УДК 517.956.223

А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

На примере краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с разрывными на поверхности класса C^∞, и бесконечно дифференцируемыми всюду вне ее коэффициентами в случае, когда правая часть уравнения и заданные на граничной поверхности иповерхности разрыва коэффициентов функции являются обобщенными из пространств $\mathscr{D}'$, демонстрируется метод доказательства разрешимости обобщенной задачи в предположении разрешимости задачи с гладкими данными. Получено представление решения обобщенной задачи сопряжения с помощью функции Грина, исследованы некоторые свойства этого решения.

Задачи сопряжения для дифференциальных уравнений и систем эллиптического и параболического типов в различных функциональных пространствах изучались в [1—12]. Используя методы исследования краевых задач в пространствах обобщенных функций, развитые в работах, например [13, 14], мы доказываем разрешимость задачи сопряжения с заданными внутри области и на поверхностях обобщенными функциями.

Пусть Ω — область в R^n, ограниченная $n-1$-мерной замкнутой поверхностью $\partial\Omega$ класса C^∞. Замкнутая поверхность S класса C^∞ внутри Ω разбивает область на две: $\Omega = \Omega_1 \cup S \cup \Omega_2$, $\partial\Omega_1 = S \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega_2 = S$.

В Ω_i заданы линейные эллиптические дифференциальные операторы второго порядка

$$A_i(x, D) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^{(i)}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x)$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Пусть $B(x, D) = \alpha(x) \frac{\partial}{\partial \nu_1} + \beta(x)$ — граничный дифференциальный оператор на $\partial\Omega$ (здесь и дальше через $\frac{\partial}{\partial \nu_i}$ обозначаем оператор дифференцирования по конормали для A_i, образующей острый угол с внутренней единичной нормалью n к S или $\partial\Omega$, $\alpha(x) = a_1(x)$, $a_i(x) = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}^{(i)}(x) n_l(x)\right)^2\right]^{1/2}$, $i = 1, 2$). На S заданы операторы сопряжения $B_i(x, D)$. Если $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $u_i(x)$ определены в $\overline{\Omega}_i$, то $B_i u = \sum_{j=1}^{2} B_{ij} u_j$, $B_{ij} = B_{ij}(x, D)$ — нормальные дифференциальные операторы первого порядка, $B_{ij} u_j = \alpha_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \nu_j} + \beta_{ij} u_j$, α_{ij}, $\beta_{ij} \in C^\infty(S)$, $i, j = 1, 2$.

Обозначим через $\hat{B}_i, C_i, \hat{C}_i$ $(i = 1, 2)$ дифференциальные операторы (нормальные, первого порядка, определенные на S [11]) такие, что для произвольных $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2)$ имеет место формула Грина

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} (v_i A_i u_i - u_i A_i^* v_i)\, dx = -\int_{\partial\Omega} (v_1 B u_1 - u_1 C v_1)\, dS +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{S} (-B_i u \hat{C}_i v + \hat{B}_i v C_i u)\, dS.$$

Здесь $A_i^*(x, D)$ — сопряженные к $A_i(x, D)$ дифференциальные операторы, $Cv_1 = a_1(x) \frac{\partial v_1}{\partial \nu_1} + (\beta(x) - b^{(1)}(x)) v_1$, $b^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(b_k(x) - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kl}^{(1)}(x)\Big)$.

Введем пространство $X = X(\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2) = \{\overline{\psi}(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2) : \hat{B}_i \psi|_S = 0,\ i = 1, 2;\ C\psi_1|_{\partial\Omega} = 0\}$. Дальше штрихами будем обозначать пространства линейных непрерывных функционалов на соответствующих пространствах, т. е. пространства обобшенных функций (о. ф.), через (φ, F) — действие о. ф. F на основную φ.

Постановка задачи. Пусть $F=(F^1, F^2)\in X'$, $F_1\in(C^\infty(\partial\Omega))'$, $F_2=(F_2^1, F_2^2)$, $F_2^1, F_2^2\in(C^\infty(S))'$. Решением задачи

$$\begin{aligned} &A_i(x, D)\,u_i(x)=F^i, \quad x\in\Omega_i,\\ &B(x, D)\,u_1(x)|_{\partial\Omega}=F_1,\\ &B_i(x, D)\,u(x)|_S=F_2^i, \quad i=1, 2, \end{aligned} \tag{1}$$

называем пару о. ф. $u=(u_1, u_2)\in(C^\infty(\bar\Omega_1\times\bar\Omega_2))'$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{2}(A_i^*\psi_i, u_i)=\sum_{i=1}^{2}(\psi_i, F^i)+(\psi_1, F_1)+\sum_{i=1}^{2}(\hat C_i\psi, F_2^i) \tag{2}$$

для произвольной $\psi\in X$.

Дальше будем предполагать, что решение задачи (1) в случае гладких данных $F_k^i=f_k^i(x)$ существует и единственно. Тогда можно доказать единственность и существование решения обобщенной задачи (1). Заметим, что аналогично доказывается нормальная разрешимость задачи (1) в предположении нормальной разрешимости задачи с гладкими данными.

Доказательство единственности. Если $u(x)$, $v(x)$ — два решения задачи, то $w(x)=(w_1, w_2)=(u_1-u_1, u_2-v_2)$ удовлетворяет, согласно (2), условию

$$\sum_{i=1}^{2}(A_i^*\psi_i, w_i)=0, \quad \forall\psi\in X. \tag{3}$$

Но в соответствии с предположением и [11] для каждой функции $\psi\in C^\infty(\bar\Omega_1\times\bar\Omega_2)$ существует единственное решение $\psi=(\psi_1, \psi_2)$ сопряженной задачи

$$\begin{aligned} &A_i^*\psi_i(x)=\varphi_i(x), \quad x\in\Omega_i,\\ &C\psi_1|_{\partial\Omega}=0, \quad \hat B_i\psi|_S=0, \quad i=1, 2, \end{aligned}$$

т. е. $\psi\in X$.

Поэтому из (3) получаем $\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i, w_i)=0$ для каждой $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)\in C^\infty(\bar\Omega_1\times\bar\Omega_2)$, т. е. $w=(w_1, w_2)=0$ в пространстве $(C^\infty(\bar\Omega_1\times\bar\Omega_2))'$.

Докажем существование решения задачи (1). Аналогично [15] функцией Грина задачи (1) называем пару функций $G(x, y)=(G_1(x, y), G_2(x, y))$, определенных соответственно для $(x, y)\in\bar\Omega_1\times\bar\Omega$ и $(x, y)\in\bar\Omega_2\times\bar\Omega$ и удовлетворяющих условиям

$$A_i^*(x, D)\,G_j(x, y)=\delta_{ij}\delta(x-y), \; x, y\in\Omega_i,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция; δ_{ij} — символы Кронекера,

$$C(x, D)\,G_1(x, y)|_{x\in\partial\Omega}=0, \quad \hat B_i(x, D)\,G(x, y)|_{x\in S}=0, \quad i=1, 2.$$

Тогда решение задачи (1) в случае достаточно гладких $F_k^i=f_k^i(x)$, $k, i=1, 2$, имеет вид

$$u_k(x)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}G_i(y, x)\,f^i(y)\,dy+\int_{\partial\Omega}G_1(y, x)\,f_1(y)\,dS+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_S\hat C_i(y, D)\,G(y, x)\,f_2^i(y)\,ds, \quad x\in\Omega_k, \quad k=1, 2. \tag{4}$$

Существование функции Грина следует из работ [9,11]. Устанавливаем некоторые ее свойства. Умножаем (4) на $A_k^*\psi_k$, $\psi \in X$, интегрируем по Ω_k, суммируем по k, левую часть полученного тождества преобразуем по формуле Грина. Имеем

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\psi_i(y) f^i(y)\,dy+\int_{\partial\Omega}\psi_1(y) f_1(y)\,dS+\sum_{i=1}^{2}\int_{S}\hat{C}_i\psi(y) f_2^i(y)\,dS=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_k(x)\,G_i(y,x)\,dx\Big) f^i(y)\,dy+$$

$$+\int_{\partial\Omega}\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_k(x)\,G_1(y,x)\,dx\Big) f_1(y)\,dS+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{S}\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_k(x)\,\hat{C}_iG(y,x)\,dx\Big) f_2^i(y)\,dS.$$

Теперь учитываем произвольность функций $f_k^i(y)$, $k, i=1,2$, и получаем следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_k(x)\,G_i(y,x)\,dx=\psi_i(y),\quad y\in\Omega_i, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_h(x)\,G_1(y,x)\,dx=\varphi_1(y),\quad y\in\partial\Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}A_k^*\psi_h(x)\,\hat{C}_iG(y,x)\,dx=\hat{C}_i\psi(y),\quad y\in S,\quad i=1,2,$$

для произвольной $\psi\in X$.

Отсюда следует, что для произвольной $\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2)$

$$\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_k(x)\,G_1(y,x)\,dx,\ \sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_h(x)\,G_2(y,x)\,dx\Big)\in X,$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_k(x)\,G_1(y,x)\,dx\in C^\infty(\partial\Omega), \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_h(x)\,\hat{C}_iG(y,x)\,dx\in C^\infty(S),\quad i=1,2,$$

и формулой

$$\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i,u_i)=\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}G_i(y,x)\,\varphi_h(x)\,dx,F^i\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}G_1(y,x)\,\varphi_h(x)\,dx,F_1\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\hat{C}_iG(y,x)\,\varphi_h(x)\,dx,F_2^i\Big) \tag{7}$$

определена о. ф. $u\in(C^\infty(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2))'$ для произвольных $F=(F^1,F^2)\in X'$, $F_1\in(C^\infty(\partial\Omega))'$, $F_2^1, F_2^2\in(C^\infty(S))'$.

Если в (7) заменить $\varphi_h(x)$ на $A_k^*\psi_h(x)$ и учесть (5), то получим (2). Таким образом доказана следующая

Теорема 1. Если однозначно разрешима задача (1) для достаточно гладких $F_k^i = f_k^i(x)$, то существует и единственно решение обобщенной задачи (1), оно определяется формулой (7), где $G(x, y)$ — вектор-функция Грина задачи.

Обозначим через $\partial\Omega_\varepsilon$ поверхность класса C^∞, расположенную внутри Ω на расстоянии ε от нее, аналогично через S_{ε_i} — поверхности класса C^∞ внутри Ω_i, расположенные на расстоянии ε_i от S, $i = 1, 2$. Если $\varphi(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$, то $\varphi(x^\varepsilon) = \varphi(x + \varepsilon n(x)) \in C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$, аналогично $\varphi(x - \varepsilon n(x)) \in C^\infty(S_{\varepsilon_1})$, $\varphi(x + \varepsilon n(x)) \in C^\infty(S_{\varepsilon_2})$, если $\varphi(x) \in C^\infty(S)$. Имеет место

Теорема 2. Пусть $F^i = 0, i = 1, 2$; $F_1 \in (C^\infty(\partial\Omega))'$; $F_2^1, F_2^2 \in (C^\infty(S))'$. Решение задачи (1) в смысле (2) эквивалентно нахождению функций $u_i(x) \in C^\infty(\Omega_i)$, удовлетворяющих уравнениям

$$A_i(x, D)\, u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \tag{8}$$

и условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, Bu(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = (\varphi, F_1) \tag{9}$$

для произвольной $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ и

$$\sum_{j=1}^{2} \lim_{\varepsilon_j \to 0} \int_{S_{\varepsilon_j}} \varphi(x_{\varepsilon_j})\, B_{ij} u_j(x_{\varepsilon_j})\, dS_{\varepsilon_j} = (\varphi, F_2^i) \tag{10}$$

для произвольной $\varphi \in C^\infty(S)$, $i = 1, 2$.

Необходимость доказывается по той же схеме, что и соответствующее утверждение в [5], достаточность — с помощью представления решения задачи (8) — (10) в виде

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{2} (G_i(y, x), F^i) + (G_1(y, x), F_1) + \sum_{i=1}^{2} (\hat{C}_i G(y, x), F_2^i), \quad x \in \Omega_k,$$

$$k = 1, 2.$$

Например, как в [16], проводим исследование поведения решения задачи (8)—(10) вблизи поверхностей $\partial\Omega$ и S.

Пусть $\rho(x)$ — бесконечно дифференцируемая в $\overline{\Omega}$ функция, сравнимая по порядку с расстоянием от точки $x \in \Omega$ до поверхностей $\partial\Omega$ и S вблизи их.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принимает обобщенные граничные значения F на $\partial\Omega$ (S), если она удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon (S_\varepsilon)} \varphi(x_\varepsilon)\, u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = (\varphi, F)$$

для произвольной $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ $(\varphi \in C^\infty(S))$. Аналогично $Bu(x)$ принимает обобщенные граничные значения $F \in (C^\infty(\partial\Omega))'$ на $\partial\Omega$, если выполняется (9) для произвольной $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$.

Теорема 3. Решения $u_k(x)$, $k = 1, 2$, уравнений (8) принимают на $\partial\Omega$ и S обобщенные граничные значения тогда и только тогда, когда существует положительное число m такое, что конечны интегралы $\int_{\Omega_k} \rho^m(x)\, |u_k(x)|\, dx$, $k = 1, 2$.

Аналогичные результаты имеют место для общих эллиптических и параболических задач сопряжения в пространствах обобщенных функций.

1. *Березовский А. А. и др.* Задачи на сопряжение для уравнений параболического типа // Киев, 1985.— 24 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т математики, № 82).

2. *Житарашу Н. В.* О постановке и разрешимости общих параболических граничных задач сопряжения в пространствах обобщенных функций // Мат. исслед.— 1985.— 80.— С. 74—85.
3. *Ильин В. А.* О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1961.— **137**, № 1.— С. 28—30.
4. *Костарчук Ю. В.* Формула Грина и теоремы об изоморфизмах для общих эллиптических граничных задач с разрывными коэффициентами без предположения нормальности граничных условий и условий сопряжения // Укр. мат. журн.— 1976.— **28**, № 2.— С. 194—202.
5. *Лионс Ж.- Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
6. *Львин С. Я.* Задача трансмиссии для общих эллиптических систем : Формула Грина и разрешимость // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 10.— С. 1749—1754.
7. *Олейник О. А.* Решение основных краевых задач для уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1959.— **124**, № 6.— С. 1219—1222.
8. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1961.— **25**, № 1.— С. 3—20.
9. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Об уравнениях эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1962.— **146**, № 6.— С. 1275—1278.
10. *Чан Дык Ван, Корзюк В. И.* Нормальная разрешимость задач сопряжения эллиптических уравнений // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978.— № 6.— С. 30—36.
11. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1965.— **6**, № 3.— С. 636—668.
12. *Schechter M.* A generalization of the problem of transmission // Ann. Sc. Norm. Super Pisa.— 1960.— **14**.— P. 207—236.
13. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения эллиптической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 3.— С. 518—521.
14. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 795—798.
15. *Zauderer E.* Partial Differential Equations.— New York, 1985.
16. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* О граничных значениях решений линейной однородной параболической системы в пространстве обобщенных функций // Киев, 1987.— 11, с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 427—Ук87.

Львов. гос. ун-т им. Ив. Франко Получено 29.09.87