

УДК 531.38

©2018. Н.Н. Щепин

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ С УЧЕТОМ РАСТЯЖЕНИЯ

В работе рассмотрена система n твердых тел, связанных упругими цилиндрическими и телескопическими шарнирами в предположении отсутствия действия внешних сил и моментов. Получены уравнения равновесия рассматриваемого объекта. Для случаев $n = 4$ и $n = 6$ построено решение типа "восьмерка". Найдены условия, при которых изучаемое решение существует.

Ключевые слова: *система твердых тел, устойчивость положения равновесия, достаточные условия устойчивости.*

Введение. Для нахождения различных равновесных состояний и колебаний механических объектов широкое использование получила конечномерная модель систем твердых тел, связанных упругими универсальными и телескопическими шарнирами. Так, использование системы твердых тел, связанных упругими шарнирами, оказалось весьма эффективным при изучении устойчивости малых колебаний балочных конструкций (систем с малым прогибом) [1, 2]. Конечномерные системы были использованы и при изучении статики и динамики стержневых конструкций, допускающих прогибы значительной величины [3, 4]. Выражения для упругого момента применительно к данному классу задач были получены в работе [4].

Особый интерес к изучению упругих стержней появился в связи с активным использованием их в качестве моделей различных биологических систем. При этом на практике могут возникать задачи моделирования объектов, имеющих как незамкнутую, так и замкнутую форму [5]. Для замкнутых форм упругих стержней были найдены различные равновесные состояния оси, такие как "круговая", "восьмерка" и "роза". Конечномерные аналоги таких конфигураций были найдены в работах [3, 4, 6], при этом решения уравнений равновесия системы были выписаны в элементарных функциях. Однако, как показывают экспериментальные исследования, учет только изгибных деформаций не дает полной картины поведения биологических объектов. В связи с этим, при моделировании равновесных конфигураций возникает задача учета других видов деформаций, таких как растяжение и сдвиг. Следующим шагом при моделировании с помощью систем связанных твердых тел является учет упругих смещений в сочленениях, который может быть реализован с помощью телескопических шарниров.

Целью работы является построение конечномерной модели упругого стержня, которая представима системой твердых тел, связанных друг с другом соединениями, допускающими растяжение оси (телескопический шарнир) и нелинейный прогиб (цилиндрический шарнир), а также нахождение равновесных конфигураций этой системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему n гироскопов Лагранжа S_j . В точке P_j тела S_j установлен невесомый, упругий, телескопический шарнир, сонаправленный с осью симметрии тела S_j . В точке O_{j+1} тела S_{j+1} телескопический шарнир с помощью упругого цилиндрического шарнира соединяется с телом S_{j+1} . Точка O_{j+1} принадлежит оси симметрии тела S_{j+1} . На рис. 1 изображена связка двух тел S_j и S_{j+1} . Полагаем, что оси симметрии $O_j P_j = h_j$ тел $S_j (j = \overline{1, n})$ лежат в одной плоскости OXZ , а оси всех цилиндрических шарниров, закрепленных в точках O_j , ей перпендикулярны.

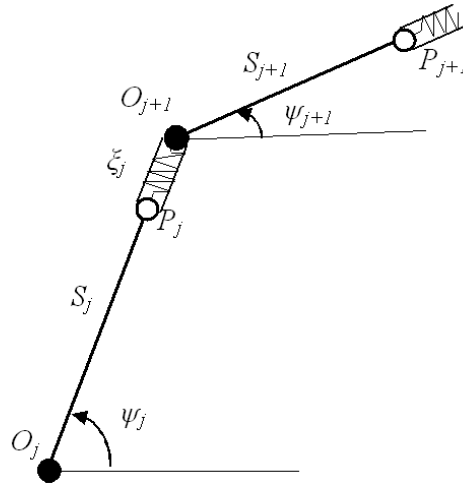


Рис. 1. Сочленение тел S_j с S_{j+1} .

Для учета геометрической нелинейности поведения упругого стержня момент L_j в цилиндрических шарнирах выбирается равным [7]

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где c^2 — жесткость на изгиб, ψ_j — угол поворота тела S_j вокруг оси $(j-1)$ -го шарнира. Для замкнутых систем ($O_1 = O_{n+1}$), а именно такие мы и будем рассматривать в дальнейшем, угол ψ_0 , аналогично [6], считаем равным ψ_n , т. е. $\psi_0 = \psi_n$.

Как и в работах [3, 4], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, вследствие чего ее центр масс неподвижен. Потенциальная энергия системы с учетом (1) имеет вид

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}) + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \quad (2)$$

где ξ_j — растяжение в j -ом телескопическом шарнире, k^2 — жесткость на растяжение. Аналогично работе [3], для замкнутых систем выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \mathbf{e}_j^x = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_j^x$ — единичный орт оси $O_j P_j$, составляющий угол ψ_j с осью OX . Поскольку $\mathbf{e}_j^x = \cos \psi_j \mathbf{e}^x + \sin \psi_j \mathbf{e}^z$ ($\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^z$ — соответственно орты осей OX и OZ), то из соотношения (3) имеем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы ψ_j и растяжения ξ_j :

$$f_1 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \sin \psi_j = 0. \quad (4)$$

Для систем с дополнительными связями положения равновесия могут быть найдены из условия [8, 9] стационарности функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, т. е.

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (5)$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители Лагранжа.

Подставляя выражения (2), (4) в соотношение (5), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} c^2 (\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})) = \\ = (h_j + \xi_j)(\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad \psi_{n+1} = \psi_1, \quad \psi_0 = \psi_n, \end{aligned} \quad (6)$$

$$k^2 \xi_j = -(\lambda_1 \cos \psi_j + \lambda_2 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

которая вместе с равенствами (4) позволяет определить неизвестные величины поставленной задачи, а именно, углы ψ_j и растяжения ξ_j , а также множители Лагранжа λ_1, λ_2 . Как показано в [4], множители Лагранжа λ_1, λ_2 при этом играют роль реакций связей.

2. Стационарное решение типа “восьмерка” в случае шести тел.

Конфигурация системы из шести тел может быть представлена следующей фигурой (рис. 2). Полагаем, что фигура симметрична относительно оси OZ . При этом длины осей симметрии тел $O_i P_i$ ($i = \overline{1, 6}$) равны

$$O_1 P_1 = O_3 P_3 = O_4 P_4 = O_6 P_6 = h_1, \quad O_2 P_2 = O_5 P_5 = h_2, \quad (8)$$

углы ψ_i ($i = \overline{1, 6}$) между осью симметрии тела S_i и осью OX таковы:

$$\psi_1 = \psi_3 = \varphi, \quad \psi_2 = -\psi, \quad \psi_4 = \psi_6 = \pi - \varphi, \quad \psi_5 = \pi + \psi, \quad (9)$$

растяжения ξ_k ($k = \overline{1, 6}$) равны

$$\xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6, \quad \xi_2 = \xi_5. \quad (10)$$

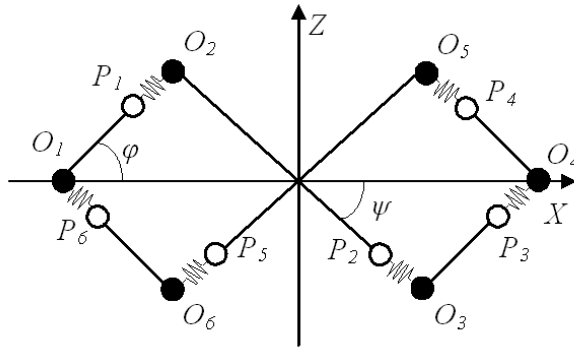


Рис. 2. Конфигурация типа “куб” для шести тел.

Считаем, что φ и ψ – острые углы. Будем полагать, что

$$a = \frac{h_1}{h_2}; \quad \xi_1 = h_1 \tilde{\xi}_1; \quad \xi_2 = h_2 \tilde{\xi}_2, \quad (11)$$

и знак “тильды” в дальнейшем опускаем. Подставляя соотношения (8), (9) в условие замкнутости (4), получаем условие, которому должно удовлетворять решение задачи

$$\sin \psi = 2b \sin \varphi, \quad (12)$$

где

$$b = a \frac{1 + \xi_1}{1 + \xi_2}. \quad (13)$$

Из предположения, что φ и ψ – острые, из (12) следует, что $b > 0$.

Решение (9) удовлетворяет уравнениям равновесия (6) в случае $\lambda_2 = 0$. После исключения из уравнений (6) множителя λ_1 получаем

$$\frac{\sin 2\varphi - \sin(\varphi + \psi)}{2 \sin(\varphi + \psi)} = b \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}. \quad (14)$$

Таким образом, получены два уравнения: (12) и (14) для определения углов φ и ψ стационарного решения (9) изучаемой системы. Для дальнейшего исследования (12), (14) введем дополнительный параметр p следующим образом:

$$\cos \psi = p \cos \varphi. \quad (15)$$

Очевидно, что введенный в (15) дополнительный параметр p больше нуля, так как углы φ и ψ – острые.

Из (12), (15) получаем

$$4b^2 \sin^2 \varphi + p^2 \cos^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sin^2 \varphi = \frac{1 - p^2}{4b^2 - p^2}, \quad (16)$$

откуда следует

$$0 < \frac{1-p^2}{4b^2-p^2} < 1. \quad (17)$$

Подставляя (12), (15) в (14) и учитывая, что $\sin \varphi \cos \varphi \neq 0$, получаем уравнение

$$p^2 - 2p(1-2b) + 4b^2 = 0. \quad (18)$$

Корни уравнения (18) действительны при условии

$$b \leq \frac{1}{4} \quad (19)$$

и при этом уравнение (18) имеет два положительных действительных корня.

Из анализа неравенства (17) с учетом условия (19) следует, что

$$0 < b \leq \frac{1}{4}, \quad p > 1. \quad (20)$$

Требование существования у уравнения (18) корня $p > 1$ выполняется при условии

$$0 < b < \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \quad (21)$$

Из уравнений (7), (12) и соотношения (13) получаем систему уравнений для нахождения ξ_1, ξ_2 :

$$a \frac{1+\xi_1}{1+\xi_2} = b, \quad a \frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{1}{2b}. \quad (22)$$

Таким образом, решение (9), (10) существует для рассматриваемой системы шести тел, если углы φ и ψ определяются соотношениями

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1-p^2}{4b^2-p^2}}, \quad \sin \psi = 2b \sqrt{\frac{1-p^2}{4b^2-p^2}},$$

растяжения ξ_1, ξ_2 – формулами

$$\xi_1 = \frac{b-a}{a(1+2b^2)}, \quad \xi_2 = -2b \frac{b-a}{1+2b^2},$$

где $p = -2b + 1 + \sqrt{1-4b}$, а $b \in (0, (\sqrt{2}-1)/2)$.

3. Стационарное решение типа “восьмерка” в случае четырех тел.

В случае четырех тел возможна лишь одна конфигурация системы тел, моделирующая упругую ось типа “восьмерки”. Она изображена на рис. 3.

Длины осей симметрий $O_j O_{j+1}$ твердых тел S_j , $j = \overline{1, 4}$, должны удовлетворять равенствам

$$O_1 P_1 = O_3 P_3 = h_1; \quad O_2 P_2 = O_4 P_4 = h_2. \quad (23)$$

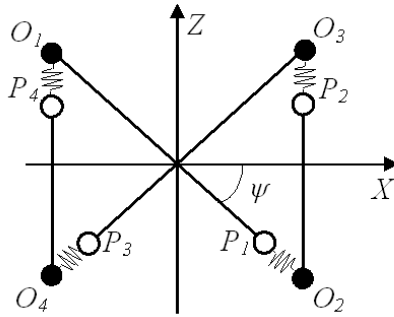


Рис. 3. Конфигурация типа “восьмерка” для четырех тел.

Решение ищем в виде

$$\psi_1 = -\psi, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_3 = \pi + \psi, \quad \psi_4 = \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

$$\xi_1 = \xi_3, \quad \xi_2 = \xi_4. \quad (25)$$

Полагаем, что ψ – острый угол. Введем следующие параметры и новые переменные:

$$a = \frac{h_1}{h_2}; \quad b = \frac{2c^2}{h_1}; \quad p = k^2 h_1; \quad \xi_1 = h_1 \tilde{\xi}_1; \quad \xi_2 = h_2 \tilde{\xi}_2. \quad (26)$$

Знак ”тильды” в дальнейшем опускаем. Из условий замкнутости (4) и из уравнений (6) имеем

$$\sin \psi = \frac{1 + \xi_2}{a(1 + \xi_1)}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{b}{1 + \xi_1}. \quad (27)$$

Уравнения (7) приводятся к виду

$$\xi_1 = \lambda_2 \sin \psi / p, \quad \xi_2 = -\lambda_2 a / p. \quad (28)$$

Из соотношений (27) и (28) получим уравнение для определения ξ_1 :

$$\xi_1(1 + \xi_1)^3 = r(1 + \xi_1) - q^2, \quad (29)$$

где $r = b/(ap)$, $q = b/p$.

Из вида уравнения (29) следует, что корень в окрестности нуля будет существовать при $|r - q^2| \ll 1$. Положим $r = q^2 + \varepsilon$, где ε – малый параметр. Тогда асимптотическое представление интересующего нас корня уравнения (29) при $q \neq 1$ имеет вид

$$\xi_1 = -\frac{\varepsilon}{q^2 - 1} + \frac{(q^2 + 2)\varepsilon^2}{(q^2 - 1)^3} - \frac{(q^4 + 10q^2 + 7)\varepsilon^3}{(q^2 - 1)^5} + \dots \quad (30)$$

При $q = 1$ и положительном ε будем иметь два корня со следующим представлением

$$\xi_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}}{3} + \frac{\sqrt{3}\varepsilon^{3/2}}{54} + \frac{\varepsilon^2}{54} + \dots, \quad \xi_1^{(2)} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}}{3} - \frac{\sqrt{3}\varepsilon^{3/2}}{54} + \frac{\varepsilon^2}{54} + \dots \quad (31)$$

Система соотношений (27) и (28) позволяет определить основные неизвестные задачи ξ_1 , ξ_2 , ψ и λ_2 .

Таким образом, в работе получена замкнутая система уравнений, описывающая конечномерную модель упругого стержня с учетом нелинейности прогибов и растяжения оси. Для случаев четырех и шести тел замкнутой системы типа “восьмерка” получены условия существования равновесных конфигураций.

1. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.
2. Bolgrabskaya I.A. Stability of permanent rotations of interconnected rigid bodies system with small asymmetry // Multibody System Dynamics. – 2001. – 6. – P. 59–72.
3. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
4. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
5. Бенксэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
6. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечениями // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
7. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // Прикл. математика и механика. – 2014. – 78, вып. 25. – С. 671–680.
8. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
9. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.

N.N. Shchepin

Analysis of equilibrium of a closed system of rigid bodies subject to extension

The closed system in “eight” configuration of the n Lagrange gyroscopes connected with elastic cylindrical and telescopic joints, is considered in this paper in supposition of the lack of exterior forces and moments. Equilibrium positions and values of geometrical parameters for their existence are defined for the system of six and four gyroscopes. Such system can serve as a finite-dimensional model of the elastic rod with plane axis.

Keywords: *system of rigid bodies, stability of equilibrium position, sufficient conditions of stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
shchepin_nick@mail.ru

Получено 10.06.2018