УДК 517.954+517.956.227

В. А. Михайлец

К ТЕОРИИ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В пространстве $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, рассмотрено формально самосопряженное эллиптическое дифференциальное выражение порядка $2m$. Для минимального оператора найден конкретный вид позитивного пространства граничных значений. С его помощью описаны классы всех самосопряженных и корректно разрешимых краевых задач. Установлены теоремы о глобальном повышении гладкости решений. Для общих самосопряженных задач изучено асимптотическое распределение собственных значений (порядковые оценки, старший член, оценки остатка), а также исследована $L_p(\Omega)$-сходимость спектральных разложений.

Введение. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ. Рассмотрим в Ω формально самосопряженное правильно эллиптическое дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с комплексными коэффициентами $a_\alpha(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Оно задает в пространстве $L_2(\Omega)$ минимальный и максимальный операторы $A_{\min}$ и $A_{\max}$. Обозначим через $\{\mathcal{A}, \Omega\}$ множество общих граничных задач для $\mathcal{A}(x, D)$ в $L_2(\Omega)$

$$\tilde{A} \in \{\mathcal{A}, \Omega\} \Leftrightarrow [A_{\min} \subseteq \tilde{A} \subseteq A_{\max},\ \tilde{A} = \bar{\tilde{A}}].$$

Пусть $\operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ и $\operatorname{self}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ — подмножества $\{\mathcal{A}, \Omega\}$, состоящие соответственно из корректно разрешимых и самосопряженных в $L_2(\Omega)$ операторов.

Ниже опишем множества $\{\mathcal{A}, \Omega\}$, $\operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\}$, $\operatorname{self}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ с помощью содержащих параметр краевых условий «канонического» вида. Это описание отличается от имеющихся в [1 — 4] и ближе всего к [3]. Основное содержание работы составляют критерии того, что 1) для $\tilde{A} \in \operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\}$

$$[\tilde{A}u \in W_2^a(\Omega)] \Rightarrow [u \in W_2^{a+s}(\Omega)],\ a \geqslant 0,\ s \in (0, 2m];$$

2) для $\tilde{A} \in \operatorname{self}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ справедлива одна из следующих асимптотических формул для функции распределения собственных значений:

$$N(\lambda; \tilde{A}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\lambda^\alpha),\ \alpha \geqslant \dfrac{n}{2m}; \\ o(\lambda^\alpha),\ \alpha > \dfrac{n}{2m}; \\ \varpi\lambda^{\frac{n}{2m}}(1 + o(1)); \\ \varpi\lambda^{\frac{n}{2m}}(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{\delta}{2m}})),\ \delta \in (0, 1); \\ \varpi\lambda^{\frac{n}{2m}}(1 + o(\lambda^{-\frac{\delta}{2m}})),\ \delta \in (0, 1). \end{cases}$$

По методике работа примыкает к [1 — 5].

1. Общие краевые задачи. Пусть

$$\mathcal{B}_j(x, D) = \sum_{|h| \leqslant m_j} b_{jh}(x) D^h$$

заданная на Γ система m граничных операторов с гладкими коэффициентами такая, что задача

$$\mathcal{A}(x, D)u = f(x),\ x \in \Omega,$$

$$\mathcal{B}_j(x, D)u = g_j(x),\ x \in \Gamma,$$

является регулярной эллиптической задачей [6, с. 138]. Тогда для функций $u(x)$, $v(x) \in W_2^{2m}(\Omega)$ справедлива формула Грина [6, с. 139]

$$\int_\Omega (\mathcal{A}u\bar{v} - u\overline{\mathcal{A}^+v})\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma (S_j u \overline{C_j v} - \mathcal{B}_j u \overline{T_j v})\,d\sigma,$$

где $\{S_j\}$, $\{T_j\}$, $\{C_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ — некоторые нормальные системы граничных дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами.

Будем предполагать, что

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := A_{\max} \upharpoonright \{u \in W_2^{2m}(\Omega) : \mathcal{B}_j u|_\Gamma = 0\} \in \operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\} \cap \operatorname{self}\{\mathcal{A}, \Omega\}.$$

Теорема 1 (ср. с. [3]). Набор $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, в котором

$$\mathcal{H} = L_2(\Gamma)^m,$$

$$\Gamma_2 u = \{l^{-\frac{1}{2}} C_0 u, l^{-\frac{3}{2}} C_1 u, \ldots, l^{-m+\frac{1}{2}} C_{m-1} u\},$$

$$\Gamma_1 u = \{l^{\frac{1}{2}} S_0 v, l^{\frac{2}{3}} S_1 v, \ldots, l^{m-\frac{1}{2}} S_{m-1} v\},$$

где $v := (\mathcal{A}, \mathcal{B})^{-1} \mathcal{A}(x, D)\,u$, $l = (1 - \Delta_\Gamma)^{\frac{1}{2}}$, Δ_Γ — оператор Лапласа—Бельтрами на многообразии Γ, образует позитивное пространство граничных значений симметрического в $L_2(\Omega)$ оператора $A_{\min}$. Определение позитивного пространства граничных значений см. в [7; 8, с. 163].

Замечание. Если $\operatorname{ord} B_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, то формулу Грина можно записать в более простом симметрическом виде [6, с. 145]:

$$\int_\Omega (u \cdot \overline{\mathcal{A}v} - \mathcal{A}u \cdot \bar{v})\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma (B_j u \overline{\Phi_j v} - \Phi_j v \overline{B_j v})\,d\sigma.$$

Именно такой вариант формулы Грина использовался в [3]. Другое отли чие наших формул от [3] состоит в выборе оператора l. Из теоремы 1 и результатов [9, 10] автоматически вытекает описание множества $\{\mathcal{A}, \Omega\}$ как множества сужений оператора $A_{\max}$ на функции, которые удовлетворяют «каноническому» граничному условию вида

$$P\Gamma_2 u - B\Gamma_1 u = 0,$$

где играющие роль параметров линейные операторы P и B в пространстве $L_2(\Gamma)^m$ удовлетворяют некоторым условиям (см. [9, 10]). Множество $\operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ допускает более простое описание.

Теорема 2. Каждый оператор $\tilde{A} \in \operatorname{corr}\{\mathcal{A}, \Omega\}$ совпадает с сужением оператора $A_{\max}$ на множество функций, удовлетворяющих граничному условию

$$\Gamma_B u := \Gamma_2 u - B\Gamma_1 u = 0 \tag{1}$$

с некоторым ограниченным линейным оператором B в пространстве $L_2(\Gamma)^m$. Обратно, сужение оператора $A_{\max}$ на $\ker \Gamma_B$ определяет корректно разрешимое расширение A_B оператора $A_{\min}$. Соответствие между операторами B в граничном условии (1) и корректно разрешимыми краевыми задачами взаимно однозначно.

2. Регулярность решений. Хорошо известно, что каждое обобщенное решение уравнения

$$\mathcal{A}(x, D)\,u = h(x) \in L_2(\Omega)$$

принадлежит классу $W_2^{2m}(\Omega, \mathrm{loc})$, а если $h(x) \in W_2^a(\Omega)$, $a > 0$, то $u(x) \in W_2^{a+2m}(\Omega, \mathrm{loc})$. Для того чтобы функция $u(x)$ принадлежала соответствующему классу дифференцируемых функций во всей области, необходимо наложить на $u(x)$ некоторые подходящие краевые условия. Следующая теорема показывает, какие общие краевые условия вида (1) являются «подходящими», а какие нет.

Теорема 3.

1) Для того чтобы при каждом $h(x) \in L_2(\Omega)$ решение уравнения

$$A_B u = h \tag{2}$$

принадлежало классу $W_2^s(\Omega)$, $s \in (0, 2m]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$R(B) \subseteq W_2^s(\Gamma)^m.$$

2) Для того чтобы при каждом $h(x) \in W_2^a(\Omega)$, $a > 0$, решение уравнения (2) принадлежало классу $W_2^{a+s}(\Omega)$, $s \in (0, 2m]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$BW_2^a(\Gamma)^m \subseteq W_2^{a+s}(\Gamma)^m.$$

Отметим, что некоторые классы дифференциальных и псевдодифференциальных краевых условий с «потерей гладкости» у решений рассматривались ранее в [11—13]. Теорема 3 дает ответ на вопрос, поставленный А. А. Дезиным в [14, с. 193].

3. Самосопряженные задачи. Из самосопряженности оператора $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и результатов [9] следует, что $A_B^* = A_{B^*}$. Так что краевая задача A_B является самосопряженной тогда и только тогда, когда $B = B^*$. Спектр оператора A_B, вообще говоря, не дискретен. Условие его дискретности равносильно компактности оператора B в пространстве $L_2(\Gamma)^m$.

Пусть $A_{\min} > 0$ и $\operatorname{ord} \mathcal{B}_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. В этом случае оператор A_B положителен в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $B = B^* \geqslant 0$. Положим для $A_B > 0$

$$D[A_B] := D(A_B^{\frac{1}{2}}).$$

Теорема 4. Справедливо утверждение

$$[D[A_B] \subseteq W_2^{\frac{s}{2}}(\Omega)] \Leftrightarrow [R(B^{\frac{1}{2}}) \subseteq W_2^{\frac{2}{2}}(\Gamma)^m], \ s \in (0, 2m].$$

Замечание. Операторы A_B не исчерпывают всего множества $\operatorname{self}\{\mathcal{A}, \Omega\}$. Оно однозначно описывается граничным условием вида

$$(U - 1)\Gamma_2 u - i(U + 1)\Gamma_1 u = 0,$$

где операторный параметр U пробегает множество всех унитарных операторов в пространстве $L_2(\Gamma)^m$. Подробности можно найти в [8, 9].

4. Асимптотика спектра. Для функции распределения собственных значений оператора $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ доказано [15], что

$$N(\lambda) = w\lambda^{\frac{n}{2m}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{n-1}{2m}}), \ \lambda \to \infty, \tag{3}$$

где постоянная $w = w(\mathcal{A}, \Omega)$ определяется известным образом. Применительно к самосопряженным операторам A_B формула (3), вообще говоря, не верна. Можно показать, что какова бы ни была положительная функция $M(\lambda) \uparrow \infty$, $\lambda \to \infty$, найдется компактный оператор $B = B^* \geqslant 0$ такой, что

$$\infty > N(\lambda; A_B) \geqslant M(\lambda), \ \lambda > 0.$$

Положим $n(\lambda; B) := \operatorname{card}\{k : |\lambda_k(B)| \geqslant \lambda^{-1}\}$.

Теорема 5. Справедливы утверждения:

$$1)\ [n(\lambda; B) = \mathcal{O}(\lambda^\alpha)] \Leftrightarrow N(\lambda; A_B) = \begin{cases} \mathcal{O}(\lambda^\alpha), & \alpha \geqslant \frac{n}{2m}; \\ w\lambda^{\frac{n}{2m}} + \mathcal{O}(\lambda^\alpha), & \alpha \in \left(\frac{n-1}{2m}, \frac{n}{2m}\right); \end{cases}$$

$$2)\ [n(\lambda;\ B) = o(\lambda^{\alpha})] \Leftrightarrow N(\lambda;\ A_B) = \begin{cases} o(\lambda^{\alpha}), & \alpha > \dfrac{n}{2m}; \\ \omega\lambda^{\frac{n}{2m}}(1 + o(1)), & \alpha = \dfrac{n}{2m}; \\ \omega\lambda^{\frac{n}{2m}} + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha}), & \alpha \in \left(\dfrac{n-1}{2m}, \dfrac{n}{2m}\right). \end{cases}$$

Из теорем 5, 3 и известной оценки сингулярных чисел операторов, повышающих гладкость, вытекает

Следствие [*16*]. Если для самосопряженного оператора A_B

$$D(A_B) \subseteq W_2^s(\Omega),\ s \in (0, 2m), \tag{4}$$

то

$$N(\lambda;\ A_B) = \begin{cases} \mathcal{O}(\lambda^{\frac{n-1}{s}}), & s \leqslant 2m(n-1)/n; \\ \omega\lambda^{\frac{n}{2m}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{n-1}{s}}), & s > \dfrac{2m(n-1)}{n}. \end{cases}$$

Используя дополнительно теорему 4 для положительного оператора A_B, условие (4) можно заменить на

$$D[A_B] \subseteq W^{\frac{s}{2}}(\Omega),\ s \in (0, 2m).$$

5. **Сходимость спектральных разложений.** Из спектральной теоремы для общих самосопряженных операторов следует, что на функциях $f(x) \in L_2(\Omega)$

$$\| (E_{(\lambda,\mu)}(A_B) f)(x) - f(x) \|_{L_2(\Omega)} \to 0, \tag{5}$$

когда $\lambda \to -\infty$, $\mu \to +\infty$. Налагая дополнительные условия на оператор и функции, можно добиться, чтобы предельное соотношение (5) выполнялось в более сильном смысле.

Пусть Ξ — направленность ограниченных борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, упорядоченная отношением теоретико-множественного включения.

Определение. Будем говорить, что спектральное разложение (отвечающее заданному неограниченному самосопряженному в $L_2(\Omega)$ оператору) функции $f(x) \in L_p(\Omega)$ безусловно $L_p(\Omega)$ — сходится, если направление $\{E_\Delta f : \Delta \in \Xi\}$ сходится в пространстве $L_p(\Omega)$ к функции $f(x)$.

Для операторов с полной в $L_2(\Omega)$ системой собственных подпространств безусловная $L_p(\Omega)$-сходимость равносильна сходимости в пространстве $L_p(\Omega)$ ортогонального ряда, которым задается спектральное разложение, при любой перестановке его членов.

Теорема 6. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$, $p > 2$, $2mk \geqslant n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ и

$$D(A_B^k) \subseteq W_2^{2mk}(\Omega).$$

Для функций $f(x) \in \overset{0}{W}{}_2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(\Omega)$ спектральные разложения безусловно $L_p(\Omega)$-сходятся.

7. **Задачи типа дифракционных.** Рассмотрим более общий случай, когда открытое множество Ω не является областью. Пусть $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Omega_k$, где связные компоненты $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ ограничены гладкой границей,

$$\mathcal{A}(x, D) = \mathcal{A}_k(x, D),\ x \in \Omega_k,\ k = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\mathcal{A}_k(x, D)$ — формально самосопряженное эллиптическое в $\overline{\Omega}_k$ дифференциальное выражение с гладкими в $\overline{\Omega}_k$ коэффициентами. Нетрудно убедиться, что тогда

$$L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{N} L_2(\Omega_k), \; A_{\min} = \bigoplus_{k=1}^{N} A_{\min}(k), \;\; A_{\max} = \bigoplus_{k=1}^{N} A_{\max}(k), \tag{7}$$

где $A_{\min}(k)$ и $A_{\max}(k)$ — минимальный и максимальный операторы дифференциального выражения $\mathcal{A}_k(x, D)$ в пространстве $L_2(\Omega_k)$. Из определения позитивного пространства граничных значений и формул (7) следует, что для оператора $A_{\min}$ его можно взять в виде

$$(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2) = (\bigoplus_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k, \bigoplus_{k=1}^{N} \Gamma_1(k), \bigoplus_{k=1}^{N} \Gamma_2(k)),$$

где $(\mathcal{H}_k, \Gamma_1(k), \Gamma_2(k))$ — построенное нами в теореме 1 позитивное пространство граничных значений симметрического оператора $A_{\min}(k)$. Это пространство отвечает сомосопряженной корректно разрешимой граничной задаче $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \bigoplus_{k=1}^{\sim} (\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$, что позволяет (с очевидными изменениями) распространить утверждение теорем 1—5 на случай дифференциального выражения (6).

1. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1952.— 1.— С. 187—246.
2. *Grubb G.* A charasterisation on non-local boundary value problems associated with an elliptic operators // Ann. Sci. Norm. Super. Pisa.— 1968.— 22, N 3.— P. 425—513.
3. *Горбачук В. И.* О граничных задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 1.— С. 7—11.
4. *Мамян А. Х.* О некоторых свойствах множества граничных задач // Мат. сб.— 1983.— 121, № 3.— С. 370—380.
5. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Там же.— 1956.— 38, № 4.— С. 431—450.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 3.— С. 168—171.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1984.— 283 с.
9. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференциальных операторов.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1980.— С. 106—131.
10. *Вайнерман Л. И.* О расширениях замкнутых операторов в гильбертовом пространстве // Мат. заметки.— 1980.— 28, № 6.— С. 833—841.
11. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems // Ann. Math.— 1966.— 83, N 1.— P. 129—209.
12. *Вайнберг Б. Р., Грушин В. В.* О равномерно неэллиптических задачах I, II // Мат. сб.— 1967.— 72, № 4.— С. 602—636; 73, № 1.— С. 126—154.
13. *Сакс Р. С.* Слабоэллиптические краевые задачи // Дифференциальные уравнения с частными производными.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1980.— С. 57—78.
14. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М.: Наука, 1980.— 208 с.
15. *Васильев Д. Г.* Асимптотика спектра краевой задачи // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1986.— 49.— С. 167—237.
16. *Михайлец В. А.* Асимптотика спектра эллиптических операторов и граничные условия // Докл. АН СССР.— 1982.— 266, № 5.— С. 1059—1062.

Ин-т математики АН УССР,
Киев

Получено 28.09.87