УДК 517.946

С. П. Лавренюк

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$ для уравнения

$$(p(x, t) u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta u) + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} b_\alpha(x, t) D_x^\alpha u +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (c_\alpha(x, t) D_x^\alpha u)_t = f(x, t) \qquad (1)$$

задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что для коэффициентов уравнения (1) выполняются условия:

$$A) \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}; \qquad \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x, t)\, \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant \mu_2 \sum_{|\alpha|=2} \eta_\alpha^2,$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} |a_{\alpha\beta t}(x, t)|\, \eta_\alpha \eta_\beta \leqslant \mu_3 \sum_{|\alpha|=2} \eta_\alpha^2, \qquad \eta \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

$$B) \quad \mu_0 t^\omega \leqslant p(x, t) \leqslant \nu_0 t^\omega, \quad |p_t(x, t)| \leqslant \mu_1 t^{\omega-1}, \quad \omega > 1.$$

Отметим, что исследованиями задач для вырождающихся эволюционных уравнений занимались многие авторы (см. напр., [1]). В частности, в работах [2, 3] исследовано корректную постановку задач для вырождающегося ультрагиперболического уравнения, которое содержит и уравнение типа колебания пластины.

В настоящей работе получены некоторые новые условия разрешимости задачи (1), (2), отличные от известных ранее [2, 3].

Рассмотрим пространство $H^{2m,m}(Q_T)$ ([4, с. 165]). Функцию $u(x,t)\in H^{2,2}(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}D_x^\alpha v D_x^\beta u+\sum_{|\alpha|\leqslant 2} b_\alpha D_x^\alpha uv-\sum_{|\alpha|\leqslant 1} c_\alpha D_x^\alpha u v_t - pu_t v_t - fv)\,dxdt=0 \quad (3)$$

для любой функции $v(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, $v(x,T)=0$ и условию $u(x,0)=0$.

Приведем сначала условия единственности обобщенного решения задачи (1), (2). Для этого сделаем дополнительные предположения относительно коэффициентов уравнения (1). Пусть

$$\text{C)}\ \sup_{Q_T}\Big\{\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant 2}((D_x^\alpha b_\alpha)^2+b_\alpha^2)+\sum_{|\alpha|=1}\sum_{|\beta|=1}(D_x^\alpha b_{\alpha\beta})^2+ +\sum_{|\alpha|\leqslant 1}((D_x^\alpha c_\alpha)^2+c_\alpha^2)\Big]t^{2(1-\omega)}\Big\}<\infty.$$

Обозначим через

$$\nu_1=\inf_{[0,T]}\max\Big\{\sup_{Q_\tau}\Big[p_t+\sum_{|\alpha|=1}\Big(D_x^\alpha c_\alpha-2c_0\Big)t^{1-\omega}\Big];0\Big\},$$

$$\mathscr{D}_\tau=\{t=\tau\}\cap Q_T.$$

Теорема 1. Если $\nu_1<\mu_0\omega$, то задача (1), (2) не может иметь более одного обобщенного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи (1), (2) в случае, когда $f(x,t)\equiv 0$. В качестве функции $v(x,t)$ в тождестве (3) выберем

$$v(x,t)=\begin{cases} e^{\gamma_0 t}\int\limits_t^\tau u(x,\eta)\,d\eta, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau<t<T.\end{cases}$$

Здесь γ_0 — произвольное положительное число.

После несложных преобразований тождество (3) примет вид

$$\frac12\int\limits_{\mathscr{D}_0}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\alpha_{\alpha\beta}\int\limits_0^\tau D_x^\alpha u\,d\eta\int\limits_0^\tau D_x^\beta u\,d\eta\, e^{\gamma_0\tau}dx+\frac12\int\limits_{\mathscr{D}_\tau}pu^2e^{\gamma_0\tau}dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\gamma_0(p_t+\gamma_0 p)u\int\limits_t^\tau u\,d\eta+\frac12\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}(\gamma_0 a_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta t})\int\limits_t^\tau D_x^\alpha u\,d\eta\int\limits_t^\tau D_x^\beta u\,d\eta-$$
$$-\frac12(p_t+3p\gamma_0)u^2+\sum_{|\alpha|=2}b_\alpha u\int\limits_t^\tau D_x^\alpha u\,d\eta+\sum_{|\alpha|=1}\Big(\sum_{|\beta|=1}(D_x^\beta b_{\alpha\beta}+D_x^\beta b_{\beta\alpha})-b_\alpha\Big)u\times$$
$$\times\int\limits_t^\tau D_x^\alpha u\,d\eta+\Big(\sum_{|\alpha|=2}D_x^\alpha b_\alpha-\sum_{|\alpha|=1}D_x^\alpha b_\alpha+b_0\Big)u\int\limits_t^\tau u\,d\eta+$$
$$+\frac12\Big(2c_0-\sum_{|\alpha|=1}D_x^\alpha c_\alpha\Big)u^2+\gamma_0\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha u\int\limits_t^\tau D_x^\alpha u\,d\eta+$$
$$+\gamma_0\Big(\sum_{|\alpha|=1}D_x^\alpha c_\alpha-c_0\Big)u\int\limits_t^\tau u\,d\eta\Big]e^{\gamma_0 t}dxdt=0. \quad (4)$$

Учитывая условия A), B), C), можно выбрать такие $\gamma_0 > 0$ и $0 < \tau_0 < 1$, что для всех $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ выполняется неравенство

$$\mu_0 \tau^\omega \int\limits_{\mathscr{D}_\tau} u^2(x, \tau)\, dx \leqslant (\nu_1 + \delta_0) \int\limits_{Q_\tau} t^{\omega - 1} u^2(x, t)\, dxdt, \tag{5}$$

где $\delta_0 = \omega\mu_0 - \nu_1$. Неравенство (5) нетрудно получить из (4), оценивая отдельно каждый член этого равенства.

Если теперь ввести обозначение

$$y(\tau) = \int\limits_{Q_\tau} t^{\omega-1} u^2(x, t)\, dxdt,$$

то неравенство (4) примет вид

$$\tau y'(\tau) \leqslant \omega y(\tau),$$

из которого следует, что $y(\tau) = 0$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Таким образом, находим, что $u(x, t) = 0$ в полосе Q_{τ_0}. Если теперь рассмотреть в полосе $Q_{\tau_0 T} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \tau_0 < t < T\}$ задачу Коши для уравнения (1) с нулевыми начальными условиями при $t = \tau_0$, то можно аналогичным образом доказать, что $u(x, t) = 0$ в $Q_{\tau_0 T}$. Следовательно, теорема 1 доказана.

Приведем теперь условия существования обобщенного решения задачи (1), (2). Будем предполагать, что вместо C) выполняется условие

$$D)\ \sup_{Q_T} \Big[\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant 2} b_\alpha^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant 1} ((D_x^\alpha c_\alpha)^2 + c_{\alpha t}^2)\Big) t^{1-\omega}\Big] < \infty.$$

Обозначим через

$$\nu_2 = \inf_{[0, T]} \max \Big\{\sup_{Q_\tau} \Big(|p_t| - 2c_0 + \sum_{|\alpha| = 1} D_x^\alpha c_\alpha\Big) t^{1-\omega};\ 0\Big\};$$

$$|||f|||_{\tau, \varkappa} = \sup_{[0, \tau]} \int\limits_{\mathscr{D}_t} \frac{f^2(x, t)}{t^\varkappa}\, dx, \quad \varkappa \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2. Если выполняются условия A), B), D), функции

$$D_x^\gamma a_{\alpha\beta}\ (|\gamma| \leqslant 2),\ b_\alpha,\ c_{\alpha t},\ c_\alpha,\ c,\ p,\ p_t$$

непрерывны в Q_T, $\nu_2 < \mu_0 \varkappa_0$, $|||f|||_{T, 2(\omega + [\varkappa_0]) - 1} < \infty$, то существует обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\, |||f|||_{T, 2(\omega + [\varkappa_0]) - 1}\,. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим в области $Q_{\varepsilon T}$ $(\varepsilon > 0)$ задачу Коши

$$(p(x, t)\, u_t)_t + \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t)\, D_x^\beta u) - \varepsilon \Delta u_t + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} b_\alpha(x, t)\, D_x^\alpha u +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (c_\alpha(x, t)\, D_x^\alpha u)_t = f(x, t), \tag{7}$$

$$u(x, \varepsilon) = 0, \quad u_t(x, \varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Задача (7), (8) является параболической по Петровскому и, как следует из результатов работы [5], она имеет решение $u^\varepsilon(x, t) \in H^{4,2}(Q_{\varepsilon T})$.

Теперь необходимо получить оценку решений $u^\varepsilon(x, t)$ в пространстве $H^{1,2}(Q_{\varepsilon T})$, не зависящую от ε. Для этого, используя ход доказательства теоремы 1, получаем сначала оценку вида

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon T}} (u^\varepsilon(x, t))^2\, dxdt \leqslant C_1\, |||f|||_{\tau, 2\omega - 2 + [\varkappa_0]}, \tag{9}$$
$$0 < \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \tau_0.$$

Далее, умножив уравнение (7) на функцию $u_t^\varepsilon(x,t)\,e^{-\gamma_1 t}$, $\gamma_1>0$ и проинтегрировав по области $Q_{\varepsilon\tau}$, $\varepsilon\leqslant\tau\leqslant\tau_0$, нетрудно получить неравенство

$$\mu_0\tau^\omega e^{-\gamma_1\tau}\int\limits_{\mathscr{D}_\tau}\Big[(u_t^\varepsilon)^2+\sum_{|\alpha|=2}(D_x^\alpha u^\varepsilon)^2\Big]dx\leqslant(\nu_2+\delta_1)\int\limits_{Q_{\varepsilon\tau}}t^{\omega-1}\Big[(u_t^\varepsilon)^2+$$

$$+\sum_{|\alpha|=2}(D_x^\alpha u^\varepsilon)^2\Big]e^{-\gamma_1 t}dxdt+C_2\int\limits_{Q_{\varepsilon\tau}}(u^\varepsilon(x,t))^2\,dxdt+C_3\int\limits_{Q_{\varepsilon\tau}}t^{1-\omega}f^2(x,t)\,dxdt, \tag{10}$$

выбрав γ_1 достаточно большим, и $\delta_1=\mu_0\varkappa_0-\nu_2$.

Учитывая оценку (9), неравенство (10) можно переписать следующим образом:

$$\tau^\omega e^{-\gamma_1\tau}\int\limits_{\mathscr{D}_\tau}\Big[(u_t^\varepsilon)^2+\sum_{|\alpha|=2}(D_x^\alpha u^\varepsilon)^2\Big]dx\leqslant\varkappa_0\int\limits_{Q_{\varepsilon\tau}}t^{\omega-1}e^{-\gamma_1 t}\Big[(u_t^\varepsilon)^2+\sum_{|\alpha|=2}(D_x^\alpha u^\varepsilon)^2\Big]dxdt+$$

$$+C_4|||f|||_{\tau,2\omega-2+[\varkappa_0]}.$$

Из последнего неравенства получаем оценку

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon\tau_0}}\Big[(u_t^\varepsilon)^2+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(D_x^\alpha u^\varepsilon)^2\Big]dxdt\leqslant C_5|||f|||_{T,2(\omega+[\varkappa_0])-1}. \tag{11}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 не зависят от ε.

Неравенство (11) нетрудно распространить на область $Q_{\varepsilon T}$, а затем, продолжив функцию $u^\varepsilon(x,t)$ в Q_T, и на всю область Q_T. Следовательно, $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ слабо компактна в $H^{2,1}(Q_T)$ и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u^{\varepsilon_k}(x,t)\}$ к функции $u(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$. Легко убедиться, что $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи Коши (1), (2) и для него справедлива оценка (6).

1. *Глазатов С. Н.* О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Сиб. мат. журн.—1987.— **28**, № 2.— С. 60—66.
2. *Бубнов Б. А., Врагов В. Н.* К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1982.— **264**, № 4.— С. 795—800.
3. *Бубнов Б. А.* Смешанная задача для одного класса ультрагиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными Тр. семинара С. Л. Соболева.— 1983.— № 2.— С. 22—37.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М. : Наука, 1983.— 424 с.
5. *Солонников В. А.* Краевые задачи математической физики // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1965.— 83.— С. 164.

Львов. гос. ун-т Получено 28.09.87