \frac{4}{p_n} + \frac{4}{p_1}} \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt \\
 &+ c_{20}(l+m)^2 b^{-\frac{2}{p_s}} \sigma^{-1} \iint_{\Omega_T} w^{m+2 - \frac{4}{p_n} + \frac{4}{p_1}} \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \tag{44}
 \end{aligned}$$

To estimate first integral in the right-hand side of (44) we substitute into integral identity (32) the test function

$$\varphi(x, t) = b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \frac{p_k}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} w^{m-1 + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t).$$

We sum over all $k = 1, \dots, n$. Then for every $\tau \in (t_0 - \sigma, t_0 + \sigma)$

$$\begin{aligned}
 &\frac{b^{-\frac{2}{p_s}}}{m + \frac{4}{p_1}} \int_{\Omega} w^{m + \frac{4}{p_1}}(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 &+ \sum_{i,k=1}^n \frac{p_k}{2} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \iint_{\Omega_T} \frac{da_i}{dx_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}} w^{m-1 + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) \right) dx dt \\
 &- \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{2} b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \iint_{\Omega_T} \frac{da_0}{dx_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} w^{m-1 + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 &= \frac{l}{m + \frac{4}{p_1}} b^{-\frac{2}{p_s}} \iint_{\Omega_T} w^{m + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \frac{d\psi(t)}{dt} \psi^{l-1}(t) dx dt. \tag{45}
 \end{aligned}$$

We estimate second and third integrals in the left-hand side of (45) as in (26)–(29) from Section 3. This remark gives

$$\begin{aligned}
 &b^{-\frac{2}{p_s} + \frac{1}{2}} \sum_{i,k=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p_k}{2}-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 w^{m-1 + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 &\leq c_{21}(l+m)^2 b^{-\frac{2}{p_s}} \sigma^{-1} \iint_{\Omega_T} w^{m+2 - \frac{4}{p_n} + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt \\
 &+ c_{21}(l+m)^2 b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2\frac{p}{p_s}} \iint_{\Omega_T} w^{m+2 - \frac{4}{p_n} + \frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \tag{46}
 \end{aligned}$$

Combining (46) with (44), we get

$$\begin{aligned}
 & b^{-\frac{2}{p_s}} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \right)^2 w^m(x, t) \xi^l(x) \psi^l(t) dx dt \\
 & \leq c_{22} (l+m)^2 \left(b^{-\frac{2}{p_s}} \sigma^{-1} + b^{-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2\frac{p}{p_s}} \right) \\
 & \times \iint_{\Omega_T} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \tag{47}
 \end{aligned}$$

It follows easily that

$$b^{\frac{2}{p_s}-1} \theta^{-2\alpha \frac{\beta-p_s}{p_s}} r^{-2(\beta-2)} = \theta^{-\alpha(\beta-2)} r^{-p}, \tag{48}$$

thus (47) implies

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & \leq c_{22} (l+m)^2 (\sigma^{-1} + \theta^{-\alpha(\beta-2)} r^{-p}) \iint_{\Omega_T} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \tag{49}
 \end{aligned}$$

We sum (49) over all $s = 1, \dots, n$ to obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w^{m+\frac{4}{p_n}}(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & \leq c_{23} \sum_{s=1}^n \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^{\frac{p_s}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{p_n}} w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & \leq c_{24} \sum_{s=1}^n \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^{p_s} b\right)^{\frac{2}{p_n}} w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & \leq c_{25} \sum_{s=1}^n \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 b^{\frac{2}{p_s}}\right) w^m(x, \tau) \xi^l(x) \psi^l(\tau) dx \\
 & \leq c_{26} (l+m)^2 (\sigma^{-1} + \theta^{-\alpha(\beta-2)} r^{-p}) \iint_{\Omega_T} w^{m+2-\frac{4}{p_n}+\frac{4}{p_1}}(x, t) \xi^{l-2}(x) \psi^{l-2}(t) dx dt. \tag{50}
 \end{aligned}$$

Taking into account (50), we derive from (47) necessary estimate (35). This concludes the proof of Lemma 3. \square

Now Moser's iterative arguments give as the boundedness of $|\frac{\partial u}{\partial x}|$ and estimate (16). This proves Theorem 2.

1. *Bhattacharya T. and Leonetti F.* Some remarks on the regularity of minimizers of integrals with anisotropic growth // *Comm. Math. Univ. Carol.* – 1993. – N 34. – P. 597-611.
2. *Canale A., D'Ottavia A., Leonetti F. and Longobardi M.* Differentiability for bounded minimizers of some anisotropic integrals // *J. Math. Anal. Appl.* – 2001. – N 253. – P. 640-650.
3. *Cavaliere P., D'Ottavia A., Leonetti F. and Longobardi M.* Differentiability for bounded minimizers of anisotropic integrals // *Comm. Math. Univ. Carol.* – 1998. – N 39. – P. 685-696.
4. *Chianchi A.* Local boundedness of minimizers of anisotropic integrals // *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* – 2000. – N 17. – P. 147-168.
5. *Degtyarev S. P., Tedeev A. F.* $L_1 - L_\infty$ bounds for a solution of the Cauchy problem for anisotropic degenerate equation with growing initial data // *Math. Sbornic*, (in Russian) to appear.
6. *Di Benedetto E.* $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solution of degenerate elliptic equations // *Nonlinear Anal.* – 1993. – N 7. – P. 827-850.
7. *Di Benedetto E.*, Degenerate parabolic equations. – Springer-Verlag New York. – 1993.
8. *Evans L.C.* A new proof of local $C^{1+\alpha}$ -regularity for solutions of certain degenerate elliptic P. D.E. // *J. Differential Equations.* – 1983. – N 45. – P. 356-373.
9. *Esposito L., Leonetti F., Mingione G.* Sharp regularity for functionals with (p, q) growth // *Journal of Diff. Equations.* – 2004. – N 204. – P. 5-55.
10. *Fusco N., Sbordone C.* Local boundedness of minimizers in a limit case // *Manuscripta Math.* – 1990. – N 69. – P. 19-25.
11. *Fusco N., Sbordone C.* Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals // *Commun. in P. D.E.* – 1993. – vol. 18, N 1&2. – P. 153-167.
12. *Giaquinta M.* Growth conditions and regularity, a counterexample // *Mamus. Math.* – 1987. – N 50. – P. 245-248.
13. *Kolodij I.M.* On boundedness of weak solutions of elliptic differential equations // *Moscow University Vestnik.* – 1970. – N 5. – P. 44-52.
14. *Kolodij I.M.* On boundedness of weak solutions of parabolic differential equations // *Moscow University Vestnik.* – 1971. – N 5. – P. 25-31.
15. *Ladyzenskaya O.A. and Ural'tseva N.N.* Linear and Quasilinear Elliptic Equations. – Academic Press, N. Y. – 1968.
16. *Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – *Transl. Math. Mono.* – 1968, vol. 23 AMS, Providence.
17. *Lewis J.L.* Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations // *Indiana Univ. Math. J.* – 1983. – N 32. – P. 849-858.
18. *Li J.J.* Local behavior of solutions of anisotropic elliptic equations // *Nonlinear Anal.* – 1999. – N 3. – P. 617-627.
19. *Lieberman G.M.* The first initial-boundary value problem for quasilinear second order parabolic equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* – 1986. – N 13. – P. 374-387.
20. *G. M. Lieberman* Gradient estimates for a new class of degenerate elliptic and parabolic equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* – 1994. – N 21. – P. 497-522.
21. *G. M. Lieberman* Gradient estimates for anisotropic elliptic equations // *Advances in Diff. Equations.* – 2005. – vol. 10, N 7. – P. 767-812.
22. *Marcellini P.* Regularity of minimizers of integrals in the calculus of variations with nonstandard growth conditions // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1989. – N 105. – P. 267-284.
23. *Marcellini P.* Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q growth conditions // *J. Differential Equations.* – 1991. – N 90. – P. 1-30.
24. *Mingoi Yu., Xiting L.* Boundedness of solutions of parabolic equations with anisotropic growth conditions // *Can. J. Math.* – 1997. – vol. 49, N 4. – P. 789-809.
25. *Moser J.* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1960. – vol. 13, N 3. – P. 457-468.
26. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations, *Advanced Nonl. Studies.* – 2006. – vol. 6, N 4. – P. 617-641.
27. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations // *Applicable Analysis.* – 2010. – vol. 89, N 10. –

P. 1559-1574.

28. *Porzio M.M.* L_∞ -regularity for degenerate and singular anisotropic parabolic equations // Bollettino U.M.I. – 1997. – vol. 7, N 11A. – P. 697-707.
29. *Skrypnik I.V.* Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. – Translations of Math. Monographs. – 1994. – 349 p.

И. И. Скрыпник, С. В. Скрыпник

О локальных оценках градиентов для анизотропных эллиптических и параболических уравнений.

Рассмотрены широкие классы анизотропных эллиптических и параболических уравнений. Получены точные оценки для градиентов решений таких уравнений.

Ключевые слова: анизотропные эллиптические и параболические уравнения, поточечные оценки градиентов решений

І. І. Скрипник, С. В. Скрипник

Про локальні оцінки градієнтів для анізотропних еліптичних та параболических рівнянь.

Розглянуто широкі класи анізотропних еліптичних та параболических рівнянь. Отримано точні оцінки градієнтів розв'язків таких рівнянь.

Ключові слова: анізотропні еліптичні та параболическі рівняння, точкові оцінки градієнтів розв'язків

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
Donetsk National University of economics and trade named
M. Tugan-Baranovsky
iskrypnik@iamm.donbass.com*

Received 27.03.12

УДК 517.444

©2012. Н. А. Трипольская, Вит. В. Волчков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

Изучаются искаженные уравнения свертки на гиперболическом диске. Получен аналог теоремы о среднем для собственных функций лапласиана.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость, уравнение свертки, теорема о среднем.

1. Введение. Пусть \mathbb{R}^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, Δ – оператор Лапласа в \mathbb{R}^n . Известная теорема о шаровых средних для уравнения Гельмгольца утверждает, что для того, чтобы функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ была решением уравнения

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ выполнялось равенство

$$\int_{|u| \leq r} f(x+u) du = (2\pi)^{n/2} r^n \mathbf{I}_{n/2}(\lambda r) f(x), \quad (2)$$

где $\mathbf{I}_\nu(z) = \mathcal{J}_\nu(z)/z^\nu$, \mathcal{J}_ν – функция Бесселя первого рода (см., например, [1, глава 4, § 3,4]). В частности, при $\lambda = 0$ из (2) следует классическая теорема о среднем для гармонических функций. Кроме того, если T – радиальное распределение в \mathbb{R}^n с компактным носителем (т.е. T инвариантно относительно вращений в \mathbb{R}^n , см. например [2, часть 1]), равенство (1) влечет соотношение

$$(f * T)(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \tilde{T}(\lambda) f(x), \quad (3)$$

где Γ – гамма-функция, \tilde{T} – сферическое преобразование распределения T , то есть,

$$\tilde{T}(\lambda) = \langle T, \mathbf{I}_{n/2-1}(\lambda|x|) \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

[2, часть 1, глава 7, формула (7.9)].

Указанные факты допускают интересные обобщения для однородных пространств. Ряд результатов в этом направлении получено Т.Уиллмором, Р.Годеманом, С.Хелгасоном и др. (см. [3], [4], [5, глава 4, § 2], [6, разделы 11.3, 12.4]).

Теоремы о среднем играют важную роль в ряде вопросов анализа, дифференциальных уравнений, интегральной геометрии и других областях. Например, при изучении ядер различных сверточных операторов возникает необходимость в обобщениях формулы (3) для других типов свертки. В данной работе получен аналог теоремы о среднем для свертки вида

$$(f_1 \times f_2)(z) = \int_G f_1(g(0)) f_2(g^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s dg, \quad (4)$$

где G – группа конформных автоморфизмов единичного круга, $\langle z, g0 \rangle = z \cdot \overline{g(0)}$, $s \in \mathbb{R}$. При $s = 0$ равенство (4) дает свертку на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ [5, введение, § 4.3]. Теория уравнений свертки на областях в $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ развита в [6, глава 15, 20]. В общем случае свертку (4) можно рассматривать как аналог искаженного уравнения свертки на \mathbb{C} [6, глава 12]. Локальные аспекты соответствующей теории в настоящее время еще не разработаны.

2. Формулировка основного результата. Пусть \mathbb{D} – открытый круг $|z| < 1$ в \mathbb{R}^2 со стандартной структурой многообразия (т.е. \mathbb{D} рассматривается как подмногообразие \mathbb{R}^2) и с римановой структурой, задаваемой метрическим тензором

$$g_{i,j}(z) = \frac{\delta_{i,j}}{(1 - |z|^2)^2},$$

($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера). Это риманово многообразие изометрично вещественной гиперболической плоскости \mathbb{H}^2 постоянной секционной кривизны -4 [5, введение]. Группа G действует на \mathbb{D} посредством отображений

$$g(z) = \frac{az + b}{\overline{bz + a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (5)$$

Отображения (5) вместе с $z \rightarrow \bar{z}$ порождают все изометрии \mathbb{D} . Риманова мера на \mathbb{D} имеет вид

$$d\mu(z) = \frac{dm(z)}{(1 - |z|^2)^2},$$

где dm – мера Лебега в \mathbb{R}^2 . Как обычно, считаем, что мера Хаара dg на G нормирована соотношением

$$\int_G f(g(0))dg = \int_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z), \quad f \in L^1(\mathbb{D}; \mu), \quad (6)$$

(см. [5, введение, § 4.3]).

Пусть $d(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния на \mathbb{D} . Для $0 < R \leq \infty$ положим

$$B_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0, z) < R\}, \quad \overline{B}_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0, z) \leq R\}.$$

Нам требуются следующие классы функций и распределений в B_R : $L^{1,loc}$ – совокупность локально интегрируемых функций в B_R ; $RA(B_R)$ – класс вещественно-аналитических функций; $\mathcal{E}'(B_R)$ – пространство распределений с компактным носителем; $\mathcal{E}'_r(B_R)$ – множество радиальных распределений из $\mathcal{E}'(B_R)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_r(B_R)$. Введем четную целую функцию $\mathcal{F}(T)$ с помощью равенства

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) = \langle T, H_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

где

$$H_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-s} F\left(s + \frac{1 - i\lambda}{2}; s + \frac{1 + i\lambda}{2}; 1; \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right),$$

$F(\alpha; \beta; \gamma; z)$ – аналитическое продолжение на $C \setminus [1; \infty)$ гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta + k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma + k)} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1.$$

Кроме того, положим

$$r(T) = \inf\{r > 0 : \text{supp}T \subset B_r\}.$$

Для $f \in C^\infty(B_R)$ определим свертку

$$(f \times T)(g^{-1}(0)) = \left\langle T, f(g^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s \right\rangle, \quad g^{-1}(0) \in B_{R-r(T)}, \quad (8)$$

где ветвь степени выделяется условием $1^s = 1$.

Указанное определение корректно и, в случае, когда T -функция, совпадает с (4) (см. лемму 1 ниже).

Наконец, определим дифференциальный оператор \mathcal{L} следующим образом:

$$\mathcal{L} = L_{\mathbb{H}^2} + A_1 + A_2, \quad (9)$$

где $L_{\mathbb{H}^2}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на \mathbb{H}^2 ,

$$A_1 = -4s^2|z|^2 Id, \quad A_2 = -4s(1 - |z|^2) \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad (10)$$

Id – тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{D})$, $R \in (r(T), +\infty]$ и $\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 4s^2 + 1)f$ в B_R при некотором $\lambda \in C$. Тогда

$$f \times T = \mathcal{F}(T)(\lambda)f, \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}. \quad (11)$$

Отметим, что при $s = 0$ утверждение теоремы 1 совпадает с теоремой о среднем для \mathbb{H}^2 и является известным (см. [5, глава 4, §2]).

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего установим корректность определения (8). Обозначим через $SO(2)$ группу вращений \mathbb{R}^2 .

Лемма 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(B_R)$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда функция

$$\theta(g) = \left\langle T, f(g^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s \right\rangle, \quad g \in G : g^{-1}(0) \in B_{R-r(T)},$$

постоянна на правых классах смежности группы G по подгруппе $SO(2)$ и является, таким образом, функцией от $g^{-1}(0)$. Кроме того, если $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_b(B_R))$, то

$$(f \times T)(z) = \int_G f(g(0))T(g^{-1}(z)) \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s dg, \quad z \in B_{R-r(T)}. \quad (12)$$

Доказательство. Для $\tau \in SO(2)$ имеем

$$\begin{aligned} \theta(\tau g) &= \left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle z, \tau g(0) \rangle}{1 - \langle \tau g(0), z \rangle} \right)^s \right\rangle = \\ &= \left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle \tau^{-1}z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), \tau^{-1}z \rangle} \right)^s \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда и из радиальности получаем $\theta(\tau g) = \theta(g)$, что доказывает первое утверждение. Далее, пусть $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_1(B_R))$. Тогда

$$(f \times T)(g^{-1}(0)) = \int_{\mathbb{D}} T(z) f(g^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s d\mu(z). \quad (13)$$

Прямое вычисление показывает (см.(5)), что

$$\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} = \frac{1 - \langle g^{-1}(0), g^{-1}z \rangle}{1 - \langle g^{-1}z, g^{-1}(0) \rangle}. \quad (14)$$

Используя (13), (14), инвариантность $d\mu$ относительно G и (6), получаем

$$\begin{aligned} (f \times T)(g^{-1}(0)) &= \int_{\mathbb{D}} T(z) f(g^{-1}z) \left(\frac{1 - \langle g^{-1}(0), g^{-1}z \rangle}{1 - \langle g^{-1}z, g^{-1}(0) \rangle} \right)^s d\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} T(gw) f(w) \left(\frac{1 - \langle g^{-1}(0), w \rangle}{1 - \langle w, g^{-1}(0) \rangle} \right)^s d\mu(w) = \\ &= \int_G f(h(0)) T(gh(0)) \left(\frac{1 - \langle g^{-1}(0), h(0) \rangle}{1 - \langle h(0), g^{-1}(0) \rangle} \right)^s dh. \end{aligned}$$

Теперь учитывая, что $T(gh(0)) = T(h^{-1}g^{-1}(0))$, приходим к (12). \square

Наша дальнейшая цель – установить инвариантность \mathcal{L} относительно "искаженных сдвигов" (см.(12)). Доказательство этого факта удобно разбить на несколько лемм.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$L_{\mathbb{H}^2}(f_1 f_2) = f_1 L_{\mathbb{H}^2} f_2 + f_2 L_{\mathbb{H}^2} f_1 + 4(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right).$$

Доказательство. Оператор $L_{\mathbb{H}^2}$ имеет вид

$$L_{\mathbb{H}^2} = (1 - |z|^2)^2 \Delta, \quad (15)$$

где Δ -лапласиан в R^2 (см.[5, введение, § 4.3]). Отсюда

$$L_{\mathbb{H}^2}(f_1 f_2) = f_1 L_{\mathbb{H}^2} f_2 + f_2 L_{\mathbb{H}^2} f_1 + 2(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right),$$

получаем требуемое. \square

Всюду ниже считаем, что выполнено условие (5). Положим

$$\mathbf{g}(z) = g^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z - b}{a - \bar{b}z},$$

$$u_s = \left(\frac{1 - \langle z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), z \rangle} \right)^s = \left(\frac{|a|^2 - \bar{a}bz}{|a|^2 - ab\bar{z}} \right)^s.$$

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$L_{\mathbb{H}^2}(u_s)(z) = -4s^2|a|^2|b|^2 \left(\frac{1 - |z|^2}{|a|^2 - ab\bar{z}} \right)^2 u_{s-1}(z). \quad (16)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = -\frac{\bar{s}ab}{|a|^2 - ab\bar{z}} u_{s-1}(z), \quad \frac{\partial u_s}{\partial \bar{z}} = \frac{sab}{|a|^2 - ab\bar{z}} u_s(z). \quad (17)$$

Из (17) находим

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{sab}{|a|^2 - ab\bar{z}} \frac{\partial u_s}{\partial z} = -\frac{s^2|a|^2|b|^2}{(|a|^2 - ab\bar{z})^2} u_{s-1}(z).$$

Отсюда и из (15) следует (16). \square

Лемма 4. *Пусть $\Phi(z) = f(\mathbf{g}z)u_s(z)$. Тогда*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) \frac{u_s(z)}{(a - \bar{b}z)^2} - \bar{s}abf(\mathbf{g}z) \frac{u_{s-1}(z)}{|a|^2 - ab\bar{z}}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \frac{u_s(z)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} + sabf(\mathbf{g}z) \frac{u_s(z)}{|a|^2 - ab\bar{z}}. \quad (19)$$

Доказательство. Поскольку \mathbf{g} – голоморфное отображение,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) \frac{1}{(a - \bar{b}z)^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \frac{1}{(\bar{a} - b\bar{z})^2}. \quad (21)$$

Из (20), (21), (17) получаем (18) и (19). \square

Лемма 5. Пусть $a_1(z) = -4s^2|z|^2$, $a_2(z) = -4s(1 - |z|^2)$. Тогда

$$a_1(\mathbf{g}z) = a_1(z) + \frac{4s^2|a|^2(1 - |z|^2)^2}{||a|^2 - ab\bar{z}|^2}(2z(Re(ab) - |b|^2 Re z) - |b|^2(1 - |z|^2)), \quad (22)$$

$$(a - \bar{b}z)^2 a_2(\mathbf{g}z) \mathbf{g}(z) = \frac{4sab(1 - |z|^2)^2}{|a|^2 - ab\bar{z}} + a_2(z)z, \quad (23)$$

$$(\bar{a} - b\bar{z})^2 a_2(\mathbf{g}z) \overline{\mathbf{g}(z)} = \frac{4s\bar{a}\bar{b}(1 - |z|^2)^2}{|a|^2 - \bar{a}bz} + a_2(z)\bar{z}. \quad (24)$$

Доказательство. Соотношения (22)-(24) получается непосредственным вычислением с использованием равенства $|a|^2 - |b|^2 = 1$. \square

Следующее утверждение дает отмеченную выше инвариантность \mathcal{L} относительно "искаженных сдвигов".

Лемма 6. Оператор \mathcal{L} обладает обобщенным свойством инвариантности относительно группы G :

$$\mathcal{L}(f(\mathbf{g}z)u_s(z)) = (\mathcal{L}f)(\mathbf{g}z)u_s(z). \quad (25)$$

Доказательство. По лемме 2

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}((f \circ \mathbf{g})u_s) &= (f \circ \mathbf{g})L_{\mathbb{H}^2}(u_s) + u_s L_{\mathbb{H}^2}(f \circ \mathbf{g}) + \\ &+ 4(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ \mathbf{g}) + \frac{\partial u_s}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}(f \circ \mathbf{g}) \right). \end{aligned}$$

Поскольку \mathbf{g} является движением \mathbb{H}^2 ,

$$L_{\mathbb{H}^2}(f \circ \mathbf{g}) = (L_{\mathbb{H}^2}f) \circ \mathbf{g}.$$

Тогда из (16)-(19) находим

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}((f \circ \mathbf{g})u_s) &= u_s(L_{\mathbb{H}^2}f) \circ \mathbf{g} - 4s^2|a|^2|b|^2 \left(\frac{1 - |z|^2}{|a|^2 - ab\bar{z}} \right)^2 u_{s-1}(z)f(\mathbf{g}z) + \\ &+ 4(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{sabu_s(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(a - \bar{b}z)^2} \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - \frac{s\bar{a}bu_{s-1}(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Используя (10) и лемму 3, получаем

$$A_1((f \circ \mathbf{g})u_s)(z) = a_1(z)u_s(z)f(\mathbf{g}z), \quad (27)$$

$$A_2((f \circ \mathbf{g})u_s)(z) = a_2(z) \left(\frac{zu_s(z)}{(a - \bar{b}z)^2} \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - \frac{\bar{z}u_s(z)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) - \right.$$

Об одном обобщении теоремы о среднем

$$-\frac{sz}{|a|^2 - ab\bar{z}}(\bar{a}bu_{s-1}(z) + abu_s(z))f(\mathbf{g}z) \Big). \quad (28)$$

Соотношения (26)-(28) дают

$$\mathcal{L}((f \circ \mathbf{g})u_s) = u_s(L_{\mathbb{H}^2}f) \circ \mathbf{g} + c_1(z)f(\mathbf{g}z) + c_2(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) + c_3(z)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z), \quad (29)$$

где

$$c_1(z) = a_1(z)u_s(z) - 4s^2|a|^2|b|^2 \left(\frac{1 - |z|^2}{|a|^2 - ab\bar{z}} \right)^2 u_{s-1}(z) - \frac{sza_2(z)}{|a|^2 - ab\bar{z}}(\bar{a}bu_{s-1}(z) + abu_s(z)),$$

$$c_2(z) = \frac{4sab(1 - |z|^2)^2 u_s(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(a - \bar{b}z)^2} + \frac{za_2(z)u_s(z)}{(a - \bar{b}z)^2},$$

$$c_3(z) = -\frac{4s\bar{a}b(1 - |z|^2)^2 u_{s-1}(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(\bar{a} - b\bar{z})^2} - \frac{\bar{z}a_2(z)u_s(z)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(\mathbf{g}z)u_s(z) &= u_s(z)(L_{\mathbb{H}^2}f)(\mathbf{g}z) + u_s(z)a_1(\mathbf{g}z)f(\mathbf{g}z) + \\ &+ u_s(z)a_2(\mathbf{g}z)\mathbf{g}(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - u_s(z)a_2(\mathbf{g}z)\overline{\mathbf{g}(z)}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая (29) с (30), из леммы 5 видим, что имеет место соотношение (25). \square

Доказательство теоремы 1. Сначала найдем радиальные собственные функции оператора \mathcal{L} .

Лемма 7. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и радиальная функция $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ является гладким решением уравнения

$$\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 4s^2 + 1)f. \quad (31)$$

Тогда

$$f(z) = f(0)H_\lambda(z) \quad (31^*)$$

Доказательство. Полагая $f(z) = \varphi(\rho)$, где $\rho = |z|$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \bar{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} z,$$

$$(L_{\mathbb{H}^2}f)(z) = (1 - \rho^2)^2 \left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right).$$

Отсюда

$$(\mathcal{L}f)(z) = (1 - \rho^2)^2 \left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right) - 4s^2 \rho^2 \varphi(\rho).$$

Следовательно, уравнение (31) можно переписать в виде

$$(1 - \rho^2)^2 \left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right) - \varphi(\rho)(4s^2\rho^2 - \lambda^2 - 4s^2 - 1) = 0. \quad (32)$$

Обозначим $\nu = \frac{1-i\lambda}{2}$. Из (32) для функции $\psi(\rho) = (1 - \rho^2)^{-\nu}\varphi(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1 - \rho^2)\psi''(\rho) + \psi'(\rho)(1 - \rho^2(4\nu + 1)) - 4(\nu^2 - s^2)\rho\psi(\rho) = 0. \quad (33)$$

С другой стороны, гипергеометрическая функция $h(\rho) = F(\alpha, \beta; \gamma; \rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1 - \rho^2)h''(\rho) + h'(\rho)(2\gamma - 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)\rho^2) - 4\alpha\beta\rho h(\rho) = 0, \quad (34)$$

(см. [7, глава 2, формула 2.1(1)]). Сравнивая (33) с (34) и учитывая гладкость ψ в нуле, заключаем, что

$$f(z) = f(0)(1 - \rho^2)^\nu F(\nu + s; \nu - s; 1; \rho^2). \quad (35)$$

Равенство (35) и формула

$$F(\alpha; \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{-\alpha} F(\alpha; \gamma - \beta; \gamma; \frac{z}{z - 1})$$

(см. [7, глава 2, формула 2.9(3)]) дают (31*). \square

Перейдем к доказательству теоремы 1. Поскольку \mathcal{L} является эллиптическим оператором (см. (9) и (15)), то $f \in RA(B_R)$. Зафиксируем $g \in G$ такое, что $g\overline{B_{r(T)}} \subset B_R$. Пусть $\epsilon_0 = \sup\{\epsilon > 0 : g\overline{B_{r(T)}} \subset B_{R-\epsilon}\}$. Для $z \in B_{r(T)+\epsilon_0}$ положим

$$f_g(z) = \int_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z) \left(\frac{1 - \langle \tau z, g(0) \rangle}{1 - \langle g(0), \tau z \rangle} \right)^s d\tau, \quad (36)$$

где $d\tau$ – мера Хаара на $SO(2)$, нормированная соотношением

$$\int_{SO(2)} d\tau = 1. \quad (37)$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g \in RA_{\natural}(B_{r(T)+\epsilon_0}); \quad f_g(0) = f(g^{-1}(0)). \quad (38)$$

Кроме того,

$$f_g(z) = \int_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z) \left(\frac{1 - \langle z, \tau^{-1}g(0) \rangle}{1 - \langle \tau^{-1}g(0), z \rangle} \right)^s d\tau. \quad (39)$$

Из (39) и леммы 6 получаем

$$(\mathcal{L}f_g)(z) = -(\lambda^2 + 4s^2 + 1)f_g(z).$$

Тогда (см. (7), (38) и лемму 7) $f_g(z) = f(g^{-1}(0))H_\lambda(z)$ и $\langle T, f_g \rangle = f(g^{-1}(0))\mathcal{F}(T)(\lambda)$. Теперь из (36), (37), (8) и радиальности Γ следует (11). Таким образом, теорема 1 доказана. \square

1. *Курант П.* Уравнения с частными производными. – М. Мир, 1964.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – 2003.
3. *Willmore T.J.* Mean value theorem in harmonic Riemann spaces. – J.London Math. Soc., 1950. – V. 25. – P. 54-57.
4. *Godement R.* Une generalization du theoreme de la moyenne pour les fonctions harmoniques. – C.R.Acad. Sci. Paris. – 1952. – V. 234. – P. 2137-2139
5. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М. Мир, 1987.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Function on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – 2009.
7. *Бейтмен* Высшие трансцендентные функции. – Том 1. – 1965.

N. A. Tripolskaya, Vit. V. Volchkov

A generalization of the mean value theorem.

We study the distorted equation of the convolution on the hyperbolic disk. Obtain an analogue of the mean value theorem for the eigenfunctions of the Laplacian.

Keywords: *hyperbolic plane, the equation of the convolution, theorem of the mean.*

Н. А. Трипольська, Віт. В. Волчков

Про одне узагальнення теореми про середнє.

Вивчаються викривлені рівняння згортки на гіперболічному диску. Отримано аналог теореми про середнє для власних функцій лапласіана.

Ключові слова: *гіперболічна площина, рівняння згортки, теорема про середнє.*

Донецкий национальный ун-т
nadya_tna@e-mail.ua

Получено 22.03.12

УДК 517.5

©2012. О. Д. Трофименко

ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ

У роботі отримано теорему єдиності для розв'язку рівняння середніх значень, а також теорему, що вказує на точність зазначеної теореми єдиності.

Ключові слова: теорема єдиності, теорема про середнє, сферичні середні.

1. Вступ. Одним із напрямків у дослідженні класичної теореми про середнє є опис класів функцій, які задовольняють інтегральним рівнянням, що мають, у свою чергу, певний геометричний сенс. Результати з цього напрямку можна побачити у роботах М.О. Ріда (див.[1]), В.В. Волчкова (див.[2], [3]), а також у працях [4] та [5].

На шляху з'ясування вигляду функції, що є розв'язком наперед заданого рівняння, постає питання єдиності цього розв'язку.

У даній роботі отримано теорему єдиності (див. Теорема 1) для розв'язку рівняння із середнім значенням по колу, до якого входить значення функції та деяких її похідних у центрі заданого круга. Показано, що Теорема 1 є точною (див. Теорема 2).

Для формулювання основних результатів роботи нам знадобляться наступні позначення.

Нехай B_R – відкрите коло радіуса R на \mathbb{C} з центром у точці нуль. Для $\zeta \in \mathbb{C}$ позначимо $\zeta = \xi + i\eta$, де $\xi = \operatorname{Re}\zeta$ та $\eta = \operatorname{Im}\zeta$. Також $s \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ та $0 \leq s \leq m - 1$.

Далі введемо для функції $f \in L^{1,loc}(B_R)$ відповідний ряд Фур'є

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{i\varphi k}, \quad (1)$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$ та

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-itk} dt. \quad (2)$$

Позначимо $\mathcal{E}'_{rad}(\mathbb{R}^2)$ множину всіх розподілів f в \mathbb{R}^2 із компактним носієм таких, що $f(ze^{i\alpha}) = f(z)$ для кожного $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

2. Формулювання основних результатів. Теорема єдиності для функцій із відповідною гладкістю, що задовольняє інтегральному рівнянню, має наступний вигляд.

Теорема 1. Нехай $k \in \mathbb{Z}$, $f \in C^{|k|+2(m-1)-s}(B_R)$, $R > r$ і $f(z) = f_k(\rho) e^{ik\varphi}$. Нехай

також для $|z| < R - r$ функція f задовольняє рівнянню

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\xi d\eta, \quad (3)$$

та $f = 0$ в B_r . Тоді $f \equiv 0$ в B_R .

Наступною теоремою покажемо, що суттєво посилити умови Теорема 1 неможливо.

Теорема 2. Для будь-якої $\varepsilon \in (0, r)$ існує $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ із наступними властивостями:

1. функція f задовольняє (3) для $z \in \mathbb{C}$;
2. $f = 0$ в $B_{r-\varepsilon}$;
3. $f \neq 0$.

3. Допоміжні конструкції. Для доведення Теорема 1 нам знадобляться наступні леми.

Лема 1. Нехай $H \in C^s[r - R, R - r]$, $H(-x)(-1)^s = H(x)$ та

$$h_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H(x \cos t) \cos st dt \equiv 0. \quad (4)$$

Тоді H – поліном степеню не вище $s - 1$ при $s \geq 1$ та $H \equiv 0$ при $s = 0$.

Доведення. При $s = 0$ заміною інтегральне рівняння (4) приводиться до рівняння Абеля, звідки $H \equiv 0$.

Далі при $s = 1$ за допомогою наступної тотожності

$$h'_s(x) + \frac{s}{x} h_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) \cos(s-1)t dt.$$

отримаємо

$$h'_1(x) + \frac{1}{x} h_1(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) dt = 0,$$

звідки H – деяка константа.

Тепер нехай $H = \sum_{k=0}^{s-1} c_k x^k$ і при індексі $s + 1$ маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) \cos st dt \equiv 0.$$

Беручи інтеграл по x від обох частин останньої рівності, отримаємо, що

$$H = \sum_{k=0}^s c_k x^s.$$

Отже, за індукцією отримаємо шукане твердження Лема 1. \square

Лема 2. Нехай $r > 0$, $f \in C^{2m-2-s}(B_R)$, $R > r$. І нехай для даної функції на множині $|z| < R - r$ виконується рівність (3). Тоді $\forall \beta \in [0, 2\pi]$ і $\forall z \in B_{R-r}$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(ze^{i\beta}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta e^{i\beta} - ze^{i\beta}| \leq r} f(\zeta) \left((\zeta - z)e^{i\beta}\right)^s d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Доведення. Зробимо заміну $\zeta' = \zeta e^{i\beta}$. Тоді (3) має вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta' e^{-i\beta} - z| \leq r} f(\zeta' e^{-i\beta}) \left(\zeta' e^{-i\beta} - z\right)^s d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Далі, змінюючи центр на $ze^{i\beta}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(ze^{i\beta}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta' - ze^{i\beta}| \leq r} f(\zeta' e^{-i\beta}) \left(\zeta' - ze^{i\beta}\right)^s d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Це і є шукана рівність. \square

Лема 3. Нехай функція $f \in C^m(B_R)$, і для неї виконується рівність (3) при $|z| < R - r$. Тоді ця рівність виконується для кожного доданку ряду Фур'є (1) цієї функції, і навпаки.

Доведення.

Необхідність.

Помножимо ліву і праву частини рівності (3) на $e^{-i\beta k}$ і проінтегруємо за β від $-\pi$ до π . Враховуючи Лему 2, маємо

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{ik\varphi} e^{i\beta k} e^{-i\beta k} d\beta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} (\zeta - z)^s \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\tilde{\rho}) e^{ik\gamma} e^{i\beta k} e^{-i\beta k} d\beta d\xi d\eta,$$

де $\zeta = \tilde{\rho} e^{i\gamma}$. Тоді

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n f_k(\rho) e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} (\zeta - z)^s f_k(\tilde{\rho}) e^{ik\gamma} d\xi d\eta.$$

Достатність. Нехай

$$\lambda(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} (\zeta - z)^s f(\tilde{\rho} \cos(\gamma + \beta), \tilde{\rho} \sin(\gamma + \beta)) d\xi d\eta -$$

$$- \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n f(\rho \cos(\varphi + \beta), \sin(\varphi + \beta)).$$

Тоді маємо наступне

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lambda(\beta) e^{-i\beta k} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} (\zeta - z)^s \int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{\rho} \cos \beta, \tilde{\rho} \sin \beta) e^{-i\beta k} d\beta e^{ik\gamma} d\xi d\eta -$$

$$- \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho \cos \beta, \sin \beta) e^{-i\beta k} d\beta e^{ik\varphi}.$$

Отже, рівність $\lambda(\beta) = 0$ завершує доведення Лема 3. \square

Лема 4. Нехай $f \in C^{s+1}(B_R)$, $R > r$. Нехай також f – радіальна, задовольняє рівнянню (3) для $|z| < R - r$ та $f = 0$ в B_r . Тоді $f = 0$ в B_R .

Доведення. За наслідком з [2, ч. 1, гл. 8] існує така функція $g \in C^s(-R, R)$, що $g = 0$ в $[-r, r]$ та $f(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho \cos \varphi) d\varphi$.

Тепер достатньо показати, що $g \equiv 0$ в $(-R, R)$. Нехай

$$\Psi(z, \alpha) = \int_{|\zeta| \leq r} G(\zeta + z) \Phi_{\alpha}(\zeta) d\xi d\eta, \quad (5)$$

де $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, а також $g([\zeta]) = G(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, де $[\zeta] = \text{Re} \zeta = \xi$ та $\Phi_{\alpha}(\zeta) = (\zeta e^{-i\alpha})^s$.

Далі з (5) маємо

$$\Psi(z, \alpha + \eta) = \int_{|\zeta-z| \leq r} G(\zeta) \Phi_{\alpha+\eta}(\zeta - z) d\xi d\eta = \int_{|\zeta-z| \leq r} G(\zeta) \Phi_{\alpha}(\zeta - z) e^{-i\eta} d\xi d\eta.$$

Нарешті

$$\Psi(z, \alpha + \eta) = \int_{|\zeta - ze^{-i\eta}| \leq r} G(\zeta e^{i\eta}) \Phi_\alpha(\zeta - ze^{-i\eta}) d\xi d\eta,$$

а також

$$\Psi(ze^{i\eta}, \alpha + \eta) = \int_{|\zeta - z| \leq r} G(\zeta e^{i\eta}) \Phi_\alpha(\zeta - z) d\xi d\eta.$$

Проінтегруємо здобутий вираз

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(ze^{i\eta}, \alpha + \eta) d\eta = \int_{|\zeta - z| \leq r} \int_{-\pi}^{\pi} G(\zeta e^{i\eta}) d\eta \Phi_\alpha(\zeta - z) d\xi d\eta.$$

Тоді маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} g([\zeta e^{i\eta}]) d\eta = \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho \cos(\varphi + \eta)) d\eta = 0$$

і

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(ze^{i\eta}, \alpha + \eta) d\eta = 0,$$

де $|z| < R - r$, $z = \rho e^{i\varphi}$.

Тепер позначимо $\Psi(z, \alpha) = H([z])e^{-i\alpha s}$, тоді $\int_{-\pi}^{\pi} H([ze^{i\eta}])e^{-i(\alpha+\eta)s} d\eta = 0$.

Враховуючи заміну $t = \varphi + \eta$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\rho \cos t) e^{-its} dt = 0,$$

де $0 \leq \rho < R - r$.

Тоді маємо, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\rho \cos t) \cos(ts) dt = 0.$$

Отже, $H \in C^s[r - R, R - r]$ і за Лемою 1 отримаємо, що

$$H(u) = \sum_{\nu=0}^{s-1} c_\nu u^\nu.$$

Тоді $\left(\frac{d}{du}\right)^s H(u) \equiv 0$, а при умові, що $z = x$, маємо $\left(\frac{d}{dx}\right)^s H(x) \equiv 0$ і

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^s H(x)e^{-i\alpha s} = \left(\frac{d}{dx}\right)^s \Psi(x, \alpha) = \int_{|\zeta| \leq r} g^{(s)}([\zeta] + x) \Phi_\alpha(\zeta) d\xi d\eta = 0.$$

Звідси $g^{(s)} = 0$ при $r - R < x < R - r$. Тоді, враховуючи умови на функцію g , отримаємо, що $g \equiv 0$. \square

Для доведення Теорема 2 знадобляться наступні конструкції.

Нехай

$$T(z) = J_{s+1}(z) - \sum_{n=s}^{m-1} \frac{z^{2n-s+1}(-1)^{n-s-1}}{(2n+2)(n-s)!n!2^{2n-s}},$$

де $J_{s+1}(z)$ – функція Бесселя.

Позначимо через Z_T – множини всіх нулів функції $T(z)$. З асимптотики функцій Бесселя маємо, що

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leq b_1 \ln(|\lambda| + 2), \quad (6)$$

де b_1 – деяка додатня константа.

Нехай також $\Phi_\lambda(z) = \Phi_{\lambda,\eta}^{0,1}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\eta (J_k(\lambda\rho))$, де $\lambda \in Z_T$, $\eta = 0, \dots, n_\lambda - 1$ (n_λ – кратність λ).

Можна зазначити, що $\exists \Lambda : n_\lambda = 1$ при $|\lambda| > \Lambda$.

4. Доведення основних результатів. Доведемо Теорему 1.

Доведення. Достатньо довести, враховуючи Лему 3, що $f_k(\rho) = 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$.

При $k = 0$ це випливає з Лема 4.

Нехай $k > 0$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що теорема є вірною при індексах $0, \dots, k - 1$.

З [5] маємо, що $\left(f'_k(\rho) + k\frac{f_k(\rho)}{\rho}\right) e^{i(k-1)\varphi}$ задовольняє (3) і дорівнює нулеві в B_r .

За нашим припущенням $f'_k(\rho) + k\frac{f_k(\rho)}{\rho} = 0$ і $f_k(\rho) = 0$ при $\rho \in (0, r)$ (див.(2)). Тоді $f_k(\rho) = 0$ на $(0, R)$.

Аналогічно розглядається випадок $k < 0$.

Таким чином, Теорема 1 доведена. \square

Тепер доведемо Теорему 2.

Доведення. Візьмемо радіальну функцію $g_1 \in C^\infty(B_r)$. Нехай $g_1 = 0$ в $B_{r-\varepsilon+\delta}$, де $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, а також $g_1 \not\equiv 0$.

Маємо наступне (див.[2, наслідок 3.5.3])

$$\left|\partial^\beta \Phi_\lambda(z)\right| \leq b_2 e^{|\operatorname{Im}\lambda||z|} \leq b_2 e^{|\operatorname{Im}\lambda|(r+\alpha)},$$

де $\alpha > \delta$, а b_2 – деяка додатня константа.

Далі з нерівності (6)

$$\left|\partial^\beta \Phi_\lambda(z)\right| \leq b_2 e^{(r+\alpha)c_1 \ln(|\lambda|+2)} = b_2 (|\lambda| + 2)^{(r+\alpha)b_1}. \quad (7)$$

Згідно з [3, Лема 3.2.2] існує $h^{\lambda,\eta} \in \mathcal{E}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp} h^{\lambda,\eta} \subset \overline{B_r}$ і

$$\langle h, \Delta^\nu g_1 \rangle = 0, \quad (8)$$

де $\nu = 0, \dots, N$, а $N \in \mathbb{N}$.

Позначимо $\mathbf{g} = \left(\sum_{i=0}^{N+1} \gamma_i |z|^{2i} \right) g_1(|z|)$, де $\gamma_i \in \mathbb{C}$ і $\sum_{i=0}^{N+1} |\gamma_i| \neq 0$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, враховуючи (8), що

$$\langle h, \Delta^\nu \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=0}^{N+1} \gamma_i \langle h, \Delta^\nu g_i \rangle = 0,$$

для виконання цього маємо γ_i у кількості $N + 2$, а рівнянь – у кількості $N + 1$.

У крузі $|z| \leq r$ із [2, доведення Лема 3.2.11] маємо

$$\mathbf{g}(z) = \sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(z) + p_0(|z|), \quad (9)$$

де $p_0(|z|)$ – деякий поліном.

До того ж, виходячи з нерівності (7), маємо

$$c_\lambda = O\left(\frac{1}{\lambda^{q_0}}\right),$$

де $q_0 > (r + \alpha)c_1 + 1$ (див. [2], розділ 3).

Тоді ряд у рівності (9) збігається рівномірно в $|z| \leq r + \alpha$.

Також $n_\lambda = 1$ при $|\lambda| > \Lambda$ маємо

$$\mathbf{g}(z) = \sum_{|\lambda| > \Lambda} c_\lambda \Phi_{\lambda,0}^{0,1}(z) + G(z), \quad (10)$$

де $G(z) = \sum_{0 < |\lambda| < \Lambda} c_\lambda \Phi_\lambda(z) + p_0(|z|)$.

Звідси $\mathbf{g} \in C(K_{r+\alpha})$, де $K_{r+\alpha} = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq r + \alpha\}$.

Нехай також $\varphi = \varphi_0(|z|)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$, і $\varphi = 0$ поза кругом $B_{\frac{\delta}{2}}$ та $\varphi \neq 0$.

Тоді позначаємо

$$g = \mathbf{g} * \varphi = \iint_{|z-\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \mathbf{g}(\omega) \varphi(z-\omega) dudv = \iint_{|\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \varphi(\omega) \mathbf{g}(z-\omega) dudv, \quad (11)$$

де $\omega = u + iv$.

Тоді з (10), [2, наслідок 3.5.2], та [2, рівності (3.7.8)-(3.7.10)] маємо

$$g = \sum_{|\lambda| > \Lambda} c_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) \Phi_\lambda(z) + G * \varphi,$$

де $\tilde{\varphi}(\lambda)$ – сферичне перетворення φ та доданок $(G * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Далі з [2, доведення Лема 3.2.2] отримаємо $\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{(iz)^{2k}} \Delta^k \varphi(z)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Тоді, міркуючи далі, отримаємо

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{(iz)^{2k}} \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} (\Delta^k \varphi)(\omega) J_0(z|\omega|) dudv,$$

де $|J_0(z|\omega)| \leq e^{|\text{Im}z|\omega} \leq e^{|\text{Im}z|\frac{\delta}{2}}$.

Це означає, що

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leq \frac{b_2}{|z|^{2k}} e^{\frac{\delta}{2}|\text{Im}z|}$$

де b_2 – деяка константа.

Нарешті,

$$\tilde{\varphi}(\lambda) \leq \frac{b_2}{|\lambda|^{2k}} e^{\frac{\delta}{2}b_1(\ln|\lambda|+2)},$$

і ряд $\sum_{\lambda} \partial^\beta (c_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) \Phi_\lambda(z))$ для будь-якого $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ збігається локально рівномірно в \mathbb{C} .

Отже, маємо, що $g \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Тепер покажемо, що функція g задовольняє рівності (3).

З рівності (9) та (11) маємо

$$\begin{aligned} & \int \int_{|\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{\varphi(\omega) r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n \left(\sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(z-\omega) + p_0(|z-\omega|) \right) dudv = \\ & = \int \int_{|\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \varphi(\omega) \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta-z| \leq r} \left(\sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(\zeta-\omega) + p_0(|\zeta-\omega|) \right) (\zeta-\omega-z)^s d\xi d\eta dudv. \end{aligned}$$

Функція виду $\Phi_\lambda(z)$ задовольняє рівнянню (3) (див. [2], глава 3.2). І поліном $p_0(|z|)$ також задовольняє (3) (див. [4, теорема 2]).

Таким чином, рівність (3) виконується для функції g .

Далі, легко побачити, що при $z \in \overline{B_r}$

$$g = \int \int_{|z-\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \mathbf{g}(\omega) \varphi(z-\omega) dudv = 0$$

в силу умов для g_1 та φ . Таким чином, $g = 0$ в $B_{r-\xi}$.

Нарешті, доведемо, що $g \not\equiv 0$ в \mathbb{C} .

Припустимо, що $\mathbf{g} * \varphi = g^1 * \varphi \equiv 0$, де нехай

$$g^1 = \begin{cases} g, & |z| \leq r, \\ 0, & |z| > r. \end{cases}$$

Переходячи до перетворення Фур'є, отримаємо

$$\widehat{g^1 * \varphi} = \widehat{g^1} \widehat{\varphi} \equiv 0,$$

де функція $\widehat{g^1}$ – неперервна, а $\widehat{\varphi}$ – ціла.

Отже, маємо, що $\widehat{g^1} \equiv 0$ та

$$g^1 \equiv 0.$$

Таким чином, отримано протиріччя із означенням g^1 . Тоді маємо, що $g \not\equiv 0$. Отже, теорема доведена. \square

1. *Maxwell O.Reade* A theorem of Fedoroff // *Duke Math.J*, **18**. – 1951. – P. 105-109.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equation. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
3. *Волчков В.В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов // *Сибирский математический журнал*, **35**, № 4. – 1994. – С. 737-745.
4. *Трофименко О.Д.* Узагальнення теореми про середнє для поліаналітичних функцій у випадках кола та круга // *Вісник Донецького Національного Університету*, № 1, серія А. – Донецьк. – 2009. – С. 20-28.
5. *Трофименко О.Д.* Аналог теореми про середнє для поліномів спеціального виду // *Український математичний журнал*, **63**. – 2011. – С. 669-707.

О. D. Trofymenko

Uniqueness theorem for solutions of some mean value equations.

A uniqueness theorem for solutions of the mean value equations has been obtained. A theorem, which indicates an exactness of this uniqueness theorem, is obtained as well.

Keywords: *uniqueness theorem, mean value theorem, spherical averages.*

О. Д. Трофименко

Теорема единственности для решения некоторых уравнений средних значений.

В работе получена теорема единственности для решения уравнения средних значений, а также теорема, которая указывает на точность указанной теоремы единственности.

Ключевые слова: *теорема единственности, теорема о среднем, сферические средние.*

Донецький національний ун-т
odtrofimenko@gmail.com

Получено 24.05.12

УДК 517.9

©2012. С. М. Чуйко, П. В. Кулиш

ЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений линейной нетеровой краевой задачи для системы обычных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальные уравнения, параметрический резонанс.

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решения $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи [1]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \quad (1)$$

в малой окрестности решения порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Здесь $A(t)$ – $(n \times n)$ – мерная матрица и $f(t)$ – n – мерный вектор-столбец, элементы которых – непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Положим

$$Z(z, t, \varepsilon) := W(t, \mu(\varepsilon))z(t, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) := \varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot, \varepsilon),$$

где $W(t, \mu(\varepsilon))$ – непрерывная по t на отрезке $[a, b]$ $(n \times n)$ – матрица, $\varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot, \varepsilon)$ – линейный функционал. Считаем неизвестную $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ непрерывной функцией малого параметра ε . Исследуем критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$); при условии

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0, \quad Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3)$$

порождающая задача (2) имеет ($r = n - n_1$)– параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G \left[f(s); \alpha \right] (t), \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)$ – нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы (2), $\text{rank } Q := n_1$, P_{Q_r} – $(n \times r)$ – матрица, составленная из r – линейно-независимых столбцов $(n \times n)$ – матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$ и P_{Q^*} – $(m \times m)$ – матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$,

$$G \left[f(s); \alpha \right] (t) = X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} + K \left[f(s) \right] (t)$$

– обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K \left[f(s) \right] (t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

– оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1]. Представим неизвестную функцию $\mu(\varepsilon)$ в виде

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0 + \nu(\varepsilon), \quad \mu_0 := \mu(0)$$

и зафиксируем вектор $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, определяющий порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$. Предположим матрицу

$$W(t, \mu) := V(t)\mu(\varepsilon) + W(t, 0), \quad W(t, \mu(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

и линейный функционал

$$\varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot, \varepsilon) := \theta z(\cdot, \varepsilon) \cdot \mu(\varepsilon) + \vartheta z(\cdot, \varepsilon), \quad \theta z(\cdot, \varepsilon), \vartheta z(\cdot, \varepsilon) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

линейными однородными функциями неизвестной $\mu(\varepsilon)$; здесь $\theta z(\cdot, \varepsilon)$ и $\vartheta(z_0(\cdot, c_0^*))$ – линейные векторные функционалы $\theta z(\cdot, \varepsilon), \vartheta(z_0(\cdot, c_0^*)) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [3, 4, 5].

2. Условия существования решения. Предположим, что задача (1) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t, c_0^*)$. Оставляя ρ линейно независимых строк необходимого условия [1], приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) := D_0 \cdot \mu_0 + P_{Q_\rho^*} \left\{ \vartheta z_0(\cdot, c_0^*) - \ell K \left[W(s, 0) z_0(s, c_0^*) \right] (\cdot) \right\} = 0, \quad (4)$$

где

$$D_0 := P_{Q_\rho^*} \left\{ \theta z_0(\cdot, c_0^*) - \ell K \left[V(s) z_0(s, c_0^*) \right] (\cdot) \right\} \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}.$$

Здесь P_{D_0} – (1×1) - мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{N}(D_0)$; аналогично $P_{D_0^*}$ – $(\rho \times \rho)$ - мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*)$, $P_{Q_\rho^*} \in \mathbb{R}^{\rho \times m}$ – матрица, составленная из ρ линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*} . В случае $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ последнее уравнение имеет единственное решение

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \vartheta z_0(\cdot, c_0^*) - \ell K \left[W(s, 0) z_0(s, c_0^*) \right] (\cdot) \right\}.$$

Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма.

Лемма. Пусть краевая задача (1) представляет критический ($P_{Q^*} \neq 0$) случай и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Предположим

также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t, c_0^*)$ и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. Тогда $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0^*) = 0$; при условии $P_{D_0^*}P_{Q_p^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ имеет место равенство

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \vartheta z_0(\cdot, c_0^*) - \ell K \left[W(s, 0)z_0(s, c_0^*) \right] (\cdot) \right\}.$$

В случае $P_{D_0^*}P_{Q_p^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ для фиксированного вектора $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ константа μ_0^* определяет порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной задачи (1). По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2], уравнение $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) = 0$ будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, $\mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании решения $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon)$ задачи (1) в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0^*)$, а также функции $\nu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Отклонение от порождающего решения определяет краевая задача

$$dx(t, \varepsilon)/dt = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (5)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (6)$$

разрешимая тогда и только тогда, когда

$$D_0 \cdot \nu(\varepsilon) = -P_{Q_p^*} \left\{ \mu(\varepsilon) \cdot \theta x(\cdot, \varepsilon) + \vartheta x(\cdot, \varepsilon) - \ell K \left[\mu(\varepsilon)V(s)x(s, \varepsilon) + W(s, 0)x(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{D_0^*}P_{Q_p^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ разрешимо, при этом задача (5), (6) имеет единственное решение, которое определяет операторная система

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left\{ W(s, \mu(\varepsilon)) \left[z_0(s, c_0^*) + x(s, \varepsilon) \right]; \varpi(\mu(\varepsilon)) \left[z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon) \right] \right\} (t),$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0^* - D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \mu(\varepsilon) \cdot \theta x(\cdot, \varepsilon) + \vartheta x(\cdot, \varepsilon) - \right. \quad (7)$$

$$\left. - \ell K \left[\mu(\varepsilon)V(s)x(s, \varepsilon) + W(s, 0)x(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.$$

Для построения решения системы (7) в случае $P_{D_0^*}P_{Q_p^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ применим метод простых итераций [1, 2]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай $P_{Q_p^*} \neq 0$ и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, $\mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (4) при условиях $P_{D_0^*}P_{Q_p^*} = 0$ и $P_{D_0} = 0$

задача (5), (6) имеет единственное решение $x(t, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$, определяемое операторной системой (7), и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. При этом нетерова задача (1) имеет единственное решение $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $z(t, 0) = z_0(t, c_0^*)$. Для построения решения операторной системы (7) для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ применима итерационная схема

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left\{ W(s, \mu_k(\varepsilon)) \left[z_0(s, c_0^*) + x_k(s, \varepsilon) \right]; \varpi(\mu_k(\varepsilon)) \left[z_0(\cdot, c_0^*) + x_k(\cdot, \varepsilon) \right] \right\} (t),$$

$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0^* - D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mu_k(\varepsilon) \cdot \theta x_{k+1}(\cdot, \varepsilon) + \vartheta x_{k+1}(\cdot, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \ell K \left[\mu_k(\varepsilon) V(s) x_{k+1}(s, \varepsilon) + W(s, 0) x_{k+1}(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (7) аналогично [8].

3. Периодическая задача для уравнения Матье. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π -периодической задачи [2] для уравнения Матье

$$y'' + \left(h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y = 0. \tag{8}$$

Решения $y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi]$, $y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ периодической задачи для уравнения (8) ищем в малой окрестности решения порождающей 2π -периодической задачи для уравнения $y_0'' + k^2 y_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Нами предложена двухшаговая итерационная схема, построенная по схеме метода наименьших квадратов [6, 7], при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определяющая последовательные приближения к функции $h(\varepsilon) : h(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $h(0) = k^2$ и соответствующей функции Матье $y(t, \varepsilon)$. Положим $k = 1$. Согласно принятым обозначениям, приходим к задаче о нахождении 2π -периодического решения

$$z(t, \varepsilon) = \text{col} \left(z^{(a)}(t, \varepsilon), z^{(b)}(t, \varepsilon) \right), \quad z^{(a)}(t, \varepsilon), z^{(b)}(t, \varepsilon) \in C^1[0, 2\pi], C[0, \varepsilon_0]$$

дифференциального уравнения (8); здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\mu(\varepsilon) - \cos 2t \right) z^{(a)} \end{bmatrix},$$

а также $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$, $h(\varepsilon) := 1 - \varepsilon \mu(\varepsilon)$, $\alpha = 0$. Поскольку $Q = 0$, постольку имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд в случае 2π -периодической задачи для уравнения Матье при фиксированном $2\mu_0 \pm 1 \neq 0$ имеет

единственное тривиальное решение $c_0 = 0$, которому в свою очередь отвечает только тривиальное решение периодической задачи для уравнения Матъе (8). Положим

$$c_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_0^* = \frac{1}{2}.$$

Уравнение для порождающих амплитуд в случае 2π -периодической задачи для уравнения Матъе при зафиксированном нами векторе c_0^* имеет единственную линейно независимую строку, при этом уравнение $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0^*) = 0$ становится скалярным. В свою очередь и матрица $D_0 = -\pi$ представляет собой скаляр, при этом условия $P_{D_0^*} P_{Q_p^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ выполнены, следовательно 2π -периодическая задача для уравнения Матъе (8) имеет единственное решение. Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ значение $h_0(\varepsilon) = h(0) = k^2 := 1$. Пусть $\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi^{(2)}(t)$, $\varphi^{(3)}(t)$, ... – система линейно-независимых 2π -периодических дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных функций. Обозначим матрицы

$$\varphi_j(t) = \begin{bmatrix} \varphi^{(1)}(t) & \varphi^{(2)}(t) & \dots & \varphi^{(k_j)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times k_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Первое приближение $y_1(t, \varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (8) ищем в виде $y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \xi_1(t, \varepsilon)$, $\xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t)c_1(\varepsilon)$, как 2π -периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) = 0.$$

Потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \varphi_1''(t)c_1(\varepsilon) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_1(t)c_1(\varepsilon) + y_0''(t, c_0^*) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t, c_0^*) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min.$$

Для фиксированной матрицы $\varphi_1(t)$ минимум функции $F(c_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, c_0^*) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t, c_0^*) \right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)$ -матрицы Грама

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_0(t, \varepsilon) dt, \quad \Phi_0(t, \varepsilon) := \left\{ \varphi_1''(t) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_1(t) \right\}.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = - \left[\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, c_0^*) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t) \right\} dt,$$

определяющий первое приближение $y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$ периодическому решению уравнения (8), а также первое приближение $\mu_1(\varepsilon)$ к функции $\mu(\varepsilon)$:

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \ell K \left[\mu_0^* \cdot V(s)x_1(s, \varepsilon) + W(s, 0)x_1(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.$$

Второе приближение

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (8) ищем, как 2π - периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_2(t, \varepsilon) = 0.$$

При условии невырожденности $(k_2 \times k_2)$ - матрицы Грама

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon) dt, \quad \Phi_1(t, \varepsilon) := \left\{ \varphi_2''(t) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_2(t) \right\}$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = - \left[\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

а также второе приближение $\mu_2(\varepsilon)$ к функции $\mu(\varepsilon)$:

$$\mu_2(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \ell K \left[\mu_1^* \cdot V(s)x_2(s, \varepsilon) + W(s, 0)x_2(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.$$

Обозначим $(1 \times k_{j+1})$ - матрицу

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_{j+1}''(t) + \left[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_{j+1}(t) \right\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Продолжая рассуждения, при условии

$$\det \Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon) \neq 0, \quad \Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon) := \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon) dt$$

приходим к следующей итерационной схеме:

$$y_{j+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t, \varepsilon), \quad \xi_{j+1}(t, \varepsilon) = \varphi_{j+1}(t) \cdot c_{j+1}(\varepsilon),$$

$$c_{j+1}(\varepsilon) = - \left[\Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \left\{ y_j''(t) + \left[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_j(t) \right\} dt,$$

$$\mu_{j+1}(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \ell K \left[\mu_j^* \cdot V(s) x_{j+1} + W(s, 0) x_{j+1} \right] (\cdot) \right\}, \quad \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Итерационная схема задает последовательность отображений, определяемую оператором $\Upsilon : \left(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon) \right) = \Upsilon \left(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right)$. Если оператор Υ является сжимающим, приведенная итерационная схема сходится к искомому 2π – периодическому решению $y(t, \varepsilon)$ уравнения (8). Скорость сходимости определяется выбором матриц $\varphi_j(t)$, а также величин ε и k . Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ зависимость $h_0(\varepsilon) = 1 - \varepsilon \cdot \mu_0^*$ и зафиксируем вектор-строку $\varphi_1(t) = [\cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \quad \cos 9t \quad \cos 11t]$. Первое приближение к 2π – периодическому решению уравнения (8)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \frac{1}{73 \ 728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - \right. \\ \left. - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \frac{1}{11 \ 796 \ 480} \varepsilon^4 \left(220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t \right)$$

определяет первое приближение $h_1(\varepsilon)$ к функции $h(\varepsilon)$:

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24 \ 576} + \frac{11\varepsilon^5}{1 \ 179 \ 648}.$$

Зафиксируем матрицу $\varphi_2(t) = [\cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \quad \dots \quad \cos 19t \quad \cos 21t \quad \cos 23t]$. Второе приближение к 2π – периодическому решению уравнения (8)

$$y_2(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t - \frac{1}{256} \varepsilon^2 \cos 3t + \frac{\varepsilon^3 \cos 3t}{12 \ 288} + \frac{11\varepsilon^4 \cos 3t}{589 \ 824} - \frac{49\varepsilon^5 \cos 3t}{18 \ 874 \ 368} + \\ + \frac{55\varepsilon^6 \cos 3t}{603 \ 979 \ 776} + \frac{83\varepsilon^7 \cos 3t}{4 \ 529 \ 848 \ 320} - \frac{12 \ 121\varepsilon^8 \cos 3t}{3 \ 865 \ 470 \ 566 \ 400} + \frac{114 \ 299\varepsilon^9 \cos 3t}{834 \ 941 \ 642 \ 342 \ 400} + \\ + \frac{192 \ 151\varepsilon^{10} \cos 3t}{8 \ 015 \ 439 \ 766 \ 487 \ 040} - \frac{83 \ 513 \ 957\varepsilon^{11} \cos 3t}{17 \ 954 \ 585 \ 076 \ 930 \ 969 \ 600} + \\ + \frac{944 \ 750 \ 239\varepsilon^{12} \cos 3t}{4 \ 021 \ 827 \ 057 \ 232 \ 537 \ 190 \ 400} + \\ + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \cos 5t - \frac{\varepsilon^3 \cos 5t}{9 \ 216} + \frac{\varepsilon^4 \cos 5t}{393 \ 216} + \frac{7\varepsilon^5 \cos 5t}{12 \ 582 \ 912} - \frac{719\varepsilon^6 \cos 5t}{9 \ 059 \ 696 \ 640} + \frac{689\varepsilon^7 \cos 5t}{241 \ 591 \ 910 \ 400} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{58\,321\varepsilon^8 \cos 5t}{104\,367\,705\,292\,800} - \frac{121\,067\varepsilon^9 \cos 5t}{1\,252\,412\,463\,513\,600} + \frac{1\,600\,351\varepsilon^{10} \cos 5t}{374\,053\,855\,769\,395\,200} + \\
 & + \frac{184\,607\,429\varepsilon^{11} \cos 5t}{251\,364\,191\,077\,033\,574\,400} - \frac{6\,935\,404\,307\varepsilon^{12} \cos 5t}{48\,261\,924\,686\,790\,446\,284\,800} + \\
 & + \frac{\varepsilon^3 \cos 7t}{73\,728} - \frac{\varepsilon^4 \cos 7t}{786\,432} + \frac{\varepsilon^5 \cos 7t}{31\,457\,280} + \frac{17\varepsilon^6 \cos 7t}{2\,516\,582\,400} - \frac{133\varepsilon^7 \cos 7t}{135\,895\,449\,600} + \\
 & + \frac{233\varepsilon^8 \cos 7t}{6\,522\,981\,580\,800} + \frac{482\,357\varepsilon^9 \cos 7t}{70\,135\,097\,956\,761\,600} - \frac{2\,091\,619\varepsilon^{10} \cos 7t}{1\,745\,584\,660\,257\,177\,600} + \\
 & + \frac{2\,152\,109\varepsilon^{11} \cos 7t}{40\,218\,270\,572\,325\,371\,904} + \frac{583\,305\,781\varepsilon^{12} \cos 7t}{64\,349\,232\,915\,720\,595\,046\,400} + \\
 & + \frac{\varepsilon^4 \cos 9t}{11\,796\,480} - \frac{\varepsilon^5 \cos 9t}{117\,964\,800} + \frac{\varepsilon^6 \cos 9t}{4\,529\,848\,320} + \frac{\varepsilon^7 \cos 9t}{21\,743\,271\,936} - \frac{41\varepsilon^8 \cos 9t}{6\,088\,116\,142\,080} + \\
 & + \frac{2\,033\varepsilon^9 \cos 9t}{8\,182\,428\,094\,955\,520} + \frac{296\,923\varepsilon^{10} \cos 9t}{6\,284\,104\,776\,925\,839\,360} - \\
 & - \frac{3\,327\,547\varepsilon^{11} \cos 9t}{402\,182\,705\,723\,253\,719\,040} + \frac{153\,817\,543\varepsilon^{12} \cos 9t}{413\,673\,640\,172\,489\,539\,584\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^5 \cos 11t}{2\,831\,155\,200} - \frac{\varepsilon^6 \cos 11t}{27\,179\,089\,920} + \frac{\varepsilon^7 \cos 11t}{1\,014\,686\,023\,680} + \frac{23\varepsilon^8 \cos 11t}{113\,644\,834\,652\,160} - \\
 & - \frac{391\varepsilon^9 \cos 11t}{13\,091\,884\,951\,928\,832} + \frac{517\varepsilon^{10} \cos 11t}{465\,489\,242\,735\,247\,360} + \\
 & + \frac{189\,377\varepsilon^{11} \cos 11t}{904\,911\,087\,877\,320\,867\,840} - \frac{547\,795\varepsilon^{12} \cos 11t}{14\,892\,251\,046\,209\,623\,425\,024} + \\
 & + \frac{\varepsilon^6 \cos 13t}{951\,268\,147\,200} - \frac{\varepsilon^7 \cos 13t}{8\,878\,502\,707\,200} + \frac{\varepsilon^8 \cos 13t}{324\,699\,527\,577\,600} + \\
 & + \frac{13\varepsilon^9 \cos 13t}{20\,780\,769\,764\,966\,400} - \frac{2\,501\varepsilon^{10} \cos 13t}{26\,931\,877\,615\,396\,454\,400} + \\
 & + \frac{77\varepsilon^{11} \cos 13t}{22\,161\,087\,866\,383\,368\,192} + \frac{605\,039\varepsilon^{12} \cos 13t}{930\,765\,690\,388\,101\,464\,064\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^7 \cos 15t}{426\,168\,129\,945\,600} - \frac{\varepsilon^8 \cos 15t}{3\,896\,394\,330\,931\,200} + \frac{\varepsilon^9 \cos 15t}{140\,270\,195\,913\,523\,200} + \\
 & + \frac{29\varepsilon^{10} \cos 15t}{20\,198\,908\,211\,547\,340\,800} - \frac{173\varepsilon^{11} \cos 15t}{807\,956\,328\,461\,893\,632\,000} + \\
 & + \frac{223\varepsilon^{12} \cos 15t}{27\,701\,359\,832\,979\,210\,240\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^8 \cos 17t}{245\,472\,842\,848\,665\,600} - \frac{\varepsilon^9 \cos 17t}{2\,209\,255\,585\,637\,990\,400} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{10} \cos 17t}{78\,551\,309\,711\,572\,992\,000} + \frac{\varepsilon^{11} \cos 17t}{392\,756\,548\,557\,864\,960\,000} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{271 \varepsilon^{12} \cos 17t}{711\,001\,569\,046\,466\,396\,160\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^9 \cos 19t}{176\,740\,446\,851\,039\,232\,000} - \frac{\varepsilon^{10} \cos 19t}{1\,571\,026\,194\,231\,459\,840\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{11} \cos 19t}{55\,300\,122\,036\,947\,386\,368\,000} + \frac{\varepsilon^{12} \cos 19t}{278\,080\,613\,671\,506\,857\,164\,800} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{10} \cos 21t}{155\,531\,593\,228\,914\,524\,160\,000} - \frac{\varepsilon^{11} \cos 21t}{1\,368\,678\,020\,414\,447\,812\,608\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{12} \cos 21t}{47\,779\,305\,439\,922\,541\,821\,952\,000} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{11} \cos 23t}{164\,241\,362\,449\,733\,737\,512\,960\,000} - \frac{\varepsilon^{12} \cos 23t}{1\,433\,379\,163\,197\,676\,254\,658\,560\,000}
 \end{aligned}$$

определяет второе приближение $h_2(\varepsilon)$ к функции $h(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 h_2(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\varepsilon^6}{37\,748\,736} - \frac{55\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \\
 - \frac{83\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} + \frac{12\,121\varepsilon^9}{7\,730\,941\,132\,800} - \frac{114\,299\varepsilon^{10}}{1\,669\,883\,284\,684\,800} - \\
 - \frac{192\,151\varepsilon^{11}}{16\,030\,879\,532\,974\,080} + \frac{83\,513\,957\varepsilon^{12}}{35\,909\,170\,153\,861\,939\,200}.
 \end{aligned}$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матъе и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матъе

$$\Delta_2(\varepsilon) = \left\| y_2''(t, \varepsilon) + \left(h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_2''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

а также сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + \left(h_r(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_h''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функции [2, с.235], [9]

$$h_h = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576}, \quad h_r = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11\,\varepsilon^4}{1\,179\,648}$$

и решению уравнения Матъе

$$\begin{aligned}
 y_r(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - \right. \\
 \left. - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 \left(220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t \right),
 \end{aligned}$$

полученной в монографии [2, 9]. Вторые приближения к периодическому решению уравнения Матье $y_2(t, \varepsilon)$ и его собственной функции $h_2(\varepsilon)$ значительно превосходят по точности ранее известные приближения [2, с.235]

$$\Delta_2(1, 0) \approx 4,72\,278 \times 10^{-13}, \quad \Delta_r(1, 0) \approx 3,18\,803 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta_2(0, 5) \approx 5,43\,239 \times 10^{-16}, \quad \Delta_r(0, 5) \approx 9,89\,857 \cdot 10^{-7},$$

а также полученные нами ранее приближения [6, 7, 10].

1. *Voichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. – 1934. – № 3. – С. 5-29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
6. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная схема для построения функций Матье // Динамические системы. – 2009. – **26**. – С. 103-113.
7. *Voichuk I.A., Starkova O.V., Chujko S.M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. – 2009. – **23**, № 1. – P. 1-8.
8. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278-288.
9. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. – М.: Иностран. лит., 1957. – 204 с.
10. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика. – **22**, № 1. – 2011. – С. 157-172.

S. M. Chuiko P. V. Kulish

Linear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance.

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of Noether linear boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations.

Keywords: boundary value problem, differential equations, parametric excitation system.

С. М. Чуйко, П. В. Кулиш

Лінійна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

Ключові слова: крайова задача, диференціальні рівняння, параметричний резонанс.

Славянский государственный педагогический ун-т
chujko-slav@inboz.ru

Получено 28.05.12

УДК 62-50,519.7

©2012. В. Ф. Щербак

СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложен новый метод решения задач стабилизации нелинейных управляемых динамических систем. Метод состоит в выборе управлений таким образом, чтобы произвольное $(n - m)$ – мерное многообразие с заданным граничным условием стало инвариантным и обладало свойством глобального притяжения для всех траекторий замкнутой системы. Исходная задача стабилизации решается далее на полученном многообразии. При этом в качестве управляющего воздействия используются функции, определяющие вид синтезированного многообразия. С использованием указанной схемы решена задача стабилизации вектора угловой скорости твердого тела с неподвижной точкой, совершающего вращение под действием двумерного управления.

Ключевые слова: стабилизация нелинейных систем, инвариантные многообразия, управление, твердое тело с неподвижной точкой.

1. Задача стабилизации динамических систем. Задача синтеза управлений, стабилизирующих отклонения от тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, является одной из основных в теории управления. В работе предлагается общий метод ее решения, состоящий в использовании управлений для синтеза дополнительных алгебраических соотношений, связывающих переменные исходной системы. Из полученных соотношений выбирается семейство, обеспечивающее глобальное притяжение траекторий к соответствующему многообразию в фазовом пространстве. Тем самым решение задачи проводится на множестве меньшей размерности. Если подобные построения могут быть проведены для любого многообразия рассматриваемого семейства, то такие алгебраические связи могут быть использованы в качестве нового управления уже для редуцированной динамической системы. Подобный прием был использован ранее для решения задач наблюдения, синхронизации решений нелинейных динамических систем, где инвариантные многообразия для системы уравнений в отклонениях формировали дополнительные алгебраические уравнения для определения неизвестных компонент фазового вектора [1], [2].

Будем считать, что динамика управляемого объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой зависят от управляющих воздействий – вектора $u \in R^m$, который может быть произвольной функцией фазового вектора $x \in R^n$. Представим x в виде двух подвекторов $x = (x_1, x_2)^T$, где $x_1 = (x^1, x^2, \dots, x^m)^T$, $x_2 = (x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^n)^T$ и запишем уравнения системы в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u). \end{aligned} \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке проекта украинско-австрийского сотрудничества (гос. рег. № 0111U007275).

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1) допускает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Управления $u(x_1, x_2)$ будем считать допустимыми, если после их подстановки в правые части (1) для полученной замкнутой системы выполнены условия существования и единственности решений в некоторой области $x \in D \subseteq R^n$.

В работе рассматривается задача синтеза управлений для стабилизации системы (1). Она состоит в нахождении такой функции $u(x_1, x_2)$, при которой нулевое решение замкнутой системы становится асимптотически устойчивым.

2. Синтез инвариантных многообразий. Редукция динамической системы. Как уже было отмечено, предлагаемая схема решения заключается в установлении соответствия между множеством допустимых управлений и семейством синтезируемых с их помощью инвариантных многообразий для траекторий системы дифференциальных уравнений (1). Функции, определяющие эти многообразия, будут рассматриваться далее в качестве новых управлений.

Для этого на первом шаге выберем управление $u(x_1, x_2)$ таким, чтобы некое многообразие, задаваемое с помощью m алгебраических равенств

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 = \Psi(x_2)\} \tag{2}$$

стало инвариантным для некоторых траекторий системы (1). Здесь $\Psi(x_2)$ – неопределенная пока вектор-функция размерности m , для которой будем полагать выполненным

Предположение. В рассматриваемой области D функция $\Psi(x_2)$ является дифференцируемой. Кроме того, якобиева матрица $\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}$ является невырожденной и имеет ограниченную норму.

При сделанном предположении равенства $x_1 = \Psi(x_2)$ определяют в фазовом пространстве переменных x_1, x_2 многообразие размерности $n - m$. Выберем функцию $u(x_1, x_2)$ такой, чтобы M стало инвариантным многообразием системы дифференциальных уравнений (1). Для этого сделаем замену переменных x_1 по формуле

$$x_1 = \Psi(x_2) + \eta, \tag{3}$$

где η характеризует отклонение траекторий системы (1) от многообразия M . В результате система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_1(\Psi + \eta, x_2, u) - \Psi' f_2(\Psi + \eta, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(\Psi + \eta, x_2, u). \end{aligned} \tag{4}$$

Для того, чтобы многообразие M стало инвариантным для некоторых траекторий системы (1), достаточно, чтобы система (4) допускала ограниченное решение вида $\eta \equiv 0, x_2 = x_2(t)$. Такие решения у системы (4) будут существовать, если мы потребуем, чтобы первая группа уравнений, после подстановки некоторого допустимого управления $u(x_1, x_2)$, имела бы вид

$$\dot{\eta} = \lambda \eta + F(\eta, x_2), \tag{5}$$

где $F(\eta, x_2)$ неопределенная пока функция с граничным условием $F(0, x_2) = 0$.

Для определения такого управления рассмотрим равенства (5) как алгебраические уравнения относительно $u(x_1, x_2)$. Записав их в исходных переменных, с учетом того, что производная по времени взята в силу системы (1), получаем

$$f_1(x_1, x_2, u) - \Psi'(x_2)f_2(x_1, x_2, u) = \lambda(x_1 - \Psi(x_2)) + F(x_1 - \Psi(x_2), x_2). \quad (6)$$

В случае невырожденности якобиевой матрицы

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial u} - \Psi'(x_2)\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u}$$

для всех $(x_1, x_2) \in D$ решение алгебраической системы (6) существует и задается однозначной функцией $u = U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ в некоторой области. Предположим, что эта область включает в себя D .

Подставляя найденное решение в систему дифференциальных уравнений (4), получаем систему:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \lambda\eta + F(\eta, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(\Psi + \eta, x_2, U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')), \end{aligned} \quad (7)$$

которая, в случае допустимости $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$, очевидно имеет решения, у которых компоненты $\eta \equiv 0$.

Таким образом, показано, что для достаточно широкого класса функций $\Psi(x_2)$ соответствующие им многообразия M становятся инвариантными для траекторий исходной системы (1) с управлением $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$.

Замечание 1. После фиксации $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ система (1) преобразуется в систему (7). В общем случае, для решения задач управления системой (7) в нашем распоряжении оказываются $2m$ свободных функций: функции $\Psi(x_2)$, удовлетворяющие перечисленным выше ограничениям и функции $F(\eta, x_2)$ с t граничными условиями $F(0, x_2) = 0$.

Замечание 2. Для редукции фазового пространства в окрестность многообразия M требуется наличие у последнего свойства глобального притяжения для всех траекторий (1). Достаточным условием для этого является свойство асимптотической устойчивости тривиального решения системы (7) относительно части переменных η . Его можно обеспечить, например, полагая в (7) $\lambda < 0$ и $F(\eta, x_2) \equiv 0$. В этом случае получаем, что управляемая динамика описывается неавтономной подсистемой системы дифференциальных уравнений (7)

$$\dot{x}_2 = f_2(\Psi + \eta_0 \exp(\lambda t), x_2, U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')). \quad (8)$$

Для дифференциальных уравнений (8) можно повторить описанную процедуру выделения новой подсистемы типа (5) с управлением $\Psi'(x_2)$. Отличие от первого шага состоит в том, что, в общем случае, на втором шаге декомпозиции алгебраические уравнения вида (6) содержат $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ и являются системой уравнений в частных производных относительно $\Psi(x_2)$.

Если же в исходной системе (1) правые части f_2 не зависят от управления u (как в рассмотренной ниже задаче стабилизации вращений твердого тела), то дополнительных дифференциальных связей на функцию $\Psi(x_2)$ не возникает.

3. Схема решения задачи стабилизации. Основная идея предлагаемого способа синтеза стабилизирующих управлений состоит в том, что в качестве управлений для преобразованной системы (7) могут быть использованы остающиеся пока свободными функции $\Psi(x_2)$ и $F(\eta, x_2)$. Их выбор должен обеспечить асимптотическое стремление к нулю переменных x_1, x_2 . Как известно, нахождение условий асимптотической устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений, в особенности по части переменных, является сложной проблемой. Поэтому в работе этот вопрос не рассматривается. Для каждой конкретной динамической системы алгоритм синтеза стабилизирующего управления подразумевает отдельное рассмотрение этой проблемы. В зависимости от способа ее решения можно конструировать различные законы управления в задаче стабилизации тривиального решения системы (7).

В данной работе предлагается следующая схема, которая реализована в рассмотренной ниже задаче стабилизации вращений твердого тела. Для стабилизации решений системы (1) достаточно выбрать функции $\Psi(x_2)$ и $F(\eta, x_2)$ такими, чтобы были выполнены условия:

1) Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (7) является асимптотически устойчивым.

2) Функция $\Psi(x_2)$ удовлетворяет граничному условию $\Psi(0) = 0$.

Действительно, в этом случае слагаемые $\eta(t)$ и $\Psi(x_2(t))$ в правой части равенств (3) (последнее в силу непрерывности) асимптотически стремятся к нулю, значит к нулю стремится и их сумма – переменная $x_1(t)$. При этом, в силу ограниченности $F(\eta, x_2)$, сохраняется свойство устойчивости для переменной $x_1(t)$.

4. Синтез управлений в задаче стабилизации угловой скорости твердого тела с неподвижной точкой. В качестве приложения изложенного подхода рассмотрим задачу стабилизации вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки под действием двумерного управления. Рассматриваемая система существенно нелинейна и является удобным объектом апробации для многих методов решения тех или иных задач управления. В частности, необходимые в данном случае свойства управляемости и стабилизируемости подробно изучены в [3]. Уравнения Эйлера, описывающие угловую скорость вращения, имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= a_1\omega_2\omega_3 + u_1, \\ \dot{\omega}_2 &= a_2\omega_1\omega_3 + u_2, \\ \dot{\omega}_3 &= a_3\omega_1\omega_2.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости твердого тела, управления u_1, u_2 характеризуют моменты сил, приложенные к телу, коэффициенты $a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}$, параметры A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно

главных осей. Предполагается, что тело не является симметричным, т.е. $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Задачей является нахождение функций (синтез управлений) $u_1(\omega), u_2(\omega)$, при которых любое решение системы дифференциальных уравнений (9) асимптотически стремится в начало координат. В соответствии с изложенной методикой, на первом этапе сделаем замену переменных

$$\omega_1 = \Psi_1(\omega_3) + \eta_1, \quad \omega_2 = \Psi_2(\omega_3) + \eta_2, \quad (10)$$

где функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$ характеризуют инвариантные многообразия замкнутой системы и будут использованы далее в качестве новых управлений.

Выберем $u_1(\omega), u_2(\omega)$ таким образом, чтобы после их подстановки в уравнения Эйлера (9) последние приняли бы вид:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \lambda\eta_1 + F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3), \\ \dot{\eta}_2 &= \lambda\eta_2 + F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3), \\ \dot{\omega}_3 &= a_3(\Psi_1 + \eta_1)(\Psi_2 + \eta_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где $F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3), F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3)$ неопределенные пока функции с граничным условием $F_1(0, 0, \omega_3) = F_2(0, 0, \omega_3) = 0$.

Составляя для рассматриваемой системы алгебраические уравнения (6) относительно $u_1(\omega), u_2(\omega)$, находим искомые управления:

$$\begin{aligned} u_1 &= -a_1\omega_2\omega_3 + a_3\dot{\Psi}_1\omega_1\omega_2 + \lambda(\omega_1 - \Psi_1) + F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3), \\ u_2 &= -a_2\omega_1\omega_3 + a_3\dot{\Psi}_2\omega_1\omega_2 + \lambda(\omega_2 - \Psi_2) + F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для любых непрерывно дифференцируемых функций $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$ с ограниченной в области D производной соответствующее им многообразие

$$M = \{(\omega) : \omega_1 = \Psi_1(\omega_3), \omega_2 = \Psi_2(\omega_3)\} \quad (13)$$

становится инвариантным для некоторых траекторий системы (9) после подстановки в нее управлений (12).

Для нахождения таких управлений (12), которые стабилизируют решения (9), потребуем выполнения следующих условий:

а) функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$, в дополнение к требованиям непрерывной дифференцируемости и ограниченности, должны удовлетворять граничным условиям $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$;

б) рассматриваемое семейство многообразий M должно обладать свойством глобального притяжения, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$;

в) функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3), F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3), F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3)$ должны быть выбраны такими, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_3(t) = 0$.

Тогда, в соответствии с равенствами (10) и в силу непрерывности $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$, получаем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_i(t) = 0$, $i = 1, 2$.

В частности, для выполнения всех перечисленных требований достаточно, чтобы нулевое решение системы дифференциальных уравнений (11) было асимптотически устойчивым. Для того, чтобы оно стало таковым, в нашем распоряжении остается выбор функций $\Psi_1(\omega_3)$, $\Psi_2(\omega_3)$, $F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3)$, $F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3)$ подчиненных нулевым граничным условиям.

Для нахождения этих функций рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \omega_3^2)$$

и найдем ее производную в силу системы (11)

$$\dot{V} = \lambda\eta_1^2 + \lambda\eta_2^2 + a_3\omega_3\Psi_1\Psi_2 + (F_1 + a_3\omega_3\Psi_2)\eta_1 + (F_2 + a_3\omega_3\Psi_1)\eta_2 + a_3\eta_1\eta_2\omega_3.$$

Чтобы эта производная стала знакоопределенной, достаточно подчинить свободные функции следующим ограничениям:

$$\Psi_1(\omega_3)\Psi_2(\omega_3) = \frac{\lambda}{a_3}\omega_3^{2k-1}, \quad F_1 = -a_3\omega_3(\eta_1 + \frac{\eta_2}{2}), \quad F_2 = -a_3\omega_3(\frac{\eta_1}{2} + \eta_2). \quad (14)$$

Здесь k – целое положительное число. Отметим, что при $k = 1$ не удастся подобрать функции $\Psi_1(\omega_3)$, $\Psi_2(\omega_3)$, удовлетворяющие нулевым граничным условиям и имеющие ограниченную производную в области, содержащей начало координат. Поэтому, полагаем $k = 2$ и определяем вид функций, формирующих инвариантное многообразие M

$$\Psi_1(\omega_3) = \frac{\lambda}{a_3}\omega_3, \quad \Psi_2(\omega_3) = \omega_3^2. \quad (15)$$

С учетом (14), (15) производная от функции Ляпунова становится знакоопределенной

$$\dot{V} = \lambda(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \omega_3^4),$$

что, при $\lambda < 0$, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, гарантирует асимптотическое стремление к нулю решений $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\omega_3(t)$ системы (11) с начальными условиями из рассматриваемой области. Отсюда, с учетом равенств (10), следует стремление к нулю и переменных $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$.

Отметим, что функции (14), (15) удовлетворяют всем приведенным выше ограничениям. Поэтому управления u_1 , u_2 для исходной системы, полученные по формулам (12), являются допустимыми и решают задачу стабилизации угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

1. Щербак В.Ф. Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 127-132.
2. Щербак В.Ф. Синхронизация угловых скоростей гироскопов // Там же – 2009. – Вып. 39. – С. 127-132.
3. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 175 с.

V. F. Shcherbak

Synthesis of invariant manifolds in the problem of stabilization of dynamical systems.

A new method for solving the problems of stabilization for nonlinear control systems is proposed. On the first stage control is chosen so that manifold in the phase space become an invariant with the property of the global attraction for all trajectories closed-loop system. The initial problem is solved by further stabilization the resulting manifold. As the appropriate controls can be found for any manifold, then the form of manifolds serve as a new control. Using this scheme theb problem of stabilization of the angular velocity of rigid bodyis by two moments is solved.

Keywords: *stabilization of nonlinear systems, invariant manifolds, control, rigid body with a fixed point.*

В. Ф. Щербак

Синтез інваріантних многовидів у задачі стабілізації динамічних систем.

Запропоновано новий метод розв'язання задач стабілізації нелінійних керованих динамічних систем. Метод полягає у виборі керувань таким чином, щоб довільний $(n - m)$ мірний многовид із заданою граничною умовою став інваріантним та мав властивість глобального тяжіння для всіх траєкторій замкнутої системи. Вихідна задача стабілізації розв'язується далі на здобутому многовиді. При цьому в якості керувань використовуються функції, що визначають вид синтезованого многовида. З використанням зазначеної схеми розв'язано задачу стабілізації вектора кутової швидкості твердого тіла з нерухомою точкою, яка здійснить обертання під дією двовимірного керування.

Ключові слова: *стабілізація нелінійних систем, інваріантні многовиди, керування, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.02.12

К 75 ЛЕТИЮ ОЛЕГА НИКОЛАЕВИЧА ВВЕДЕНСКОГО



В этом году исполнилось бы 75 лет Олегу Николаевичу Введенскому (21.03.1937-2.12.1981) – советскому математику, известному специалисту в области арифметической алгебраической геометрии, автору 30 научных статей, опубликованных в ведущих математических журналах СССР и УССР и переведенных на иностранные языки. О высоком научном уровне Олега Николаевича свидетельствует хотя бы тот факт, что он являлся одним из переводчиков на русский язык 2-х томника О. Зарисского и П. Самюэля «Коммутативная алгебра», которая в настоящее время стала классикой современной алгебры.

Олег Николаевич родился в Ленинграде в 1937 году. С мамой пережил ужасы блокады (отец был на фронте).

В 1946 г. их семья переехала во Львов. В 1954 году Олег Николаевич поступил на механико-математический факультет Львовского госуниверситета. После 4-го курса перевелся на механико-математический факультет МГУ, который окончил в 1960 году. В том же году поступил в аспирантуру МГУ к И.Р. Шафаревичу, ныне академику РАН. В 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1962 г. работал в Львовском госуниверситете, преподавая на механико-математическом факультете базовый курс алгебры и спецкурсы, организовал специализацию по алгебре и теории чисел и руководил процессом обучения по этой специализации. В 1977 г. по приглашению директора ИПММ АН УССР (г. Донецк) академика И.В. Скрышника переехал на работу в этот институт, где продолжил исследования в области арифметики эллиптических кривых, абелевых многообразий и смежных вопросов. Два ученика Олега Николаевича защитили докторские диссертации, шесть – кандидатские диссертации. Трагически погиб в декабре 1981 г. в Донецке.

Следующие воспоминания характеризуют Олега Николаевича и как личность, и как ученого, и как педагога.

Д.ф.-м.н. Н.М. Глазунов (Национальный авиационный университет).

«В 1964 г. я поступил на 1-й курс механико-математического факультета Львовского госуниверситета. Олег Николаевич был куратором группы и читал нам курс высшей алгебры.

В конце 1964 – начале 1965 года Олегом Николаевичем был организован кружок по теории чисел и алгебре (именно в такой постановке). Его первыми активными участниками были Николай Глазунов, Виктор Грицай, Инна Дубровская, Георгий Коновалов, Борис Корнеев, Николай Пименов. Володя Грицай (однофамилец Виктора) посещал заседания кружка почти с самого начала его работы. Это был очень скромный и непубличный человек, который так же тихо ушел недавно из жизни. В дальнейшем участниками кружка стали и другие студенты.

Базовыми учебниками были «Основы теории чисел» И.М. Виноградова и «Теория чисел» З. Боревица и И.Р. Шафаревича. Участники кружка получили и индивидуальные задания. Мне в качестве общей темы была поставлена задача изучения алгебраических расширений полей рациональных и p -адических чисел (о расширениях конечных полей Олег Николаевич рассказал мне сам), а в качестве конкретной задачи – вывести формулы деления на 2^n точек конечного порядка на эллиптической кривой, определенной над полем рациональных чисел.

Именно этот кружок определил для многих его участников их дальнейшую научную судьбу. Так, Юрий Мельничук начал заниматься арифметикой локальных полей, а в дальнейшем его интересы сместились в сторону теории приближения действительных чисел рациональными (он умер в Лондоне, приехав туда по научным вопросам), а Василий Андрийчук защитил по инициированной Олегом Николаевичем тематике кандидатскую, а потом и докторскую диссертации.

Научные интересы Олега Николаевича лежали в то время в более абстрактной области – он под руководством и по заданию И. Р. Шафаревича строил эллиптический аналог локальной теории полей классов. Полученные в этом направлении результаты и послужили основой его кандидатской диссертации.

Олег Николаевич организовал на механико-математическом факультете специализацию по алгебре и теории чисел, которая включала курсы: алгебраическая топология, алгебраические расширения полей и теория Галуа, теория гомотопий, и семинары: группы и алгебры Ли, теория гомологий в группах, формальные группы и их применения, гомологическая алгебра, введение в теорию полей классов. Кроме того, им был создан общегородской семинар, который, помимо преподавателей и студентов университета, посещали также преподаватели других вузов Львова, а также научные сотрудники ИППММ АН УССР (ныне институт им. Я. Подстригача) и других институтов.

Большинство участников кружка Олега Николаевича учились на потоке вычислительной математики (куда после окончания 2 курса перевелся и я). На этом потоке преподавались дисциплины, соответствующие теперешней специализации по компьютерным наукам. Для таких участников кружка Олег Николаевич организовал семинар по теории автоматов, указав участникам семинара основное направление и самую новую на то время соответствующую литературу по теории автоматов.

Помимо прослушивания курсов лекций и выступления на семинарах участники кружка имели еженедельные индивидуальные беседы с Олегом Николаевичем, которые проводились или на его квартире, или на квартире его мамы. Олег Николаевич любил классическую музыку, сам играл на рояле и пианино, которые были в этих небольших квартирах.

Хотя участники кружка выполняли индивидуальные задания, как правило не одно, и не всегда связанные между собой, Олег Николаевич всегда определял для каждого его приоритетное направление или направления. Так, на 3-м или на 4-м курсе я, имея приоритетное задание вычисления алгебр Ли эллиптических кривых, получил также задание разбора и изложения на семинаре недавно вышедшей тогда статьи М. Атья и Р. Ботта «Элементарное доказательство теоремы периодичности для комплексной линейной группы». Мне тематика и изложение статьи очень понравились, я и сам начал кое-что исследовать в этом направлении, правда в ущерб вычислениям алгебр Ли. На одном из моих докладов по теореме периодичности, Олег Николаевич остановил меня, сказав, что пока это следует отложить, и, возможно, вернуться к этому позже. В очередной беседе с ним у него дома я сказал, что ряд результатов, связанных с теоремой периодичности, не изложил, и что у меня есть достаточно материала для последующего доклада или докладов. Его ответ звучал примерно так: Коля, в мире много интересного. Но нужно сосредотачиваться на главном. А главное для Вас сейчас – это вычисление алгебр Ли, связанных с эллиптическими кривыми. Нужно отметить, что Олег Николаевич называл своих учеников только на Вы.

Для бесед на математические и другие темы Олег Николаевич, помимо встреч у него дома, часто практиковал пешеходные экскурсии по живописным окрестностям Львова. Они, как я сейчас понимаю, были удивительными и незабываемыми прогулками, которые можно отнести к лучшим моментам нашей жизни. На этот момент в нашу математику мощно ворвалась французская математическая школа, и те, кто работал в сходных с ней направлениях, и имена А. Вейля, А. Гротендика, Ж.-П. Серра, Ж. Дьедонне, Дж. Тэйта, Д. Касселса, С. Ленга, М. Артина, а также классиков Д. Гильберта, Г. Вебера, М. Дойринга, Э. Артина, Г. Хассе, были у нас на слуху. Мы ходили, обсуждая математические результаты этих ученых, научные задачи, возможные методы их решения, направления дальнейших исследований. Конечно, для Олега Николаевича наибольшим авторитетом был И.Р. Шафаревич, а для нас – О.Н. Введенский. Даже сейчас, по прошествии десятков лет, я помню творческую атмосферу, озарения и прекрасные эпизоды таких походов.

Иногда Олег Николаевич спонтанно решался и на более рискованные путешествия. Так, обучаясь уже в аспирантуре, как-то я приехал во Львов и пришел в назначенное мне время (около полудня) к нему домой. Коротко расспросив меня о результатах, он предложил: Коля, а давайте махнем в Карпаты. И Вы выглядите уставшим, и я предыдущие дни работал днями и ночами, так что давайте разведемся, а заодно и обсудим в пути наши задачи. Я сходил домой к своим родителям, переоделся, взял походные вещи, и вернулся к Олегу Николаевичу. Мы на попутке поехали в Карпаты, куда приехали уже под вечер. И хоть время было летнее, но ско-

ро уже должны были наступать сумерки. Олег Николаевич, по-видимому, неплохо знал эту местность, так как через некоторое время остановил машину, на которой мы ехали, у подножья большой горы, рассчитался с шофером и сказал, что мы будем подниматься на гору Стой. К сумеркам мы поднялись до середины горы и решили сделать привал. Разожгли в пожаробезопасном месте (т.е. на сырой земле) небольшой костер и расположились ужинать. Через некоторое время из темноты выше нас начал раздаваться какой-то рев и рыки. Мы подбросили веток в костер и продолжили ужин. Рев сначала немного стих, но через некоторое время восстановился с прежней силой, а затем стал приближаться. Я напомнил Олегу Николаевичу, что у нас есть туристические ножи, но получил ответ, что это не адекватные для данной ситуации инструменты. Мы закончили ужин, решили загасить костер и спускаться вниз. Ночь была не особо темная, и мы, может быть не так быстро, как хотелось, вышли к трассе и опять остановили попутную машину, но уже на Львов. Утром вернулись в наш родной город.

Олег Николаевич заботился и берег своих учеников. Так, если мы шли вдоль шоссе, а это часто бывало во время наших путешествий, то он всегда шел ближе всего к машинам, как бы прикрывая нас собой.

Надо сказать, что Олег Николаевич любил спорт и активно занимался им. Квартира мамы Олега Николаевича располагалась на первом этаже и выходила в прелестный зеленый дворик с садом. Иногда, приходя на эту квартиру для научных занятий с Олегом Николаевичем, я заставал его занимающимся толканием ядра в этом дворике. Тяжелые мешки с картошкой для мамы и для своей семьи он таскал сам. И свой спортивный азарт он переносил и на занятия математикой. Это был высокий, красивый и физически сильный человек.



Рис. 1. Олег Николаевич с дочкой (г. Львов)

Живя во Львове, где жила и мама Олега Николаевича, и куда Олег Николаевич перевез и свою жену (москвичку), он, как мне кажется, разрывался между Львовом и Москвой. Во Львове была его семья (включая двух прелестных дочурок), его ученики, а в Москве – мировая математическая школа по алгебре и теории чисел, его учитель и коллеги.

Товарищем Олега Николаевича и соучеником по школе, а затем и по университету, был Борис Николаевич Пшеничный, впоследствии зав. отделом Института кибернетики АН Украины, академик НАН Украины. Живя уже в Киеве, Борис Николаевич, когда был во Львове, заходил к Олегу Николаевичу в гости.

Олег Николаевич также принимал у себя товарищей и коллег-алгебраистов из Москвы, Ленинграда и других городов. Иногда на эти встречи он приглашал и

нас. Мне запомнились несколько таких встреч. На них были, из тех, кого я тогда запомнил, А.Н. Тюрин, Ю.И. Манин, И.В. Долгачев, и А.Н. Адрианов. Позже, в 1970-1971 годах, когда я был на стажировке в МГУ и ВЦ АН СССР в Москве, я ходил на лекции Ю.И. Манина и считал на ЭВМ по разработанному им тогда методу модулярные символы. Б.Н. Пшеничный и И.В. Долгачев оппонировали мою кандидатскую диссертацию, а в 1999 году И.В. Долгачев способствовал приглашению меня на международную школу по теории струн в Международный центр математических исследований (Лумини, Франция), где сам был одним из ведущих лекторов. Я им очень благодарен за поддержку.

Олег Николаевич активно поддерживал участие студентов в студенческих научных конференциях. Так, он рекомендовал меня для участия во всех ежегодных студенческих конференциях во Львовском госуниверситете, а после моей победы на университетской конференции – и для участия в республиканской студенческой научной конференции, которая проводилась в Киевском государственном университете. Следует отметить, что конкуренция на таких конференциях была достаточно серьезной, так как руководителями некоторых студентов были члены Академии наук УССР. На 3-м курсе Олег Николаевич попросил меня принести фотографию, и через некоторое время в стенной газете нашего факультета появилась его статья, озаглавленная «Майбутній науковець», с моей фотографией.

Олег Николаевич был настоящим патриотом. В одном из последних его писем, полученных мною, и датированным 11 февраля 1981 года, он написал так «Относительно моей работы – то арифметические трудности, сложная техника и сильные соперники дают ощущение того, что на своем скромном месте находишься среди тех, кто в соревновании стоит за советскую математику».

Невозможно коротко описать широту научных интересов Олега Николаевича и глубину его научных результатов. Он работал на самом переднем крае математики того времени, шел вперед сам и вел за собой своих учеников. И так уж случилось, что тогдашние гонения на И.Р. Шафаревича распространялись и на его учеников. Добрая и очень ранимая душа Олега Николаевича не выдержала ежедневной тяжелой борьбы за научные результаты и параллельного гнета и идиотизма быта. Он ушел из жизни. Но память о нем живет в его детях, в его учениках и коллегах. Светлая ему память».

Д.ф.-м.н. В.П. Бурский (ИПММ НАН Украины).

«Об Олеге Николаевиче Введенском я впервые услышал, будучи студентом. Как-то раз после очередного заседания семинара по алгебраической топологии, который в ИПММ АН УССР вел Анатолий Иванович Марковский, и участниками которого были некоторые интересующиеся студенты, в том числе и я, Анатолий Иванович стал рассказывать о своем однокурснике и удивительно талантливом человеке и математике. Этим человеком как раз был Олег Николаевич Введенский. Он тогда жил во Львове, был учеником И.Р. Шафаревича, занимался очень сложной наукой – алгебраической геометрией, и получил в этой науке серьезные продвижения.

Несколько лет спустя Олег Николаевич перевелся в наш институт и все мы получили возможность общаться с этим скромным и обаятельным человеком. Меня

сближало с ним увлечение музыкой. На одной из встреч мы как-то даже устроили взаимное прослушивание на фортепиано у меня дома – я играл джаз, а Олег Николаевич – прекрасную классическую музыку, и без нот, конечно. Тогда присутствовал еще и комментировал все Владимир Иванович Шевченко, тонкий ценитель искусства и замечательный математик, тоже тогда сотрудник ИПММ АН УССР, который потом нашел свое пристанище в г. Кинешма, Ивановской области, где он работал и работает до сих пор в филиале какого-то технического института.

Что касается математики, то Олег Николаевич помог мне в некоторых сложных вопросах гомологической алгебры, которой я тогда увлекся. Он увлеченно рассказывал о своей науке, в частности, об проективных алгебраических многообразиях над некоторым полем. К нему обращались с вопросами разные математики, в частности, Сергей Владимирович Салей, Анатолий Иосифович Докшевич.

Иван Ильич Данилюк организовал однажды в ИПММ АН УССР семинар по книге: Голубицкий М., Гийемин В. «Устойчивые отображения и их особенности». Курировать весь семинар по малоизвестной нам теме взялся тогда Олег Николаевич. Мне были поручены первые два выступления, по предмету которых я тоже много и плодотворно общался с Олегом Николаевичем. Семинар продолжался полгода, и способствовал распространению современных конструкций математики среди сотрудников нашего института.

Олег Николаевич оставил о себе память как о сильном математике, находящемся на самом передовом крае науки, как о милом и отзывчивом человеке, как об эрудированном интеллигенте, страстно увлеченном искусством».