

Том 26
Донецк, 2013

Основан в 1997г.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Е.С. Афанасьева</i> Граничное поведение континуально кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модулей в метрических пространствах	3
<i>В.Н. Беловодский, М.Ю. Сухоруков</i> Метод гармонического баланса применительно к построению бифуркационных диаграмм колебательных систем с полиномиальной нелинейностью	12
<i>Н.В. Брадул</i> Задача оптимальной фильтрации	21
<i>М.Б. Віра</i> Про побудову асимптотичного розв'язку крайової задачі для лінійної вироджуваної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку	31
<i>Н.П. Волчкова</i> Об одной теореме Смита и ее обобщениях	40
<i>Я.В. Гончаренко, Ю.І. Жихарева, М.В. Працьовитий</i> Властивості розподілу випадкової підсуми знакододатного ряду Люрота з незалежними доданками	46
<i>А.В. Делюкина, Вит.В. Волчков</i> Теоремы о среднем для неинвариантных задач в теории аналитических функций	58
<i>И.Л. Иванов</i> Об управлении энергосистемами в условиях импульсного воздействия	67
<i>A.A. Kovalevsky, Yu.S. Gorban</i> Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1 -data	76
<i>Ю.С. Коломойцев</i> О неравенствах типа Бернштейна для дробных производных в классах $\varphi(L)$	95
<i>І.Г. Крикун</i> Аналог явища Пеано для стохастичних рівнянь з локальним часом	104
<i>Ю.Н. Кононов, Н.В. Киселева</i> Исследование влияния дополнительных тонов колебаний жидкости на устойчивость вращения несимметричного твердого тела с жидкостью	113

<i>Т.В. Ломако</i> Локальные свойства регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа	120
<i>М.М. Николишин, В.К. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян</i> Розтяг кусково-однорідної пластини з ненаскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів та урахуванням пластичних зон по фронту тріщини	130
<i>О.А. Очаковская</i> Аналог проблемы Ватсона для функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам	139
<i>Е.А. Петров</i> Сохраняющие шары отображения конечных ультраметрических пространств	150
<i>М.В. Працьовитий, Н.А. Василенко</i> Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій	159
<i>О.А. Rudakova</i> On the convergence of solutions of the variational problems with integral constraints and degeneration in variable domains	172
<i>R. Salimov, O. Afanas'eva</i> About some mappings in $\lambda(r)$ -regular metric spaces	181
<i>Е.А. Севостьянов</i> Об инъективности локальных кольцевых Q -гомеоморфизмов при $n > 3$	187
<i>А.С. Сенченко</i> О дистрибутивности в табличных алгебрах операции насыщения относительно операций объединения и пересечения	197
<i>В.В. Скобелев</i> Проблема проверки выполнимости формул разрешимых теорий (обзор)	205
<i>С.Н. Судаков</i> Уравнения Гамильтона плоского движения жидкого эллипсоида и сферически симметричного твердого тела	222
<i>Б.В. Успенский, К.В. Аврамов</i> К нелинейным нормальным формам свободных колебаний кусочно-линейных систем	232

УДК 517.5

©2013. Е. С. Афанасьева

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КONTИНУАЛЬНО КОЛЬЦЕВЫХ Q -ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО p -МОДУЛЕЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной работе исследуется проблема продолжения на границу континуально кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модулей между областями в метрических пространствах с мерами. В частности, для квазиконформных отображений в метрических пространствах сформулированы условия на границы континуальных областей, при которых допускается непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу таких отображений.

Ключевые слова: метрические пространства с мерами, континуально кольцевые Q -гомеоморфизмы, квазиконформные отображения, p -модули.

1. Введение. В данной статье мы продолжаем изучение граничного поведения отображений в метрических пространствах с мерами, начатое в работе [18]. Развивая технику p -модулей, $p \in (0, \infty)$, применительно к семействам континуумов в метрических пространствах, мы строим теорию граничного поведения континуально кольцевых Q -гомеоморфизмов, обладающих геометрическим свойством вида (4), строгое определение которых будет дано в п.2. Отметим, что поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ относительно p -модуля при $p \neq n$ во внутренних точках области исследовалось в работе [17]. Там же был приведен критерий принадлежности таких отображений классу кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля. Отметим также, что если в (4) функцию Q считать ограниченной п.в. некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$, а в качестве метрического пространства выбрать n -мерное евклидовое пространство и $p = n$, то мы приходим к классическим квазиконформным отображениям, которые были впервые введены в работах Грётча, Лаврентьева и Морри. Фактически, изучение кольцевых Q -гомеоморфизмов началось с модульного неравенства (2.5) в [3], которое положило начало развитию теории Q -гомеоморфизмов, а впоследствии также и кольцевых Q -гомеоморфизмов.

Прежде, чем сформулировать основной результат работы, напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества. Напомним также, что топологическое пространство T называется *локально связным*, если для любой его точки x_0 и любой ее окрестности U найдется ее связная окрестность $V \subseteq U$. Компактные связные хаусдорфовы пространства называются *континуумами*. Напомним, что топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любой пары точек найдутся их взаимно непересекающиеся окрестности. В дальнейшем для любых множеств A ,

Автор благодарит член-корр. НАН Украины, д.ф.-м.н., профессора В.Я. Гутлянского за интересные обсуждения и ценные замечания.

B и C в топологическом пространстве T через $\Gamma(A, B; C)$ обозначаем семейство всех континуумов γ , соединяющих A и B в C , т.е. таких, что $\gamma \cap A \neq \emptyset$, $\gamma \cap B \neq \emptyset$ и $\gamma \setminus \{A \cup B\} \subseteq C$.

Пространство T будем называть *континуально связным*, если любую пару его точек можно погрузить в континуум γ в T . Под *континуальной областью* в топологическом пространстве T будем понимать открытое континуально связное множество D . Также пространство T будем называть *локально континуально связным* в точке x_0 , если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$, которая является континуальной областью в T . Пространство T будем называть *континуально связным* в точке x_0 , если для любой ее окрестности U найдется ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \setminus \{x_0\}$ является континуальной областью, ср. [13], с. 274. Наконец, континуальную область D будем называть *континуально связной в точке $x_0 \in \partial D$* , если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ этой точки такая, что $V \cap D$ является континуальной областью.

Основной целью данной статьи является доказательство следующей теоремы о непрерывном продолжении на границу отображения, обратного к континуально кольцевому Q -гомеоморфизму.

Теорема 1. Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с борелевскими мерами μ и μ' , соответственно. Пусть также D континуально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ – компакт, D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$, а $f : D \rightarrow D'$ – континуально кольцевой Q -гомеоморфизм относительно p -модуля с $Q \in L^1_\mu(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1} : D' \rightarrow D$ допускает непрерывное продолжение $\bar{g} : \overline{D'} \rightarrow \overline{D}$.

2. Определения и предварительные результаты. Далее H^k , $k \in [0, \infty)$, обозначает k -мерную меру Хаусдорфа множества A в метрическом пространстве (X, d) . Точнее, пусть A множество в (X, d) . Тогда полагаем

$$H^k(A) := \sup_{\varepsilon > 0} H^k_\varepsilon(A), \quad H^k_\varepsilon(A) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } A_i)^k,$$

где инфимум берётся по всем покрытиям A множествами A_i с $\text{diam } A_i < \varepsilon$, см., напр., [9]. Напомним, что $\text{diam } A_i = \sup_{x, y \in A_i} d(x, y)$. Как известно, если для некоторого множества A и $k_1 \geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$, см., напр., разд. 1 в гл. VII в [9]. В связи с этим вводится величина

$$\dim_H A := \sup_{H^k(A) > 0} k, \quad (1)$$

которая называется *хаусдорфовой размерностью* множества A .

В дальнейшем говорим, что континуум в метрическом пространстве (X, d) является k -спрямляемым, если его мера Хаусдорфа H^k конечна. 1-спрямляемые континуумы γ будем называть просто *спрямляемыми континуумами* или континуумами *конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ – *длиной* γ . Фугледе рассматривал системы мер в

абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой, см., напр., [20]. Нами будут рассмотрены системы борелевских мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X, d) . Именно, мера $m_\gamma^{(k)}$, ассоциированная с континуумом γ в (X, d) , определяется для каждого борелевского множества B в (X, d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B \cap \gamma$ при фиксированном $k > 0$. В дальнейшем, для любого континуума $\gamma \in \Gamma$ мера $m_\gamma := m_\gamma^{(1)}$.

Пусть теперь (X, d, μ) – метрическое пространство с борелевой мерой μ . Неотрицательную μ -измеримую функцию $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ называем *допустимой* для семейства континуумов Γ в (X, d) , пишем $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_X \rho \, dm_\gamma \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (2)$$

p -модуль, $0 < p < \infty$, семейства Γ континуумов γ в (X, d, μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_X \rho^p(x) \, d\mu(x). \quad (3)$$

Здесь мы доопределим $M_p(\Gamma) = +\infty$, если $\Gamma = \emptyset$.

Определение континуально кольцевого Q -гомеоморфизма. Пусть D и D' – континуальные области в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') , соответственно, $Q : X \rightarrow (0, \infty)$ – μ -измеримая функция и $p \in (0, \infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ является *континуально кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in \overline{D}$ относительно p -модуля*, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0), f(C_1); D')) \leq \int_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^p(d(x, x_0)) \, d\mu(x) \quad (4)$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) := \{x_0 \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой борелевой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) \, dr \geq 1. \quad (5)$$

Наконец, говорим, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ есть *континуально кольцевой Q -гомеоморфизм*, если f является континуально кольцевым Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$. Данное выше определение мотивировано кольцевым определением квазиконформности в $\mathbb{R}^n$, $n = 3$, введенного Герингом в [7]. Впервые кольцевые Q -гомеоморфизмы были введены в работе [16] в связи с исследованием уравнения Бельтрами с вырождением условия строгой эллиптичности.

Пространство (X, d, μ) называется α -регулярным по Альфорсу, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq Cr^\alpha \quad (6)$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \text{diam } X$. Как известно, α -регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α , см., напр., [21], с. 61. Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α -регулярно для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α -регулярно сверху в точке $x_0 \in X$* , если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq Cr^\alpha \quad (7)$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (7) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Будем говорить, что семейство континуумов Γ_1 из произвольного топологического пространства T *минорируется* семейством континуумов Γ_2 из T , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждого континуума $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует континуум $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такой, что γ_2 является подконтинуумом γ_1 , т.е. $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$.

Лемма 1. Пусть Ω – открытое множество в топологическом пространстве T . Тогда

$$\Gamma(\Omega, T \setminus \Omega; T) > \Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть Γ_1 – семейство континуумов γ , соединяющих Ω и $T \setminus \Omega$ в T , и пусть Γ_2 – семейство континуумов γ^* , соединяющих Ω и $\partial\Omega$ в Ω . Прежде всего заметим, что $\bar{\Omega}$ – замкнутое множество и, следовательно, множества $E_\gamma = \bar{\Omega} \cap \gamma$, $\gamma \in \Gamma_1$ – компакты, поскольку γ – континуумы, см., напр., предложение I.9.3 в [5]. Компоненты связности E_γ являются замкнутыми попарно непересекающимися множествами, см., напр., теорему 5.46.III.1 в [12], и, следовательно, взаимно непересекающимися континуумами, см., также предложение I.9.3 в [5]. Хотя бы одна из них E_0 содержит точку из Ω . Эта компонента связности E_0 обязана также, по теореме Янишевского, содержать точку $\partial\Omega$, см., напр., теорему 47.III.1 в [12].

Таким образом, найден подконтинуум E_0 исходного континуума $\gamma \in \Gamma_1$, который лежит в $\bar{\Omega}$ и соединяет Ω с $\partial\Omega$, т.е. $E_0 \in \Gamma_2$ и, следовательно, $\Gamma_1 > \Gamma_2$. $\square$

Лемма 2. Пусть γ – *спрямляемый континуум* в метрическом пространстве (X, d) , соединяющий точки $x_1 \in \overline{B(x_0, r_1)}$ и $x_2 \in X \setminus B(x_0, r_2)$, где $x_0 \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и пусть $\eta : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – борелева функция. Тогда

$$\int_{\gamma} \eta(d(x, x_0)) dm_{\gamma} \geq \int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr. \quad (9)$$

Доказательство. По неравенству треугольника, для любых точек y_1 и $y_2 \in X$,

$$d(y_1, y_2) + d(y_1, x_0) \geq d(y_2, x_0)$$

и

$$d(y_1, y_2) + d(y_2, x_0) \geq d(y_1, x_0),$$

т.е.

$$d(y_1, y_2) \geq |d(y_1, x_0) - d(y_2, x_0)|. \quad (10)$$

Заметим, что функция $d(x, x_0)$ каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число в $\mathbb{R}^+$ и ввиду (10) при этом отображении длина множества не возрастает. Напомним также, что по свойству Дарбу о связных множествах непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ , см., напр., следствие 5.46.3а в [12]. Следовательно,

$$dH^1 \geq dr, \quad (11)$$

где $r = d(x, x_0)$, $dr = \Delta r$ и dH^1 – длина той части континуума γ , которая расположена в кольце $\{x \in X : r \leq |x - x_0| < r + \Delta r\}$. Таким образом, неравенство (9) следует из (11). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности, из неравенства (9) следует, что для любого континуума γ

$$H^1(\gamma) \geq \text{diam } \gamma. \quad (12)$$

Однако, неравенство вида

$$H^k(\gamma) \geq [\text{diam } \gamma]^{\alpha_k} \quad (13)$$

не имеет места для невырожденных континуумов ни при каком другом k , кроме $k = 1$, и ни при каком $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Действительно, при $k < 1$ по теореме VII.2 в [9] $1 > \dim_H \gamma \geq \dim \gamma = 0$, где $\dim \gamma$ – топологическая размерность γ , т.е. γ – полностью разрывное множество, см. II.4.D в [9]. Однако, последнее противоречит тому, что γ – невырожденный континуум. Если $k > 1$, неравенство (12) также не выполняется, как показывает следующий контрпример. Пусть $I = [0, 1]$. Очевидно, что $H^1(I) = 1 < \infty$ и потому $H^k(I) = 0$ для любого $k > 1$, см. разд. 1 гл. VII в [9], а $\text{diam } I = 1$, т.е. (13) не выполнено для простейшего континуума I .

Границу ∂D континуальной области D будем называть *континуально слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p -модуля*, $p \in (0, \infty)$, если для любого числа $N > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq N \quad (14)$$

для любых континуумов E и F в D , пересекающих ∂U и ∂V . Далее ∂D будем называть *континуально сильно достижимой* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 , найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq \delta \quad (15)$$

для любого континуума F в D , пересекающего ∂U и ∂V , ср. [15].

Наконец, ∂D называется *континуально сильно достижимой* относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$, и *континуально слабо плоской* относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Лемма 3. Пусть D – континуальная область в (X, d, μ) . Если ∂D – континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$, то D континуально связна в x_0 .

Доказательство. Предположим, что D не является континуально связной в точке x_0 . Тогда найдется $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$ такое, что $\mu_0 := \mu(D \cap B(x_0, r_0)) < \infty$, и для любой окрестности $V \subseteq U := B(x_0, r_0)$ точки x_0 выполняется одно из следующих условий:

1. $V \cap D$ имеет по меньшей мере две связные компоненты K_1 и K_2 такие, что $x_0 \in \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$;
2. $V \cap D$ имеет бесконечное число связных компонент $K_1, \dots, K_m, \dots$ таких, что $x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ для некоторых $x_m \in K_m$ и $x_0 \notin \overline{K_m}$ для всех $m = 1, 2, \dots$. Заметим, что $\overline{K_m} \cap \partial V \neq \emptyset$ для всех $m = 1, 2, \dots$ ввиду связности D ; см. лемму 1.

В частности, пункты 1 или 2 верны для окрестности $V = U = B(x_0, r_0)$. Пусть далее $r_* \in (0, r_0)$. Тогда

$$M_p(\Gamma(K_i^*, K_j^*; D)) \leq M_0 := \frac{\mu_0}{[2(r_0 - r_*)]^p} < \infty,$$

где $K_i^* = K_i \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ и $K_j^* = K_j \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ для всех $i \neq j$. Действительно, по лемме 2, одной из допустимых функций для $\Gamma(K_i^*, K_j^*; D)$ является

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(r_0 - r_*)} & \text{если } x \in B_0 \setminus \overline{B_*}, \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus (B_0 \setminus \overline{B_*}), \end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0, r_0)$ и $B_* = B(x_0, r_*)$, так как компоненты K_i и K_j не могут быть связаны континуумом в $V = B(x_0, r_0)$ и любой континуум, соединяющий K_i^* и K_j^* в D , по крайней мере, дважды пересекает кольцо $B_0 \setminus \overline{B_*}$, поскольку по свойству Дарбу о связных множествах, непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ , см. следствие 5.46.3 а в [12].

Ввиду пунктов 1 и 2, приведенная выше модульная оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости в точке x_0 . Действительно, по этому условию найдется $r \in (0, r_*)$ такое, что

$$M_p(\Gamma(K_{i_0}^*, K_{j_0}^*; D)) \geq M_0 + 1$$

для каждой достаточно большой пары i_0 и j_0 , $i_0 \neq j_0$, так как в соответствующих $K_{i_0}^*$ и $K_{j_0}^*$ с $d(x_0, x_{i_0})$ и $d(x_0, x_{j_0}) < r$, найдется по континууму, пересекающему $\partial B(x_0, r_*)$ и $\partial B(x_0, r)$; см. лемму 1.

Таким образом, предположение о нарушении континуальной связности континуальной области D в точке x_0 было неверным. $\square$

3. Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что если континуальная область D континуально связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p -модуля, то $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \emptyset$.

Здесь $C(x_0, f)$ обозначает предельное множество отображения $f : D \rightarrow D'$ в точке x_0 ,

$$C(x_0, f) := \{ x' \in X' : x' = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), x_n \rightarrow x_0, x_n \in D \}. \quad (16)$$

Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Так как D континуально связна в точках x_1 и x_2 , то существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 , соответственно, такие, что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ – континуальные области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1, \frac{\delta}{3})$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2, \frac{\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $\text{dist}(W_1, W_2) \geq \frac{\delta}{3}$. Пусть также

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & t \in (\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & t \notin (\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Тогда имеем, что $\int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t) dt = \int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \frac{3}{\delta} dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$\begin{aligned} M_p(\Gamma(f(K_1), f(K_2); D')) &\leq \int_{D \cap A(x_1, \frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3})} Q(x) \eta^p(d(x_1, x)) d\mu(x) \leq \\ &\leq \frac{3^p}{\delta^p} \int_D Q(x) d\mu(x) < \infty, \end{aligned} \quad (17)$$

поскольку $Q \in L^1_\mu(D)$.

Однако, последняя оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости (14), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в континуальных областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по континууму, пересекающему любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_* . Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, было неверным.

Наконец, опираясь на установленный факт и рассуждая от противного, приходим к заключению теоремы 1.

4. Квазиконформные отображения в метрических пространствах. Пусть D и D' – континуальные области в (X, d, μ) и (X', d', μ') , соответственно. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ называется K -квазиконформным, $K \in [1, \infty)$, если

$$K^{-1} M_p(\Gamma) \leq M_p(f(\Gamma)) \leq K M_p(\Gamma) \quad (18)$$

для любого семейства Γ континуумов в D , ср., напр., с [19]. Если неравенство (18) выполняется для некоторого $K \in [1, \infty)$, то гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ называется *квазиконформным*.

Отметим, что в последние годы квазиконформными отображениями в метрических пространствах активно занимаются многие известные математики, см., напр., [11], [19], [22] и относительно p -модулей – [1], [2], [10] и др.

Если $X = X' = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, борелевская мера μ – мера Лебега m , а вместо семейства континуумов Γ взято семейство кривых, то приходим к классическому определению квазиконформности.

В частности, результаты для квазиконформных отображений, приведенные ниже, следуют непосредственно из теоремы 1, см., например, следующее важное заключение.

Следствие 1. Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с борелевскими мерами μ и μ' , соответственно. Если D имеет континуально слабо плоскую границу, D' континуально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D'}$ – компакт, то любое квазиконформное отображение $f : D \rightarrow D'$ допускает непрерывное продолжение на границу $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

Комбинируя следствие 1 с леммой 3, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с борелевскими мерами μ и μ' , соответственно. Если D и D' области с континуально слабо плоскими границами и компактными замыканиями $\overline{D}$ и $\overline{D'}$, то любое квазиконформное отображение $f : D \rightarrow D'$ допускает гомеоморфное продолжение $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

Замечание 2. В частности, последнее заключение выполнено для квазиконформных отображений между QED областями с компактными замыканиями в так называемых слабо плоских пространствах, ср. [8], [14] и [15]. Отметим, что замкнутые множества всегда компактны в компактных пространствах. Напомним также, что локально компактные пространства всегда допускают так называемую одноточечную компактификацию; см., напр., разд. I.9.8. в [4].

Таким образом, полученные результаты распространяют известные теоремы о квазиконформных отображениях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на континуально кольцевые Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля, $p \in (0, \infty)$ в метрических пространствах с мерами.

1. Adamowicz T., Shanmugalingam N. Non-conformal loewner type estimates for modulus of curve families // Annal. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – V. 35. – P. 609-626.
2. Anca A. Quasiconformal mappings in ahlfors regular spaces // Rev. Roumaine Math. Pures appl. – 2009. – V. 54, N 5-6. – P. 361-373.
3. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
4. Бурбаки Н. Функция действительного переменного. – М.: Наука, 1965.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.
6. Whyburn G.T. Analytic Topology. – Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1942.
7. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353-393.
8. Gehring F.W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – V. 24. – P. 181-206.
9. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948.
10. Korte R., Marola N., Shanmugalingam N. Quasiconformality, homeomorphisms between metric measure spaces preserving quasiminimizers, and uniform density property // Arkiv for Matematik. – 2012. – V. 50, N 1. – P. 111-134.
11. Koskela P. Sobolev spaces and quasiconformal mappings on metric spaces // Barcelona: European Congress of Mathematics. – 2000. – V. I. – P. 457-467.

12. Куратовский К. Топология. Т.2. – М.: Мир, 1969.
13. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.
14. Martio O., Vuorinen M. Whitney cubes, p -capacity and Minkowski content // Expo. Math. – 1987. – V. 5. – P. 17-40.
15. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, N 2. – С. 199-234.
16. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117-150.
17. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, N 4. – С. 920-930.
18. Смолова Е.С. Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, N 5. – С. 682-689.
19. Tyson J. Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces // Annal. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1998. – V. 23. – P. 525-548.
20. Fuglede B. Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – V. 98. – P. 171-219.
21. Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001.
22. Heinonen J. and Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – V. 181. – P. 1-61.

O. S. Afanas'eva

Boundary behavior of the continually ring Q -homeomorphisms with respect to p -module in metric spaces.

In this article, it is investigated the problem of extension to the boundary of the continually ring Q -homeomorphisms with respect to p -module between domains in metric spaces with measures. In particular, there are formulated conditions on the continual domains boundaries of admitting a continuous or homeomorphic extension to the boundary of quasiconformal mappings in metric spaces.

Keywords: metric spaces with measures, the continually ring Q -homeomorphisms, quasiconformal mappings, p -moduli.

О. С. Афанасьева

Гранична поведінка континуально кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модулів у метричних просторах.

У даній роботі досліджується проблема продовження на межу континуально кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модулів між областями в метричних просторах із мірами. Зокрема, для квазіконформних відображень у метричних просторах сформульовано умови на межі континуальних областей, при яких допускається неперервне або гомеоморфне продовження на межу таких відображень.

Ключові слова: метричні простори з мірами, континуально кільцеві Q -гомеоморфізми, квазіконформні відображення, p -модулі.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru

Получено 01.02.13

УДК 534.38

©2013. В. Н. Беловодский, М. Ю. Сухоруков

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПОСТРОЕНИЮ БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Построение бифуркационных диаграмм – одна из основных задач анализа динамических систем и основным инструментом для этих целей, в последние десятилетия, является метод точечных отображений, восходящий к Пуанкаре. В работе развивается традиционный для 50-х годов подход, основанный на методе гармонического баланса. Изложены концептуальные особенности его применения при учете большого количества гармоник, приводятся результаты его использования к анализу колебательной системы с одной степенью свободы и полиномиальной упругой и диссипативной характеристиками. Проведен анализ колебаний системы в зонах суб- и супергармонических резонансов, отмечены некоторые новые особенности в их возбуждении.

Ключевые слова: бифуркация, многорежимность, резонанс, полигармоническое колебание, периодический режим, численный анализ.

Введение. Еще 50-60 лет назад метод гармонического баланса (МГБ) был одним из основных инструментов исследования различных колебательных систем, широко использовался для нахождения их бифуркационных, в частности, амплитудно-и фазочастотных диаграмм [1, 2]. В последующие годы центр тяжести исследований нелинейных систем переместился в область более глубокого изучения явлений многорежимности, в частности, построения областей притяжения [2], изучения хаотических аттракторов [3] и разработки подходов к классификации периодических режимов [4]. Это востребовало использование различных вариантов стробоскопических методов или, отображений Пуанкаре по современной терминологии, которые, в настоящее время, и являются доминирующими при исследовании нелинейных динамических систем [5]. Вместе с тем, МГБ позволяет свести решение системы дифференциальных уравнений к системе полиномиальных, а это позволяет, используя теорему Берштейна [6, 7], определить число решений таких систем. А последующее применение для их анализа подходов тропической геометрии и развивающихся в ней методов продолжения к решению полиномиальных уравнений [8], или же методов интервальной арифметики [9], открывает реальную перспективу выполнения глобального динамического анализа нелинейных систем с полиномиальной нелинейностью. Первым шагом в этом направлении представляется построение систем полиномиальных уравнений, что для динамических систем с таким типом нелинейности успешно реализуется с использованием комплексной версии МГБ. Ниже демонстрируется его применение к исследованию реальной динамической системы.

Описание подхода, построение системы полиномиальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \mu\omega_0(1 + \beta\xi + \gamma\xi^2)\frac{d\xi}{d\tau} + (1 + \beta\xi + \gamma\xi^2)\xi = P \cos \eta\tau, \quad (1)$$

которое в безразмерной форме описывает движение одностепенной вибромашины с силовым или кинематическим возбуждением [10]. В данном случае предполагается кубический характер упругой характеристики и коэффициент сопротивления в системе, пропорциональный коэффициенту жесткости упругих связей [11].

Полагая решение в виде

$$\xi(\tau) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\eta\tau}, \quad (2)$$

где N – число учитываемых гармоник, $c_n = \overline{c_{-n}}$. После подстановки (2) в (1), выполнения операций дифференцирования, возведения в степень и последующего сравнения коэффициентов при равных степенях $e^{in\eta\tau}$, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \left(1 + i\mu\omega_0 n \frac{1}{q} \eta - n^2 \frac{1}{q^2} \eta^2\right) c_n + \beta \sum_{k=-N}^N c_k c_{n-k} \left(1 + i\mu\omega_0 (n-k) \frac{1}{q} \eta\right) + \\ & + \gamma \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m} \left(1 + i\mu\omega_0 (n-k-m) \frac{1}{q} \eta\right) = \\ & = \begin{cases} P/2, & n = \pm q \\ 0, & n \neq \pm q \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n, n-k, n-k-m \in [-N, N]$, а q – управляющий параметр. Если $q = 1$, тогда анализируются режимы периода T , т.е. основные и супергармонические, если же $q = 2, 3, \dots$, – субгармонические режимы порядка $1 : q$. Предполагая тригонометрическую форму решения (2) в виде

$$\xi(\tau) = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\eta\tau - \varphi_n), \quad (4)$$

получим, что амплитуда n -ой гармоники $A_n = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$, а начальная фаза $\varphi_n = \arccos \frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}}$ или $\varphi_n = -\arccos \frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}}$, если $\Im c_{-n} < 0$, где $\varphi_n \in [-\pi, \pi)$.

Количество уравнений и неизвестных c_n, c_{-n} в системе (3) равно $(2N+1)$. Дальнейшее численное ее решение при последовательном изменении частоты η или иного параметра системы, далее – бифуркационного, и позволяет получить бифуркационную диаграмму.

Бифуркационные диаграммы. Особенности программной реализации.

Инструментом исследования является численное моделирование с использованием разработанных приложений среды MATLAB для построения бифуркационных, в частности, амплитудно- и фазочастотных (АЧХ и ФЧХ) характеристик, анализа

спектрального и фазового состава стационарных колебаний, определения областей притяжения периодических режимов [12]. Быстродействие программных средств MATLAB сильно зависит от использования в программах матричных операций. По этим соображениям, для описания левых частей системы уравнений использован специальный вид матрицы Теплица. Дело в том, что уравнения, получаемые в результате применения МГБ, например, система (3), содержат ресурсоемкие операции суммирования. При описании таких сумм в виде вложенных программных циклов, время выполнения программы заметно увеличивается и, в ряде случаев примерно в 300 раз может превышать время работы алгоритма, использующего матрицы Теплица.

В настоящей версии пакета для получения решений в области поиска используется метод мултистарта, что обеспечивается определенным объемом начальных пробных точек, формирование которых производится с использованием Quasi-Random LpTau последовательности [13]. Предположительные точки бифуркации диаграмм устанавливаются путем контроля смены знака якобиана системы уравнений (3) или потери устойчивости отслеживаемого режима, что, в свою очередь, устанавливается по величине модулей мультипликаторов его уравнения в вариациях [14]. Программа спектрального и фазового анализа базируется на численном решении задачи Коши для уравнения (1), определении его стационарных решений и последующем их численном разложении в конечные ряды Фурье вида (4).

Результаты, анализ. На рис. 1-4 представлены полученные результаты. В разложениях (2) учитывались пять гармонических составляющих и при визуализации на рисунках указаны лишь те из них, амплитуды которых составляли не менее 1% от наибольшей. Отметим некоторые особенности.

Прежде всего, обратим внимание на ярко выраженный полигармонический характер колебаний в зонах супергармонических резонансов. В частности, при резонансе порядка 2 : 1 амплитуда бигармонической составляющей может составлять до половины основной (см. рис. 1). Несомненно, эта особенность в поведении рассматриваемой системы могла бы быть изучена с учетом дополнительных факторов, однако, уже и это количественное соотношение свидетельствует об определенном практическом подтексте [14], и могла бы учитываться при разработке вибрационных машин технологического назначения.

При данном уровне сопротивления и симметричной характеристике упругой силы ($\beta = 0$) из числа младших удалось обнаружить лишь субрезонансы порядка 1 : 3 (см. рис. 1а, 1б). Характерным является наличие трех пар субгармонических режимов, причем режимы каждой группы (устойчивые, – сплошная линия, неустойчивые, – пунктирная) отличаются лишь сдвигом фаз составляющих гармоник и совпадают при параллельном переносе, т.е. $\xi(\tau) = \xi(\tau - s)$. Элементарный анализ дает основания для обобщения этой особенности и позволяет сформулировать следующее предположительное заключение: В нелинейной системе (1) множество субгармонических режимов порядка 1 : n может быть разделено на один или несколько непересекающихся классов. Каждый класс содержит по $2n$ режимов, из которых только n являются устойчивыми. Режимы устойчивых и неустойчивых групп иден-

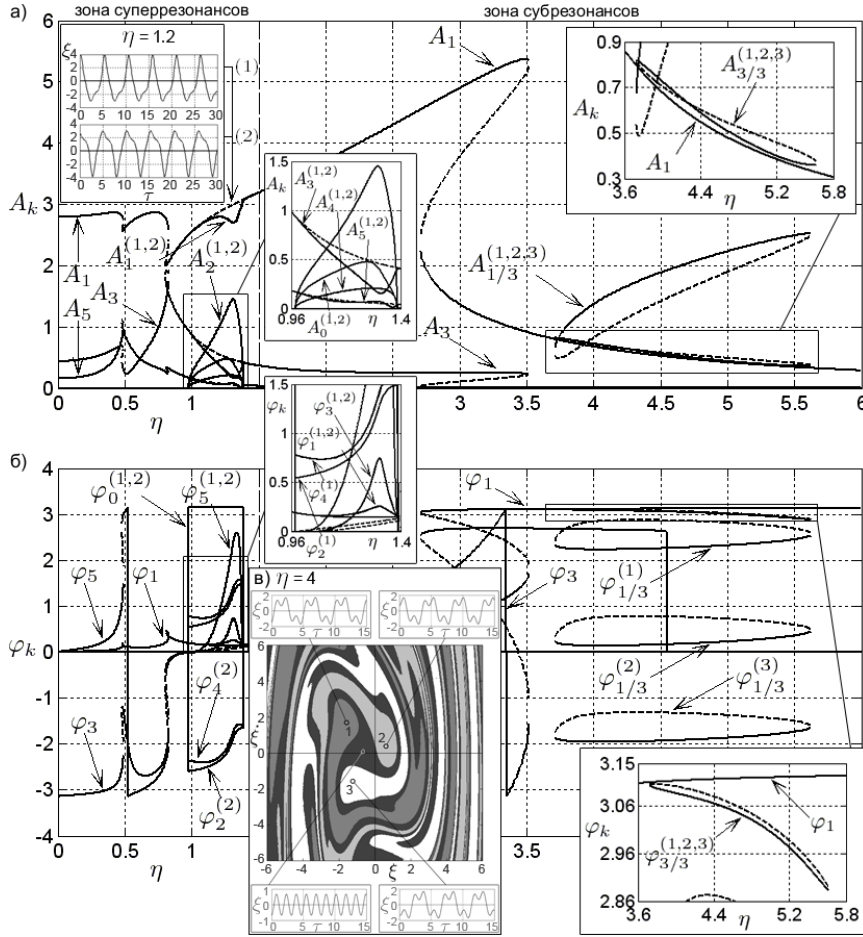


Рис. 1. АЧХ (а), ФЧХ (б) и области притяжения (в) для $\mu\omega_0 = 0.1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$, $P = 10$, где $A_k^{(m)}$, $\varphi_k^{(m)}$ – амплитуда и начальная фаза k -ой гармоники m -ого режима

тичны относительно сдвига и совпадают при замене переменной $\tau := \tau + 2\pi m/\omega$, где $m = 0, 1, \dots, (n-1)$. Или, что то же самое, фазы их гармоник отличаются на $2\pi km/n$, где k – номер гармоники, m – номер режима.

Области притяжения (см. рис. 1в) свидетельствуют о существенном запасе устойчивости режимов порядка 1 : 3. Это, в частности, проявляется в том, что размеры ядер сечений $\tau = 0$ их областей притяжения лежат в диапазоне 0.5..0.6 и вполне сравнимы с ядром основного режима. В силу сделанного выше заключения, их можно рассматривать как сечения $\tau = \tau_0 + 2\pi/n$ области притяжения любого из режимов устойчивой группы.

На рис. 2 представлены бифуркационные диаграммы для резонанса 1 : 3. Из числа особенностей отметим его обострение при введении асимметрии β характеристики (рис. 2а), а также экстремальный характер зависимости при изменении P (рис. 2б).

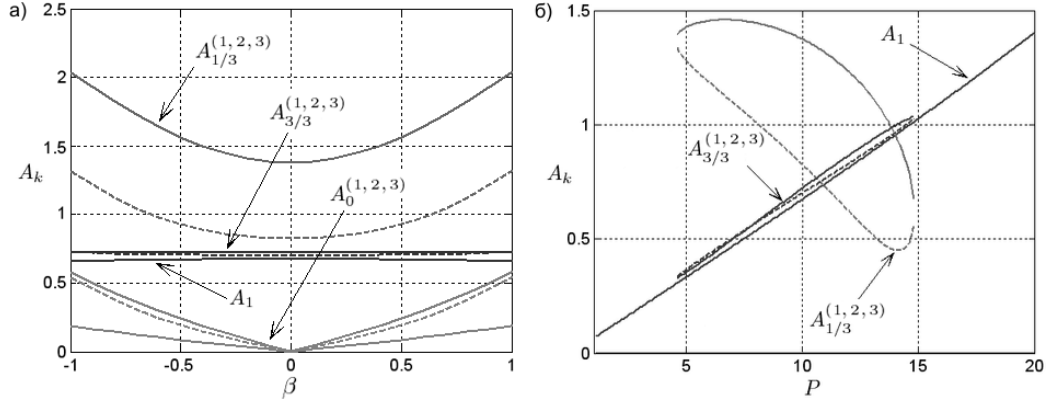


Рис. 2. Бифуркационные кривые для режимов порядка 1 : 3 при варьировании: а) β ; б) P

После снижения сопротивления в системе были обнаружены и субгармонические режимы порядка 1 : 2 (см. рис. 3). Их число и характер подтверждают сформулированную выше гипотезу.

Асимметрию упругой характеристики (рис. 4а) и асимметрию возбуждения (рис. 4б) можно рассматривать как факторы, которые способствуют появлению резонанса 1 : 2. Последний рисунок свидетельствует, что даже незначительное дополнительное возмущение на частоте субгармоники может оказаться достаточным для формирования интенсивных режимов порядка 1 : 2.

Отметим „энергетические“ особенности субгармонических режимов. Выполним следующий умозрительный эксперимент. Рассмотрим, например, значение $\eta = 3.65$ (рис. 3). Ему соответствуют $A_{1/2} \approx 2.16$, $A_{2/2} \approx 1.08$. Положив в (1) $\beta = \gamma = 0$, мы получим линейную вибромашину. Используем для определения ее амплитуды колебаний расчетное соотношение $A \approx P/(\eta^2 - 1)$, справедливое при $\eta \gg 1$. Получим, что для обеспечения полигармонического состава колебаний в линейной вибромашине, сформированной таким образом, необходимо бигармоническое возбуждение со значениями его силовых составляющих равных $P_{1/2} \approx 5.03$, $P_1 \approx 13.31$. Таким образом, их суммарная величина составляет 18.34 единиц, против 10 единиц в нелинейной. Данное обстоятельство позволяет надеяться и на ощутимое снижение энергоемкости вибромашин, работающих в режиме субгармонических резонансов. Дополнительное упрощение конструкции, которое сопровождается использованием одного вибровозбудителя вместо двух, представляется очевидным.

Рис. 5 демонстрирует возможности МГБ в исследовании более тонких особенностей в поведении нелинейных динамических систем. На рис. 5а представлены результаты, любезно предоставленные нам автором [16], полученные путем реализации отображения Пуанкаре. На рис. 5б представлены бифуркационные диаграммы, полученные с использованием МГБ, при этом общее число учитываемых гармоник в разложениях (2) составляло 12. Оба расчета выполнены для значений параметров $\mu\omega_0 = 0.05$, $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$, $P = 10$, $q = 12$.

На рис. 5б показаны режимы порядков 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, 1 : 12 и не указаны –

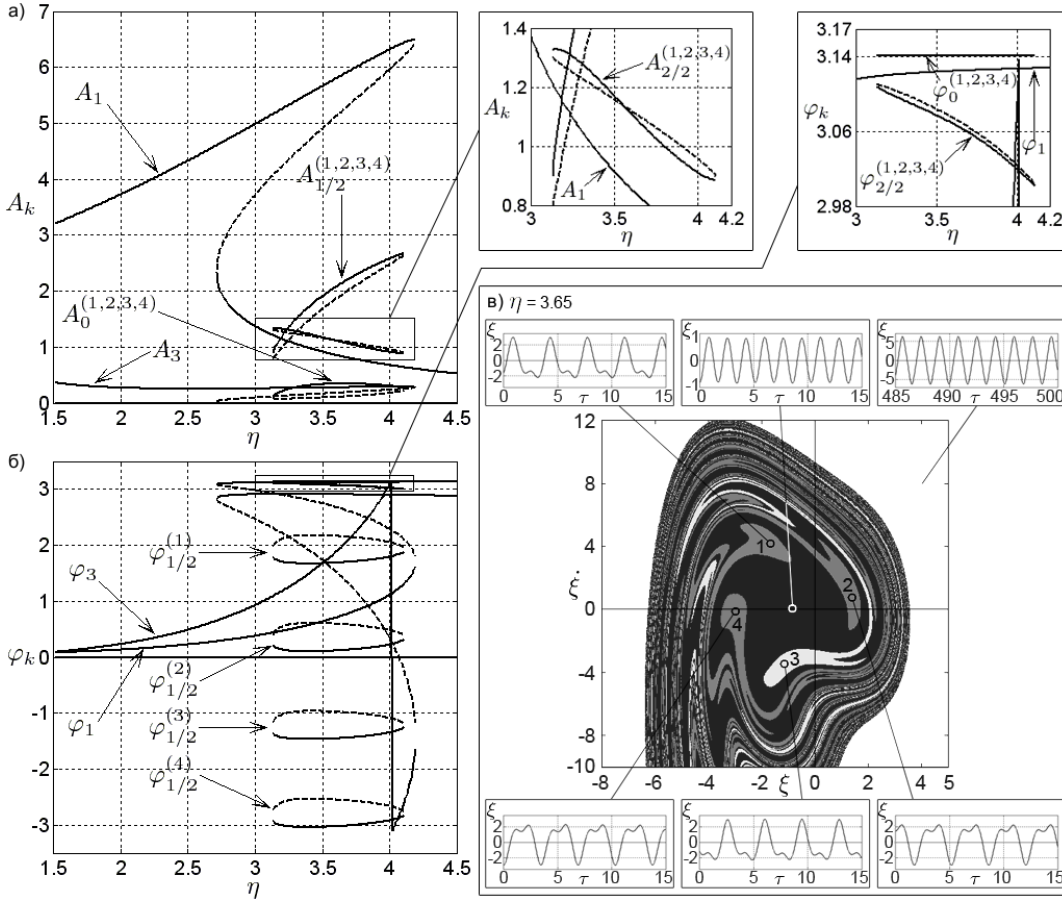


Рис. 3. АЧХ (а), ФЧХ (б) и области притяжения (в) для режимов порядка 1 : 2 и $\mu\omega_0 = 0.05$

1 : 3, существующие при $\eta > 3.7$, и 1 : 5. В зоне субгармонического резонанса 1 : 3 присутствует хаотический аттрактор, на рис. 5а он обозначен как UPI-3, Unstable Periodic Infinitum, отражающий факт бесконечного удвоения периодов режимов, кратных 3, на рис. 5б процесс удвоения периода колебаний отражен путем построения режимов 1 : 3, 1 : 6 и 1 : 12. Кроме этого, в диапазоне $3.075 \leq \eta \leq 3.325$ с помощью МГБ были определены дополнительные 48 режимов, они показаны на рис. 5б пунктиром.

Заключение. На примере одномерной динамической системы продемонстрированы возможности метода гармонического баланса в части исследования стационарных движений динамических систем с полиномиальной нелинейностью. В данном случае его использование помогло обратить внимание и вскрыть некоторые новые особенности в возбуждении комбинационных резонансов. Концептуальное обобщение изложенного подхода для анализа динамических систем более высокой размерности, в принципиальном плане, представляется вполне очевидным.

С точки зрения практических приложений, представленные результаты демон-

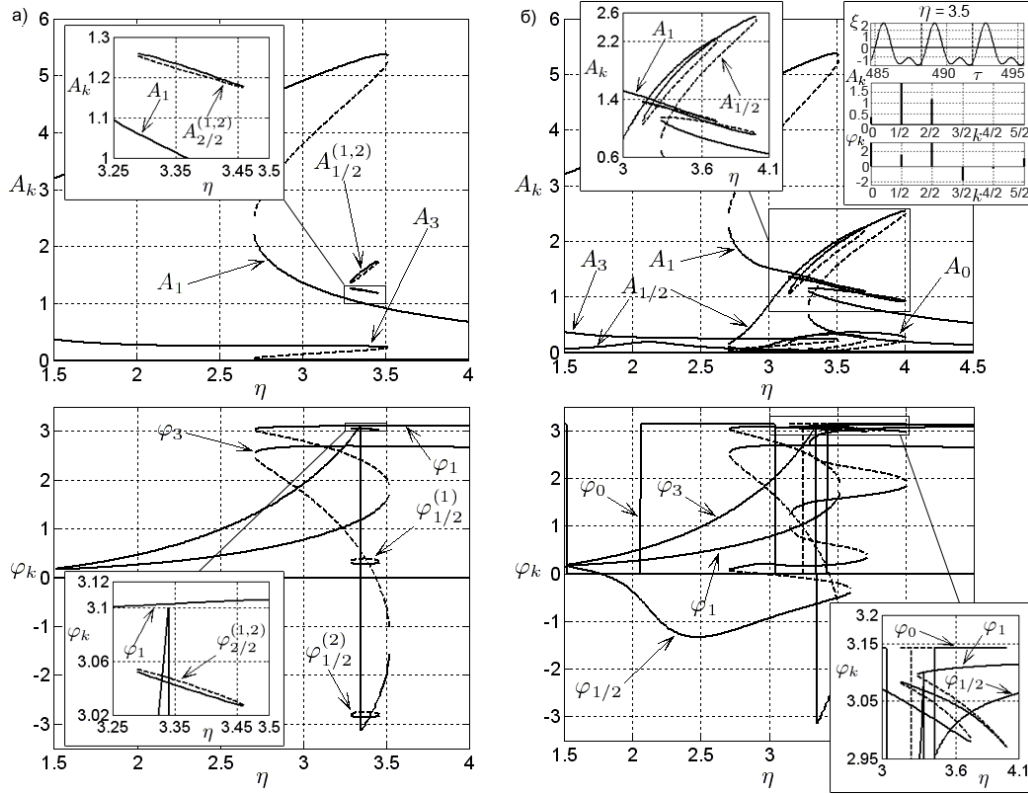


Рис. 4. АЧХ и ФЧХ для режимов порядка 1 : 2 при введении: а) асимметрии характеристики $\beta = 0.1$; б) асимметрии возбуждения $P_{1/2} \cos(0.5\eta\tau)$, где $P_{1/2} = 0.5$

стрируют полигармонические возможности комбинационных резонансов и некоторые резервы их управления при реальных значениях силовых и диссипативных факторов. К числу очередных вопросов на пути к практическому их использованию можно отнести проблему выхода вибрационных машин на проектный режим в условиях его ограниченной устойчивости. Идеальным выходом из этого положения представляется вариант упругой характеристики, для которой выбранный комбинационный режим является глобально устойчивым.

В части использования МГБ для глобального анализа динамических систем такого типа одна из проблем заключается в отделении комплексно сопряженных решений полиномиальных систем уравнений. Дело в том, что движениям динамической системы, в данном случае, – решениям уравнения (1), соответствуют лишь сопряженные решения системы (3), в то время, как теорема Бернштейна, по существу, предлагает метод определения их общего числа. Насколько это может оказаться существенным, приведем следующий пример. При трех учитываемых гармониках в разложениях (2) и $\eta = 4.0$ общее число решений системы (3), определенное с помощью программы MixedVol [17], реализующей расчет смешанных объемов многогранников Ньютона, равно 414, в то время как число комплексно-сопряженных решений

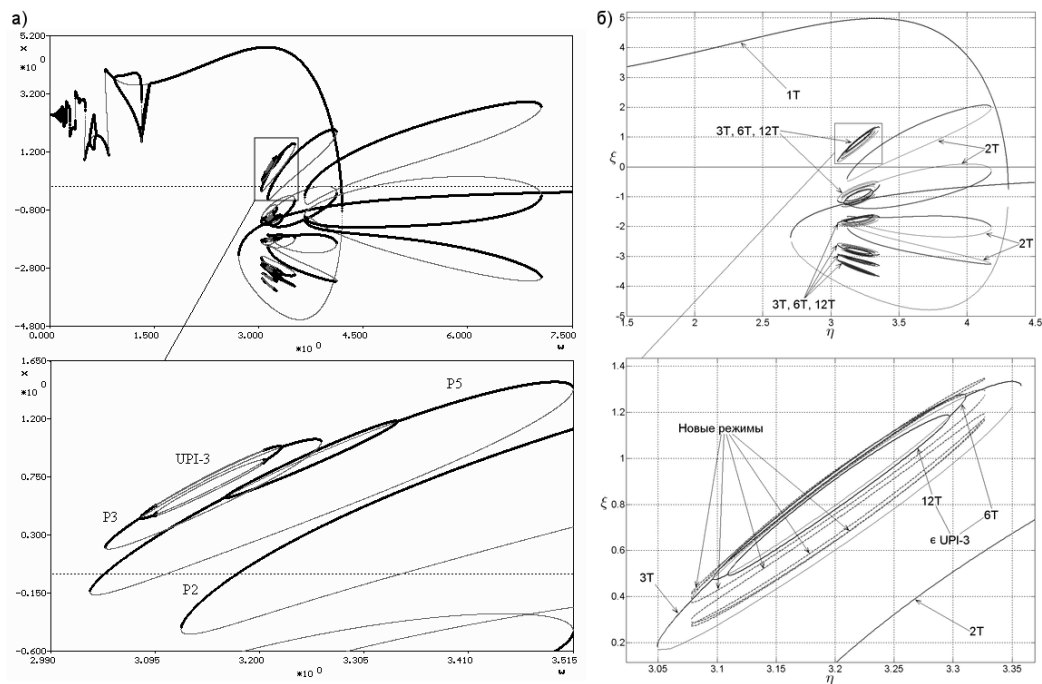


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы вынужденных колебаний, полученные: а) в [16]; б) МГБ

при $q = 3$, определенное с помощью метода мултистарта, оказалось равным всего 6.

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
2. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах: пер. с англ. / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
3. Ueda Y. The Road to Chaos (Cover, Preface, Technical Comments). – Aerial Press. Kyoto University Research Information Repository, Kyoto, 1992. – 224 p.
4. Zakrzhevsky M.V. Bifurcation Theory of Nonlinear Dynamics and Chaos. Periodic Skeletons and Rare Attractors // Rare Attractors and Rare Phenomena in Nonlinear Dynamics. Proceeding of the 2nd International Symposium RA'11. – Riga, RTU, 2011. – P. 1-10.
5. Thompson J.M.T. Nonlinear Dynamics and Chaos. Second Edition. – John Wiley & Sons, Ltd, 2002. – 438 p.
6. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функциональный анализ и его приложения, 12:1, 1978. – С. 51-61.
7. Surmefts B. Solving Systems of Polynomial Equations. – Amer. Math. Soc., CBMS Regional Conferences Series, No. 97. – Providence, Rhode Island, 2002. – 158 p.
8. Кирштейн Б.Х. Деквантование Маслова и метод гомотопий для решения систем нелинейных алгебраических уравнений // Математические заметки. – Т. 83. – Вып. 2. – 2008. – С. 221-231.
9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Институт вычислительных технологий СО РАН. – Новосибирск: XYZ, 2012. – 604 с.
10. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа / Б.И. Крюков. – Киев: Наукова думка, 1967. – 210 с.
11. Аснер В.И. Конструкции и расчеты фильтрующих центрифуг. – М.: Недра, 1976. – 216 с.
12. Беловодский В.Н. Нелинейные вибромашины, супергармонические резонансы и полигармони-

- ческие вибрации // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. – Вып. 40. – Донецк: ДонНТУ, 2010. – С. 20-26.
13. *Соболев И.М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 110 с.
 14. *Якубович В.А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
 15. *Богданов О.С.* Справочник по обогащению руд. Основные процессы. – М.: Недра, 1983. – 381 с.
 16. *Zakrzhevsky M.V.* Rare Attractors and Typical Bifurcation Groups in Nonlinear Dynamics and Chaos. – Riga, RTU, 2012 (In print).
 17. *Li T.Y.* Finding mixed cells in the mixed volume computation // Found. Comput. Math, Vol. 1, 2001. – P. 161-181.

V. N. Belovodskiy, M. Y. Sukhorukov

The harmonic balance method for the finding of bifurcation diagrams of oscillatory systems with polynomial nonlinearity.

Plotting of the bifurcation diagrams is one of the important problems in the analysis of dynamical systems. In recent decades the main instrument for this purpose is the method of point transformations, which goes back to Poincare. In paper we develop a traditional for 50'ies approach based on the harmonic balance method. The conceptual features of its application, taking into account a large number of harmonics, are considered, the results of its use for analysis of the oscillatory system with one degree of freedom and polynomial elastic and dissipative characteristics are presented. Oscillations of the system in areas of sub- and superharmonic resonances are studied, new features in their behavior are discovered.

Keywords: *bifurcation, multi-regime, resonance, polyharmonic oscillation, periodic regime, numerical analysis.*

В. М. Беловодський, М. Ю. Сухоруков

Метод гармонічного балансу стосовно до побудови біфуркаційних діаграм коливальних систем з поліноміальною нелінійністю.

Побудова біфуркаційних діаграм є однією з основних задач аналізу динамічних систем і основним інструментом для цих цілей, в останні десятиліття, є метод точкових відображень, висхідний до Пуанкаре. У роботі розвивається традиційний для 50-х років підхід, заснований на методі гармонічного балансу. Викладено концептуальні особливості його застосування при обліку великої кількості гармонік, наводяться результати його використання до аналізу коливальної системи з одним ступенем свободи і поліноміальною пружною і дисипативною характеристиками. Проведено аналіз коливальних систем в зонах суб- і супергармонічних резонансів, відзначено деякі нові особливості в їх збудженні.

Ключові слова: *біфуркація, багаторежимність, резонанс, полігармонічне коливання, періодичний режим, чисельний аналіз.*

Донецкий национальный технический ун-т
belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

Получено 14.11.12

УДК 517.977.1

©2013. Н. В. Брадул

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В статье рассмотрена задача построения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки гауссовского частично наблюдаемого случайного процесса по наблюдениям, содержащим запаздывание. Показано, что решение задачи фильтрации можно свести к решению разностного уравнения типа Винера-Хопфа, называемого основным уравнением фильтрации. Рассмотрены частные случаи основного уравнения фильтрации, в которых его решение можно получить в явном виде. Исследована зависимость ошибки оценивания от величины запаздывания в наблюдениях.

Ключевые слова: оптимальная оценка, задача фильтрации, ошибка оценивания.

1. Введение. Задача фильтрации поставлена и решена А.Н. Колмогоровым для стационарных случайных последовательностей и Н. Винером для систем с непрерывным временем. Н. Винер свел решение поставленной задачи к решению так называемого интегрального уравнения Винера-Хопфа. В статье доказано, что решение задачи фильтрации частично наблюдаемым гауссовским случайным процессом по результатам наблюдений, содержащих запаздывание, сводится к решению уравнения типа Винера-Хопфа.

2. Основное уравнение фильтрации. Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ с потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{S}$, $i \in Z = \{0, 1, \dots, N\}$. Обозначим через $(x(i), y(i))$ частично наблюдаемый $\mathfrak{F}_i$ -измеримый случайный процесс, $x(i)$ – ненаблюдаемая, $y(i)$ – наблюдаемая компоненты, $x(i) \in \mathbf{R}^n$, $y(i) \in \mathbf{R}^k$.

Рассмотрим задачу фильтрации, состоящую в построении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $m_0(N)$ величины $x(N)$ по результатам наблюдений $y(i)$, $0 \leq i \leq N$. Если $\mathbf{E}|x(N)|^2 < \infty$, то такой оценкой является условное математическое ожидание [1]

$$m_0(N) = \mathbf{E}(x(N)/\mathfrak{F}_N^y). \quad (1)$$

Здесь $\mathfrak{F}_i^y$ – минимальная σ -алгебра, порожденная процессом $y(j)$, $0 \leq j \leq i$.

Предположим, что $x(i)$ – гауссовский случайный процесс, $y(i)$ определяется соотношением

$$y(i+1) = A(i)x(i-h) + \xi(i+1), \quad x(j) = 0, \quad -h \leq j < 0, \quad y(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\xi(i) \in \mathbf{R}^k$ $\mathfrak{F}_i$ -измеримые гауссовские случайные величины с независимыми значениями, $\mathbf{E}\xi(i) = 0$, $\mathbf{E}\xi(i)\xi'(j) = 0$, $i \neq j$, $\mathbf{E}\xi(i)\xi'(i) = S(i)$, матрица $S(i)$ равномерно положительно определена, неслучайная матрица $A(i)$ размерности $k \times n$, $\mathbf{E}x(i) = 0$, $\mathbf{E}x(i)x'(j) = R(i, j)$, $\mathbf{E}x(i)\xi'(j) = Q(i, j)$, $Q(i, j) = 0$, при $i < j$, матрицы $S(i)$, $R(i, j)$, $Q(i, j)$ имеют соответствующие размерности.

Лемма 1. Существует неслучайная матрица $u_0(j)$, $j \in Z$, размерности $n \times k$

такая, что для оценки (1) справедливо представление

$$m_0(N) = \sum_{j=0}^{N-1} u_0(j)y(j+1). \quad (3)$$

Доказательство леммы является следствием из теоремы о нормальной корреляции [1].

Из Леммы 1 следует, что построение оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки (1) сводится к построению некоторой неслучайной матрицы.

Теорема 1. Матрица $u_0(j)$, определяющая оценку (3), является единственным решением уравнения типа Винера-Хопфа

$$u_0(j)S(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)Z(i,j) = P(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Здесь

$$P(j) = R(N, j-h)A'(j) + Q(N, j+1), \quad (5)$$

$$Z(i, j) = A(i)R(i-h, j-h)A'(j) + Q'(j-h, i+1)A'(j) + A(i)Q(i-h, j+1). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $m_0(N)$ – оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка величины $x(N)$, определяемая соотношением (3), а $m(N)$ – оценка вида (3) с произвольной функцией $u(j)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x(N) - m_0(N))m'(N) &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}(x(N) - m_0(N))/\mathfrak{F}_N^y\right]m'(N) = \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}(x(N)/\mathfrak{F}_N^y) - m_0(N)\right]m'(N) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя для оценок $m_0(N)$ и $m(N)$ представления вида (3), получим на основании (7)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[\mathbf{E}x(N)y'(j+1) - \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1) \right] u'(j) = 0. \quad (8)$$

Так как функция $u(j)$ произвольна, то выражение в квадратных скобках в (8) должно равняться нулю при каждом $j = 0, \dots, N-1$. Таким образом, уравнение для определения функции $u_0(i)$ имеет вид

$$\mathbf{E}x(N)y'(j+1) = \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1). \quad (9)$$

Используя (2), получим

$$\mathbf{E}x(N)y'(j+1) = \mathbf{E}x(N)x'(j-h)A'(j) + \mathbf{E}x(N)\xi'(j+1) =$$

$$= R(N, j - h)A'(j) + Q(N, j + 1) = P(j), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1) = \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \mathbf{E} \left(A(i)x(i-h) + \xi(i+1) \right) \left(A(j)x(j-h) + \xi(j+1) \right)' . \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (5), (6) следует

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1) &= \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \left[A(i)R(i-h, j-h)A'(j) + \right. \\ & \left. + Q'(j-h, i+1)A'(j) + A(i)Q(i-h, j+1) \right] + u_0(j)S(j+1) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)Z(i, j) + u_0(j)S(j+1). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (9)-(11) следует, что функция $u_0(i)$, определяющая оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку (3), является решением уравнения (4).

Докажем, что полученное решение задачи фильтрации единственно. Предположим, что существует два различных решения задачи (4) $u_1(j)$ и $u_2(j)$. Пусть $\Delta u(j) = u_1(j) - u_2(j)$. Подставляя $u_1(j)$ и $u_2(j)$ в (9) и вычитая одно равенство из другого, имеем $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1) = 0$. Умножая полученное выражение справа на $\Delta u'(j)$ и суммируя по $0 \leq j \leq N-1$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1) \Delta u'(j) = 0,$$

откуда,

$$\mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) y(i+1) \right|^2 = 0.$$

Обозначим

$$x_0(i) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha(i, j+1) \xi(j+1), \quad \alpha(i, j) = Q(i, j)S^{-1}(j),$$

$$\beta(j) = \Delta u(j) + \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \alpha(i-h, j+1).$$

Так как

$$\mathbf{E}[x(i) - x_0(i)] \xi'(j+1) = Q(i, j+1) - \mathbf{E} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha(i, l+1) \xi(l+1) \xi'(j+1) =$$

$$= Q(i, j+1) - Q(i, j+1)S^{-1}(j+1)S(j+1) = 0,$$

то, используя (2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) y(i+1) \right|^2 &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \left[A(i)x(i-h) + \xi(i+1) \right] \right|^2 = \\ &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \left[A(i) \left(x(i-h) - x_0(i-h) \right) + A(i)x_0(i-h) + \xi(i+1) \right] \right|^2 = \\ &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left[\Delta u(i) A(i) \left[x(i-h) - x_0(i-h) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta u(i) A(i) \sum_{j=0}^{N-1} \alpha(i-h, j+1) \xi(j+1) + \Delta u(i) \xi(i+1) \right] \right|^2 = \\ &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \left[x(i-h) - x_0(i-h) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \sum_{j=0}^{N-1} \alpha(i-h, j+1) \xi(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \xi(i+1) \right|^2. \end{aligned}$$

Используя то, что $\alpha(i-h, j) = 0$ при $i-h < j$, преобразуем две последние суммы в этом выражении следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=h}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \sum_{j=0}^{i-h-1} \alpha(i-h, j+1) \xi(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \xi(i+1) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-h-2} \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \alpha(i-h, j+1) \xi(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) \xi(i+1) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\Delta u(j) + \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \alpha(i-h, j+1) \right] \xi(j+1) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta(j) \xi(j+1). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) y(i+1) \right|^2 &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \left[x(i-h) - x_0(i-h) \right] + \sum_{j=0}^{N-1} \beta(j) \xi(j+1) \right|^2 = \\ &= \mathbf{E} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i) A(i) \left[x(i-h) - x_0(i-h) \right] \right|^2 + Tr \left[\sum_{j=0}^{N-1} \beta(j) S(j+1) \beta'(j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Так как это выражение равно нулю, то, для любого $0 \leq j \leq N-1$,

$$\text{Tr}[\beta(j)S(j+1)\beta'(j)] = \sum_{l=1}^m [\beta_l(j)S(j+1)\beta'_l(j)] = 0,$$

где $\beta_l(j)$, $1 \leq l \leq m$ – строки матрицы $\beta(j)$. Из положительной определенности матрицы $S(j)$ вытекает $\beta_l(j) = 0$, для любого $1 \leq l \leq m$, следовательно, $\beta(j) = 0$, то есть,

$$\Delta u(j) + \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i)A(i)\alpha(i-h, j+1) = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) вытекает, что $\Delta u(j) = 0$ при $N-h-1 \leq j \leq N-1$. Пусть $j = N-h-2$, тогда (12) представимо в виде

$$\Delta u(N-h-2) + \Delta u(N-1)A(N-1)\alpha(N-h-1, N-h-1) = 0.$$

Отсюда $\Delta u(N-h-2) = 0$. Аналогично, при $j = N-h-3$ (12) имеет вид

$$\Delta u(N-h-3) + \sum_{i=N-2}^{N-1} \Delta u(i)A(i)\alpha(i-h, N-h-2) = 0,$$

то есть, $\Delta u(N-h-3) = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что $\Delta u(j) = 0$ при $0 \leq j \leq N-1$. Следовательно, два решения $u_1(j)$ и $u_2(j)$ совпадают для любого j , то есть, решение задачи фильтрации единственно. $\square$

Вычислим ошибку оценивания $J(u_0)$ величины $x(N)$. С учетом (3), (5)

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \mathbf{E}|x(N) - m_0(N)|^2 = \mathbf{E}\text{Tr}[x(N)(x(N) - m_0(N))'] = \\ &= \text{Tr}\left[R(N, N) - \sum_{j=0}^{N-1} P(j)u'_0(j)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Частные случаи. В некоторых случаях решение уравнения (4) можно получить в явном виде. В частности, если $h \geq N$, то $R(N, j-h) = 0$ и из (4)–(6), (13) следует

$$\begin{aligned} u_0(j) &= Q(N, j+1)S^{-1}(j+1), \\ J(u_0) &= \text{Tr}\left[R(N, N) - \sum_{j=0}^{N-1} Q(N, j+1)S^{-1}(j+1)Q'(N, j+1)\right]. \end{aligned}$$

Пусть теперь $h < N$, ненаблюдаемый процесс $x(i) = \psi(i)x_0$, где $\psi(i)$ – неслучайная матрица, $\psi(0) = I$, x_0 – не зависящая от $\xi(i)$ гауссовская случайная величина, $\mathbf{E}x_0 = 0$, $\mathbf{E}x_0x'_0 = D_0$. Тогда $Q(i, j) = 0$, а корреляционная матрица $R(i, j)$ имеет вид

$$R(i, j) = \psi(i)D_0\psi'(j). \quad (14)$$

В этом случае матрица $u_0(j) \equiv 0$ при $0 \leq j < h$, а при $h \leq j \leq N$ определяется уравнением

$$u_0(j)S(j+1) + \sum_{i=h}^{N-1} u_0(i)A(i)\psi(i-h)D_0\psi'(j-h)A'(j) = \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j),$$

которое можно переписать в виде уравнения Фредгольма

$$u_0(j) = \left[\psi(N) - \sum_{i=h}^{N-1} u_0(i)A(i)\psi(i-h) \right] D_0\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1). \quad (15)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$u_0(j) = \psi(N)F\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1), \quad (16)$$

где матрица F подлежит определению. Подставив (16) в (15) и положив

$$G = \sum_{i=h}^{N-1} \psi'(i-h)A_1(i)\psi(i-h) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi'(i)A_1(i+h)\psi(i),$$

$$A_1(i) = A'(i)S^{-1}(i+1)A(i), \quad (17)$$

получим $F = (I - FG)D_0 = D_0 - FGD_0$ или

$$F = (D_0^{-1} + G)^{-1}. \quad (18)$$

Таким образом, при указанных предположениях оптимальная оценка определяется формулами (3), (16)-(18). Из (13), (14), (16)-(18) вытекает, что соответствующая ошибка оценивания равна

$$\begin{aligned} J(u_0) &= Tr \left[R(N, N) - \sum_{j=0}^{N-1} P(j)u'_0(j) \right] = Tr \left[\psi(N)D_0\psi'(N) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{N-1} \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j) \left(\psi(N)F\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1) \right)' \right] = \\ &\quad = Tr \left[\psi(N)D_0\psi'(N) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{N-1} \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j)(S^{-1}(j+1))'A(j)\psi(j-h)F'\psi'(N) \right] = \\ &= Tr \left(\psi(N) \left[D_0 - \sum_{j=0}^{N-1} D_0\psi'(j-h)A'(j)(S^{-1}(j+1))'A(j)\psi(j-h)F' \right] \psi'(N) \right). \end{aligned}$$

Так как

$$D_0 - \sum_{j=0}^{N-1} D_0 \psi'(j-h) A'(j) (S^{-1}(j+1))' A(j) \psi(j-h) F' = D_0 - D_0 G' F' = F,$$

то окончательно получаем

$$J(u_0) = \text{Tr}[\psi(N) F \psi'(N)]. \quad (19)$$

4. Зависимость ошибки оценивания от величины запаздывания. Так как $x(i)$ и $\xi(i)$ независимы и $x(j) = 0$ при $j \leq 0$, то наблюдения (2) до момента h не несут никакой информации о процессе $x(i)$. Поэтому, общее время наблюдения за процессом $x(i)$ равно $N - h$ и убывает с ростом h . Рассмотрим два скалярных примера, показывающих, что увеличение запаздывания может приводить как к увеличению ошибки оценивания, так и к ее уменьшению.

Покажем, сначала, что при постоянном A_1 , определенном в (17), ошибка оценивания, как функция от h не убывает с ростом h при $0 \leq h < N$ и постоянна по h при $h \geq N$. Рассматривая $J(u_0)$ как функцию от h , при $0 \leq h < N$ из (19), получим $J(h+1) - J(h) = \psi^2(N)(F(h+1) - F(h))$. Из (18) следует, что

$$\begin{aligned} F(h+1) - F(h) &= (D_0^{-1} + G(h+1))^{-1} - (D_0^{-1} + G(h))^{-1} = \\ &= \frac{G(h) - G(h+1)}{(D_0^{-1} + G(h+1))(D_0^{-1} + G(h))}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая (17),

$$G(h) - G(h+1) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i) A_1 - \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i) A_1 = \psi^2(N-h-1) A_1 > 0.$$

То есть, ошибка оценивания, как функция от h , увеличивается с ростом запаздывания.

Рассмотрим теперь случай, когда увеличение запаздывания h в канале наблюдения может привести к уменьшению $J(u_0)$, то есть, к увеличению точности оценивания. Пусть ненаблюдаемый процесс $x(i)$ имеет вид

$$x(i) = \psi(i) x_0, \quad \psi(0) = 1, \quad (21)$$

где x_0 – гауссовская случайная величина, $\mathbf{E}x_0 = 0$, $\mathbf{E}x_0^2 = \sigma_0^2$. Наблюдаемый процесс $y(i)$ задан соотношениями

$$y(i+1) = A(i)x(i-h) + \xi(i+1), \quad x(j) = 0, \quad -h \leq j < 0, \quad y(0) = 0. \quad (22)$$

Здесь $\xi(i)$ – гауссовский случайный процесс с независимыми значениями, не зависящими от x_0 , $\mathbf{E}\xi(i) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(i) = \sigma^2(i)$. Требуется по результатам наблюдений (22) оценить величину $x(N)$.

Решение этой задачи имеет вид

$$m(N) = \sum_{j=h}^{N-1} u_0(j)y(j+1).$$

Здесь, учитывая (16)-(19),

$$u_0(j) = \psi(N)F(h)\psi'(j-h)\frac{A(j)}{\sigma^2(j+1)}, \quad F(h) = (\sigma_0^{-2} + G(h))^{-1},$$

$$G(h) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i)A_1(i+h), \quad A_1(i) = \frac{A^2(i)}{\sigma^2(i+1)},$$

а ошибка оценивания как функция от h имеет вид $J(h) = \psi^2(N)F(h)$. Из (20) следует, что для того, чтобы $J(h+1) - J(h) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} G(h) - G(h+1) &= \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i)A_1(i+h) - \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i)A_1(i+h+1) = \\ &= \psi^2(N-h-1)A_1(N-1) + \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i) \left[A_1(i+h) - A_1(i+h+1) \right] < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если предположить, что матрица A_1 постоянна, то очевидно, что неравенство (23) не выполнено, то есть, $J(h+1) - J(h) > 0$ и $J(h)$ возрастает с ростом h .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\psi(i) \equiv 1$, то есть, $x(i) \equiv x_0$. Тогда, при $0 \leq h \leq N$, $J(h)$ возрастает по h , так как

$$G(h) - G(h+1) = \sum_{i=0}^{N-h-1} A_1(i+h) - \sum_{i=0}^{N-h-2} A_1(i+h+1) = A_1(h) > 0.$$

5. Примеры. Приведем примеры, в которых при помощи неравенства (23) найдены интервалы убывания функционала $J(h)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу фильтрации (21), (22) при

$$\psi(i) = e^{-\alpha i}, \quad A(i) = e^{\beta i}, \quad \beta > \alpha > 1/2N, \quad \sigma^2(i) = \sigma_0^2 = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1(i) &= A^2(i)\sigma^{-2}(i+1) = e^{2\beta i}, \\ J(h) &= \psi^2(N)(1 + G(h))^{-1} = e^{2\alpha N} \left(1 + e^{2\beta h} \sum_{i=0}^{N-h-1} e^{2(\beta-\alpha)i} \right)^{-1} = \end{aligned}$$

$$= e^{2\alpha N} \left(1 + e^{2\beta h} \frac{e^{2(N-h)(\beta-\alpha)} - 1}{e^{2(\beta-\alpha)} - 1} \right)^{-1}.$$

Неравенство (23) принимает вид

$$e^{2(N-h)(\beta-\alpha)} (1 - e^{2\alpha}) < 1 - e^{2\beta}.$$

Решая это неравенство относительно h , получим

$$0 \leq h < h_0, \quad \text{где} \quad h_0 = N - \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \ln \frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Таким образом, на интервале $[0, h_0)$ функционал $J(h)$ как функция от h убывает.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим задачу фильтрации (21), (22) при

$$\psi(i) = \sqrt{1 - \alpha \frac{i}{N-1}},$$

$$A(i) = \sqrt{i}, \quad \sigma^2(i) = \sigma_0^2 = 1, \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}, \quad A_1(i) = i.$$

При помощи неравенства (23) найдем интервал, в котором функционал

$$J(h) = \left(1 - \frac{\alpha N}{N-1} \right) \left(1 + \sum_{i=0}^{N-h-1} \left(1 - \frac{\alpha i}{N-1} \right) (i+h) \right)^{-1}$$

убывает по h .

Неравенство (23) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\alpha h^2 + h(\alpha + 2(N-1)) - \alpha N(N-1) < 0.$$

Следовательно, при

$$0 \leq h < h_0, \quad \text{где} \quad h_0 = \frac{1}{2\alpha} \left(-\alpha - 2(N-1) + \sqrt{(\alpha + 2(N-1))^2 + 4\alpha^2 N(N-1)} \right)$$

функционал $J(h)$ убывает как функция от h .

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. *Kolmanovskii V. B., Shaikhet L.E.* Control of Systems with Aftereffect: Translations of mathematical monographs. – Providence (RI): American Mathematical Society, 1996. – Vol. 157. – 336 p.

N. V. Bradul

The optimal filtering problem.

In this paper we consider the problem of constructing an optimal mean-square estimation of a Gaussian partially observable random process observed with delay. It is shown that the solution of filtration problem can be reduced to the solution of the difference equation of the type of Wiener-Hopf, called the

fundamental equation of filtration. Special cases of the fundamental equation of filtration, in which his solution can be obtained explicitly are considered. The dependence of the error of estimation of the time lag in the observations is investigated.

Keywords: *optimal estimate, filtering problem, estimation error.*

Н. В. Брадул

Задача оптимальної фільтрації.

У статті розглянуто задачу побудови оптимальної в середньоквадратичному розумінні оцінки гаусівського частково спостережуваного випадкового процесу за спостереженнями, що містять запізнення. Показано, що розв'язок задачі фільтрації можна звести до розв'язку різницевого рівняння типу Вінера-Хопфа, якій називається основним рівнянням фільтрації. Розглянуто окремі випадки основного рівняння фільтрації, в яких його розв'язок можна отримати в явному вигляді. Досліджено залежність помилки оцінювання від величини запізнення в спостереженнях.

Ключові слова: *оптимальна оцінка, задача фільтрації, помилка оцінювання.*

Донецкий государственный ун-т управления
bradnu@ukr.net

Получено 29.10.12

УДК 517.926(07)

©2013. М. Б. Віра

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖУВАНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, знайдено умови існування і єдиності розв'язку двоточної крайової задачі для систем даного типу та побудовано його асимптотику в критичному випадку, коли гранична в'язка матриць має нульове власне значення.

Ключові слова: асимптотика, сингулярні збурення, гранична в'язка матриць.

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $t \in [0; T]$; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $x(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ – шуканий та задані n -вимірні вектори, відповідно; $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ – дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n -го порядку; M, N – квадратні матриці зі сталими елементами n -го порядку.

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1° матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ допускають на відріжку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε :

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); B(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t); f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2° коефіцієнти розвинень $A_k(t)$, $B_k(t)$, $f_k(t)$ нескінченно диференційовні на відріжку $[0; T]$;

3° $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$;

4° $(B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) \neq 0, \forall t \in [0; T]$, де $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ – власні вектори матриці $B_0(t)$ та спряженої з нею матриці $B_0^*(t)$, відповідно;

5° $\det A_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$;

6° $\text{rank} A_0(t) = \text{rank} B_0(t) = n - 1$;

7° гранична в'язка матриць

$$L(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (4)$$

при всіх $t \in [0; T]$ має прості елементарні дільники: $n - 1$ скінченних $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n - 1}$ і один нескінченний.

8° вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k.$$

Крайова задача (1), (2) розглядалась у роботах [1 – 3] у так званому некритичному випадку [4], коли матриця $A_0(t)$ не вироджена, і, отже, серед власних значень відсутнє нульове. У даній роботі розглядається більш складний критичний випадок, коли гранична в'язка матриць (4) має нульове власне значення, наявність якого значно ускладнює процес побудови асимптотики розв'язку крайової задачі (1), (2).

Припустимо для визначеності, що $\lambda_1(t) \equiv 0$. Власні вектори, які відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$ в'язки матриць (4), позначимо $\varphi_i(t)$, відповідні власні вектори спряженої їй в'язки – через $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, та визначимо їх так, щоб вони були нескінченно диференційовними і виконувалися рівності

$$(B_0(t)\varphi_i(t), \psi_i(t)) = 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

де (x, y) – скалярний добуток в унітарному n -вимірному просторі, в якому розглядається дана задача [5]. Вектори $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, які фігурують в умові 4°, визначимо так, щоб виконувалась рівність

$$(A_0(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) = 1. \quad (6)$$

2. Побудова формальних розв'язків однорідної системи. Розв'язок крайової задачі (1), (2) побудуємо, виходячи з результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку однорідної системи

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (7)$$

проведеного в [5]. Як показано в [5], за виконання умови 4° загальний розв'язок однорідної системи (7) являє собою лінійну комбінацію $n-1$ лінійно незалежних формальних розв'язків, що відповідають простим скінченним елементарним дільникам, і одного розв'язку, що відповідає нескінченному елементарному дільнику. Причому розв'язок, що відповідає елементарному дільнику λ , побудуємо у вигляді ряду

$$x_1(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(1)}(t), \quad (8)$$

розв'язки, що відповідають елементарним дільникам $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{2, n-1}$ – у вигляді

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_{\alpha_i}^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (9)$$

а розв'язок, що відповідає нескінченному елементарному дільнику – у вигляді

$$x_n(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-2} \int_{\alpha_n}^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad (10)$$

де $u_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v(t, \varepsilon)$ – n -вимірні вектор-функції, а $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{2, n-1}$, $\xi(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, які зображаються формальними розвиненнями за степенями ε :

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (11)$$

$$v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t), \quad (12)$$

α_i , $i = \overline{1, n}$ – сталі, які буде визначено нижче.

Коефіцієнти розвинень (8), (11), (12) визначимо так, щоб вектори (8)-(10) формально задовольняли систему (7). Для цього підставимо ці вектори в систему (7) і в одержаній тотожності прирівняємо вирази при однакових експонентах і без них.

Дістанемо:

$$\varepsilon B(t, \varepsilon)(u_1(t, \varepsilon))' = A(t, \varepsilon)u_1(t, \varepsilon), \quad (13)$$

$$\varepsilon B(t, \varepsilon)(u_i(t, \varepsilon))' + \lambda_i(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)u_i(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)u_i(t, \varepsilon), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (14)$$

$$\varepsilon^2 \xi(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)(v(t, \varepsilon))' + B(t, \varepsilon)v(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)v(t, \varepsilon). \quad (15)$$

Підставивши в (13) розвинення (8) і (3) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε , отримаємо нескінченну систему рівнянь:

$$A_0(t)u_0^{(1)}(t) = 0, \quad (16)$$

$$A_0(t)u_k^{(1)}(t) = b_k^{(1)}(t), \quad (17)$$

де

$$b_k^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_i(t)(u_{k-1-i}^{(1)}(t))' - \sum_{i=1}^k A_i(t)u_{k-i}^{(1)}(t).$$

Із рівняння (16) знайдемо

$$u_0^{(1)}(t) = \alpha_0(t)\varphi_1(t), \quad (18)$$

де $\alpha_0(t)$ – поки що невідома функція.

Враховуючи (18) і ввівши до розгляду оператор

$$\Gamma_1 = B_0 \frac{d}{dt} - A_1, \quad (19)$$

розглянемо рівняння (17) при $k = 1$:

$$A_0(t)u_1^{(1)}(t) = (\alpha_0(t))'B_0(t)\varphi_1(t) + \alpha_0(t)\Gamma_1\varphi_1. \quad (20)$$

Згідно з (5) умова розв'язності рівняння (20) відносно вектора $u_1^{(1)}(t)$ – ортогональність його правої частини до вектора $\psi_1(t)$ – запишеться у вигляді лінійного однорідного диференціального рівняння

$$(\alpha_0(t))' + (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)\alpha_0(t) = 0,$$

розв'язавши яке, визначимо функцію $\alpha_0(t)$:

$$\alpha_0(t) = \exp \left(- \int_0^t (\Gamma_1 \varphi_1(\tau), \psi_1(\tau)) d\tau \right). \quad (21)$$

Тоді рівняння (20) має розв'язок

$$u_1^{(1)}(t) = H_1 \Gamma_1 (\alpha_0(t) \varphi_1(t)) + \alpha_1(t) \varphi_1(t),$$

де $H_1(t)$ – налівовернена матриця для матриці $A_0(t)$, а $\alpha_1(t)$ – функція, яка підлягає визначенню.

Продовжуючи так і далі, із умови розв'язності рівняння (17) на k -у кроці дістанемо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $\alpha_{k-1}(t)$:

$$(\alpha_{k-1}(t))' + (\Gamma_1 \varphi_1, \psi_1) \alpha_{k-1}(t) + \left(\sum_{j=0}^{k-2} \sum_{l=1}^{k-j} \tilde{P}_l^{k-j} (H_1 \Gamma) (\alpha_j \varphi_1), \psi_1 \right) = 0. \quad (22)$$

Символом $\tilde{P}_k^j(H_1 \Gamma)$ позначено оператор, який являє собою суму всіх можливих добутків k "множників" $H_1 \Gamma_{i_1}, \dots, H_1 \Gamma_{i_k}$ з натуральними індексами $i_1, \dots, i_k$, сума яких дорівнює j , де $\Gamma_i = B_{i-1} \frac{d}{dt} - A_i$, $i = 1, 2, \dots$. При цьому перший множник H_1 у всіх доданках "відбирається". Наприклад, $\tilde{P}_2^3(H_1 \Gamma) = \Gamma_1 H_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 H_1 \Gamma_1$.

Знайшовши $\alpha_{k-1}(t)$ з рівняння (22), вектор $u_k^{(1)}(t)$ визначимо за формулою

$$u_k^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} P_l^{k-j} (H_1 \Gamma) (\alpha_j \varphi_1) + \alpha_k(t) \varphi_1(t), \quad (23)$$

де $P_k^j(H_1 \Gamma) = H_1 \tilde{P}_k^j(H_1 \Gamma)$, $\alpha_k(t)$ – невідома функція, яка аналогічним чином визначається на наступному кроці.

Підставивши в (14) розвинення (3), (11) і прирівнявши коефіцієнти при k -х степенях ε , дістанемо:

$$(A_0(t) - \lambda_i B_0(t)) u_k^{(i)}(t) = b_k^{(i)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, i = \overline{2, n-1} \quad (24)$$

де

$$b_k^{(i)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t) B_0(t) \varphi_i(t) + g_k^{(i)}(t),$$

$$g_k^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-l} \lambda_l^{(i)} B_j u_{k-l-j}^{(i)} + \lambda_i \sum_{j=1}^k B_j u_{k-j}^{(i)} - \sum_{l=1}^k A_l u_{k-l}^{(i)} + \sum_{l=0}^{k-1} B_l (u_{k-1-l}^{(i)})'.$$

Із умови розв'язності рівнянь (24) знайдемо

$$\lambda_k^{(i)}(t) = -(g_k^{(i)}(t), \psi_i(t)), \quad k \geq 1, \quad (25)$$

а вектори $u_k^{(i)}(t)$ виразимо формулою

$$u_k^{(i)}(t) = H_i(t)b_k^{(i)}(t), i = \overline{2, n-1}, k \geq 1, \quad (26)$$

де $H_i(t)$ – напівобернена матриця для матриці $A_0(t) - \lambda_i(t)B_0(t)$.

Аналогічно, підставивши в (15) розвинення (3), (12) та прирівнявши вирази при однакових степенях ε , маємо

$$B_0(t)v_k(t) = a_k(t), k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

де

$$a_k = \xi_{k-1}A_0\tilde{\varphi} + l_k, k = 1, 2, \dots, \\ l_k = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-i} \xi_i A_j v_{k-1-i-j} - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \xi_i B_j v'_{k-2-i-j} - \sum_{i=1}^k B_i v_{k-i}, k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Врахувавши 4°, (6), із умови розв'язності рівнянь (27) – ортогональності векторів $a_k(t)$ до вектора $\psi(t)$ – знайдемо

$$\xi_0(t) = (B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)), \quad (29)$$

$$\xi_k(t) = -(l_{k+1}(t), \tilde{\psi}(t)), k = 2, 3, \dots \quad (30)$$

Після цього вектори $v_k(t)$ визначимо за формулою

$$v_k(t) = G(t)a_k(t), k \geq 1, \quad (31)$$

де $G(t)$ – напівобернена матриця до $B_0(t)$.

За рекурентними формулами (23), (25), (26), (29)-(31) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (8), (11), (12).

3. Побудова формального частинного розв'язку неоднорідної системи.

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) побудуємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \tilde{v}(t, \varepsilon), \quad (32)$$

де $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ – n -вимірний вектор, який зображається формальним розвиненням

$$\tilde{v}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(t). \quad (33)$$

Для визначення коефіцієнтів $\tilde{v}_k(t)$ підставимо (33) у систему (1) і прирівняємо вирази при однакових степенях малого параметра. Дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=0}^k B_i \tilde{v}'_{k-1-i} = \sum_{i=0}^k A_i \tilde{v}_{k-i} + f_{k-1}, k = 0, 1, \dots \quad (34)$$

При $k = 0$ маємо

$$A_0(t)\tilde{v}_0(t) = 0,$$

звідки

$$\tilde{v}_0(t) = \beta_0(t)\varphi_1(t), \quad (35)$$

де $\beta_0(t)$ – деяка достатньо гладка функція, яка підлягає визначенню.

На наступному кроці рівняння (34) запишеться у вигляді

$$A_0(t)\tilde{v}_1(t) = B_0(t)(\tilde{v}_0(t))' - A_1(t)\tilde{v}_0(t) - f_0(t),$$

або, враховуючи (19):

$$A_0(t)\tilde{v}_1(t) = \Gamma_1\tilde{v}_0(t) - f_0(t). \quad (36)$$

Для його сумісності необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$(\Gamma_1\tilde{v}_0(t) - f_0(t), \psi_1(t)) = 0,$$

яку, враховуючи (35) і (5), запишемо у вигляді

$$(\beta_0(t))' + (\Gamma_1\varphi_1(t), \psi_1(t))\beta_0(t) - (f_0(t), \psi_1(t)) = 0. \quad (37)$$

Розв'язавши одержане диференціальне рівняння, дістанемо функцію $\beta_0(t)$.

У свою чергу з рівняння (36) знайдемо:

$$\tilde{v}_1(t) = H_1\Gamma_1(\beta_0(t)\varphi_1(t)) - H_1(t)f_0(t) + \beta_1(t)\varphi_1(t),$$

де $\beta_1(t)$ – поки що невідома функція, яка визначається на наступному кроці.

Використавши умову сумісності рівняння (34) на k -у кроці, дістанемо лінійне диференціальне рівняння для визначення $\beta_{k-1}(t)$:

$$\begin{aligned} & (\beta_{k-1}(t))' + (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)\beta_{k-1}(t) + \\ & + \left(\sum_{j=0}^{k-2} \sum_{l=1}^{k-j} \tilde{P}_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\beta_j\varphi_1) - \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{l=1}^{k-1-j} \tilde{P}_l^{k-1-j}(H_1\Gamma)H_1f_j - f_{k-1}, \psi_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

У свою чергу вектор $\tilde{v}_k(t)$ визначимо за формулою

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(t) = & \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} P_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\beta_j\varphi_1) - \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{l=1}^{k-1-j} P_l^{k-1-j}(H_1\Gamma)H_1f_j - \\ & - H_1f_{k-1} + \beta_k(t)\varphi_1(t). \end{aligned} \quad (39)$$

4. Побудова асимптотики розв'язку крайової задачі. Перейдемо тепер до побудови розв'язку крайової задачі (1), (2). Розглянемо випадок, коли виконується умова

$$9^\circ \operatorname{Re}\lambda_i(t) < 0, i = \overline{2, l}, \operatorname{Re}\lambda_j(t) > 0, j = \overline{l+1, n-1}, \operatorname{Re}\xi_0(t) > 0, \forall t \in [0; T].$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & \varepsilon^{-1} u_1(t, \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \sum_{i=2}^l u_i(t, \varepsilon) \cdot c_i(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + \varepsilon^{-1} \sum_{j=l+1}^{n-1} u_j(t, \varepsilon) \cdot c_j(\varepsilon) \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_t^T \lambda_j(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + \varepsilon^{-1} v(t, \varepsilon) \cdot c_n(\varepsilon) \exp \left(-\varepsilon^{-2} \int_t^T \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \tilde{v}(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (40)$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ – шукані скалярні множники, які зображаються розвиненнями

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (41)$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$ визначимо з крайової умови (2). Підставивши вектор (40) у крайову умову (2), дістанемо рівняння

$$\begin{aligned} & Mu_1(0, \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) + \sum_{i=2}^l Mu_i(0, \varepsilon) \cdot c_i(\varepsilon) + \\ & + \sum_{j=l+1}^{n-1} Mu_j(0, \varepsilon) \cdot c_j(\varepsilon) \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_0^T \lambda_j(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + Mv(0, \varepsilon) \cdot c_n(\varepsilon) \exp \left(-\varepsilon^{-2} \int_0^T \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + M\tilde{v}(0, \varepsilon) + Nu_1(T, \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) + \sum_{i=2}^l Nu_i(T, \varepsilon) \cdot c_i(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + \sum_{j=l+1}^{n-1} Nu_j(T, \varepsilon) \cdot c_j(\varepsilon) + Nv(T, \varepsilon) \cdot c_n(\varepsilon) + N\tilde{v}(T, \varepsilon) = d(\varepsilon). \end{aligned}$$

Знехтувавши експоненціально малими доданками і прирівнявши вирази при однакових степенях малого параметра, маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k [Mu_j^{(1)}(0) + Nu_j^{(1)}(T)] c_{k-j}^{(1)} + \sum_{i=2}^l \sum_{j=0}^k Mu_j^{(i)}(0) \cdot c_{k-j}^{(i)} + \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^k Nu_j^{(i)}(T) \cdot c_{k-j}^{(i)} + \\ & + \sum_{j=0}^k Nv_j(T) \cdot c_{k-j}^{(n)} = d_{k-1} - M\tilde{v}_k(0) - N\tilde{v}_k(T). \end{aligned}$$

Ввівши позначення

$$c_k = \text{col}(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, \dots, c_0^{(l)}, c_0^{(l+1)}, \dots, c_0^{(n-1)}, c_0^{(n)}),$$

$$U_k = [Mu_k^{(1)}(0) + Nu_k^{(1)}(T); Mu_k^{(2)}(0), \dots, \\ Mu_k^{(l)}(0), Nu_k^{(l+1)}(T), \dots, Nu_k^{(n-1)}(T), Nv_k(T)], \quad k = 0, 1, \dots,$$

останнє рівняння запишемо у векторно-матричному вигляді

$$U_0 c_k + \sum_{i=1}^k U_i c_{k-i} = d_{k-1} - M\tilde{v}_k(0) - N\tilde{v}_k(T), \quad k = 0, 1, \dots \quad (42)$$

Згідно з (8), (11), (12), матриця $U_0(t)$ має вигляд

$$U_0 = [M\varphi_1(0) + \exp\left(-\int_0^T (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)d\tau\right) N\varphi_1(T); M\varphi_2(0), \dots, M\varphi_l(0), \\ N\varphi_{l+1}(T), \dots, N\varphi_{n-1}(T), N\tilde{\varphi}(T)].$$

Припустимо виконання умови

$$10^\circ \det U_0 \neq 0.$$

Тоді із рівняння (42) однозначно визначається вектор сталих c_k :

$$c_k = U_0^{-1}[d_{k-1} - M\tilde{v}_k(0) - N\tilde{v}_k(T) - \sum_{i=1}^k U_i c_{k-i}], \quad k = 0, 1, \dots \quad (43)$$

Підставивши одержані сталі у вектор (40), дістанемо формальний розв'язок крайової задачі.

Методами роботи [1] можна показати, що за виконання накладених умов побудований у такий спосіб вираз (40) є асимптотичним зображенням єдиного точного розв'язку крайової задачі (1), (2).

Справджується така теорема.

Теорема. Якщо виконуються умови $1^\circ - 10^\circ$, то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k u_j^{(1)}(t) c_{k-j}^{(1)} + \\ + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=2}^l \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(-\varepsilon^{-1} \int_t^T \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp\left(-\varepsilon^{-2} \int_t^T \xi_m^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{v}_k(t) + O(\varepsilon^{m-3}),$$

де $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_k(t)$, $\tilde{v}_k(t)$ – n -вимірні вектор-функції, які визначаються рекурентними формулами (23), (26), (31), (39); $\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)$, $i = \overline{2, n-1}$, $\xi_m(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень

$$\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \xi_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \xi_k(t),$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами (25), (29), (30), $c_k^{(i)}$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$ – сталі множники, які визначаються за формулами (43).

1. Яковец В.П. Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. – 2008. – Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 319-332.
2. Яковец В.П. Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 272-286.
3. Віра М.Б. Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи // Динамические системы: межведомственный научный сборник. – 2009. – Вып. 26. – С. 13-24.
4. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
5. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

М. В. Віра

On constructing of asymptotic solution of the boundary-value problem for the linear degenerated singularly perturbed system of differential equations in critical case.

Using the theory of the asymptotic integration of singularly perturbed systems of differential equations with degenerations, the existence and uniqueness conditions for the solution of the two-pointed boundary-value problem for the given system have been found. The asymptotics of the solution in critical case is constructed. It is considered that the boundary bundle of matrices has one eigenvalue which is identically equal to zero.

Keywords: asymptotics, singular perturbations, boundary bundle of matrices.

М. Б. Віра

О построении асимптотического решения краевой задачи для линейной вырожденной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в критическом случае.

Исходя из результатов асимптотического анализа общего решения линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с вырождаемой матрицей при производной, определены условия существования и единственности решения двухточечной краевой задачи для систем данного типа и построена его асимптотика в критическом случае, когда предельный пучок матриц имеет нулевое собственное значение.

Ключевые слова: асимптотика, сингулярные возмущения, предельный пучок матриц.

Ніжинський державний ун-т ім. М. Гоголя
VyraMaryna@mail.ru

Получено 11.04.13

УДК 517.5

©2013. Н. П. Волчкова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СМИТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

Изучаются векторные поля в евклидовом пространстве с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса. Получено описание таких полей в виде рядов по специальным функциям.

Ключевые слова: векторные поля, нулевые сферические средние, сферические гармоники.

1. Введение. Пусть $\mathcal{P}$ – множество функций $f \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию периодичности

$$f(x-1) - f(x+1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Согласно теории рядов Фурье, f можно разложить в равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \pi m x + b_m \sin \pi m x), \quad (2)$$

т.е. представить f в виде суммы константы $\frac{a_0}{2}$ и последовательности функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, принадлежащих $\mathcal{P}$ и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям $f_m''(x) + \pi^2 m^2 f_m(x) = 0$.

Если рассматривать f как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие (1) означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу единичного радиуса. Таким образом, равенство (2) дает представление для полей с нулевым потоком через все сферы единичного радиуса. Этот факт допускает нетривиальное обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$. При этом, константа $\frac{a_0}{2}$ интерпретируется как соленоидальное векторное поле, а $\{f_m\}$ заменяются на потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению для собственных функций оператора Лапласа ∇^2 . Указанное утверждение является частным случаем следующего локального результата Д. Смита [1].

Теорема А. Пусть $\mathbf{A} : B_{R+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($1 < R \leq \infty$) – векторное поле в $\mathbb{R}^n$ класса $C^{n+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), имеющее нулевой поток через любую сферу единичного радиуса, лежащую в B_{R+1} . Тогда для $\mathbf{x} \in B_R$ имеет место равенство

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}_m^p(\mathbf{x}), \quad (3)$$

в котором ряд сходится равномерно на компактах из B_R , $\mathbf{A}^s$ – соленоидальное векторное поле класса $C^{n+\alpha}$ и $\mathbf{A}_m^p$ – потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению $(\nabla^2 + \nu_m^2) \mathbf{A}_m^p = \mathbf{0}$, где $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания. Указанное разложение является единственным.

Символ B_R в теореме А и ниже обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле. Класс $C^{n+\alpha}$ определяется как класс таких функций $f \in C^n$, у которых частные производные порядка n удовлетворяют условию Гельдера с показателем α .

Одним из существенных недостатков теоремы А является отсутствие разложения (3) на всей области определения. В данной работе получено полное описание полей $\mathbf{A} : B_R \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($0 < R \leq \infty$), имеющих нулевой поток через все сферы фиксированного радиуса r из B_R .

2. Формулировка основного результата. Пусть $r > 0$ фиксировано. При $r < R \leq \infty$ обозначим $\mathbf{V}_r(B_R)$ множество непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : B_R \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через все сферы радиуса r , лежащие в B_R .

Далее, как обычно, S^{n-1} – единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1} . Пространство $L^2(S^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [2, введение, § 3]). Пусть d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Для точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |\mathbf{x}|$, а если $\mathbf{x} \neq 0$, то $\sigma = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в $\mathbb{R}^n$ по формуле $Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)$. Всякой функции $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R),$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma.$$

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию, определяемую равенством

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (4)$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

(см., например, [3, глава 4]).

Теорема 1. Пусть $\mathbf{A} : B_R \rightarrow \mathbb{R}^n$ – векторное поле класса C^∞ . Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_R)$ в том и только том случае, когда

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in B_R, \quad (5)$$

где $\mathbf{A}^s$ – соленоидальное векторное поле класса C^∞ , B – скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l} \rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right),$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \rightarrow \infty$.

Таким образом, в отличие от теоремы **A**, теорема 1 дает разложение для полей **A** из рассматриваемого класса на всей области определения. Отметим также, что теорема 1 является развитием результатов В.В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса на случай векторных полей (см. [4], а также [5-7]).

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для функции $h(t) = {}_1F_2(\alpha; \alpha + 1, \beta; \gamma t)$ имеет место соотношение

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha \Gamma(\beta) \frac{J_{\beta-1}(2\sqrt{-\gamma t})}{\sqrt{-\gamma t}^{\beta-1}}.$$

Доказательство. Из (4) и определения h имеем

$$\alpha h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k \alpha}{(\alpha + 1)_k (\beta)_k} \frac{(\gamma t)^k}{k!}, \quad (6)$$

$$th'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\alpha + 1)_k (\beta)_k} \frac{k(\gamma t)^k}{k!}. \quad (7)$$

Складывая (6) с (7) и учитывая, что

$$\frac{(\alpha)_k}{(\alpha + 1)_k} (\alpha + k) = \alpha,$$

получаем

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta)_k} \frac{(\gamma t)^k}{k!}. \quad (8)$$

Используя (8) и разложение

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + 1)_k} \frac{(-z^2/4)^k}{k!}$$

(см. [3, глава 7]), приходим к требуемому утверждению. $\square$

Лемма 2. Пусть $\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = \psi_{m,k}(\rho^2) Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$, где

$$\psi_{m,k}(\rho^2) = {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right).$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = \zeta_{n,k} \mathcal{I}_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m \rho}{r}\right) Y_l^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где

$$\mathcal{I}_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z)}{z^{\nu}},$$

$$\zeta_{n,k} = (n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Доказательство. Обозначим через $b_{m,k,l}^j(\mathbf{x})$ компоненты поля $\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x})$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{m,k,l}^j(\mathbf{x})}{\partial x_j} &= \psi_{m,k}(\rho^2)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + 2\psi'_{m,k}(\rho^2)x_j^2Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + \\ &\quad \psi_{m,k}(\rho^2)x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) &= n\psi_{m,k}(\rho^2)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + 2\psi'_{m,k}(\rho^2)\rho^2Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + \\ &\quad \psi_{m,k}(\rho^2) \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\operatorname{div} \mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = (2\psi'_{m,k}(\rho^2)\rho^2 + (n+k)\psi_{m,k}(\rho^2))Y_l^{(k)}(\mathbf{x}).$$

Применяя лемму 1, получаем (9). $\square$

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$, $\overline{B_r}(\mathbf{x})$ — замкнутый шар радиуса r из B_R с центром в точке $\mathbf{x}$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали к границе шара $\overline{B_r}(\mathbf{x})$. По формуле Гаусса-Остроградского имеем

$$\int_{\overline{B_r}(\mathbf{x})} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial \overline{B_r}(\mathbf{x})} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad \text{для любого } x \in B_{R-r}.$$

Отсюда (см. [4, теорема 3])

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{\nu_m \rho}{r} \right), \quad (10)$$

где константы $c_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \rightarrow \infty$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{x}$, где

$$B(\mathbf{x}) = \int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\mathbf{x}) t^{n-1} dt.$$

Тогда

$$B_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} B(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma = \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma) t^{n-1} dt \right) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{S^{n-1}} \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma \right) t^{n-1} dt = \int_0^1 (\operatorname{div} \mathbf{A})_{k,l}(t\rho) t^{n-1} dt.$$

Теперь в соответствии с (10),

$$B_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{t\nu_m\rho}{r} \right) t^{\frac{n}{2}} dt.$$

Используя формулу

$$\int_0^1 J_{\nu}(at) t^{\lambda} dt = \frac{a^{\nu}}{2^{\nu}(\lambda + \nu + 1)\Gamma(\nu + 1)} \times {}_1F_2 \left(\frac{\lambda + \nu + 1}{2}; \frac{\lambda + \nu + 3}{2}, \nu + 1; -\frac{a^2}{4} \right), \quad \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -1$$

(см. [8, пункт 1.9.1, формула 1]), получаем

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l} \rho^k {}_1F_2 \left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r} \right)^2 \right), \quad (11)$$

где

$$\gamma_{m,k,l} = \frac{c_{m,k,l}}{\zeta_{n,k}} \left(\frac{\nu_m}{r} \right)^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{C}^j(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\mathbf{x}) t^{n-1} dt + x_j \int_0^1 \frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) t^n dt.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{C}(\mathbf{x}) = n \int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\mathbf{x}) t^{n-1} dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} (\operatorname{div} \mathbf{A}(t\mathbf{x})) t^n dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (12)$$

Полагая

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{A} - \mathbf{C},$$

из (11) и (12) получаем представление (5).

Обратное утверждение теоремы 1 следует из леммы 2, формулы Гаусса-Остроградского и [4, теорема 3]. Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Smith J.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403-416.
2. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 1, 2. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296 с.
4. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 15-34.
5. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
6. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 pp.
7. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

N. P. Volchkova

On a theorem of Smith and its generalizations.

Vector fields in Euclidean space which have zero flux through every sphere of fixed radius are studied. For fields in such classes a description in the form of a series in special functions is obtained.

Keywords: vector fields, zero spherical means, spherical harmonics.

Н. П. Волчкова

Про одну теорему Сміта та її узагальнення.

Вивчаються векторні поля в евклідовому просторі, які мають нульову течію через сфери фіксованого радіуса. Одержано опис таких полів у вигляді рядів за спеціальними функціями.

Ключові слова: векторні поля, нульові сферичні середні, сферичні гармоніки.

Донецкий национальный технический ун-т
v.volchkov@donpu.edu.ua

Получено 15.05.13

УДК 519.21+511.72

©2013. Я. В. Гончаренко, Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий

ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ПІДСУМИ ЗНАКОДОДАТНОГО РЯДУ ЛЮРОТА З НЕЗАЛЕЖНИМИ ДОДАНКАМИ

Вивчаються лебегівська структура, тополого-метричні і фрактальні властивості спектра (мінімального замкненого носія) розподілу випадкової підсуми заданого знакододатного ряду Люрота з незалежними доданками, поведінка модуля її характеристичної функції на нескінченності. Повністю вивчено структуру, знайдено необхідні та достатні умови аномальної фрактальності, нульвимірності Лебега та канторовості спектра. Доведено, що сингулярний розподіл підсуми є близьким до дискретного за поведінкою характеристичної функції на нескінченності, якщо ряд не є періодичним.

Ключові слова: знакододатний ряд Люрота, підсума ряду Люрота, множина підсум ряду Люрота, випадкова підсума ряду Люрота, сингулярний розподіл, лебегівська структура розподілу, характеристична функція випадкової величини.

Вступ. Нагадаємо, що *числовим знакододатним рядом Люрота* (далі: рядом Люрота) називається вираз вигляду

$$\frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{d_1(d_1 + 1)(d_2 + 1)} + \frac{1}{d_1(d_1 + 1)d_2(d_2 + 1)(d_3 + 1)} + \dots \quad (1)$$

$$\dots + \frac{1}{d_1(d_1 + 1)d_2(d_2 + 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)} + \dots,$$

де (d_n) – фіксований нескінченний впорядкований набір натуральних чисел.

Очевидно, що ряд (1) визначається послідовністю натуральних чисел (d_n) . Далі використовуватимемо скорочення $D_n = d_1(d_1 + 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)$. Тоді

$$D_{n+1} = D_n d_n (d_{n+1} + 1), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Кожен ряд Люрота є збіжним, і його сума належить півінтервалу $(0, 1]$, причому ряду (1) – $(\frac{1}{d_1 + 1}, 1]$, зокрема, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Зауважимо, що залишок (хвіст) ряду Люрота (1)

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{D_n} \geq \frac{1}{D_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{r_k} \leq D_{k+1} \quad (3)$$

не є рядом Люрота, але подається у вигляді:

$$r_k = \frac{1}{D_k d_k} \cdot \left(\frac{1}{d_{k+1} + 1} + \frac{1}{d_{k+1}(d_{k+1} + 1)(d_{k+2} + 1)} + \dots \right) = \frac{x_k}{D_k d_k},$$

де вираз в круглих дужках є рядом Люрота (з сумою x_k).

Теорема 1. ([2]) Будь-яке число $x \in (0, 1]$ єдиним чином розкладається в знакододатний ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n) , $d_n = d_n(x)$, така, що

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1 + 1)d_2(d_2 + 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)} = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L. \quad (4)$$

Останній символічний запис називається L -зображенням числа x .

Наслідок. Різні ряди Люрота мають різні суми.

Теорема 2. ([2]) Число $x \in (0, 1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L -зображення є періодичним.

Означення 1. Підрядом ряду Люрота (1) називається кожен вираз виду $\sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} \frac{1}{D_n}$,

де M – фіксована підмножина множини натуральних чисел.

Кожен ряд Люрота має континуальну множину підрядів.

Суму підряду Люрота називатимемо підсумою ряду Люрота.

Підсуму x ряду Люрота (1), залежну від множини M , можна подати у вигляді

$$x(M) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1(d_1 + 1)d_2(d_2 + 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}, \quad (5)$$

$$\text{де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

Множину всіх підсум заданого ряду Люрота з сумою r позначатимемо C_r , тобто

$$C_r = \{x : x = x(M), M \in 2^{\mathbb{N}}\}.$$

Очевидно, що жоден з підрядів ряду Люрота при $M \neq \mathbb{N}$, не є рядом Люрота.

Означення 2. Якщо $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{D_k}$, де $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, то це символічно записуватимемо $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{C_r}$ і називатимемо C_r -зображенням числа x . При цьому число $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ називається k -тим C_r -символом числа x .

Лема 1. Якщо $d_n \neq 1$ для нескінченної кількості значень $n \in \mathbb{N}$ і $M_1 \neq M_2$, то для підсум $x(M_1)$ і $x(M_2)$ виконується нерівність $x(M_1) \neq x(M_2)$.

Доведення. Нехай

$$x(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{C_r}, \quad x(M_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} = \Delta_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_n \dots}^{C_r}.$$

Оскільки $M_1 \neq M_2$, то існує m таке, що $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$, але $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ при $i < m$. Не порушуючи загальності, нехай $\varepsilon_m = 1$, а $\varepsilon'_m = 0$. Розглянемо різницю

$$x(M_1) - x(M_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} = \frac{1}{D_m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} \geq \frac{1}{D_m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{D_i} =$$

$$= \frac{1}{D_m} \left(1 - \frac{1}{d_m(d_{m+1} + 1)} - \frac{1}{d_m(d_{m+1} + 1)d_{m+1}(d_{m+2} + 1)} - \dots \right) > 0,$$

оскільки серед членів послідовності (d_{m+j}) існують відмінні від одиниці.

Отже, $x(M_1) > x(M_2)$. $\square$

ЗАУВАЖЕННЯ. Окремої уваги заслуговують ряди Люрота, для яких $d_n = 1$ при $n \geq n_0$. Для них $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \dots \varepsilon_n 1(0)}^{C_r} = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \dots \varepsilon_n 0(1)}^{C_r}$.

ОЗНАЧЕННЯ 3. Якщо $(c_1, \dots, c_n)$ – фіксований набір 0 та 1, то множину

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \varepsilon_{m+1} \varepsilon_{m+2} \dots \varepsilon_{m+j} \dots}^{C_r} \quad \varepsilon \in \mathbb{N}\}$$

називатимемо C_r -циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$.

В л а с т и в о с т і C_r -циліндрів:

1. $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = \Delta_{c_1 \dots c_m 0}^{C_r} \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{C_r}$.
2. $\min \Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{D_i} = a$, $\max \Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = a + r_m$,
- причому $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = [a, b] \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 1$.
3. $d(\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r}) = r_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$.
4. Основне метричне відношення:

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m i}^{C_r}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r}|} = \frac{r_{m+1}}{r_m} = \frac{r_{m+1}}{\frac{1}{D_{m+1}} + r_{m+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}}}.$$

5. Мають місце нерівності:

$$\frac{1}{1 + d_{m+1}(d_{m+2} + 1)} \leq \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m i}^{C_r}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r}|} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1}}}.$$

Справді, враховуючи (2), (3) і те, що $r_{m+1} < 1$ та $\frac{1}{D_{m+1}} \leq r_m < r_0$, отримуємо:

$$\frac{1}{D_{m+1}} \leq \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}} \leq \frac{D_{m+2}}{D_{m+1}} = \frac{D_{m+1} d_{m+1} (d_{m+2} + 1)}{D_{m+1}} = d_{m+1} (d_{m+2} + 1).$$

Тоді $1 + \frac{1}{D_{m+1}} \leq 1 + \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}} \leq 1 + d_{m+1} (d_{m+2} + 1)$.

А отже, $\frac{1}{1 + d_{m+1} (d_{m+2} + 1)} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1}}}$.

6. $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m}^{C_r} = x = \Delta_{c_1 \dots c_m \dots}^{C_r}$ для довільної послідовності (c_m) , $c_m \in A$.

Теорема 3. ([2]) Множина C_r підсум ряду Люрота (1) є континуальною, досконалою множиною, яка є:

1. відрізком $[0, 1]$, якщо $d_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
2. об'єднанням скінченного числа циліндрів (відрізків), якщо $d_n = 1$ для всіх n , більших деякого n_0 ;
3. ніде не щільною, досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n .

1. Випадкова підсума ряду Люрота з незалежними доданками. Нехай (d_n) – задана послідовність натуральних чисел; (θ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} , відповідно, причому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{D_n} = \Delta_{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \dots}^{C_r}, \quad D_n = d_1(d_1 + 1) \dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1), \quad (6)$$

яка є випадковою підсумою ряду (1) з незалежними доданками. Згідно з теоремою Джессена-Вінгера [9] випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу (чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний). Наслідком відомої теореми П. Леві [15] є наступний критерій дискретності.

Лема 2. Для того, щоб випадкова величина ξ мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.

Наслідок. Для того, щоб випадкова величина ξ мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $M = 0$.

Теорема 4. Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складається з точки $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{D_k}$, де $p_{i_k k} = \max\{p_{0k}, p_{1k}\}$ і всіх точок x вигляду $x = \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{D_k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{i_k}{D_k}$, де $\varepsilon_k \in A = \{0, 1\}$, $p_{\varepsilon_k k} > 0$, $k \in N$.

Доведення. З незалежності θ_k і єдності C_r -зображення числа впливає, що

$$P\{\xi = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{C_r}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k}, \quad \text{тобто} \quad P\{\xi = x_0\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k k}.$$

Спочатку доведемо необхідність: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{\varepsilon_k(x)k} > 0$ для всіх $k \in N$ і C_r -зображення точки x відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими m C_r -символами, то

$$P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^m p_{\varepsilon_k k} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{i_k k} = \prod_{k=1}^m p_{\varepsilon_k k} \cdot \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{i_k k}}.$$

Нехай A_m – множина всіх точок x , C_r -цифри яких співпадають з C_r -цифрами точки x_0 , починаючи з m . Тоді послідовність множин A_m має властивості:

$$1. \quad \{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \dots$$

$$2. \quad P\{\xi \in A_m\} = \sum_{\varepsilon_1 \in A} \dots \sum_{\varepsilon_{m-1} \in A} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{\varepsilon_k k} \cdot \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{i_k k}} \right) = \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{i_k k}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Отже, зліченна множина $A = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу випадкової величини ξ , тобто розподіл ξ є дискретним.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x таке, що

$$0 < P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon_k k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M, \quad \text{тобто } M > 0. \quad \square$$

2. Спектральні властивості розподілу ξ . Нагадаємо, що *спектром S_ξ розподілу випадкової величини ξ* називається множина всіх точок росту її функції розподілу F_ξ , тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл випадкової величини ξ , тобто

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\} = \{x : \mathbb{P}\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0, 1\}$ і $k \in N$, то спектр S_ξ співпадає з множиною всіх підсум ряду Люрота.

Лема 3. *Спектром розподілу випадкової величини ξ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}, \ p_{\varepsilon_k k} > 0 \ \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\xi$. Нехай $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r} = x \in E$. Тоді

$$\mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} = \prod_{i=1}^k p_{\varepsilon_i i} > 0 \ \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r} \subset (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Тому

$$\mathbb{P}\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} \geq \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} > 0, \text{ тобто } x \in S_\xi \text{ і } E \subset S_\xi.$$

2. Покажемо тепер, що $S_\xi \subset E$. Нехай $x \in S_\xi$, тобто

$$\mathbb{P}\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} > 0 \ \forall \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{\varepsilon_k k} = 0$. Тоді $\mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} = \prod_{i=1}^k p_{\varepsilon_i i} = 0$. Розглянемо довільне ξ таке, що $x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}$. Можливі випадки:

- 1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}$;
- 2) $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \not\subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку $\mathbb{P}\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} \leq \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} = 0$, що суперечить (7).

У другому випадку ξ є односторонньо граничною точкою множини C_r . Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x - \varepsilon; x) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}, \quad \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} = 0.$$

І в цьому випадку $\mathbb{P}\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r}\} = 0$, що суперечить умові (7). Отримане протиріччя доводить, що $p_{\varepsilon_k k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\xi = E$, що й вимагалось довести. $\square$

3. Лебегівська структура розподілу випадкової величини ξ .

Теорема 5. *Нехай розподіл ξ є неперервним, тобто $M = 0$. Тоді ξ має:*

1. абсолютно неперервний розподіл, коли

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} (1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2 < \infty, \text{ якщо } d_n = 1 \text{ для всіх } n > n_0; \quad (8)$$

2. сингулярний розподіл канторівського типу у протилежному випадку, тобто, коли $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n .

Доведення. Якщо $M = 0$, то розподіл ξ , згідно з наслідком з теореми, є неперервним. Оскільки

$$\xi = \xi_1 + \frac{1}{D_{n_0}} \xi', \text{ де } \xi_1 = \frac{\theta_1}{D_1} + \dots + \frac{\theta_{n_0}}{D_{n_0}}$$

має дискретний розподіл, а ξ' є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами. Тому згідно з відомими фактами [16], ξ' , а отже, і ξ мають абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли виконується (8).

Тепер розглянемо випадок, коли $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n . Згідно з теоремою 3, $S_\xi \subset C_r$ і $\lambda(C_r) = 0$. Тоді $\lambda(S_\xi) = 0$. Отже, ξ має сингулярний розподіл канторівського типу, що й вимагалось довести. $\square$

4. Функція розподілу випадкової величини ξ . Функцію розподілу F_ξ випадкової величини ξ досить визначити в точках спектра розподілу S_ξ , оскільки в інших точках вона довізнається за неперервністю та монотонністю.

Лема 4. В точці $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}^{C_r} = x \in S_\xi$ функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ виражається

$$F_\xi(x) = \beta_{\varepsilon_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j} \right], \quad (9)$$

де $\beta_{0k} = 0$, $\beta_{1k} = p_{0k}$, тобто $\beta_{\varepsilon_k k} = \varepsilon_k p_{0k}$.

Доведення. Подія $\{\xi < x\}$ подається у вигляді

$$\begin{aligned} \{\xi < x\} = & \{\theta_1 < \varepsilon_1\} \cup \{\theta_1 = \varepsilon_1, \theta_2 < \varepsilon_2\} \cup \dots \cup \\ & \cup \{\theta_1 = \varepsilon_1, \theta_2 = \varepsilon_2, \dots, \theta_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \theta_k < \varepsilon_k\} \cup \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки події у (10) несумісні, то отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi < x\} = & \mathbb{P}\{\theta_1 < \varepsilon_1\} + \mathbb{P}\{\theta_1 = \varepsilon_1, \theta_2 < \varepsilon_2\} + \dots + \\ & + \mathbb{P}\{\theta_1 = \varepsilon_1, \theta_2 = \varepsilon_2, \dots, \theta_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \theta_k < \varepsilon_k\} + \dots \end{aligned}$$

Враховуючи (10) і незалежність подій, маємо:

$$\mathbb{P}\{\theta_1 = \varepsilon_1, \dots, \theta_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \theta_k < \varepsilon_k\} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{\theta_i = \varepsilon_i\} \right) \cdot \mathbb{P}\{\theta_k < \varepsilon_k\} = \beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j}.$$

Отже, функція розподілу $F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\}$ подається у формі (9). $\square$

Теорема 6. Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ виражається $F_\xi(x) = F_\xi(\bar{x})$, де $\bar{x} = \sup\{u : u < x, u \in S_\xi\}$.

Теорема 6 випливає з леми 4 і означення функції розподілу.

5. Характеристична функція випадкової величини ξ та її властивості.

Нагадаємо, що характеристичною функцією випадкової величини X називається вираз Me^{itX} .

Лема 5. Характеристична функція випадкової величини ξ , визначеної рівністю (6), має вигляд $f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{it}{D_k} \right)$, а її модуль записується у вигляді

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|, \quad \text{де } |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2D_k}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$\begin{aligned} f_\xi(t) &= Me^{it\xi} = M \exp \left(it \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{D_k} \right) = M \left(\exp \frac{it\varepsilon_1}{D_1} \cdot \exp \frac{it\varepsilon_2}{D_2} \cdot \dots \cdot \exp \frac{it\varepsilon_k}{D_k} \cdot \dots \right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} M \exp \frac{it\varepsilon_k}{D_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{it}{D_k} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{t}{D_k} \right) + ip_{1k} \sin \frac{t}{D_k} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t) \end{aligned}$$

і

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k} \cos \frac{t}{D_k} + p_{1k}^2} = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2D_k}},$$

що й доводить лему. $\square$

Дослідимо асимптотичну поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності, а саме: величину $L_\xi = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)|$. Відомо, що коли розподіл є дискретним (тобто, коли $M > 0$), то $L_\xi = 1$. Тому розглядатимемо лише випадок, коли $M = 0$.

Теорема 7. Якщо $d_n = 1$ при $n > n_0$, то $L_\xi = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} p_{0k} = \frac{1}{2}$.

Доведення. Подамо випадкову величину ξ у вигляді

$$\xi = \left(\frac{\theta_1}{D_1} + \dots + \frac{\theta_{n_0}}{D_{n_0}} \right) + \frac{1}{D_{n_0}d_{n_0}}X = \xi_1 + \frac{1}{D_{n_0}d_{n_0}}X = \xi_1 + \xi_2.$$

Тоді з незалежності ξ_1 і ξ_2 отримуємо $f_\xi(t) = f_{\xi_1}(t)f_{\xi_2}(t)$.

Оскільки випадкова величина ξ_1 має дискретний розподіл, то $L_{\xi_1} = 1$. Тому поведінка модуля характеристичної функції ξ на нескінченності визначається поведінкою ξ_2 , а отже, X . Тому асимптотична поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності визначається випадковою величиною X , яка є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами. Тому, не порушуючи загальності, вважатимемо $n_0 = 0$ (в цьому випадку $X = \xi$).

Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки $L_\xi = 0$, то для кожної послідовності (t_n) такої, що $t_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), має місце

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0. \quad (11)$$

Припустимо, що при цьому p_{0k} не прямує до $\frac{1}{2}$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді існує послідовність $k_m : p_{0k_m} \not\rightarrow \frac{1}{2}$ ($m \rightarrow \infty$).

Розглянемо $t_n = 2^{n+1}\pi$. Тоді матимемо $\sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}} = \sin^2(2^{n-k}\pi) = 0$, $|f_k(t)| = 1$ при $k \leq n$

$$|f_\xi(t_k)| = \sqrt{1 - 4p_{0(n+1)}p_{1(n+1)}} \prod_{k=n+2}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 2^{n-k}\pi}. \quad (12)$$

Розглянемо послідовність t_{n_m} таку, що $p_0(n_m + 1) \neq \frac{1}{2}$ і $p_0(n_m + 1) \not\rightarrow \frac{1}{2}$. Тоді $|f_\xi(t_{n_m})|$ не прямує до 0. Більше того, $|f_\xi(t_{n_m})| = |f_{n_m+1}(t)|S_{n_m}$, де

$$S_{n_m} = \prod_{k=n_m+2}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 2^{n_m-k}\pi}.$$

Останній добуток, очевидно, збігається, причому

$$S_{n_m} \geq \prod_{m=2}^{\infty} \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2^m}} = \prod_{m=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^m} = a > 0.$$

Отже, $0 < a < |f_\xi(t_{n_m})|$ для всіх $m = 1, 2, \dots$, що суперечить рівності (11). Необхідність доведено.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай t_n — довільна послідовність, яка прямує до нескінченності, коли $n \rightarrow \infty$. Покажемо, що при умові $p_{0k} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($k \rightarrow \infty$) $|f_\xi(t_n)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Послідовність $a_n = \frac{t_n}{2^{m_n+1}}$, $m_n = m_n(t_n) = [\log_2 \frac{t_n}{\pi}] + 1$, є обмеженою, зліва числом $\frac{\pi}{4}$, справа — $\frac{\pi}{2}$.

Можливі випадки:

1. Існує границя послідовності $\{a_n\}$, коли $n \rightarrow \infty$.
2. Послідовність $\{a_n\}$ границі не має.

Розглянемо їх окремо.

1. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$. Тоді $q \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

а) Якщо $q = \frac{\pi}{4}$, то $\frac{t_n}{2^{m_n}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $n \rightarrow \infty$ і $B_{t_n} = \sqrt{1 - 4p_{0(m_n-1)}p_{1(m_n-1)} \sin^2 \frac{1}{2^{m_n}}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Оскільки $|f_\xi(t_n)| \leq B_{t_n}$, то $|f_\xi(t_n)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

б) Якщо $q = \frac{\pi}{2}$, то $C_{t_n} = \sqrt{1 - 4p_{0m_n}p_{1m_n} \sin^2 \frac{1}{2^{m_n+1}}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) і з $|f_\xi(t_n)| \leq C_{t_n}$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

в) Нехай тепер $\frac{\pi}{4} < q < \frac{\pi}{2}$. Тоді $q = A\pi$, де $\frac{1}{4} < q < \frac{1}{2}$, і двійковий розклад числа A

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(A)}{2^k} = 0, \quad \alpha_1(A) \dots \alpha_k(A) \dots$$

має першу двійкову цифру $\alpha_1(A) = 0$, а другу $\alpha_1(A) = 1$.

Можливі випадки:

1. A — число двійково-раціональне, тобто його двійковий розклад містить період (0) або (1);
2. A — число двійково-іраціональне.

Розглянемо ці випадки окремо.

1) Нехай A — число двійково-раціональне. $A = 0,01\alpha_3 \dots \alpha_{l-1}1(0) = 0,01\alpha_3 \dots \alpha_{l-1}0(1)$. Проаналізуємо двійкові розклади чисел α_n .

Нехай α_n прямує до A зліва. Розглянемо двійковий розклад A , що містить період (1).

Якщо $\alpha_n \neq A$, то існує $j = j(n)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(a_n) = \alpha_i(A), & i = \overline{1, j-1}, \\ \alpha_i(a_n) = \alpha_i(A), \end{cases}$$

причому $\alpha_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) рівносильна умові $j \rightarrow \infty$.

Для досить великих n існує $s = s(n)$:

$$a_n = 0,01\alpha_3 \dots \alpha_{l-1} \underbrace{011 \dots 1}_s \alpha_{l+s+1} \alpha_{l+s+2} \dots,$$

$$2^{l-1} a_n = 1\alpha_3 \dots \alpha_{l-1}, 0 \underbrace{11 \dots 1}_s \alpha_{l+s+1} \alpha_{l+s+2} \dots,$$

причому з $n \rightarrow \infty$ випливає $s \rightarrow \infty$.

Оскільки $\frac{t_n}{2^{k+}} = \frac{t_n 2^{m_n+1}}{2^{k+1} 2^{m_n+1}} = 2^{m_n-k} a_n$, то при $k = m_n - l + 1$

$$\frac{t_n}{2^{k+}} = (1\alpha_3 \dots \alpha_{l-1}, 0 \underbrace{11 \dots 1}_s \alpha_{l+s+1} \alpha_{l+s+2} \dots) \pi \quad i$$

$$\sin^2 \frac{t_n}{2^{k+}} = (0, 0 \underbrace{11 \dots 1}_s \alpha_{l+s+1} \alpha_{l+s+2} \dots) \pi.$$

З ростом s аргумент синуса прямує до $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Оскільки } |f_\xi(t_n)| = \sqrt{1 - 4p_{0m_n-l+1}p_{1m_n-l+1} \sin^2(0, 0 \underbrace{11 \dots 1}_s \alpha_{l+s+1} \alpha_{l+s+2} \dots) \pi} \rightarrow$$

0, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Якщо a_n прямує до A справа, то розглянемо двійковий розклад числа A , який містить період (0), тобто $A = 0,01\alpha_3 \dots \alpha_{l-1}1(0)$. Аналогічними міркуваннями можна показати, що і в цьому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Якщо число A є двійково-іраціональним, то воно має єдине двійкове зображення, яке містить нескінченну кількість і нулів, і одиниць. Оскільки $p_{0k} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($k \rightarrow \infty$), то існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ $\frac{1}{5} < p_{0k}p_{1k} \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{Для таких } k \text{ і для } \frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2} \quad \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \gamma} < \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Нехай k_s – номер місця s -го 0 у двійковому розкладі A , після якого йде 1, тобто $\alpha_{k_s}(A) = 0$ і $\alpha_{k_s+1}(A) = 1$.

З $a_n \rightarrow A$ ($k \rightarrow \infty$) випливає, що $l(a_n)$ номер першої двійкової цифри a_n , відмінної від цифри A , прямує до нескінченності, тобто $l(a_n) \rightarrow \infty$. Тобто, для достатньо великих n і $k = m_n - k_s + 1 > k_0$ маємо

$$\frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}} = \sin^2(0, 01\beta_3\beta_4 \dots)\pi < 1, \quad \beta_i \in \{0; 1\} \quad i$$

$$A_{t_n} = \prod_{k=k_0+1}^{l(a_n)-1} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}}} \leq \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^{j_l},$$

де j_l – це кількість пар (01) у двійковому розкладі A на місцях від $k_0 + 1$ до $l(a_n) - 1$ включно.

Оскільки з $n \rightarrow \infty$ випливає $l(a_n) \rightarrow \infty$ і $j_l \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

2. Розглянемо тепер випадок, коли послідовність $\{a_n\}$ не має границі. Припустимо, що $L_\xi = c_0 > 0$. Тоді існує послідовність $\{t_n\}$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = c_0$.

Оскільки послідовність $a_n = \frac{t_n}{2^{m_n+1}}$ обмежена (знизу числом $\frac{\pi}{4}$, а зверху $-\frac{\pi}{2}$), то з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{a_{n_s}\}$. Тоді $\lim_{s \rightarrow \infty} |f_\xi(t_{n_s})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = c_0$. але, як доведено у випадку 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Отримане протиріччя доводить достатність і всю теорему. $\square$

Наслідок. Якщо $d_n = 1$ при $n > n_0$, то $0 < L_\xi \leq 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} p_{0k} \neq \frac{1}{2}$.

Теорема 8. Якщо $d_n \neq 1$ для всіх $n > n_0$, то $L_\xi > 1$, а при $d_{n+1} > d_n$ для всіх $n > n_0$ має місце рівність $L_\xi = 1$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $d_n \neq 1$ нескінченну кількість разів.

Розглянемо послідовність $t_n = 2\pi D_n$. Оцінимо

$$\prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2D_k}} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{t}{2D_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2D_k} \right|.$$

$$\text{Отже, маємо } L_\xi \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t_n}{2D_k} \right|.$$

Виразимо

$$\left| \cos \frac{t_n}{2D_k} \right| = \left| \cos \frac{\pi D_n}{D_k} \right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \leq n, \\ \cos \frac{t_n}{2D_k}, & \text{якщо } k > n. \end{cases}$$

$$\text{Тому } \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| = \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1} (d_{n+1}+1) \dots d_k (d_k+1) (d_{k+1}+1)}.$$

Але для $k > n$

$$\cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1} (d_{n+1}+1) \dots d_k (d_k+1) (d_{k+1}+1)} \geq \cos \frac{\pi}{2^{k-n}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2^{k-n+1}} >$$

$$> 1 - 2 \left(\frac{\pi}{2^{k-n+1}} \right)^2.$$

$$\text{Тоді } \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1} (d_{n+1} + 1) \dots d_k (d_k + 1) (d_{k+1} + 1)} \geq \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\pi^2}{2^{2(k-n)+1}} \right) \right).$$

Згідно з ознакою збіжності нескінченних добутків останній нескінченний добуток є збіжним, бо ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{2^{2(k-n)+1}} \right)$ є збіжним. А отже, $L_{\xi} > 0$ і

$$\prod_{k=m}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1} (d_{n+1} + 1) \dots d_k (d_k + 1) (d_{k+1} + 1)} \rightarrow 1,$$

коли $d_{n+1} > d_n$ для будь-якого $n \in N$. $\square$

ЗАУВАЖЕННЯ. Ця теорема свідчить про близькість сингулярного неперервного розподілу випадкової величини ξ до дискретного.

1. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, № 9. – С. 1155-1168.
2. Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 200-211.
3. Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В. Властивості розподілу випадкової величини, елементи зображення якої знакододатним рядом Люрота утворюють однорідний ланцюг Маркова // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 10. – С. 100-107.
4. Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В. Властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними // Труды ИПММ НАН України. – 2011. – Том 23. – С. 71-83.
5. Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M. Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – Volume 14. – 2012. – Number 1. – P. 145-160.
6. Працьовита І.М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 174-189.
7. Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.
8. Працьовитий М.В., Лециньський О.Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_{\infty}$ -зображення // Теорія ймовірн. та мат. стат. – 1997. – № 57. – С.134-139.
9. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
10. Працьовитий М.В. Розподіли суми випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 32-37.
11. Гончаренко Я.В. Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – № 3. – С. 376-390.
12. Alberverio S., Goncharenko Y., Pratsiovytyi M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations, 2007. – 15, № 1. – P. 89-97.
13. Lüroth J. Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – 21. – P. 411-423.
14. Sylvester J.J. On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. – 1880. – 3, № 4. – P. 332-335. – Postscript, ibid 388-389.

15. *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables eventuelles indepedantes // *Studia Math.* – 1931. – Vol. 3. – P. 119-155.
16. *Salem R.* On some singular monotonic function which are stricly increasing // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1943. – 53. – P. 423-439.

Y. Goncharenko, Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi

Properties of distribution of random incomplete sum of given positive Lüroth series with independent terms.

The paper is devoted to random incomplete sum of given positive Lüroth series with independent terms. We study Lebesgue structure, topological, metric and fractal properties of spectrum (i.e., minimal closed support) of distribution of this random variable as well as behavior at infinity of absolute value of its characteristic function. Structure of distribution is studied completely. Necessary and sufficient conditions for spectrum to be anomalously fractal, of zero Lebesgue measure and of Cantor type are found. We prove that singular distribution of incomplete sum is close to discrete distribution by behaviour of characteristic function at infinity if series is not periodic.

Keywords: *positive Lüroth series, incomplete sum of Lüroth series, set of incomplete sum of Lüroth series, random incomplete sum of Lüroth series, singular distribution, Lebesgue structure of probability distribution, characteristic function of random variable.*

Я. В. Гончаренко, Ю. И. Жихарева, М. В. Працевитый

Свойства распределения случайной подсуммы знакоположительного ряда Люрота с независимыми слагаемыми.

Изучаются лебеговская структура, тополого-метрические и фрактальные свойства спектра (минимального замкнутого носителя) распределения случайной подсуммы заданного знакоположительного ряда Люрота с независимыми слагаемыми, поведение модуля ее характеристической функции на бесконечности. Полностью изучена структура, найдены необходимые и достаточные условия аномальной фрактальности, ноль-мерности Лебега и канторовости спектра. Доказано, что сингулярное распределение подсуммы близко к дискретному по поведению характеристической функции на бесконечности, если ряд не периодический.

Ключевые слова: *знакоположительный ряд Люрота, подсумма ряда Люрота, множество подсумм ряда Люрота, случайная подсумма ряда Люрота, сингулярное распределение, лебеговская структура распределения, характеристическая функция случайной величины.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
yan_a@ukr.net
july2105@mail.ru
prats4@yandex.ru

Получено 07.05.13

УДК 517.5

©2013. А. В. Делюкина, Вит. В. Волчков

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ НЕИНВАРИАНТНЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Изучаются искаженные сферические средние на гиперболической плоскости и их обобщения. Получены теоремы о среднем для собственных функций возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами.

Ключевые слова: сферические средние, свертка, теоремы о среднем.

1. Введение. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – группа Мёбиуса конформных автоморфизмов $\mathbb{D}$, r – фиксированное положительное число. Существует ли неголоморфная функция $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{|z|=\text{th } r} (f \circ g)(z) dz = 0 \quad \text{для любого} \quad g \in G? \quad (1)$$

Более общо, что можно сказать о функции f , если увеличить число радиусов r в уравнении (1)?

Вопросы такого типа начали изучаться К.А. Беренстейном и Д. Паскуасом в работе [1]. В частности, были доказаны теоремы типа Мореры, характеризующие голоморфные функции в терминах указанных интегральных средних. Отметим, что мера dz в (1) инвариантна относительно группы G , что существенно отличает рассматриваемые задачи от ряда других подобных вопросов, связанных с преобразованием Помпейю (см. [2-4] и имеющуюся там библиографию).

Особый интерес представляют локальные варианты уравнения (1), например, когда функция f задана в круге $B_R = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \text{th } R\}$, $R > r$, а (1) выполнено при всех $g \in G$ таких, что $g\overline{B}_r \subset B_R$. Применение формулы Грина сводит (1) к уравнению вида

$$\int_{gB_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) (1 - |z|^2)^2 (1 - z \cdot \overline{g0})^{-2} d\mu(z) = 0, \quad (2)$$

где $g0$ – образ точки 0 под действием g ,

$$d\mu(z) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge \bar{d}z}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Для изучения этого уравнения важно иметь подходящий аналог классической теоремы о среднем для собственных функций лапласиана (см., например, [2, часть 1, глава 7]). В данной работе получено решение этой задачи.

2. Формулировка основного результата. Пусть $i, j \in \{1, 2\}$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$g_{i,j}(z) = \frac{\delta_{i,j}}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Круг $\mathbb{D}$ с метрическим тензором $\{g_{i,j}\}$ является моделью Пуанкаре вещественной гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ постоянной секционной кривизны -4 (см.[5, введение]). Группа G действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$g(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (3)$$

Как обычно, считаем, что мера Хаара dg на G нормирована соотношением

$$\int_G f(g)dg = \int_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z), \quad f \in L^1(\mathbb{D}; d\mu) \quad (4)$$

(см.[5, введение, §4.3]).

Круг B_R является геодезическим шаром на $\mathbb{H}^2$ радиуса R с центром в нуле, т.е.

$$B_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0, z) < R\},$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния на $\mathbb{H}^2$. Нам потребуются следующие классы функций и распределений в B_R : $L^{1,loc}(B_R)$ – совокупность локально интегрируемых функций в B_R ; $RA(B_R)$ – класс вещественно-аналитических функций; $\mathcal{D}'(B_R)$ – пространство распределений на B_R ; $\mathcal{E}'(B_R)$ – пространство распределений с компактным носителем; $\mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(B_R)$ – множество радиальных (т.е. инвариантных относительно поворотов) распределений из $\mathcal{E}'(B_R)$.

Пространство $L^{1,loc}(B_R)$ будет вкладываться в $\mathcal{D}'(B_R)$ с помощью отождествления функции $f \in L^{1,loc}(B_R)$ с распределением

$$\psi \rightarrow \int_{\mathbb{D}} f(z)\psi(z)d\mu(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R),$$

где $\mathcal{D}(B_R)$ – пространство бесконечно-дифференцируемых финитных функций на B_R .

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(B_R)$, $s \in \mathbb{Z}$. Введем четную целую функцию

$$\mathcal{F}_s(T)(\lambda) = \langle T, \mathcal{B}_{\lambda}^s \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где

$$\mathcal{B}_{\lambda}^s(z) = (1 - |z|^2)^s F\left(\frac{1 - s + i\lambda}{2}, \frac{1 - s - i\lambda}{2}; 1; \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right),$$

$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus [1; \infty)$ гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k, \quad |z| < 1 \quad ((\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), \dots).$$

Кроме того, положим

$$r(T) = \inf\{r > 0 : \text{supp} T \subset B_r\},$$

где $\text{supp}T$ – носитель распределения T . Для $f \in C^\infty(B_R)$ определим свертку

$$(f \times^s T)(g^{-1}0) = \langle T, z \rightarrow f(g^{-1}z)(1 - z \cdot \overline{g0})^s \rangle, \quad g^{-1}0 \in B_{R-r(T)}. \quad (5)$$

Лемма 1 ниже показывает, что данное определение корректно и дает формулу для свертки в случае, когда T – регулярное распределение.

Наконец, положим

$$\mathcal{L}_s = (1 - |z|^2)^2 \Delta + 4s(1 - |z|^2) \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

где Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^2$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{D})$, $R \in (r(T), +\infty]$ и

$$\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f \quad \text{в } B_R$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(f \times^s T) = \mathcal{F}_s(T)(\lambda) f \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (6)$$

Отметим, что при $s = 0$ утверждение теоремы 1 совпадает с известной теоремой о среднем для собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ [5, гл.4, §2]. Относительно других результатов в этом направлении см. [2-5].

3. Вспомогательные утверждения. Пусть $SO(2)$ – группа вращений $\mathbb{R}^2$. Следующее утверждение показывает корректность определения (5).

Лемма 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда функция

$$\Theta(g) = \langle T, z \rightarrow f(g^{-1}z)(1 - \overline{g0} \cdot z)^s \rangle, \quad g \in G : g^{-1}0 \in B_{R-r(T)}$$

постоянна на правых классах смежности группы G по подгруппе $SO(2)$ и является, таким образом, функцией от $g^{-1}0$. Кроме того, если $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_{\mathbb{H}})(B_R)$, то

$$(f \times^s T)(z) = \int_G f(g0) T(g^{-1}z) \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - \bar{z} \cdot g0} \right)^2 dg, \quad z \in B_{R-r(T)}. \quad (7)$$

Доказательство. Для $\tau \in SO(2)$ имеем

$$\Theta(\tau g) = \langle T, z \rightarrow f(g^{-1}\tau^{-1}z)(1 - z \cdot \overline{\tau g0})^s \rangle = \langle T, z \rightarrow f(g^{-1}\tau^{-1}z)(1 - \tau^{-1}z \cdot \overline{g0})^s \rangle.$$

Отсюда и из радиальности T получаем $\Theta(\tau g) = \Theta(g)$, что доказывает первое утверждение. Далее, пусть $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_{\mathbb{H}})(B_R)$. Тогда

$$(f \times^s T)(g^{-1}0) = \int_{\mathbb{D}} T(z) f(g^{-1}z)(1 - \overline{g0} \cdot z)^s d\mu(z). \quad (8)$$

Прямое вычисление показывает (см.(3)), что

$$\frac{1 - |g0|^2}{1 - g0 \cdot \bar{z}} = 1 - g^{-1}0 \cdot \overline{g^{-1}z}. \quad (9)$$

Используя (8), (9), инвариантность $d\mu$ относительно G и (4), получаем

$$\begin{aligned} (f \times^s T)(g^{-1}0) &= \int_{\mathbb{D}} T(z) f(g^{-1}z) \left(\frac{1 - |g^{-1}0|^2}{1 - \overline{g^{-1}0} \cdot g^{-1}z} \right)^s d\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} T(gw) f(w) \left(\frac{1 - |g^{-1}0|^2}{1 - \overline{g^{-1}0} \cdot w} \right)^s d\mu(w) = \\ &= \int_G T(gh0) f(h0) \left(\frac{1 - |g^{-1}0|^2}{1 - \overline{g^{-1}0} \cdot h0} \right)^s dh. \end{aligned}$$

Теперь учитывая, что $T(gh0) = T(h^{-1}g^{-1}0)$, приходим к (7). $\square$

Наша дальнейшая цель – установить инвариантность $\mathcal{L}_s$ относительно "сдвигов"

$$f(z) \rightarrow f(g^{-1}z)(1 - z \cdot \overline{g0})^s, \quad g \in G. \quad (10)$$

Для краткости положим

$$gz = g^{-1}z = \frac{\bar{a}z - b}{a - \bar{b}z}, \quad u_s(z) = (1 - z \cdot \overline{g0})^s,$$

$$A_1 = (1 - |z|^2)^2 \Delta = 4(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad A_2 = 4s(1 - |z|^2) \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Нетрудно видеть, что для $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{D})$

$$A_1(f_1 f_2) = f_1 A_1 f_2 + f_2 A_1 f_1 + 4(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right). \quad (11)$$

Кроме того, очевидно, что

$$A_1 u_s = 0, \quad A_2 u_s = 0. \quad (12)$$

Лемма 2. Пусть $\Phi(z) = f(gz)u_s(z)$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(gz) \frac{u_s(z)}{(a - \bar{b}z)^2} - \frac{s\bar{b}}{a} f(gz) u_{s-1}(z), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(gz) \frac{u_s(z)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2}. \quad (14)$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{g}$ - голоморфное отображение,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) \frac{1}{(a - \bar{b}z)^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z) \frac{1}{(\bar{a} - b\bar{z})^2}. \quad (16)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = -\frac{s\bar{b}}{a}u_{s-1}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (17)$$

из (15), (16) получаем (13) и (14). $\square$

Лемма 3. Оператор $\mathcal{L}_s$ инвариантен относительно "сдвигов"(10), т.е.

$$\mathcal{L}_s(f(\mathbf{g}z)u_s(z)) = (\mathcal{L}_s f)(\mathbf{g}z)u_s(z). \quad (18)$$

Доказательство. Согласно (11) и (17),

$$A_1((f \circ \mathbf{g})u_s) = (f \circ \mathbf{g})A_1(u_s) + u_s A_1(f \circ \mathbf{g}) - \frac{4s\bar{b}}{a} \cdot (1 - |z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ \mathbf{g})u_{s-1}.$$

Поскольку $\mathbf{g}$ является движением гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, а оператор A_1 совпадает с оператором Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{H}^2$ (см.[5, введение]), то

$$A_1(f \circ \bar{\mathbf{g}}) = (A_1 f) \circ \mathbf{g}.$$

Тогда (см.(16) и (12))

$$A_1((f \circ \mathbf{g})u_s) = u_s(A_1 f) \circ \mathbf{g} - \frac{4s\bar{b}}{a} \frac{(1 - |z|^2)^2}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z)u_{s-1}.$$

Далее,

$$A_2((f \circ \mathbf{g})u_s) = \frac{4s(1 - |z|^2)\bar{z}u_s(z)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z),$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s(f(\mathbf{g}z)u_s(z)) &= u_s(A_1 f) \circ \mathbf{g} + \frac{4s(1 - |z|^2)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z)(\bar{z}u_s(z) - \frac{\bar{b}}{a}u_{s-1}(z)(1 - |z|^2)) = \\ &= u_s(A_1 f) \circ \mathbf{g} + \frac{4s}{a} \frac{(1 - |z|^2)}{(\bar{a} - b\bar{z})^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z)u_{s-1}(z)(a\bar{z} - \bar{b}). \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{L}_s f)(\mathbf{g}z)u_s(z) = (A_1 f)(\mathbf{g}z)u_s(z) + 4s(1 - |\mathbf{g}z|^2)\bar{\mathbf{g}}z u_s(z) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{g}z). \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20) с использованием равенства

$$1 - |\mathbf{g}z|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|a - \bar{b}z|^2},$$

получаем (18). $\square$

Лемма 4. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и радиальная функция $f \in C^2(\mathbb{D})$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2)f. \quad (21)$$

Тогда

$$f(z) = f(0)\mathcal{B}_\lambda^s(z). \quad (22)$$

Доказательство. Полагая $f(z) = \varphi(\rho)$, где $\rho = |z|$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \bar{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} z,$$

$$(A_1 f)(z) = (1 - \rho^2)^2 \left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right).$$

Отсюда

$$(\mathcal{L}_s f)(z) = (1 - \rho^2)^2 \left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right) + 2s\rho(1 - \rho^2)\varphi'(\rho).$$

Поэтому уравнение (21) можно переписать в виде

$$(1 - \rho^2)^2 \varphi''(\rho) + \frac{1 - \rho^2}{\rho} \varphi'(\rho)(1 + (2s - 1)\rho^2) + (\lambda^2 + (s + 1)^2)\varphi(\rho) = 0. \quad (23)$$

Обозначим $\nu = \frac{1+s+i\lambda}{2}$. Из (23) для функции $\psi(\rho) = (1 - \rho^2)^{-\nu}\varphi(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1 - \rho^2)\psi''(\rho) + \psi'(\rho)(1 - \rho^2(4\nu - 2s + 1)) + 4\nu(s - \nu)\psi(\rho)\rho = 0. \quad (24)$$

С другой стороны, гипергеометрическая функция $h(\rho) = F(\alpha, \beta; \gamma; \rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1 - \rho^2)h''(\rho) + h'(\rho)(2\gamma - 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)\rho^2) - 4\alpha\beta\rho h(\rho) = 0 \quad (25)$$

(см. [6, глава 2, формула 2.1(1)]). Сравнивая (24) с (25) и учитывая гладкость ψ в нуле, заключаем, что

$$f(z) = f(0)(1 - \rho^2)^\nu F(\nu - s, \nu; 1; \rho^2).$$

Это равенство и формула

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{z}{z - 1}\right)$$

(см. [6, глава 2, формула 2.9(3)]) влекут (22). $\square$

4. Доказательство теоремы 1. Поскольку $\mathcal{L}_s$ является эллиптическим оператором, то $f \in RA(B_R)$. Возьмем $g \in G$ такое, что $g\overline{B_{r(T)}} \subset B_R$. Пусть $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0 : g\overline{B_{r(T)}} \subset B_{R-\varepsilon}\}$. Для $z \in B_{r(T)+\varepsilon_0}$ положим

$$f_g(z) = \int_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z)(1 - \tau z \cdot \overline{g0})^s d\tau, \quad (26)$$

где $d\tau$ – мера Хаара на $SO(2)$, нормированная соотношением

$$\int_{SO(2)} d\tau = 1.$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g \in RA_{\mathfrak{h}}(B_{r(T)+\varepsilon_0}) \quad \text{и} \quad f_g(0) = f(g^{-1}0). \quad (27)$$

Кроме того,

$$f_g(z) = \int_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z)(1 - z \cdot \overline{\tau^{-1}g0})^s d\tau.$$

Отсюда и из леммы (3) имеем

$$(\mathcal{L}_s f_g)(z) = -(\lambda^2 + (s+1)^2)f_g(z).$$

Тогда (см. (27) и лемму (4)) $f_g(z) = f(g^{-1}0)\mathcal{B}_\lambda^s(z)$ и $\langle T, f_g \rangle = f(g^{-1}0)\mathcal{F}_s(T)(\lambda)$. Теперь из (26), (5) и радиальности T следует утверждение теоремы 1.

5. Случай шаровых и сферических средних. Положим

$$S_r(w) = \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) = r\}, \quad B_r(w) = \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) < r\},$$

$$d\mu_0(z) = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Теорема 2. Пусть $f \in C(\mathbb{D})$ и $\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2)f$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_{S_r(w)} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}} \right)^s d\mu_0(z) = \pi \operatorname{sh}(2r) \mathcal{B}_\lambda^s(\operatorname{th} r) f(w). \quad (28)$$

Доказательство. Обозначим через σ_r радиальное распределение на $\mathbb{H}^2$, действующее по правилу

$$\langle \sigma_r, \psi \rangle = \int_{S_r} \psi(z) d\mu_0(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{D}),$$

где $S_r = S_r(0)$. Тогда (см. (9))

$$\begin{aligned} (f \times^s \sigma_r)(g0) &= \langle \sigma_r, f(gz)(1 - z \cdot \overline{g^{-1}0})^s \rangle = \int_{S_r} f(gz)(1 - z \cdot \overline{g^{-1}0})^s d\mu_0(z) = \\ &= \int_{S_r(g0)} f(\varsigma)(1 - g^{-1}\varsigma \cdot \overline{g^{-1}0})^s d\mu_0(\varsigma) = \\ &= \int_{S_r(g0)} f(\varsigma) \left(\frac{1 - |g0|^2}{1 - \varsigma \cdot \overline{g0}} \right)^s d\mu_0(\varsigma). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathcal{F}_s(\sigma_r)(\lambda) = \langle \sigma_r, \mathcal{B}_\lambda^s \rangle = \int_{|z|=\text{th } r} \mathcal{B}_\lambda^s(z) d\mu_0(z) = \pi \text{sh}(2r) \mathcal{B}_\lambda^s(\text{th } r).$$

Отсюда и из (6) получаем (28). $\square$

Для изучения случая шаровых средних нам потребуется функция Якоби первого рода:

$$\varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\text{sh}^2 t\right).$$

Отметим следующую формулу дифференцирования (см. [3, предложение 7.2]):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\text{sh } 2t} \Delta_{\alpha+1, \beta+1}(t) \varphi_\lambda^{(\alpha+1, \beta+1)}(t) \right) = \frac{16}{\Gamma(\alpha + 1)} \Delta_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t), \quad (29)$$

где $\Delta_{\alpha, \beta}(t) = 2^{2\alpha+2\beta+2} (\text{sh } t)^{2\alpha+1} (\text{ch } t)^{2\beta+1}$, Γ – гамма-функция.

Теорема 3. Пусть $f \in C(\mathbb{D})$ и $\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_{B_r(w)} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}} \right)^s d\mu(z) = \pi (\text{sh } r)^2 (\text{ch } r)^{2-2s} \varphi_\lambda^{(1, 1-s)}(r) f(w).$$

Доказательство. Обозначим через χ_r индикатор шара B_r . Как и в доказательстве теоремы 2, получаем

$$(f \times^s \chi_r)(w) = \int_{B_r(w)} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}} \right)^s d\mu(z). \quad (30)$$

Далее, учитывая, что $\mathcal{B}_\lambda^s(\text{th } t) = (\text{ch } t)^{-2s} \varphi_\lambda^{(0,-s)}(t)$ и используя (29), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(\chi_r)(\lambda) &= \int_{B_r} \mathcal{B}_\lambda^s(z) d\mu(z) = 2\pi \int_0^{\text{th } r} \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2} \mathcal{B}_\lambda^s(\rho) d\rho = \\ &= \pi \int_0^r \text{sh}(2t) \mathcal{B}_\lambda^s(\text{th } t) dt = 2^{2s-1} \pi \int_0^r \Delta_{0,-s}(t) \varphi_\lambda^{(0,-s)}(t) dt = \\ &= \pi \int_0^r \frac{d}{dt} \left((\text{sh } t)^2 (\text{ch } t)^{2-2s} \varphi_\lambda^{(1,1-s)}(t) \right) dt = \\ &= \pi (\text{sh } r)^2 (\text{ch } r)^{2-2s} \varphi_\lambda^{(1,1-s)}(r). \end{aligned}$$

Теперь требуемое утверждение следует из (30) и теоремы 1. $\square$

1. Berenstein C.A., Pascuas D. Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disc. // Israel.J.Math, 1994. – Vol. 86, 61-106 p.
2. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equation. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
3. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671p.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Birkhäuser: Basel. – 2013. – 592 p.
5. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.

A. V. Delukina, Vit. V. Volchkov

The mean value theorem for non-problems in the theory of analytic functions.

We study distorted spherical means on the hyperbolic plane and their generalizations. We obtain the mean value theorems for eigenfunctions of the perturbed Laplace-Beltrami operator.

Keywords: spherical means, convolution, mean value theorems.

А. В. Делюкіна, Віт. В. Волчков

Теореми про середнє для неінваріантних задач у теорії аналітичних функцій.

Вивчаються викривлені сферичні середні на гіперболічній площині та їх узагальнення. Отримано теореми про середнє для власних функцій оператора Лапласа-Бельтрамі.

Ключові слова: сферичні середні, згортка, теореми про середнє.

Донецкий национальный ун-т
delux_math89@mail.ru

Получено 14.05.13

УДК 531.36

©2013. И. Л. Иванов

ОБ УПРАВЛЕНИИ ЭНЕРГОСИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для модели управляемой импульсной электроэнергетической системы с запаздыванием и импульсным воздействием предложен подход к исследованию устойчивости с использованием неограниченной кусочно-линейной функции Ляпунова. На основе разработанного подхода получены достаточные условия асимптотической устойчивости системы.

Ключевые слова: устойчивость, импульсное воздействие, электроэнергетическая установка.

Проблема анализа качественного поведения энергосистем продолжает широко обсуждаться [1-3]. В работах [2, 4] предлагаются подходы к исследованию устойчивости энергосистем с применением многокомпонентных функций Ляпунова. Некоторые авторы рассматривают модели с регуляторами [5, 6]. Популярность приобретают математические модели энергосистем, учитывающие запаздывание в цепи управления [7].

В настоящей статье рассматривается вопрос стабилизации электроэнергетической системы с импульсным воздействием при помощи пропорционально-дифференциального регулятора. Статья является продолжением исследований [8, 9].

1. Вспомогательный результат. Рассмотрим систему с запаздыванием и импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x_t), \quad t \neq \tau_k, \\ x(t^+) &= I_k(x), \quad t = \tau_k \end{aligned} \quad (1)$$

и начальные условия

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0], \quad (2)$$

где $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна слева и обладает не более чем счетным числом разрывов первого рода; $f : [-r, +\infty) \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна по первому аргументу и липшицева по второму, $\mathbb{E}$ – пространство функций $\varphi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, непрерывных слева и обладающих не более чем счетным числом разрывов первого рода; $\|\cdot\|_E$ – равномерна; $I_k : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна; $\tau_k \rightarrow \infty$, когда $k \rightarrow \infty$. Предположим, что начальная задача (1), (2) обладает единственным решением на $[t_0, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [11] Функция $v(t, x)$ принадлежит классу V'_0 , если выполняются условия:

- (1) $v(t, x)$ – непрерывно дифференцируема на множестве $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{T} = [t_0 - r, \infty) \setminus \{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$;

Автор выражает благодарность за постановку задачи об устойчивости энергосистемы с запаздыванием при импульсных возмущениях и за обсуждение полученных результатов А.А. Мартынюку.

- (2) существует функция a класса Хана такая, что выполняется оценка $a(\|x\|) \leq v(t, x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$;
- (3) существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} v(t, x) = v(\tau_k, x), \quad \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} v(t, x) = v(\tau_k + 0, x)$$

при всех $k = 1, 2, \dots$

Следующая теорема обобщает результат, полученный в [10].

Теорема 1. Пусть для системы (1) существует функция $v(t, x)$ класса V'_0 и монотонная функция $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(0) = 0$, $g(s) > 0$, $s > 0$ такие, что:

- (1) $\frac{d}{dt} v(t, x(t))|_{(1)} \leq -g(v(t, x(t)))$, если $v(t, x(t + \zeta)) \leq p(v(t, x(t)))$ для $\zeta \in [-r', 0]$ (условие Разумихина), где $p(s) > s$ при $s > 0$, $p(0) = 0$, $p(s)$ – непрерывна;
- (2) $v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \leq v(\tau_k, x(\tau_k))$.

Тогда нулевое положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво.

2. Постановка задачи и анализ устойчивости. Рассмотрим уравнения динамики энергетической системы с импульсным воздействием:

$$M_i \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} + P_{\tau i}, \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i(\tau_k^+) &= I_i(\theta_i(\tau_k), \dot{\theta}_i(\tau_k)), \\ \theta_i(\tau_k^+) &= \theta_i(\tau_k), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\theta_i(t) = \varphi_i(t), \quad t_0 - r \leq t \leq t_0, \quad (5)$$

где M_i – инерционная постоянная, θ_i – угол поворота ротора i -го генератора, P_{mi} – постоянные, отвечающие за механическую мощность на валу машины, $P_{\tau i} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ – управление, запаздывание которого равно $r > 0$, τ_k^+ – сокращенное обозначение для $\tau_k + 0$, $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots, k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$, $I_{ki} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\varphi_i \in C^1([-r, 0], \mathbb{R})$, P_{ei} – активные мощности,

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^n E_i E_j Y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + E_i U Y_{i, n+1} \sin \theta_i,$$

где E_i – э.д.с. i -й машины, Y_{ii} – собственные проводимости машины, Y_{ij} – взаимные проводимости, причем $Y_{ij} = Y_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$; $Y_{i, n+1}$ – проводимость i -го генератора с шинами постоянного напряжения, U – величина поступающего оттуда напряжения.

Система (3), (4) является обобщением системы, рассмотренной в работе [9], на случай произвольного числа генераторов.

Отметим, что построенная модель не содержит демпфирования, поэтому полученные ниже оценки области устойчивости будут верными для модели с произвольным демпфированием [12].

Предполагая наличие равновесия (ему соответствует синхронное вращение генераторов), после линеаризации (3)-(5) получим задачу

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -P_i x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} (x_i - x_j) + a_i x_i(t-r) + b_i \dot{x}_i(t-r), \quad t \neq \tau_k, \quad (6)$$

$$\dot{x}_i(\tau_k^+) = c_{ki1} x_i(\tau_k) + c_{ki2} \dot{x}_i(\tau_k), \quad i = 1, \dots, n; \quad (7)$$

$$x_i(t) = \psi_i(t), \quad t_0 - r \leq t \leq t_0. \quad (8)$$

Положим

$$h = \lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_{k+1} - \tau_k), \quad h_\varepsilon = h - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторый параметр.

Предположим, что r удовлетворяет оценке

$$2r < \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Сконструируем вспомогательную функцию $V_0(\mathbf{x})$ в виде

$$\begin{aligned} V_0(\mathbf{x}) &= \sum_{i,j=1}^n v_{0,ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i \dot{x}_i^2 + 2M_i \tilde{R} x_i \dot{x}_i + P_i x_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n P_{ij} (x_i - x_j)^2, \end{aligned}$$

где $\tilde{R}$ – некоторый параметр, и построим на ее основании разрывную кусочно-линейную функцию в виде

$$V(\mathbf{x}, t) = V_0(\mathbf{x})(1 + \nu(t - \tau_k)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (9)$$

где $\tau_0 = t_0$, $\nu > 0$ – некоторая постоянная. Эта функция принадлежит классу V'_0 .

Будем требовать выполнение условий теоремы 1 для этой функции. Эти условия можно подать в виде:

$$\left. \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq -\alpha V(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

если

$$V(t, \mathbf{x}(t)) > pV(t + \zeta; \mathbf{x}(t + \zeta)), \quad \zeta \in \Omega_{2r}, \quad (11)$$

где $\alpha > 0$, $p \in (0, 1)$ – некоторые параметры, $\Omega_{2r} = [\max\{-2r, t_0 - t - r\}, 0)$, и

$$V(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leq V(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Подставляя в (11) и (12) выражение (9) для функции V , получим условия на функцию V_0 при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ в виде:

$$\left. \frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq - \left(\alpha + \frac{\nu}{1 + \nu(t - \tau_k)} \right) V_0(\mathbf{x}(t)), \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

если

$$\begin{cases} V_0(\mathbf{x}(t)) > p^{\frac{1+\nu(t-\tau+\zeta)}{1+\nu(t-\tau)}} V_0(\mathbf{x}(t+\zeta)), \quad \zeta \in \Omega_{2r}, \\ \quad \text{при } \tau_k - t \notin \Omega_{2r}, \\ V_0(\mathbf{x}(t)) > p^{\frac{1+\nu(t-\tau+\zeta+\chi(\tau_k-t-\zeta)\Delta\tau_{k-1})}{1+\nu(t-\tau)}} V_0(\mathbf{x}(t+\zeta)), \quad \zeta \in \Omega_{2r}, \\ \quad \text{при } \tau_k - t \in \Omega_{2r}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$.

Далее, чтобы оценить значение производной функции V_0 вдоль (6), необходимо рассмотреть случаи: $\tau_k - t \notin \Omega_{2r}$, $\tau_k - t \in \Omega_{2r} \setminus \Omega_r$ и $\tau_k - t \in \Omega_r$.

Для функции $K(t)$, определяемой равенствами:

$$K(t) = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i + \tilde{R}x_i) K_i(t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} K_i(t) &= \int_{t-r}^t (L_i(s) + M_i(s)) ds, \\ L_i(t) &= -a_i \dot{x}_i(t) + b_i (P_i x_i(t) - a_i x_i(t-r) - b_i \dot{x}_i(t-r)), \\ M_i(t) &= b_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \end{aligned} \quad (16)$$

получим оценку

$$\begin{aligned} |K(t)| &\leq \left(r\mu\lambda_3 + \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \left(\lambda_1 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k - r)}{1 + \nu(t - \tau_k - 2r)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_2 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{1 + \nu(t - \tau_k - r)} \right) \right) V_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (17)$$

где константы λ_l , $l = 1, 2, 3$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{i=1, n} \left\{ \frac{\lambda_{1i} r}{\eta_{i1}}, \frac{r}{4\eta_{i2}} \right\}, \quad \lambda_2 = \max_{i=1, n} \left\{ \lambda_{2i} \frac{r}{\eta_{i1}} \right\}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4r} \max_{i=1, n} \{ (2\eta_{i1} + b_i^2 \bar{P}_i \eta_{i2}) \lambda_{3i} \}, \\ \lambda_{1i} &= \frac{a_i^2}{M_i} \left(1 - \frac{M_i (b_i P_i + \tilde{R} a_i)^2}{P_i (a_i^2 + 2\tilde{R} a_i b_i M_i P_i + b_i^2 M_i P_i)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{2i} = \frac{a_i^2 b_i^2}{M_i} \left(1 - \frac{M_i (\tilde{R} b_i - a_i)^2}{P_i b_i^2 - 2\tilde{R} M_i a_i b_i + M_i a_i^2} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{3i} = \frac{4\tilde{R}_i (P_i - M_i \tilde{R}^2)}{-4\tilde{R}_i (P_i - a_i)(b_i + \tilde{R} M_i) - (b_i \tilde{R} + a_i)^2}.$$

Можно показать, что выполняется неравенство

$$\frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} \Big|_{(6)} < \left(-\mu + r\mu\lambda_3 + \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \times \right. \\ \left. \times \left(\lambda_1 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k - r)}{1 + \nu(t - \tau_k - 2r)} + \lambda_2 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{1 + \nu(t - \tau_k - r)} \right) \right) V_0(\mathbf{x}),$$

в котором константа μ определяется из соотношений

$$\mu = \min \{ \tilde{R}, \{2\mu_i\}_{i=\overline{1,n}} \}, \quad \mu_i = \frac{b_i(P_i - M_i \tilde{R}^2) - \Delta_i^{1/2}}{2M_i(P_i - M_i \tilde{R}^2)}.$$

Учитывая условие (13), получим неравенство

$$-\alpha - \frac{\nu}{1 + \nu(t - \tau_k)} \geq -\mu + r\mu\lambda_3 + \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \times \\ \times \left(\lambda_1 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k - r)}{1 + \nu(t - \tau_k - 2r)} + \lambda_2 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{1 + \nu(t - \tau_k - r)} \right). \quad (18)$$

Для выполнения неравенства (18) достаточно выполнения неравенства

$$-\alpha - \frac{\nu}{1 + 2\nu r} \geq -\mu + r\mu\lambda_3 + \frac{1 + 2\nu r}{p\nu} \left(\lambda_1 \ln(1 + \nu r) + \lambda_2 \ln \frac{1 + 2\nu r}{1 + \nu r} \right). \quad (19)$$

Рассмотрим сперва случай $\tau_k - t \in \Omega_{2r} \setminus \Omega_r$. Далее, принимая во внимание условие Разумихина

$$V_0(\mathbf{x}(t + \zeta)) \leq p^{-1} \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{1 + \nu(t - \tau_k + \zeta)} V_0(\mathbf{x}(t)), \quad \zeta \in \Omega_r,$$

получим

$$|K(t)| \leq \left(r\mu\lambda_3 + \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \lambda_2 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{1 + \nu(t - \tau_k - r)} \right) V_0(\mathbf{x}) + \\ + \lambda_1 \int_{t-r}^t V_0(\mathbf{x}(s - r)) ds. \quad (20)$$

Оценим интегральное слагаемое в (20):

$$\int_{t-r}^t V_0(\mathbf{x}(s - r)) ds < \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \left(\ln \frac{1 + \nu\theta_\varepsilon}{1 + \nu(t - \tau_k - 2r + \theta_\varepsilon)} + \right. \\ \left. + \ln(1 + \nu(t - \tau_k - r)) \right) V_0(\mathbf{x}(t)).$$

Следовательно, при всех t , $\tau_k - t \in \Omega_{2r} \setminus \Omega_r$ получим условие

$$-\alpha - \frac{\nu}{1 + \nu r} \geq -\mu + r\mu\lambda_3 + \frac{\ln(1 + \nu r)}{p\nu} (\lambda_1(1 + 2\nu r) + \lambda_2(1 + \nu r)). \quad (21)$$

Следует отметить, что из свойств упомянутых коэффициентов также следует, что условие (19) выполняется всегда, когда выполняется условие (21).

Получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(6)} &< \left(-\mu + \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p\nu} \left(\lambda_1 \ln \frac{1 + \nu(t - \tau_k - r + \theta_\varepsilon)}{1 + \nu(t - \tau_k - 2r + \theta_\varepsilon)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_2 \left(\ln \frac{1 + \nu\theta_\varepsilon}{1 + \nu(t - \tau_k - r + \theta_\varepsilon)} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \ln(1 + \nu(t - \tau_k)) \right) \right) + \lambda_4 \frac{1 + \nu(t - \tau_k)}{p} + \lambda_5 \mu \right) V_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{1}{2} \max_i \left\{ \frac{\lambda_{4i}}{\eta_{3i}} \right\}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{4} \max_{i=1, n} \{ ((2\eta_{1i} + b_i^2 \bar{P}_i \eta_{2i})r + 2\eta_{3i})\lambda_{3i} \}, \\ \lambda_{4i} &= \frac{P_i(c_{ki2} - 1)^2 - 2\tilde{R}M_i(c_{ki2} - 1)c_{ki1} + M_i c_{ki1}^2}{M_i(P_i - M_i \tilde{R}^2)}. \end{aligned}$$

Исключив произвольные параметры $\alpha > 0$ и $p \in (0, 1)$, получим достаточное условие выполнения оценки (22):

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{1 + \nu r} &> -\mu + r\mu\lambda_3 + \frac{\ln(1 + \nu r)}{\nu} (\lambda_1(1 + 2\nu r) + \lambda_2(1 + \nu r)); \\ -\nu &> -\mu + \lambda_1 \frac{1}{\nu} \ln \frac{1 + \nu(-r + \theta_\varepsilon)}{1 + \nu(-2r + \theta_\varepsilon)} + \\ &\quad + \lambda_2 \frac{1 + \nu r}{\nu} \ln(1 + \nu r) + \lambda_4(1 + \nu r) + \lambda_5 \mu, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_\nu &= r\mu\lambda_3 + \frac{1 + 2\nu r}{\nu} \left(\lambda_1 \ln(1 + \nu r) + \lambda_2 \ln \frac{1 + 2\nu r}{1 + \nu r} \right), \\ \bar{\alpha}_{\nu, \varepsilon} &= \lambda_1 \frac{1}{\nu} \ln \frac{1 + \nu(-r + \theta_\varepsilon)}{1 + \nu(-2r + \theta_\varepsilon)} + \lambda_2 \frac{1 + \nu r}{\nu} \ln(1 + \nu r) + \\ &\quad + \lambda_4(1 + \nu r) + \lambda_5 \mu. \end{aligned}$$

Проведя оптимизацию по η_{1i} , η_{2i} и η_{1i} , η_{2i} , η_{3i} соответственно, функции $\bar{\lambda}_\nu$ и $\bar{\alpha}_{\nu, \varepsilon}$ можно выбрать в виде:

$$\bar{\lambda}_\nu = \begin{cases} 2\tilde{\lambda}_1 + 2\sqrt{\tilde{\lambda}_3(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)}, & \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) < \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \\ 2\sqrt{(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{\tilde{\lambda}_2})}, & \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) \geq \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}_{\nu,\varepsilon} = \begin{cases} 2\tilde{\lambda}_1 + 2\sqrt{\tilde{\lambda}_3(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)} + \tilde{\lambda}_4, & \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) < \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \\ 2\sqrt{(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{\tilde{\lambda}_2})} + \tilde{\lambda}_4, & \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) \geq \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \frac{\sqrt{\mu}}{4} \max_{i=\overline{1,n}} \{ |b_i| \sqrt{\bar{P}_i \lambda_{3i}} \}, \\ \tilde{\lambda}_2 &= \ln \frac{1 + \nu(-r + \theta_\varepsilon)}{1 + \nu(-2r + \theta_\varepsilon)} \sqrt{\frac{\mu}{2r\nu}} \times \\ &\quad \times \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \lambda_{1i} \sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i} \ln \frac{1+\nu(-r+\theta_\varepsilon)}{1+\nu(-2r+\theta_\varepsilon)} + \lambda_{2i}(1+\nu r) \ln(1+\nu r)}} \right\}, \\ \tilde{\lambda}_3 &= (1 + \nu r) \ln(1 + \nu r) \sqrt{\frac{\mu}{2r\nu}} \times \\ &\quad \times \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \lambda_{2i} \sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i} \ln \frac{1+\nu(-r+\theta_\varepsilon)}{1+\nu(-2r+\theta_\varepsilon)} + \lambda_{2i}(1+\nu r) \ln(1+\nu r)}} \right\}, \\ \tilde{\lambda}_4 &= \frac{\sqrt{\mu(1+\nu r)}}{r} \max_{i=\overline{1,n}} \{ \sqrt{\lambda_{3i} \lambda_{4i}} \}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ограничения, налагаемые на V_0 в моменты импульсного воздействия. Подставляя (9) в (12), получим условие

$$V_0(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leq (1 + \nu\theta_\varepsilon)V_0(\mathbf{x}(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Это неравенство всегда верно только тогда, когда удовлетворяется условие

$$(1 + \nu\theta_\varepsilon - c_{2ik}^2) \left(\frac{P_i}{M_i} \nu\theta_\varepsilon - 2\tilde{R}c_{1ik} - c_{1ik}^2 \right) \geq (\tilde{R}(1 + \nu\theta_\varepsilon - c_{2ik}) - c_{1ik}c_{2ik})^2. \quad (24)$$

Объединив неравенства (23) и (24) по $\varepsilon > 0$, получим следующие условия:

$$\begin{aligned} b_i &< -\tilde{R}M_i, \\ 4\tilde{R}(b_i + \tilde{R}M_i)(P_i - a_i) + (b_i\tilde{R} + a_i)^2 &< 0, \\ -\frac{\nu}{1 + \nu r} &> -\mu + r\bar{\lambda}_\nu, \quad -\nu > -\mu + r\bar{\alpha}_\nu, \\ (\tilde{R}(1 + \nu\theta - c_{2ik}) - c_{1ik}c_{2ik})^2 &< (1 + \nu\theta - c_{2ik}^2) \left(\frac{P_i}{M_i} \nu\theta - 2\tilde{R}c_{1ik} - c_{1ik}^2 \right), \\ P_i &> M_i\tilde{R}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\bar{\alpha}_\nu = \bar{\alpha}_{\nu,0}$.

Совокупность параметров системы, при которых система неравенств (25) имеет решения относительно ν и $\tilde{R}$, характеризует энергосистему, асимптотически устойчивую по Ляпунову.

3. Заключение. В основе полученных результатов лежит предположение о том, что непрерывная модель системы является устойчивой, подразумевая, что эффект от импульсного воздействия является разрушающим. Также отметим, что предельный переход в условиях (25) при $\tau_{k+1} - \tau_k \rightarrow +\infty$ не приводит к условиям устойчивости непрерывной модели.

1. *Вайман М.Я.* Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. – М.: Машиностроение. – 1981. – 126 с.
2. *Grujic Lj.T., Martynyuk A.A., Ribbens-Pavella M.* Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations. – Berlin: Springer-Verlag. – 1987. – 366 p.
3. *Chang H.-D., Chu C.-C., Gauley G.* Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications, and perspective // Proc. of the IEEE. – 1995. – V. 83, № 11. – P. 1497-1529.
4. *Martynyuk A.A.* Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics. Novel Approaches to Liapunov's Matrix Function. – New York: Marcel Dekker, Inc. – 2002. – 301 p.
5. *Hui Q., Shen J., Qiao W.* Dynamic Security Analysis of Electric Power Systems: Passivity-Based Approach and Positive Invariance Approach // Proc. of the ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference, Cambridge, Massachusetts, USA. – September 12–15, 2010.
6. *Ortega R., Galaz M., Astolfi A., Sun Y.Z., Shen T.L.* Transient stabilization of multimachine power systems with nontrivial transfer conductances // IEEE Trans. on Autom. Control. – 2005. – V. 50, № 1. – P. 1016-1020.
7. *Jia H., Yu X., Yu Y., Wang C.* Power system small signal stability region with time delay // Intern. Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2008. – V. 30, № 1. – P. 16-22.
8. *Иванов И.Л.* Устойчивость одной модели энергосистемы с запаздыванием и импульсным воздействием // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т. 9, № 1. – С. 114-127.
9. *Иванов И.Л., Мартынюк А.А.* Анализ устойчивости трехмашинной электроэнергетической системы // Доповіді НАН України. – 2013. – № 7. (готовится к печати)
10. *Слынько В.И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 130-138.
11. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. – World Scientific. – 1989. – 273 p.
12. *Dikin I.I., Shelkunova L.V., Skibenko V.P., Voropai N.I.* A New Approach to Construcion of Optimal Stability Regions of Electric Power Systems on the Base of Quadratic Lyapunov Functions / Preprint. – Irkutsk Energy systems inst. Russ. acad. of sciences. – 1999. – 104 p.

I. L. Ivanov

On the control of power supply systems in conditions of impulse action.

For an impulsive delay model of electric power system with control a new approach for stability analysis by using unbounded piecewise-linear Lyapunov function has been proposed. Sufficient conditions of asymptotical stability for the system has been established by using this approach.

Keywords: *stability, impulse effect, electric energy plant.*

І. Л. Іванов

Про керування енергосистемами в умовах імпульсного впливу.

Для моделі керованої імпульсної електроенергетичної системи з запізненням та імпульсною дією запропоновано підхід до дослідження стійкості з використанням необмеженої кусково-лінійної функції Ляпунова. На основі розробленого підходу отримано достатні умови асимптотичної стійкості системи.

Ключові слова: *стійкість, імпульсна дія, електроенергетична установка.*

Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
center@inmech.kiev.ua

Получено 23.12.12

UDK 517.9

©2013. A. A. Kovalevsky, Yu. S. Gorban

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE ANISOTROPIC ELLIPTIC SECOND-ORDER EQUATIONS WITH L^1 -DATA

In this article, we deal with the Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1 -right-hand sides in a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). This class is described by the presence of a set of exponents $q_1, \dots, q_n$ and of a set of weighted functions $\nu_1, \dots, \nu_n$ in growth and coercivity conditions on coefficients of the equations under consideration. On the basis of general theorems obtained in one of our recent work, we establish conditions of existence of T -solutions and W -solutions of the given problem for model cases where n is an even number, $q_1 = \dots = q_{n/2} \leq q_{n/2+1} = \dots = q_n$ and ν_i are some power weights.

Keywords: degenerate anisotropic elliptic second-order equations, L^1 -data, Dirichlet problem, T -solution, W -solution, conditions of existence of solutions.

1. Introduction. In [8], the Dirichlet problem was studied for a class of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1 -right-hand sides in a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). This class is described by the presence of a set of exponents $q_1, \dots, q_n$ and of a set of weighted functions $\nu_1, \dots, \nu_n$ in growth and coercivity conditions on coefficients of the equations under consideration. The exponents q_i characterize the rates of growth of the coefficients with respect to the corresponding derivatives of unknown function, and the functions ν_i characterize degeneration or singularity of the coefficients with respect to the spatial variable. This is the most general situation in comparison with works of other authors (cf. [1-6, 9]).

Observe that the initial assumptions on the exponents q_i and the functions ν_i in [8] are as follows: $q_i \in (1, n)$, $\nu_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu_i \geq 0$ in Ω , $\nu_i > 0$ a.e. in Ω , $\nu_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ and $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$. On the basis of results obtained in [7], in [8] we proved, in particular, theorems on the existence of T -solutions and W -solutions to the investigated Dirichlet problem. The statements of these theorems contain additional conditions on the numbers q_i and the exponents of increased summability of functions $1/\nu_i$ and ν_i .

In the present article, we give equivalent formulations of the mentioned additional conditions on q_i and ν_i for model cases where n is an even number, $q_1 = \dots = q_{n/2} \leq q_{n/2+1} = \dots = q_n$ and ν_i are some power weights with degeneration or singularity in Ω .

2. Preliminaries. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, and let for every $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $q_i \in (1, n)$. We set $q = \{q_i : i = 1, \dots, n\}$.

Let for every $i \in \{1, \dots, n\}$, ν_i be a nonnegative function on Ω such that $\nu_i > 0$ a.e. in Ω ,

$$\nu_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu_i}\right)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega). \quad (1)$$

We set $\nu = \{\nu_i : i = 1, \dots, n\}$. We denote by $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ the set of all functions

$u \in L^1(\Omega)$ such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$ there exists the weak derivative $D_i u$ and $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$.

Let $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ be the mapping from $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ into $\mathbb{R}$ such that for every function $u \in W^{1,q}(\nu, \Omega)$,

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}.$$

The mapping $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ is a norm in $W^{1,q}(\nu, \Omega)$, and, in view of the second inclusion of (1), the set $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ is a Banach space with respect to the norm $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Moreover, by virtue of the first inclusion of (1), we have $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,q}(\nu, \Omega)$.

We denote by $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ the closure of the set $C_0^\infty(\Omega)$ in the space $W^{1,q}(\nu, \Omega)$. Obviously, the set $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ is a Banach space with respect to the norm induced by the norm $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. We observe that $C_0^1(\Omega) \subset \mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

We define

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right)^{-1}$$

and for every $m \in \mathbb{R}^n$ such that $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, we set

$$p_m = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1+m_i}{m_i q_i} - 1 \right)^{-1}.$$

Observe that if $m \in \mathbb{R}^n$ and for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_i \geq 1/(q_i - 1)$, then $p_m > 1$. Moreover, if $m \in \mathbb{R}^n$ and for every $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ and $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, then the space $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ is continuously imbedded into the space $L^{p_m}(\Omega)$. This fact follows from Proposition 2.8 of [7]. In turn, the mentioned proposition was established with the use of an imbedding result for the nonweighted anisotropic case [10].

Further, let for every $k > 0$, $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the function such that

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{if } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s & \text{if } |s| > k. \end{cases}$$

We denote by $\mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ the set of all functions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that for every $k > 0$, $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Note that $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

For every $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and for every $x \in \Omega$ we set

$$k(u, x) = \min \{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leq l\}.$$

DEFINITION 1. Let $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ and $i \in \{1, \dots, n\}$. Then $\delta_i u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is the function such that for every $x \in \Omega$, $\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x)$.

Observe that if $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ and $i \in \{1, \dots, n\}$, then for every $k > 0$, $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}}$ a. e. in Ω (see [7, Proposition 2.4]).

DEFINITION 2. If $u \in \overset{\circ}{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, then $\delta u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the mapping such that for every $x \in \Omega$ and for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.

3. General theorems on solvability of the Dirichlet problem. Let $c_1, c_2 > 0$, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geq 0$ in Ω , and let for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a Carathéodory function. We suppose that for almost every $x \in \Omega$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}(x) |a_i(x, \xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leq c_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} + g_1(x),$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - g_2(x).$$

Moreover, we assume that for almost every $x \in \Omega$ and for every $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0.$$

Let $f \in L^1(\Omega)$. We consider the following Dirichlet problem:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (3)$$

DEFINITION 3. A T -solution of problem (2), (3) is a function $u \in \overset{\circ}{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that:

- (i) for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i(x, \delta u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii) for every function $w \in C_0^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i w \right\} dx = \int_{\Omega} f w dx$.

Theorem 1. Suppose that there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that the following conditions are satisfied:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad m_i \geq 1/(q_i - 1), \quad 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega), \quad (4)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma_i > 0, \quad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}, \quad \nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega). \quad (5)$$

Then there exists a T -solution of problem (2), (3).

DEFINITION 4. A W -solution of problem (2), (3) is a function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$ such that:

- (i) for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;
- (ii) for every function $w \in C_0^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i w \right\} dx = \int_{\Omega} f w dx$.

Theorem 2. Suppose that there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that the following conditions are satisfied:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}, \quad 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega), \quad (6)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}, \quad \nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega). \quad (7)$$

Then there exists a W -solution of problem (2), (3).

Theorems 1 and 2 were proved in [8].

4. Equivalent statements of conditions of solvability of the Dirichlet problem for some model cases. We suppose that $n = 2l$ where $l \in \mathbb{N}$, and let α and β be numbers such that

$$1 < \alpha \leq \beta < n. \quad (8)$$

We assume that

$$q_i = \alpha \quad \text{if } i \in \{1, \dots, l\}, \quad (9)$$

$$q_i = \beta \quad \text{if } i \in \{l+1, \dots, n\}. \quad (10)$$

Since $n \geq 2$ and $\beta > 1$, we have

$$1 \leq \frac{\beta n}{2\beta + n - 2} < \beta,$$

and since, by (8), $\alpha \leq \beta$, from (9) and (10) it follows that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \alpha \leq q_i \leq \beta. \quad (11)$$

Moreover, in view of the definition of the number $\bar{q}$ and (9) and (10), we have

$$\frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right). \quad (12)$$

Finally, if $m \in \mathbb{R}^n$, and $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, from the definitions of p_m and $\bar{q}$ it follows that

$$\frac{1}{p_m} > \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n}. \quad (13)$$

Proposition 1. Suppose that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu_i \equiv 1$. Then the following assertions are equivalent:

- (a) there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that conditions (4) and (5) are satisfied;
- (b) the inequality

$$\frac{\beta n}{2\beta + n - 2} < \alpha \quad (14)$$

is valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Then, by virtue of condition (5) and assumption (10),

$$\frac{\beta - 1}{p_m} < 1 - \frac{1}{\bar{q}}. \quad (15)$$

Since, in view of condition (4), $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, using (13) and (15), we obtain

$$\frac{n}{\bar{q}} < 1 + \frac{n - 1}{\beta}. \quad (16)$$

Hence, using equality (12), we conclude that inequality (14) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, let assertion (b) hold. Then from (12) and (14) we obtain that inequality (16) is valid, and therefore, $(\bar{q} - 1)/(\beta - 1) > (n - \bar{q})/n$. Taking this inequality into account, we fix a number t such that

$$t \geq \frac{1}{\alpha - 1}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{t} < \frac{\bar{q} - 1}{\beta - 1} - \frac{n - \bar{q}}{n}. \quad (18)$$

From (18) it follows that

$$1 - \left(1 - \frac{\bar{q}}{n} + \frac{1}{t}\right) \frac{\beta - 1}{\bar{q} - 1} > 0.$$

Taking this inequality into account, we fix $s > 0$ such that

$$\frac{1}{s} < 1 - \left(1 - \frac{\bar{q}}{n} + \frac{1}{t}\right) \frac{\beta - 1}{\bar{q} - 1}. \quad (19)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (20)$$

$$\sigma_i = s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Using (11), (17) and (20) along with the fact that $\nu_i \equiv 1$, $i = 1, \dots, n$, we establish that condition (4) is satisfied. At the same time, using (20), we find that $\bar{q}/p_m = 1 - \bar{q}/n + 1/t$. This and (19) imply that

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{(\beta - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}. \quad (22)$$

Using (11), (21) and (22) along with the fact that $\nu_i \equiv 1$, $i = 1, \dots, n$, we establish that condition (5) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

Proposition 2. *Suppose that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu_i \equiv 1$. Then the following assertions are equivalent:*

(a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that conditions (6) and (7) are satisfied;*

(b) *the inequality*

$$\max \left\{ \frac{\beta n}{2\beta + n - 2}, \frac{(3n - 2)\beta}{(2\beta - 1)n} \right\} < \alpha \quad (23)$$

is valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Then, by virtue of condition (6) and assumption (9), $\frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} < \alpha - 1$. Hence, using (13), we get $\frac{1}{\bar{q}} < 1 - \frac{n-1}{n\alpha}$. This and (12) imply that

$$(3n - 2)\beta < (2\beta - 1)n\alpha. \quad (24)$$

Moreover, by condition (7) and assumption (10), we have $(\beta - 1)/p_m < 1 - 1/\bar{q}$. Hence, using (12) and (13), we obtain that $\beta n < (2\beta + n - 2)\alpha$. This and (24) lead to the conclusion that inequality (23) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, let assertion (b) hold. Then from equality (12) and the inequality $(3n - 2)\beta < (2\beta - 1)n\alpha$ we deduce that

$$\frac{n - \bar{q}}{n(\bar{q} - 1)} < \alpha - 1. \quad (25)$$

Moreover, from equality (12) and the inequality $\beta n < (2\beta + n - 2)\alpha$ we infer that $n/\bar{q} < 1 + (n - 1)/\beta$. Therefore, $(n - \bar{q})/n < (\bar{q} - 1)/(\beta - 1)$. Taking into account this inequality and (25), we fix $t > 0$ such that

$$\frac{1}{t} < \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}} \left[\alpha - 1 - \frac{n - \bar{q}}{n(\bar{q} - 1)} \right], \quad (26)$$

$$\frac{1}{t} < \frac{\bar{q} - 1}{\beta - 1} - \frac{n - \bar{q}}{n}. \quad (27)$$

From (26) it follows that

$$\left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\bar{q}t} \right) \frac{\bar{q}}{\bar{q} - 1} < \alpha - 1 - \frac{1}{t}, \quad (28)$$

and from (27) we get

$$1 - \left(1 - \frac{\bar{q}}{n} + \frac{1}{t} \right) \frac{\beta - 1}{\bar{q} - 1} > 0.$$

Taking the latter inequality into account, we fix $s > 0$ such that

$$\frac{1}{s} < 1 - \left(1 - \frac{\bar{q}}{n} + \frac{1}{t} \right) \frac{\beta - 1}{\bar{q} - 1}. \quad (29)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (30)$$

$$\sigma_i = s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (31)$$

Using (30), we obtain that

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{t\bar{q}}. \quad (32)$$

This along with (11), (28) and (30) implies that for every $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i},$$

and obviously, for every $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Therefore, condition (6) is satisfied. Moreover, from (11), (29), (31) and (32) we derive that for every $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)},$$

and obviously, for every $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Therefore, condition (7) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 1. The necessary requirements for the validity of inequality (23) are as follows:

$$\beta > 2 - 1/n, \quad \alpha > 2 - \frac{5n - 4}{n^2 + 2n - 2}.$$

In fact, from (23) and the initial assumption $\alpha \leq \beta$ it follows that $(3n - 2)/n < 2\beta - 1$. Hence, $\beta > 2 - 1/n$. Moreover, by virtue of (23), we have $n/\alpha < 2 + (n - 2)/\beta$. This and the inequality $\beta > 2 - 1/n$ imply that $\alpha > 2 - (5n - 4)/(n^2 + 2n - 2)$.

REMARK 2. Observe that if $\beta > 2 - 1/n$, then

$$\max \left\{ \frac{n}{2\beta + n - 2}, \frac{3n - 2}{(2\beta - 1)n} \right\} < 1.$$

Taking this into account, we obtain that if $\beta > 2 - 1/n$,

$$\max \left\{ \frac{n}{2\beta + n - 2}, \frac{3n - 2}{(2\beta - 1)n} \right\} < \varepsilon \leq 1$$

and $\alpha = \beta\varepsilon$, then inequality (23) is valid.

Let θ denote the origin in $\mathbb{R}^n$, i.e. $\theta \in \mathbb{R}^n$, and for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $\theta_i = 0$.

Proposition 3. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that the following assertions hold:*

$$\text{if } i \in \{1, \dots, l\}, \text{ then for every } x \in \Omega \text{ we have } \nu_i(x) = |x|^\gamma, \quad (33)$$

$$\text{if } i \in \{l + 1, \dots, n\}, \text{ then for every } x \in \Omega \text{ we have } \nu_i(x) = |x|^\tau. \quad (34)$$

Then the following assertions are equivalent:

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that conditions (4) and (5) are satisfied;*
- (b) *the inequalities*

$$\gamma < n(\alpha - 1), \quad \tau < n(\beta - 1), \quad (35)$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} < \frac{\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n}{\alpha(\beta - 1)} \quad (36)$$

are valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Let $i \in \{1, \dots, l\}$. From condition (4) and assumption (9) it follows that $m_i \geq 1/(\alpha - 1)$ and $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. The latter inclusion along with the inclusion $\theta \in \Omega$ and (33) implies that $m_i < n/\gamma$. From the given inequalities for m_i we deduce that the first inequality of (35) is valid. Now, let $i \in$

$\{l+1, \dots, n\}$. From condition (4) and assumption (10) it follows that $m_i \geq 1/(\beta-1)$ and $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. The latter inclusion along with the inclusion $\theta \in \Omega$ and (34) implies that $m_i < n/\tau$. From the inequalities obtained for m_i we infer that the second inequality of (35) is valid. Moreover, owing to the above considerations, we have

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad \frac{1}{m_i} > \frac{\gamma}{n}, \quad (37)$$

$$\forall i \in \{l+1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{m_i} > \frac{\tau}{n}. \quad (38)$$

Using (9), (10), (37) and (38), we get

$$\frac{1}{p_m} > \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right). \quad (39)$$

Next, from condition (5) and assumption (10) it follows that $(\beta-1)/p_m < 1 - 1/\bar{q}$. This and (39) imply that

$$(\beta-1) \left[\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right) \right] < 1 - \frac{1}{\bar{q}}.$$

Hence, using (12), we deduce that inequality (36) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds. From inequalities (35) and (36) it follows that $\frac{\gamma}{n(\alpha-1)} < 1$, $\frac{\tau}{n(\beta-1)} < 1$ and $\alpha(\beta-1) \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right) [\alpha(2\beta+n-2) - \beta n]^{-1} < 1$. Taking these inequalities into account, we fix a number $\varepsilon < 1$ such that

$$\frac{\gamma}{n(\alpha-1)} < \varepsilon, \quad \frac{\tau}{n(\beta-1)} < \varepsilon, \quad (40)$$

$$\alpha(\beta-1) \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right) [\alpha(2\beta+n-2) - \beta n]^{-1} < \varepsilon. \quad (41)$$

Using (12) and (41), we establish that

$$1 - \frac{\bar{q}(\beta-1)}{\bar{q}-1} \left[\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right) \right] > 0.$$

Taking this inequality into account, we fix $s > 0$ such that

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{\bar{q}(\beta-1)}{\bar{q}-1} \left[\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right) \right]. \quad (42)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\gamma}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (43)$$

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\tau}, \quad i = l+1, \dots, n, \quad (44)$$

$$\sigma_i = s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (45)$$

Using (9), (10), (33), (34), (40), (43), (44) and the inequality $\varepsilon < 1$, we establish that condition (4) is satisfied. At the same time, by virtue of (9), (10), (43) and (44), we have

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} \right).$$

Taking into account this equality and using (11), (33), (34), (42) and (45), we establish that condition (5) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 3. From the statements of Propositions 1 and 3 it follows that in the nonweighted case and in the case of power weights with positive exponents, for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ satisfying conditions (4) and (5), the necessary requirement on α and β is the same, exactly $\alpha > \beta n / (2\beta + n - 2)$.

Proposition 4. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (33) and (34) hold. Then the following assertions are equivalent:*

(a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that conditions (6) and (7) are satisfied;*

(b) *the inequalities*

$$(2\beta - 1)\gamma + \tau < \alpha n(2\beta - 1) - (3n - 2)\beta, \quad (46)$$

$$\gamma + (2\alpha - 1)\tau < \alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n, \quad (47)$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} < \frac{\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n}{\alpha(\beta - 1)} \quad (48)$$

are valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Let $i \in \{1, \dots, l\}$. By condition (6) and assumption (9), we have

$$\frac{1}{m_i} < \alpha - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}. \quad (49)$$

Moreover, since, by condition (6), $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, from this inclusion and (33) we deduce that $\gamma m_i < n$. This and (49) imply that

$$\frac{\gamma}{n} < \alpha - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}. \quad (50)$$

Analogously, taking an arbitrary $i \in \{l+1, \dots, n\}$, by virtue of condition (6) and assumption (10), we have

$$\frac{1}{m_i} < \beta - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}. \quad (51)$$

Furthermore, since, by condition (6), $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, from this inclusion and (34) we derive that $\tau m_i < n$. This and (51) imply that

$$\frac{\tau}{n} < \beta - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}. \quad (52)$$

From the above considerations it follows that assertions (37) and (38) holds, and then, in view of (9) and (10), inequality (39) is valid. Using (12), (39) and (50), we establish that inequality (46) is valid, and, by means of (12), (39) and (52), we find that inequality (47) is valid. Finally, from condition (7) and assumption (10) it follows that $(\beta-1)\bar{q} < p_m(\bar{q}-1)$. Hence, using (12) and (39), we establish that inequality (48) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds, Then, by virtue of inequalities (46)–(48), we have

$$[(2\beta-1)\gamma + \tau][\alpha n(2\beta-1) - (3n-2)\beta]^{-1} < 1,$$

$$[\gamma + (2\alpha-1)\tau][\alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n]^{-1} < 1,$$

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta}\right)[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n]^{-1} < 1.$$

Taking these inequalities into account, we fix a number $\varepsilon < 1$ such that

$$[(2\beta-1)\gamma + \tau][\alpha n(2\beta-1) - (3n-2)\beta]^{-1} < \varepsilon, \quad (53)$$

$$[\gamma + (2\alpha-1)\tau][\alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n]^{-1} < \varepsilon, \quad (54)$$

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta}\right)[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n]^{-1} < \varepsilon, \quad (55)$$

and set

$$\mu = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta}\right). \quad (56)$$

Using (12), (53), (54) and (56), we obtain the inequalities

$$\frac{\mu\bar{q}}{\bar{q}-1} < \alpha - 1 - \frac{\gamma}{n\varepsilon}, \quad \frac{\mu\bar{q}}{\bar{q}-1} < \beta - 1 - \frac{\tau}{n\varepsilon}, \quad (57)$$

and using (12), (55) and (56), we get $\mu(\beta-1)\bar{q} < \bar{q}-1$. Taking into account the latter inequality, we fix $s > 0$ such that

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{\mu(\beta-1)\bar{q}}{\bar{q}-1}. \quad (58)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\gamma}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (59)$$

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\tau}, \quad i = l+1, \dots, n, \quad (60)$$

$$\sigma_i = s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (61)$$

From (9), (10), (56), (59) and (60) it follows that

$$\mu p_m = 1. \quad (62)$$

Using (9), (10), (57), (59), (60) and (62), we establish that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}. \quad (63)$$

Moreover, using (33), (34), (59), (60) and the inequality $\varepsilon < 1$, we obtain that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. This and (63) imply that condition (6) is satisfied. Finally, using (11), (33), (34), (58), (61) and (62), we establish that condition (7) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 4. From the statements of Propositions 2 and 4 it follows that in the nonweighted case and in the case of power weights with positive exponents, for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates satisfying conditions (6) and (7), the principal necessary requirement on α and β is the same, exactly is inequality (23). To see this, it is sufficient to note that by virtue of (46) and the initial inequality $\alpha \leq \beta$, we have $\beta > 2 - 1/n$, and then, in view of (46), $\alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n > 0$.

Proposition 5. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that the following assertions hold:*

$$\text{if } i \in \{1, \dots, l\}, \text{ then for every } x \in \Omega \setminus \{\theta\}, \nu_i(x) = |x|^{-\gamma}, \quad (64)$$

$$\text{if } i \in \{l + 1, \dots, n\}, \text{ then for every } x \in \Omega \setminus \{\theta\}, \nu_i(x) = |x|^{-\tau}. \quad (65)$$

Then the following assertions are equivalent:

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that conditions (4) and (5) are satisfied;*
- (b) *the inequalities*

$$\gamma < \frac{\alpha[\beta(n-2) - \alpha(n-2\beta)]}{2\alpha\beta - \alpha - \beta}, \quad \tau < \frac{\beta[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n]}{2\alpha\beta - \alpha - \beta} \quad (66)$$

are valid.

Proof. First of all we observe that, in view of (12),

$$\frac{\bar{q}}{\bar{q} - 1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{n(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta}{n(2\alpha\beta - \alpha - \beta)}. \quad (67)$$

Suppose that assertion (a) holds. Let $i \in \{1, \dots, l\}$. Then, by virtue of condition (5) and assumption (9), we have $\sigma_i > 0$,

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(\alpha - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} \quad (68)$$

and $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. From the latter inclusion and (64), taking into account that $\theta \in \Omega$, we deduce that $\gamma\sigma_i < n$. Then, by (68), $\frac{\gamma}{n} < 1 - \frac{(\alpha-1)\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)}$. This along with (13) and (67)

implies that the first inequality of (66) is valid. Analogously, let $i \in \{l+1, \dots, n\}$. Then, by virtue of condition (5) and assumption (10), we have $\sigma_i > 0$,

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(\beta-1)\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)} \quad (69)$$

and $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. From the latter inclusion and (65), taking into account that $\theta \in \Omega$, we derive that $\tau\sigma_i < n$. Then, by (69), $\frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta-1)\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)}$. This along with (13) and (67) implies that the second inequality of (66) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds. Then, by virtue of (66) and (67), we have

$$\frac{\gamma}{n} < 1 - \frac{(\alpha-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right), \quad \frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right).$$

Taking these inequalities into account, we fix $s_1, s_2 > 0$ such that

$$\frac{\gamma}{n} < \frac{1}{s_1} < 1 - \frac{(\alpha-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right), \quad (70)$$

$$\frac{\tau}{n} < \frac{1}{s_2} < 1 - \frac{(\beta-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right), \quad (71)$$

and then we fix a number t such that

$$t \geq \frac{1}{\alpha-1}, \quad (72)$$

$$\frac{\alpha-1}{(\bar{q}-1)t} < 1 - \frac{(\alpha-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{s_1}, \quad (73)$$

$$\frac{\beta-1}{(\bar{q}-1)t} < 1 - \frac{(\beta-1)\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{s_2}. \quad (74)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (75)$$

$$\sigma_i = s_1, \quad i = 1, \dots, l, \quad (76)$$

$$\sigma_i = s_2, \quad i = l+1, \dots, n. \quad (77)$$

Using (11), (64), (65), (72) and (75), we establish that condition (4) is satisfied. At the same time, in view of (75), we have

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\bar{q}t}. \quad (78)$$

From (9), (10), (73), (74) and (76)–(78) it follows that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma_i > 0, \quad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i-1)\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)}. \quad (79)$$

Moreover, using (64), (65), (76), (77) along with the inclusion $\theta \in \Omega$ and taking into account that, in view of (70) and (71), $\gamma s_1 < n$ and $\tau s_2 < n$, we establish that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. This and (79) imply that condition (5) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 5. From the statements of Propositions 3 and 5 it follows that, for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ satisfying conditions (4) and (5), the necessary requirements on α and β in the case of power weights with negative exponents in general are stronger than that in the case of power weights with positive exponents.

Proposition 6. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (64) and (65) hold. Then the following assertions are equivalent:*

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that conditions (6) and (7) are satisfied;*
- (b) *the inequality*

$$\frac{(3n-2)\beta}{(2\beta-1)n} < \alpha \quad (80)$$

and inequalities (66) are valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Then, by virtue of condition (6) and assumption (9), we have $1/p_m < (\alpha-1)(\bar{q}-1)/\bar{q}$. Hence, using (13), we get $1/\bar{q} < 1 - \frac{n-1}{n\alpha}$. This and (12) imply that inequality (80) is valid. The validity of inequalities (66) is established in the same way as in the proof of Proposition 5. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds. Then, taking into account (66) and (67), we fix $s_1, s_2 > 0$ such that inequalities (70) and (71) are valid. Observe that, by (12) and (80), $\frac{\bar{q}}{\bar{q}-1}(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n}) < \alpha - 1$. Taking into account this inequality and (70), (71), we fix a number $t > 0$ such that

$$\frac{\bar{q}}{(\bar{q}-1)t} < \alpha - 1 - \frac{\bar{q}}{\bar{q}-1} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} \right) \quad (81)$$

and inequalities (73) and (74) are valid. Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that $m_i = t$, $i = 1, \dots, n$; $\sigma_i = s_1$, $i = 1, \dots, l$, and $\sigma_i = s_2$, $i = l+1, \dots, n$. It is easy to see that equality (78) is valid. Then, using (11), (64), (65) and (81), we establish that condition (6) is satisfied. Moreover, using (9), (10), (64), (65), (73), (74), (78), the inclusion $\theta \in \Omega$ and the inequalities $\gamma s_1 < n$ and $\tau s_2 < n$, we obtain that condition (7) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 6. From the statements of Propositions 4 and 6 it follows that, for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates satisfying conditions (6) and (7), the necessary requirements on α and β in the case of power weights with negative exponents in general are stronger than that in the case of power weights with positive exponents.

Proposition 7. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that the following assertions hold:*

$$\text{if } i \in \{1, \dots, l\}, \text{ then for every } x \in \Omega, \nu_i(x) = |x|^\gamma, \quad (82)$$

$$\text{if } i \in \{l+1, \dots, n\}, \text{ then for every } x \in \Omega \setminus \{\theta\}, \nu_i(x) = |x|^{-\tau}. \quad (83)$$

Then the following assertions are equivalent:

- (a) there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that conditions (4) and (5) are satisfied;
 (b) the inequalities

$$\gamma < n(\alpha - 1), \quad (84)$$

$$\gamma(\beta - 1) + \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta) < \alpha(2\beta + n - 2) - \beta n \quad (85)$$

are valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Let $i \in \{1, \dots, l\}$. Then, by condition (4) and assumption (9), $m_i \geq 1/(\alpha - 1)$ and $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. The latter inclusion along with the inclusion $\theta \in \Omega$ and (82) implies that $\gamma m_i < n$. From the given inequalities for m_i we deduce that inequality (84) is valid. Moreover, we conclude that for every $i \in \{1, \dots, l\}$, $1/m_i > \gamma/n$. Using this fact and (9), we get

$$\frac{1}{p_m} > \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{2\alpha n}. \quad (86)$$

Next, let $i \in \{l + 1, \dots, n\}$. By condition (5) and assumption (10),

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(\beta - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} \quad (87)$$

and $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. The latter inclusion along with the inclusion $\theta \in \Omega$ and (83) implies that $\tau\sigma_i < n$. From this and (87) it follows that $\frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)}$. Hence, using (12) and (86), we establish that inequality (85) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds. Then, by virtue of inequalities (84) and (85), $1 < n(\alpha - 1)/\gamma$, $1 < \frac{1}{\gamma(\beta - 1)} [\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta)]$. Taking these inequalities into account, we fix a number $\varepsilon > 0$ such that

$$1 < \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n(\alpha - 1)}{\gamma}, \quad (88)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\gamma(\beta - 1)} [\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta)].$$

The latter inequality implies that $0 < \alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta) - \gamma(\beta - 1)/\varepsilon$. Taking this inequality into account, we fix a number t such that

$$t \geq \frac{1}{\beta - 1}, \quad (89)$$

$$\frac{(\beta - 1)\alpha n}{\beta t} < \alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta) - \frac{\gamma(\beta - 1)}{\varepsilon}, \quad (90)$$

and define

$$d = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{2\alpha n\varepsilon} + \frac{1}{2\beta t}. \quad (91)$$

From (12), (90) and (91) it follows that $\tau/n < 1 - (\beta - 1)d\bar{q}/(\bar{q} - 1)$. Taking this inequality into account, we fix $s > 0$ such that

$$\frac{\tau}{n} < \frac{1}{s} < 1 - \frac{(\beta - 1)d\bar{q}}{\bar{q} - 1}. \quad (92)$$

Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\gamma}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (93)$$

$$m_i = t, \quad i = l + 1, \dots, n, \quad (94)$$

$$\sigma_i = s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (95)$$

Using (9), (10), (91), (93) and (94), we establish that

$$dp_m = 1, \quad (96)$$

and from (9), (10), (88), (89), (93) and (94) we derive that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad m_i \geq 1/(q_i - 1). \quad (97)$$

Moreover, using (82), (83), (93), (94), the inclusion $\theta \in \Omega$ and the inequality $\varepsilon < 1$, we establish that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. This and (97) imply that condition (4) is satisfied. Finally, from (11), (92), (95) and (96) we deduce that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma_i > 0, \quad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)},$$

and using (82), (83), (92), (95) and the inclusion $\theta \in \Omega$, we establish that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Therefore, condition (5) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 7. From the statements of Propositions 1, 3 and 7 it follows that in the case of power weights defined by assertions (82) and (83), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ satisfying conditions (4) and (5), the necessary requirement on α and β is the same as in the nonweighted case and in the case of power weights with positive exponents, exactly $\alpha > \beta n/(2\beta + n - 2)$.

Proposition 8. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (82) and (83) hold. Then the following assertions are equivalent:*

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that conditions (6) and (7) are satisfied;*
- (b) *the inequality*

$$\gamma < \frac{\alpha(2\beta - 1)n - (3n - 2)\beta}{2\beta - 1} \quad (98)$$

and inequality (85) are valid.

Proof. Suppose that assertion (a) holds. Then assertion (a) of Proposition 7 holds. Therefore, by virtue of Proposition 7, inequality (85) is valid, and, according to the first part of the proof of Proposition 7, inequality (86) is also valid. Let $i \in \{1, \dots, l\}$. By condition (6) and assumption (9), we have

$$\frac{1}{m_i} < \alpha - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} \quad (99)$$

and $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. The latter inclusion along with (82) and the inclusion $\theta \in \Omega$ implies that $\gamma m_i < n$. From this and (99) we derive that $\frac{\gamma}{n} < \alpha - 1 - \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)}$. Hence, using (12) and (86), we infer that inequality (98) is valid. Thus, assertion (b) holds.

Conversely, suppose that assertion (b) holds. Then, by virtue of inequalities (98) and (85), we have

$$\begin{aligned} \gamma(2\beta - 1)[\alpha(2\beta - 1)n - (3n - 2)\beta]^{-1} &< 1, \\ \gamma(\beta - 1)[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta)]^{-1} &< 1. \end{aligned}$$

Taking these inequalities into account, we fix a number $\varepsilon < 1$ such that

$$\begin{aligned} \gamma(2\beta - 1)[\alpha(2\beta - 1)n - (3n - 2)\beta]^{-1} &< \varepsilon, \\ \gamma(\beta - 1)[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n - \tau(2\alpha - 1 - \alpha/\beta)]^{-1} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

In turn, taking into consideration the last two inequalities, we fix a number t such that

$$t > n\varepsilon/\gamma, \quad (100)$$

$$\frac{n}{t} < \alpha(2\beta - 1)n - (3n - 2)\beta - \frac{\gamma(2\beta - 1)}{\varepsilon} \quad (101)$$

and inequality (90) is valid. Defining the number d by (91), from (12) and (90) we deduce that $\frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta-1)d\bar{q}}{\bar{q}-1}$. Taking this inequality into account, we fix $s > 0$ such that inequality (92) is valid. Now, let $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ be such that relations (93)–(95) hold. Using (9), (10), (91), (93) and (94), we establish that equality (96) is valid, and using (9), (11), (12), (91), (93), (94), (96), (100) and (101), we obtain that

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}. \quad (102)$$

Moreover, since $\theta \in \Omega$ and $\varepsilon < 1$, from (82), (83), (93) and (94) it follows that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. This and (102) imply that condition (6) is satisfied. Finally, using (11), (82), (83), (92), (95), (96) and the inclusion $\theta \in \Omega$, we establish that condition (7) is satisfied. Thus, assertion (a) holds. The proposition is proved.

REMARK 8. From the statements of Propositions 2, 4 and 8 it follows that in the case of power weights defined by assertions (82) and (83), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates satisfying conditions (6) and (7), the necessary requirement on α and β is the same as in the nonweighted case and in the case of power weights with positive exponents, and exactly is inequality (23).

Proposition 9. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that the following assertions hold:*

$$\text{if } i \in \{1, \dots, l\}, \text{ then for every } x \in \Omega \setminus \{\theta\}, \nu_i(x) = |x|^{-\gamma}, \quad (103)$$

$$\text{if } i \in \{l + 1, \dots, n\}, \text{ then for every } x \in \Omega, \nu_i(x) = |x|^\tau. \quad (104)$$

Then the following assertions are equivalent:

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ such that conditions (4) and (5) are satisfied;*

(b) *the inequalities*

$$\tau < \min \left\{ n(\beta - 1), \frac{\beta[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n]}{\alpha(\beta - 1)} \right\},$$

$$\gamma(2\beta - 1 - \beta/\alpha) + \tau(\alpha - 1) < \beta(n - 2) - \alpha(n - 2\beta)$$

are valid.

The proof of this proposition is realized by analogy with the proof of Proposition 7.

REMARK 9. From the statements of Propositions 5 and 9 it follows that in the case of power weights defined by assertions (64) and (65) and in the case of power weights defined by assertions (103) and (104), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ satisfying conditions (4) and (5), the necessary requirements on α and β are the same. At the same time, from the statements of Propositions 7 and 9 it follows that in the case of power weights defined by assertions (103) and (104), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ satisfying conditions (4) and (5), the necessary requirements on α and β in general are stronger than that in the case of power weights defined by assertions (82) and (83).

Proposition 10. *Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (103) and (104) hold. Then the following assertions are equivalent:*

- (a) *there exist $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates such that conditions (6) and (7) are satisfied;*
- (b) *the inequalities*

$$\tau < \alpha(2\beta - 1)n - (3n - 2)\beta, \quad (2\alpha - 1)\tau < \alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n,$$

$$\frac{\tau}{\beta} < \frac{\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n}{\alpha(\beta - 1)},$$

$$\gamma(2\beta - 1 - \beta/\alpha) + \tau(\alpha - 1) < \beta(n - 2) - \alpha(n - 2\beta)$$

are valid.

The proof of this proposition is realized by analogy with the proof of Proposition 8.

REMARK 10. From the statements of Propositions 6 and 10 it follows that in the case of power weights defined by assertions (64) and (65) and in the case of power weights defined by assertions (103) and (104), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates satisfying conditions (6) and (7), the necessary requirements on α and β are the same (in this connection see also Remark 4). At the same time, from the statements of Propositions 8 and 10 it follows that in the case of power weights defined by assertions (103) and (104), for the existence of $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive coordinates satisfying conditions (6) and (7), the necessary requirements on α and β in general are stronger than those in the case of power weights defined by assertions (82) and (83).

5. Theorems on solvability of the Dirichlet problem for some model cases.

On the basis of Theorems 1 and 2 and Propositions 1–10 one can obtain a set of theorems on the existence of T -solutions and W -solutions of problem (2), (3) for model cases of the exponents q_i and the weighted functions ν_i considered in the previous section. For instance, the following results hold true.

Theorem 3. Suppose that $n = 2l$ where $l \in \mathbb{N}$, and let α and β be numbers such that $1 < \alpha \leq \beta < n$. Assume that $q_i = \alpha$ if $i \in \{1, \dots, l\}$, and $q_i = \beta$ if $i \in \{l+1, \dots, n\}$. Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (33) and (34) hold and inequalities (35) and (36) are valid. Then there exists a T -solution of problem (2), (3).

Theorem 4. Suppose that $n = 2l$ where $l \in \mathbb{N}$, and let α and β be numbers such that $1 < \alpha \leq \beta < n$. Assume that $q_i = \alpha$ if $i \in \{1, \dots, l\}$, and $q_i = \beta$ if $i \in \{l+1, \dots, n\}$. Let $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, and suppose that assertions (33) and (34) hold and inequalities (46)–(48) are valid. Then there exists a W -solution of problem (2), (3).

Theorem 3 is a consequence of Proposition 3 and Theorem 1, and Theorem 4 follows from Proposition 4 and Theorem 2.

1. Aharouch L., Azroul E., Benkirane A. Quasilinear degenerated equations with L^1 datum and without coercivity in perturbation terms, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2006. – No. 19. – 18 pp.
2. Bendahmane M., Karlsen K.H. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in R^N with advection and lower order terms and locally integrable data, Potential Anal. 22 (2005), no. 3. – P. 207-227.
3. Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2. – P. 241-273.
4. Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P. Anisotropic equations in L^1 , Differential Integral Equations 9 (1996), no. 1. – P. 209-212.
5. Cavalheiro A.C. Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations, Complex Var. Elliptic Equ. 53 (2008), no. 10. – P. 945-956.
6. Cirmi G.R. On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data, Ricerche Mat. 42 (1993), no. 2. – P. 315-329.
7. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. On T -solutions of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities with L^1 -data, Izv. Math. 75 (2011), no. 1. – P. 101-156.
8. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1 -data (submitted).
9. Li F.Q. Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data, Comment. Math. Univ. Carolin. 48 (2007), no. 4. – P. 647-658.
10. Troisi M. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi, Ricerche Mat. 18 (1969). – P. 3-24.

А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань

Условия разрешимости задачи Дирихле для вырождающихся анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -данными.

В статье рассмотрена задача Дирихле для класса вырождающихся анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями в ограниченном открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Этот класс характеризуется наличием набора показателей $q_1, \dots, q_n$ и набора весовых функций $\nu_1, \dots, \nu_n$ в условиях роста и коэрцитивности относительно коэффициентов уравнений. На основе общих теорем, полученных в одной из наших недавних работ, установлены условия существования T -решений и W -решений данной задачи в модельных случаях, где n – четное число, $q_1 = \dots = q_{n/2} \leq q_{n/2+1} = \dots = q_n$ и ν_i – некоторые степенные веса.

Ключевые слова: вырождающиеся анизотропные эллиптические уравнения второго порядка, L^1 -данные, задача Дирихле, T -решение, W -решение, условия существования решений.

О. А. Ковалевський, Ю. С. Горбань

Умови розв'язності задачі Діріхле для виродних анізотропних еліптичних рівнянь другого порядку з L^1 -даними.

У статті розглянуто задачу Діріхле для класу виродних анізотропних еліптичних рівнянь другого порядку з L^1 -правими частинами в обмеженій відкритій множині простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Цей клас характеризується наявністю набору показників $q_1, \dots, q_n$ і набору вагових функцій $\nu_1, \dots, \nu_n$ в умовах зростання та коерцитивності відносно коефіцієнтів рівнянь. На основі загальних теорем, отриманих в одній з наших недавніх робіт, встановлено умови існування T -розв'язків і W -розв'язків даної задачі в модельних випадках, де n – парне число, $q_1 = \dots = q_{n/2} \leq q_{n/2+1} = \dots = q_n$ і ν_i – деякі степеневі ваги.

Ключові слова: виродні анізотропні еліптичні рівняння другого порядку, L^1 -дані, задача Діріхле, T -розв'язок, W -розв'язок, умови існування розв'язків.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
Donetsk National University
alekvl@iamm.ac.donetsk.ua
yuliya_gorban@mail.ru

Received 22.05.13

УДК 517.55

©2013. Ю. С. Коломойцев

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В КЛАССАХ $\varphi(L)$

Получены необходимые и достаточные условия выполнимости неравенств типа Бернштейна для дробных производных тригонометрического полинома в классах $\varphi(L)$. **Ключевые слова:** неравенство Бернштейна, тригонометрические полиномы, дробные производные, классы $\varphi(L)$, интеграл Фурье.

1. Введение. Пусть $\mathcal{T}_N$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше N . Неравенством Бернштейна для производной тригонометрического полинома называют неравенство вида

$$\|T'_N\|_p \leq N\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N. \quad (1)$$

Данное неравенство при $p = \infty$ в частных случаях получил С.Н. Бернштейн [1, т. 1, с. 26]. В общем случае с $p = \infty$ это неравенство было доказано М. Риссом [2]. А. Зигмунд [3, т. 2, гл. 10], используя интерполяционную формулу Рисса, доказал следующее утверждение: *если функция φ выпукла (вниз) на $[0, \infty)$ и неубывающая, то*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|T'_N(t)|) dt \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(N|T_N(t)|) dt, \quad T_N \in \mathcal{T}_N \quad (2)$$

(здесь и далее $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$). Легко видеть, что если $\varphi(t) = t^p$, то из (2) сразу следует неравенство (1) при всех $p \in [1, \infty)$.

При $0 < p < 1$ неравенства вида (1) исследовались в работах [4-7]. В частности, в [4] и [5] было доказано, что

$$\|T'_N\|_p \leq C(p)N\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$

где $C(p)$ – некоторая константа, зависящая только от p . В.В. Арестов в работе [7] показал, что данное неравенство, на самом деле, выполняется с константой $C(p) = 1$. Более того, в этой же работе было получено неравенство (2) с функцией $\varphi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, которая представима в виде $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, где функция ψ не убывает и выпукла на $(-\infty, \infty)$.

Пусть $T_N^{(\beta)}$ – дробная производная Вейля полинома T_N . Из результатов работы П.И. Лизоркина [8] вытекает, что при $p \geq 1$ и $\beta \geq 1$ (см. также [9]) имеет место неравенство

$$\|T_N^{(\beta)}\|_p \leq N^\beta \|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N.$$

В случае пространств L_p , $0 < p < 1$, неравенства типа Бернштейна для дробных производных тригонометрического полинома изучались в работах [10-13]. Оказалось, что при $0 < p < 1$ неравенство типа Бернштейна выполняется, только если

порядок производной $\beta > 1/p - 1$ или $\beta \in \mathbb{N}$. В частности, Е.С. Белинским и И.Р. Лифляндом в [11] было доказано, что при $0 < p < 1$ и $\beta > 1/p - 1$

$$\|T_N^{(\beta)}\|_p \leq C(\beta, p)N^\beta \|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$

где $C(\beta, p)$ – некоторая константа, зависящая только от β и p . А при $\beta \leq 1/p - 1$, $\beta \notin \mathbb{N}$, такое неравенство с константой C , не зависящей от полинома T_N , уже не выполняется.

Пусть Φ – класс функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, являющихся модулем непрерывности, т.е. φ непрерывная неубывающая функция, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $L_0(\mathbb{T})$ – множество действительных 2π -периодических функций, измеримых и почти всюду конечных. Если $\varphi \in \Phi$, то класс функций

$$\varphi(L) = \left\{ f \in L_0(\mathbb{T}) : \rho(f)_\varphi := \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(t)|) dt < \infty \right\}$$

является линейным метрическим пространством. Частными случаями данного пространства являются пространства L_p , $0 < p < 1$ (случай $\varphi(t) = t^p$), и L_0 с топологией сходимости по мере (случай $\varphi(t) = t/(1+t)$). Отметим, что классы $\varphi(L)$ иногда называют классами Орлича и обозначают $\tilde{L}_\varphi$.

В недавней работе С.А. Пичугова [13] было показано, что если $\beta \geq 1$, а функция $\varphi \in \Phi$ является выпуклой вверх и удовлетворяет условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \leq N^\beta \rho(T_N)_\varphi. \quad (3)$$

Легко видеть, что соотношение (3), вообще говоря, отличается от обычного неравенства типа Бернштейна и оценка сверху является более грубой, чем в неравенстве вида (2) для соответствующих функций φ .

В настоящей работе получены обобщения результатов работы [11] на классы $\varphi(L)$, т.е. с заменой квазинормы $\|\cdot\|_p$ функционалом $\rho(\cdot)_\varphi$, где $\varphi \in \Phi$. При этом, в отличие от (3), мы установим неравенства вида

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \leq C \rho(N^\beta T_N)_\varphi,$$

которые, как будет показано ниже, выполняются уже не для всех функций φ , удовлетворяющих условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \rightarrow 0$

Далее всюду символами C , C_1 и C_2 будем обозначать положительные константы (возможно различные даже в одной строке), не зависящие от рассматриваемого полинома T_N и числа N .

2. Основные определения и вспомогательные утверждения. Пусть f_β – однородная функция порядка $\beta \geq 0$, т.е.

$$f_\beta(t\xi) = t^\beta f_\beta(\xi), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Введем оператор "дробного дифференцирования" $D(f_\beta)$, который на множестве всех тригонометрических полиномов определяется по формуле

$$D(f_\beta)T_N(t) = \sum_{k=-N}^N f_\beta(k)c_k e^{ikt}, \quad T_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}. \quad (4)$$

Заметим, что если $f_\beta(k) = (ik)^\beta$, то в (4) стоит дробная производная Вейля полинома T_N , а при $f_\beta(k) = |k|^\beta$ – производная Рисса.

Пусть

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

– преобразование Фурье функции f .

Мы будем часто использовать следующую лемму (см. [12]).

Лемма 1. Пусть f_β однородная функция порядка $\beta \geq 0$, не являющаяся полиномом, а функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель и $\eta(0) = 1$. Тогда

1)

$$|\widehat{f_\beta \eta}(x)| \leq C_1 (1 + |x|)^{-\beta-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

2) найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$|\widehat{f_\beta \eta}(x)| \geq C_2 |x|^{-\beta-1}, \quad |x| \geq \lambda,$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы.

Имеет место следующее неравенство типа Бернштейна.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in \Phi$ и f_β однородная функция порядка $\beta \geq 0$. Тогда

$$\rho(D(f_\beta)T_N)_\varphi \leq C \int_1^N \rho(N^\beta x^{-1-\beta} T_N)_\varphi dx, \quad T_N \in \mathcal{T}_N, N \geq 1, \quad (5)$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от N и полинома T_N .

Доказательство. Введем в рассмотрение полином

$$K_{N,\beta}(x) = \sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right) \eta\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx},$$

где $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 1$ и $\eta(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq 2$.

Имеет место равенство

$$D(f_\beta)T_N(x) = \frac{1}{4N+1} \sum_{\nu=0}^{4N} K_{N,\beta}(x - x_\nu - t) T_N(x_\nu + t), \quad x_\nu = \frac{2\pi\nu}{4N+1},$$

используя которое, получаем

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-\beta} |D(f_{\beta})T_N(x)|) dx \leq \\
 &\leq C \sum_{\nu=0}^{4N} \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta} |K_{N,\beta}(x - x_{\nu} - t)T_N(x_{\nu} + t)|) dx = \\
 &= C \sum_{\nu=0}^{4N} \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta} |K_{N,\beta}(x)T_N(x_{\nu} + t)|) dx.
 \end{aligned}$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по t , а также применяя формулу суммирования Пуассона (см., напр., [14]):

$$\sum_k \widehat{f}(N(x + 2\pi k)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_k f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-ikx}, \quad (6)$$

находим

$$\begin{aligned}
 2\pi I &\leq \sum_{\nu=0}^{4N} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta} |K_{N,\beta}(x)T_N(x_{\nu} + t)|) dx dt \leq \\
 &\leq CN \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta} |K_{N,\beta}(x)T_N(t)|) dx dt = \\
 &= C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{1}{N} \sum_k f_{\beta}\left(\frac{k}{N}\right) \eta\left(\frac{k}{N}\right) e^{\frac{ikx}{N}}\right| \cdot |T_N(t)|\right) dt dx \leq \\
 &\leq C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\sum_k \widehat{f_{\beta}\eta}(x + 2\pi Nk)\right| \cdot |T_N(t)|\right) dt dx \leq \\
 &\leq C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi(|\widehat{f_{\beta}\eta}(x)T_N(t)|) dt dx + \\
 &\quad + C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\sum_{k \neq 0} \widehat{f_{\beta}\eta}(x + 2\pi Nk)\right| \cdot |T_N(t)|\right) dt dx := I_1 + I_2.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, используя лемму 1, получаем, что

$$I_1 \leq C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\frac{|T_N(t)|}{(1 + |x|)^{\beta+1}}\right) dt dx \leq C \int_{\mathbb{T}} \int_1^N \varphi\left(\frac{|T_N(t)|}{x^{\beta+1}}\right) dt dx, \quad (8)$$

а

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\sum_{k \neq 0} \frac{|T_N(t)|}{(1 + |x + 2\pi Nk|)^{\beta+1}}\right) dt dx \leq \\
 &\leq C \int_{\mathbb{T}} \int_{N\mathbb{T}} \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|T_N(t)|}{(Nk)^{\beta+1}}\right) dt dx \leq \\
 &\leq C \int_{\mathbb{T}} \int_1^N \varphi(x^{-\beta-1} |T_N(t)|) dt dx.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, объединяя (7), (8) и (9), имеем

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-\beta}|D(f_{\beta})T_N(t)|)dt \leq C \int_{\mathbb{T}} \int_1^N \varphi(x^{-\beta-1}|T_N(t)|)dtdx.$$

Из последнего неравенства сразу следует (5).

Лемма 2 доказана. $\square$

Далее нам понадобится понятие функции растяжения. Пусть φ – произвольная, строго положительная всюду конечная функция на $(0, \infty)$. Ее *функцией растяжения* называют функцию

$$M_{\varphi}(s) := \sup_{t>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}.$$

Приведем некоторые свойства функции M_{φ} в случае $\varphi \in \Phi$ (см. [15, гл. II, §4]):

1) M_{φ} всюду конечная неубывающая на $(0, \infty)$ функция и

$$M_{\varphi}(s_1 s_2) \leq M_{\varphi}(s_1) M_{\varphi}(s_2), \quad s_1, s_2 \in (0, \infty);$$

2) существует число γ_{φ} (называемое *нижним показателем растяжения функции* φ) такое, что:

а) $\gamma_{\varphi} \in [0, 1]$,

б) $M_{\varphi}(s) \geq s^{\gamma_{\varphi}}$, $s \in (0, 1]$,

в) для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа C_{ε} такая, что при $s \in (0, 1)$

$$M_{\varphi}(s) \leq C_{\varepsilon} s^{\gamma_{\varphi} - \varepsilon}.$$

При этом,

$$\gamma_{\varphi} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln M_{\varphi}(s)}{\ln s} = \sup_{0 < s < 1} \frac{\ln M_{\varphi}(s)}{\ln s}.$$

В частности, если $\gamma_{\varphi} = 0$, то $M_{\varphi}(s) \equiv 1$, $s \in [0, 1]$, если же $\gamma_{\varphi} > 0$, то $M_{\varphi}(+0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее "техническое" условие на функцию $\varphi \in \Phi$.

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу Φ^* , если $\varphi \in \Phi$ и найдется функция α такая, что

$$\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \alpha(0) = 1, \quad \text{supp } \alpha \subset (-1, 1) \quad (10)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(|\widehat{\alpha}(x)|)dx < \infty. \quad (11)$$

Уточним последнее условие. В работе [16] было доказано существование функции $\eta \in L_1(\mathbb{R})$ такой, что $\eta \neq 0$, $\text{supp } \eta \subset (-1, 1)$ и

$$|\widehat{\eta}(x)| = O(e^{-u(|x|)|x|}), \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где u – некоторая положительная функция такая, что $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и

$$\int_1^\infty \frac{u(x)}{x} dx < \infty. \quad (12)$$

Причем, последнее условие является также и необходимым для существования такой функции η .

Таким образом, $\varphi \in \Phi^*$, если найдется убывающая к нулю функция $u(x) > 0$ такая, что имеет место (12) и

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(e^{-u(|x|)|x|}) dx < \infty.$$

Нетрудно заметить, что любая функция $\varphi \in \Phi$ с $\gamma_\varphi > 0$ принадлежит классу Φ^* .

Лемма 3. Пусть $\varphi \in \Phi^*$, а функция α удовлетворяет условиям (10) и (11). Тогда

$$N \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\frac{1}{N} \left| \sum_k \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \right| \right) dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \varphi(|\hat{\alpha}(x)|) dx, \quad N \geq 1,$$

где C – константа, не зависящая от N и α .

Доказательство этой леммы легко вывести из формулы суммирования Пуассона (6), см., напр., [17, 4.1.1].

3. Основной результат.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi^*$ и f_β однородная функция порядка $\beta \geq 0$, не являющаяся полиномом. Тогда

1) если $\gamma_\varphi > 1/(1 + \beta)$, то

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \leq C \rho(N^\beta T_N)_\varphi, \quad T_N \in \mathcal{T}_N, N \geq 1, \quad (13)$$

где C – константа, не зависящая от N и T_N ;

2) если $\gamma_\varphi < 1/(1 + \beta)$, а при $\gamma_\varphi = 1/(1 + \beta)$ имеет место

$$\sup_{t>0} \int_1^\infty \frac{\varphi(tx^{-1/\gamma_\varphi})}{\varphi(t)} dx = \infty, \quad (14)$$

то неравенство (13) не выполняется с константой C , не зависящей от N и T_N .

Доказательство. Утверждение 1) легко следует из свойства в) функции M_φ и леммы 2. Действительно, используя неравенство (5) и выбирая положительное $\varepsilon < \gamma_\varphi - 1/(1 + \beta)$, находим

$$\begin{aligned} \rho(D(f_\beta)T_N)_\varphi &\leq C \int_1^N M_\varphi(x^{-1-\beta}) dx \rho(N^\beta T_N)_\varphi \leq \\ &\leq C \int_1^N \frac{dx}{x^{(1+\beta)(\gamma_\varphi-\varepsilon)}} \rho(N^\beta T_N)_\varphi \leq C \rho(N^\beta T_N)_\varphi. \end{aligned}$$

Докажем утверждение 2). Пусть $A > 0$. Предположим, что существует константа C , не зависящая от N и полинома T_N , такая, что

$$\rho(AD(f_\beta)T_N)_\varphi \leq C\rho(AN^\beta T_N)_\varphi, \quad T_N \in \mathcal{T}_N. \quad (15)$$

Пусть α – четная функция, удовлетворяющая условиям (10) и (11). Рассмотрим последовательность функций $\{F_N(x)\}_{N=1}^\infty$, определенных по формуле

$$F_N(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{N} \sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right) \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{i\frac{k}{N}x} \right|, & x \in [-\pi N, \pi N]; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Используя неравенство (15) и лемму 3, последовательно находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(A|F_N(x)|)dx &= N \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(A \left| \frac{1}{N} \sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right) \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \right| \right) dt \leq \\ &\leq CN \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(A \left| \frac{1}{N} \sum_k \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \right| \right) dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{T}$. По определению интеграла Римана нетрудно проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x_0) = \sqrt{2\pi} |\widehat{f_\beta \alpha}(-x_0)|. \quad (17)$$

Таким образом, учитывая (16) и (17), применяя при этом лемму Фату, получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(A|\widehat{f_\beta \alpha}(x)|)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx.$$

Откуда, используя лемму 1, находим, что

$$\int_{|x|>\lambda} \varphi(AC_1|x|^{-\beta-1})dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \varphi(A|\widehat{\alpha}_1(x)|)dx,$$

где $\alpha_1(x) := \alpha(x)\|\widehat{\alpha}\|_\infty^{-1}$.

Из последнего неравенства после простых оценок и замены переменных $x \rightarrow x/(8C)$, имеем

$$\int_1^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \varphi\left(A \left| \widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right) \right| \right) dx, \quad (18)$$

где константа C не зависит от A .

Выберем $m \in \mathbb{N}$ настолько большим, что при $x \geq m$ имеет место неравенство

$$\left| \widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right) \right| < \frac{1}{x^{1+\beta}}.$$

Тогда, используя (18), учитывая при этом оценку

$$\int_1^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx \geq (m-1)\varphi(Am^{-1-\beta}) + \int_m^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx,$$

имеем

$$(m-1)\varphi(Am^{-1-\beta}) < \frac{1}{4} \int_0^m \varphi\left(A\left|\hat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right|\right) dx.$$

Далее,

$$(m-1)\frac{\varphi(Am^{-1-\beta})}{\varphi(A)} < \frac{1}{4} \int_0^m \frac{\varphi(A|\hat{\alpha}_1(\frac{x}{8C})|)}{\varphi(A)} dx \leq \frac{1}{4} \int_0^m M_\varphi\left(\left|\hat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right|\right) dx$$

и, следовательно,

$$(m-1)M_\varphi(m^{-1-\beta}) < \frac{1}{4} \int_0^m M_\varphi\left(\left|\hat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right|\right) dx. \quad (19)$$

Таким образом, если $\gamma_\varphi = 0$, то из (19) мы получаем, что $m-1 < m/4$, т.е. противоречие.

Если $\gamma_\varphi > 0$, то из (19) при достаточно малом ε вытекает, что

$$\frac{m^{1-(1+\beta)\gamma_\varphi}}{2} \leq C \int_0^m \left|\hat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right|^{\gamma_\varphi-\varepsilon} dx \leq C.$$

Поскольку $1 - (1+\beta)\gamma_\varphi > 0$, мы снова получаем противоречие.

Если $\gamma_\varphi = 1/(1+\beta)$ и выполняется (14), то противоречие легко следует из (18).

Теорема 1 доказана. $\square$

1. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. – Собр. соч.: в 4 т. – **1**. – Изд.-во АН СССР, М. – 1952. – С. 11-104.
2. Riesz M. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. – 1914. – **158**. – P. 1152-1154.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. I, II. – М.: Мир, 1965.
4. Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641-658.
5. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – **98(140)**, № 3 (11). – С. 395-415.
6. Mate A. and Nevai P.G. Bernstein's inequality in L_p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ Bounds for Orthogonal Polynomials // Ann. Math. 2nd Ser. – 1980. – **111**, № 1. – P. 145-154.
7. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. – **45**, № 1. – С. 3-22.
8. Лизоркин П.И. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – **29**, № 1. – С. 109-126.
9. Тригуб Р.М. Мультипликаторы Фурье и K -функционалы гладких функций // Укр. матем. вісник. – 2005. – **2**, № 2. – С. 236-280.
10. Taberski R. Approximation in the Frechet spaces L^p ($0 < p < 1$) // Functiones et Approximatio. – 1979. – **VII**. – P. 105-121.
11. Belinsky E., Lifyand E. Approximation properties in L_p , $0 < p < 1$ // Functiones et Approximatio. – 1993. – **XXII**. – P. 189-199.
12. Runovski K., Schmeisser H.-J. On some extensions of Berenstein's inequality for trigonometric polynomials // Functiones et Approximatio. – 2001. – **XXIX**. – P. 125-142.
13. Пичугов С.А. Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657-1671.
14. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Наука, 1974.

15. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978.
16. Ingham A.E. A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. – 1934. – **s1-9**, № 1. – P. 29-32.
17. Trigub R.M., Belinsky E.S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer, 2004.

Yu. S. Kolomoitsev

On the Bernstein-type inequalities for fractional derivatives in the classes $\varphi(L)$.

The necessary and sufficient conditions for the validity of Bernstein-type inequalities for fractional derivatives of a trigonometric polynomial in the classes $\varphi(L)$ are established.

Keywords: *Bernstein inequality, trigonometric polynomials, fractional derivatives, the classes $\varphi(L)$, Fourier integral.*

Ю. С. Коломойцев

Про нерівності типу Бернштейна для дробових похідних у класах $\varphi(L)$.

Отримано необхідні та достатні умови, при яких виконуються нерівності типу Бернштейна для дробових похідних тригонометричного полінома в класах $\varphi(L)$.

Ключові слова: *нерівність Бернштейна, тригонометричні поліноми, дробові похідні, класи $\varphi(L)$, інтеграл Фур'є.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomusi@mail.ru

Получено 15.05.13

УДК 519.21

©2013. І. Г. Крикун

АНАЛОГ ЯВИЩА ПЕАНО ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ЛОКАЛЬНИМ ЧАСОМ

Розглядається послідовність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом та малою дифузією. Отримано умови слабкої збіжності цих мір до міри, зосередженої з певними вагами на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші за умови прямування коефіцієнту дифузії до нуля. Отримані формули для обчислення згаданих вагів.

Ключові слова: слабка збіжність мір, стохастичні рівняння, локальний час.

1. Вступ. Задачу про слабку збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з малою дифузією вигляду

$$x_\varepsilon(t) = \int_0^t b(x_\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t), \quad (1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ до міри, що зосереджена на розв'язку відповідної задачі Коші

$$\dot{y}(t) = b(y(t)), \quad y(0) = 0, \quad (2)$$

за умови єдиності цього розв'язку, розглянуто в кількох роботах, серед яких згадаємо [1] та [2]. Випадок неєдиності розв'язку задачі (2) (так зване "явище Пеано") розглядався в роботах – [3]–[8]. В цих роботах досліджуються різні питання, пов'язані з граничною поведінкою розв'язків (1) та розглядаються різні умови на коефіцієнти. На відміну від згаданих робіт, у даній роботі будемо розглядати стохастичне рівняння з локальним часом.

А саме, замість рівняння (1) розглядаємо таке стохастичне рівняння з локальним часом

$$\xi_\varepsilon(t) = \beta L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s))ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s))dw(s), \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

та досліджуємо поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ мір, породжених розв'язками цього рівняння. В даній роботі доводиться слабка збіжність цих мір до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках задачі Коші (2).

Робота організована таким чином: у розділі 2 вводяться основні позначення та умови, в розділі 3 наведено результати для звичайних диференціальних рівнянь. Основні результати роботи сформульовані в розділі 4, а доведені – в розділі 5. У розділі 6 наведений модельний приклад.

2. Позначення та умови. Введемо такі позначення: $I_A(x)$ – індикатор множини A ; $a^+ = \max(a, 0)$; $C[0, \infty)$ – простір неперервних функцій $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ з

метрикою рівномірної збіжності на компактах з $[0, \infty)$:

$$\rho(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\sup_{t \in [0, N]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t \in [0, N]} |f(t) - g(t)|}.$$

Через $\mathfrak{B}$ позначимо σ – алгебру борелівських множин цього простору. Ймовірнісний простір позначатимемо $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, $\mathfrak{F}_t$ – потік σ -алгебр, $t \geq 0$, $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ – стандартний одновимірний вінерівський процес.

Позначення $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ буде означати асимптотичну еквівалентність функцій $f(x)$ та $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, тобто наявність рівності

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Функція $\operatorname{sgn} x$ визначається так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Будемо говорити, що рівняння (3) має *слабкий розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ з потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, неперервний семімартигал $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ і стандартний одновимірний вінерівський процес $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ такі, що

$$L^\xi(t, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{(-\delta, \delta)}(\xi(s)) ds \quad (4)$$

існує майже напевно і (3) виконується майже напевно.

Будемо говорити, що рівняння (3) має *сильний розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β співвідношення (3) і (4) виконуються майже напевно на даному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ з потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$ і даним вінерівським процесом $(w(t), \mathfrak{F}_t)$.

Для коефіцієнтів рівняння (3) введемо таку умову (I).

Умова (I):

I_1 . Функція $b(x)$ неперервна і точка ноль є її єдиним нулем.

I_2 . Існує константа $\Lambda \geq 1$ така, що

$$b^2(x) + \sigma^2(x) \leq \Lambda(1 + x^2), \quad \sigma^2(x) \geq \Lambda^{-1}.$$

I_3 . Функція $\sigma(x)$ не змінює знак і є функцією локально обмеженої варіації: для будь-якого $N < \infty$

$$\sup_{-N=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k=N} \sum_{i=1}^k |\sigma(x_i) - \sigma(x_{i-1})| < \infty.$$

I_4 . Константа $|\beta| < 1$.

3. Результати для звичайних диференціальних рівнянь. Наведемо деякі результати для задачі Коші (2). Будемо вважати, що для функції $b(x)$ задачі (2) завжди мають місце умови I_1 та I_2 . Тоді задача (2) має принаймні один – нульовий – розв’язок і всі розв’язки цієї задачі проходять через точку $(0; 0)$. З існування двох різних розв’язків за теоремою Кнезера [9, теорема III.4.1] випливає, що їх нескінченно багато. Множину інтегральних кривих – яку називають інтегральною воронкою – позначимо через $\mathfrak{R}$. Кожен розв’язок з інтегральної воронки можна розташувати між двома спеціальними розв’язками – які будемо називати *екстремальними* – відповідно верхнім $\bar{y}(t)$ і нижнім $\underline{y}(t)$, де згідно [10, теорема II.1.2] $\bar{y}(t) = \sup\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$, $\underline{y}(t) = \inf\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$.

Відмітимо, що якщо $b(x)x < 0$ для $x \neq 0$, то задача (2) має лише нульовий розв’язок.

Для існування ненульового розв’язку (2) необхідна збіжність хоча б одного з інтегралів [11, теорема 1.2.8]:

$$\int_0^\delta \frac{1}{b(y)} dy, \quad \int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)} dy. \quad (5)$$

Таким чином, ненульові розв’язки (2) існують у таких випадках:

A_1 . $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і обидва інтеграли в (5) збіжні.

A_2 . $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (5) збіжний, а другий – розбіжний.

A_3 . $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (5) розбіжний, а другий – збіжний.

A_4 . $b(x) > 0$ при $x \neq 0$ і перший з інтегралів в (5) збіжний.

A_5 . $b(x) < 0$ при $x \neq 0$ і другий з інтегралів в (5) збіжний.

Позначимо $H(x) = \int_0^x \frac{1}{b(y)} dy$ для $x \geq 0$ і $K(x) = \int_x^0 \frac{1}{b(y)} dy$ для $x \leq 0$. За умови виконання I_1 дані функції строго монотонні, тому існують обернені до них, які позначимо через $H^{-1}(x)$ та $K^{-1}(x)$, відповідно.

Лема 1. 1. У випадку A_1 всі ненульові розв’язки задачі (2) мають вигляд:

$$y_\lambda(t) = H^{-1}((t - \lambda)^+), \quad \lambda \geq 0, \quad (6)$$

$$y_\mu(t) = K^{-1}(-(t - \mu)^+), \quad \mu \geq 0. \quad (7)$$

При цьому екстремальними розв’язками є $\bar{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

2. У випадках A_2 і A_4 всі ненульові розв’язки задачі (2) мають вигляд (6). При цьому екстремальними розв’язками є $\bar{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = 0$.

3. У випадках A_3 і A_5 всі ненульові розв’язки задачі (2) мають вигляд (7). При цьому екстремальними розв’язками є $\bar{y}(t) = 0$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

Твердження леми 1 безпосередньо випливають з [8, лема 2.2] і [8, лема 2.3].

Далі для $|\beta| < 1$ введемо функцію

$$\kappa(x) = \begin{cases} (1 - \beta)x, & x \leq 0 \\ (1 + \beta)x, & x \geq 0 \end{cases}; \quad (8)$$

і $\varphi(x)$ – обернену до $\kappa(x)$. Будемо позначати для функції $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(\kappa(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}. \quad (9)$$

У подальших дослідженнях важливу роль відіграє така задача Коші:

$$\dot{z}(t) = \tilde{b}(z(t)), \quad z(0) = 0. \quad (10)$$

За лемою 1 задача (10) має розв'язки одного з двох типів:

$$z_\lambda(t) = \tilde{H}^{-1}((t - \lambda)^+), \quad \lambda \geq 0,$$

$$z_\mu(t) = \tilde{K}^{-1}(-(t - \mu)^+), \quad \mu \geq 0,$$

де $\tilde{H}(x) = \int_0^x \frac{1}{\tilde{b}(y)} dy$ для $x \geq 0$; $\tilde{K}(x) = \int_x^0 \frac{1}{\tilde{b}(y)} dy$ для $x \leq 0$.

Зрозуміло, що $\tilde{H}^{-1}(t)$ та $\tilde{K}^{-1}(-t)$ є відповідно верхнім і нижнім екстремальним розв'язком – позначатимемо їх $\bar{z}(t)$, $\underline{z}(t)$.

Встановимо зв'язок між екстремальними розв'язками задач (2) та (10). Має місце такий результат:

Лема 2. $\bar{y}(t) = \kappa(\bar{z}(t))$, $\underline{y}(t) = \kappa(\underline{z}(t))$.

Доведення лемми 2. Доведемо для функції $\bar{y}(t)$, для $\underline{y}(t)$ – аналогічно. Нехай функція $y(t)$ – довільний розв'язок задачі (2). Зрозуміло, що $y(t) \leq \bar{y}(t)$. Розглянемо функцію $z(t) = \varphi(y(t))$. Функції з множини $\mathfrak{R}$ не змінюють свого знаку, тому з (2) будемо мати

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{y(t)}{1 + \beta \operatorname{sgn} y(t)} = \frac{1}{1 + \beta \operatorname{sgn} y(t)} \int_0^t b(\kappa(\varphi(y(s)))) ds = \\ &= \int_0^t \frac{b(\kappa(\varphi(y(s))))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \varphi(y(s))} ds = \int_0^t \tilde{b}(z(s)) ds. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функція $z(t) = \varphi(y(t))$ є розв'язком задачі (10). Функція $\varphi(x)$ є строго зростаючою, тому отримуємо

$$z(t) = \varphi(y(t)) \leq \varphi(\bar{y}(t)) = \bar{z}(t). \quad \square$$

Позначимо

$$A_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^t \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} s)b((1 + \beta \operatorname{sgn} s)s)}{\sigma^2((1 + \beta \operatorname{sgn} s)s)} ds \right] dt.$$

Дослідження ваг граничної міри приводить до обчислення виразу

$$\Gamma_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A_\varepsilon(-K)}{A_\varepsilon(K) - A_\varepsilon(-K)}. \quad (11)$$

Для обчислення Γ_K покладемо

$$L(x) = \int_0^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy. \quad (12)$$

Лема 3. Нехай $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$, для деяких констант d, γ та $\delta > 0$ при $x \rightarrow 0+$ має місце асимптотична еквівалентність

$$L(x) \ln^\gamma L(x) \sim dx^\delta \quad (13)$$

та для деяких констант k, θ та $\mu > 0$ при $x \rightarrow 0-$ має місце асимптотична еквівалентність

$$L(x) \ln^\theta L(x) \sim k|x|^\mu. \quad (14)$$

Тоді величина Γ_K не залежить від K (то ж будемо позначати її просто Γ) і мають місце такі твердження:

1. Якщо $\delta = \mu$ і $\gamma = \theta$, то

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{1}{\delta}}}.$$

2. Якщо $\delta < \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma < \theta$, то $\Gamma = 1$.

3. Якщо $\delta > \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma > \theta$, то $\Gamma = 0$.

Доведення леми 3. Позначимо

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} y) b((1 + \beta \operatorname{sgn} y)y)}{\sigma^2((1 + \beta \operatorname{sgn} y)y)} dy.$$

Розглянемо випадок $x > 0$. Будемо мати:

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1 + \beta) b((1 + \beta)y)}{\sigma^2((1 + \beta)y)} dy = \int_0^{(1+\beta)x} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy = L((1 + \beta)x),$$

де функція $L(x)$ визначена в (12). Тоді з умови (13) маємо

$$L^*(x) |\ln L^*(x)|^\gamma \sim d(1 + \beta)^\delta x^\delta = d(1 + \beta)^\delta x^\delta.$$

При $x < 0$ з умови (14) аналогічно отримуємо

$$L^*(x) |\ln L^*(x)|^\gamma \sim k(1 - \beta)^\mu |x|^\mu.$$

Скориставшись тепер [8, лема 2.8] для функції $A_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} L^*(t) \right] dt$ отримаємо твердження даної леми. $\square$

4. Основні результати. Розглядаємо рівняння (3). Відомо, що за умов I_2 і I_4 існує єдиний слабкий розв'язок цього рівняння – [12, теорема 4.35]. З результату роботи [13] і [8, теорема 3.2] випливає така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови I_2, I_3, I_4 . Тоді рівняння (3) має єдиний сильний розв'язок.

Позначимо через μ_ε міру, породжену процесом $\xi_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(C[0, \infty), \mathfrak{B})$. Основними результатами роботи є такі дві теореми.

Теорема 2. Нехай для коефіцієнтів рівняння (3) мають місце умови I_1, I_2, I_4, A_1 , (13), (14). Тоді для мір $\{\mu_\varepsilon\}$ і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $C[0, \infty)$, має місце рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C[0, \infty)} F(f) \mu_\varepsilon(df) = \Gamma F(\bar{y}) + (1 - \Gamma) F(\underline{y}), \quad (15)$$

де $\bar{y}, \underline{y}$ – екстремальні розв’язки задачі (2), а величина Γ визначена лемою 3.

При дослідженні випадків $A_2 - A_5$ буде застосовано теорему порівняння. Тому тут потрібні сильні розв’язки стохастичних рівнянь.

Теорема 3. Нехай для коефіцієнтів рівняння (3) має місце умова (I).

У випадках A_2 і A_4 за умови (13) гранична міра для послідовності $\{\mu_\varepsilon\}$ зосереджена лише на верхньому екстремальному розв’язку задачі (2).

У випадках A_3 і A_5 за умови (14) гранична міра для послідовності $\{\mu_\varepsilon\}$ зосереджена лише на нижньому екстремальному розв’язку задачі (2).

5. Доведення основних результатів. За формулами (8)-(9) введемо функції $\kappa(x)$, $\varphi(x)$, $\tilde{b}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$, та розглянемо таке стохастичне рівняння Іто

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \tilde{b}(\eta_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_\varepsilon(s)) dw(s), \quad t \in [0, 1]. \quad (16)$$

Зауважимо, що для функцій $\tilde{b}(t)$, $\tilde{\sigma}(t)$ так само мають місце умова (I) і та ж умова з A_1 - A_5 , що й для $b(t)$, $\sigma(t)$. Рівняння (16) має єдиний слабкий розв’язок згідно з [14] і з [13] маємо $\eta_\varepsilon(t) = \varphi(\xi_\varepsilon(t))$ або ж $\xi_\varepsilon(t) = \kappa(\eta_\varepsilon(t))$.

Рівнянню (16) відповідає задача Коші (10).

Позначимо через ν_ε міру, породжену процесом $\eta_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(C[0, \infty), \mathfrak{B})$.

Доведення теореми 2. З умов теореми 2 випливає, що для коефіцієнтів процесу $\eta_\varepsilon(t)$ мають місце умови [8, теорема 4.1]. Тому міри $\{\nu_\varepsilon\}_\varepsilon$ слабо збігаються і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $C[0, \infty)$, має місце рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C[0, \infty)} F(f) \nu_\varepsilon(df) = \tilde{\Gamma} F(\bar{z}) + (1 - \tilde{\Gamma}) F(\underline{z}). \quad (17)$$

Гранична міра ν задається правою частиною рівності (17), тобто

$$\nu(A) = \tilde{\Gamma} I_{\{\bar{z}(\cdot) \in A\}} + (1 - \tilde{\Gamma}) I_{\{\underline{z}(\cdot) \in A\}};$$

$\bar{z}, \underline{z}$ - екстремальні розв’язки задачі (10); величина $\tilde{\Gamma}$ за [8, формула (2.11)] дорівнює

$$\tilde{\Gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{- \int_0^{-K} \exp \left[- \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^t \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{\sigma}^2(s)} ds \right] dt}{\int_0^K \exp \left[- \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^t \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{\sigma}^2(s)} ds \right] dt - \int_0^{-K} \exp \left[- \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^t \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{\sigma}^2(s)} ds \right] dt} = \Gamma,$$

де величина Γ визначена в (11).

Далі, з означення міри, породженої процесом, маємо:

$$\mu_\varepsilon\{A\} = \mathbf{P}\{\xi_\varepsilon(\cdot) \in A\} = \mathbf{P}\{\kappa(\eta_\varepsilon(\cdot)) \in A\} = \mathbf{P}\{\eta_\varepsilon(\cdot) \in \varphi(A)\} = \nu_\varepsilon\{\varphi(A)\}.$$

З (17) та леми 2 можемо отримати

$$\begin{aligned} \nu(\varphi(A)) &= \tilde{\Gamma}I_{\{\bar{z}(\cdot) \in \varphi(A)\}} + (1 - \tilde{\Gamma})I_{\{\underline{z}(\cdot) \in \varphi(A)\}} = \\ &= \tilde{\Gamma}I_{\{\kappa(\bar{z}(\cdot)) \in A\}} + (1 - \tilde{\Gamma})I_{\{\kappa(\underline{z}(\cdot)) \in A\}} = \Gamma I_{\{\bar{y}(\cdot) \in A\}} + (1 - \Gamma)I_{\{\underline{y}(\cdot) \in A\}} = \mu(A), \end{aligned}$$

де міра μ визначається правою частиною рівності (15), тобто

$$\mu(A) = \Gamma I_{\{\bar{y} \in A\}} + (1 - \Gamma)I_{\{\underline{y} \in A\}}.$$

Використовуючи все це, для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $C[0, \infty)$, будемо мати

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C[0, \infty)} F(y) \mu_\varepsilon\{dy\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C[0, \infty)} F(y) \nu_\varepsilon\{\varphi(dy)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C[0, \infty)} F(\kappa(y)) \nu_\varepsilon\{dy\} = \\ &= \int_{C[0, \infty)} F(\kappa(y)) \nu\{dy\} = \int_{C[0, \infty)} F(y) \nu\{\varphi(dy)\} = \int_{C[0, \infty)} F(y) \mu\{dy\}. \end{aligned}$$

□

Доведення теореми 3. Теорема 3 доводиться аналогічно теоремі 2 з використанням [8, теорема 4.3] замість [8, теорема 4.1]. □

6. Приклад. Нехай в рівнянні (3) коефіцієнти мають вигляд

$$b(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0, \\ -|x|^\alpha, & x \leq 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x \geq 0, \\ 2 + \cos x, & x < 0. \end{cases}$$

В цьому випадку будемо мати асимптотичну еквівалентність: при $x \rightarrow 0+$

$$L(x) \sim \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1},$$

а при $x \rightarrow 0-$

$$L(x) \sim \frac{1}{9(\alpha + 1)} |x|^{\alpha+1}.$$

Тобто мають місце умови (13) і (14) з константами

$$\gamma = 0, d = \frac{1}{\alpha + 1}, \delta = \alpha + 1; \quad \theta = 0, k = \frac{1}{9(\alpha + 1)}, \mu = \alpha + 1.$$

Крім того, має місце умова A_1 . Таким чином, виконуються умови теореми 2, отже має місце слабка збіжність мір. Границю (11) можна обчислити за допомогою леми 3:

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} 9^{\frac{1}{\alpha+1}}},$$

і гранична міра зосереджена із вказаною вагою Γ на верхньому екстремальному розв'язку та з вагою $1 - \Gamma$ на нижньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (2).

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
2. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional Diffusion Processes. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979. – 334 p.
3. *Baldi P.* Petites perturbations d'un phenomene Peano // Annales scientifiques de l'Universite de Clermont-Ferrand 2. – 1982. – V. 71, № 20. – P. 41-52.
4. *Baldi P., Bafico R.* Small Random Perturbations of Peano Phenomena // Stochastics. – 1982. – V. 6. – P.279-292.
5. *Веретенников А.Ю.* О приближении обыкновенных дифференциальных уравнений стохастическими // Математические заметки. – 1983. – Т. 33, № 6. – С. 929-932.
6. *Gradinaru M., Herrmann S., Roynette B.* A singular large deviations phenomenon // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 2001. – V. 37. – P. 555-580.
7. *Buckdahn R., Quincampoix M., Ouknine Y.* On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero // Bulletin des sciences mathematiques. – 2009. – V. 133. – P. 229-237.
8. *Крыкун И.Г., Мазно С.Я.* Явление Пеано для уравнений Ито // Український математичний вісник. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 87-109.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
10. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Иностранная литература, 1958. – 472 с.
11. *Agarwal R.P., Lakshmikantham V.* Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1993. – 312 p.
12. *Engelbert H.J., Schmidt W.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III // Math. Nachr. – 1991. – V. 151, № 1. – P. 149-197.
13. *Мазно С.Я.* Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем // Теория вероятностей и математическая статистика. – 2001. – Т. 64. – С. 106-109.
14. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Т. 24, № 2. – С. 354-366.

I. H. Krykun

Analogue of Peano phenomenon for stochastic equations with local time.

We consider sequence of measures generated by solutions of stochastic equations with local time and small diffusion. The conditions of weak convergence of these measures to measure, generated by extreme solutions of the corresponding Cauchy problem, when diffusion coefficient tends to 0 is obtained. Formulae for weights of extreme solutions is obtained.

Keywords: weak convergence of measures, stochastic equations, local time.

И. Г. Крыкун

Аналог явления Пеано для стохастических уравнений с локальным временем.

Рассматривается последовательность мер, порожденных решениями стохастических уравнений с локальным временем и малой диффузией. Получены условия слабой сходимости этих мер к мере, сосредоточенной с некоторыми весами на экстремальных решениях соответствующей задачи Коши при стремлении коэффициента диффузии к нулю. Получены формулы для вычисления упомянутых весов.

Ключевые слова: *слабая сходимость мер, стохастические уравнения, локальное время.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
iwancko@i.ua

Получено 14.05.13

УДК 531.38

©2013. Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселева

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТОНОВ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ

С учетом дополнительных тонов колебаний идеальной жидкости получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, содержащей жидкость. На примере цилиндрической полости оценено влияние дополнительных тонов и несимметрии твердого тела на области устойчивости.

Ключевые слова: несимметричное твердое тело, идеальная жидкость, симметричная полость, необходимые условия устойчивости.

1. Введение. В работах [1-2] проведены исследования необходимых условий устойчивости равномерного вращения осесимметричного твердого тела с осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. В работе [3] с учетом основного тона колебаний идеальной жидкости получены необходимые условия устойчивости несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью с жидкостью. В настоящей работе обобщены результаты работ [1-3] с учетом дополнительных тонов колебаний жидкости и проведены исследования для цилиндрической полости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим вращение твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной однородной жидкостью. В невозмущенном движении твердое тело и жидкость вращаются как одно целое с угловой скоростью ω_0 . Полная постановка задачи и метод решения приведен в [3]. Так, например, характеристическое уравнение возмущенного движения несимметричного твердого тела с жидкостью имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\lambda A - \frac{\Gamma \lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(\lambda^2 + \omega_0 \lambda_n)}{\lambda^2 + \lambda_n^2} \right) * \\ & * \left(\lambda B - \frac{\Gamma \lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(\lambda^2 + \omega_0 \lambda_n)}{\lambda^2 + \lambda_n^2} \right) + \\ & + \left((C - A)\omega_0 - \frac{\Gamma \omega_0}{\lambda^2 + \omega_0^2} + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(\omega_0 - \lambda_n)}{\lambda^2 + \lambda_n^2} \right) * \\ & * \left((C - B)\omega_0 - \frac{\Gamma \omega_0}{\lambda^2 + \omega_0^2} + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(\omega_0 - \lambda_n)}{\lambda^2 + \lambda_n^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где A , B и C – главные моменты инерции твердого тела с жидкостью относительно неподвижной точки, центр масс механической системы находится на третьей оси; Γ – опрокидывающий ($\Gamma > 0$) или восстанавливающий ($\Gamma < 0$) момент; $S_{in}(t)$ –

коэффициенты разложения относительной скорости жидкости в ряд по собственным векторным функциям, κ_n – соответствующие им собственные числа ($\lambda_n = 2\omega_0/\kappa_n$); $E_n = 2a_n^2/N_n^2$. Величины a_n и N_n^2 определяются только геометрией полости. Их значения приведены в [2, с. 7].

3. Метод исследования. В работе [3] были проведены исследования уравнения (1) с учетом основного тона колебаний жидкости. Оценим влияние дополнительных тонов на области устойчивости в нерезонансном случае. Условия неположительности корней (1) определяют необходимые условия устойчивости равномерного вращения несимметричного твердого тела с жидкостью. Эти условия можно получить из теоремы 2.10 из [4, с. 61].

Теорема 2.10. Число различных отрицательных вещественных корней уравнения $F(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0$ ($a_k > 0$) равно

$$N = \text{Var}[1, -|\Delta_1^1|, |\Delta_3^1|, \dots, (-1)^k |\Delta_{2k-1}^1|] - \text{Var}[1, -|\Delta_2^2|, |\Delta_4^2|, \dots, (-1)^k |\Delta_{2k}^2|]. \quad (2)$$

Ввиду громоздкости Δ^1 и Δ^2 не приводим (см. [4]).

Характеристическое уравнение (1) при $n = 2$ примет вид

$$\begin{aligned} & (A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2)x^5 + \left((2(E_1 + E_2) - (A + B))\Gamma + \right. \\ & \quad + \omega_0^2((C - A)(B - A) + (E_1\tilde{\lambda}_2 + E_2\tilde{\lambda}_1)^2 + 3(E_1 + E_2)^2 - \\ & \quad - (A + B)(E_1\tilde{\lambda}_2^2 + E_2\tilde{\lambda}_1^2) + 2C(E_1(1 - \tilde{\lambda}_1) + E_2(1 - \tilde{\lambda}_2) - \\ & \quad - 3(A + B)(E_1 + E_2) + AB(\tilde{\lambda}_1^2 + 2 + \tilde{\lambda}_2^2))) \Big) x^4 - \left(\Gamma^2 + \right. \\ & \quad + (2(2E_1\tilde{\lambda}_1 + 2E_2\tilde{\lambda}_2 - C) - (\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(A + B) + 2E_1\tilde{\lambda}_2^2 + \\ & \quad + 2E_2\tilde{\lambda}_1^2)\Gamma\omega_0^2 + (((2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B)) + \\ & \quad + 2(2(E_1 + E_2) + \tilde{\lambda}_1^2 E_2(1 - \tilde{\lambda}_2) + \tilde{\lambda}_2^2 E_1(1 - \tilde{\lambda}_1) - \\ & \quad - 2(\tilde{\lambda}_2 E_2 + \tilde{\lambda}_1 E_1)))C + 3((A - E_1)(B - E_1)\tilde{\lambda}_2^2 + (A - E_2)(B - E_2)\tilde{\lambda}_1^2) + \\ & \quad + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2(AB\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + 6E_1E_2) + 3(A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2)\omega_0^4) \Big) x^3 + \\ & \quad + \left((1 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + (2C(1 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2) + 2E_1(2\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2^2 - 1) + \right. \\ & \quad + 2E_2(2\tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_1 - 1) + (A + B)(1 - \tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2))\Gamma\omega_0^2 + \\ & \quad + ((1 + 2\tilde{\lambda}_1^2 + 2\tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_2^2\tilde{\lambda}_1^2)(C - (A + B))C + 2(1 + 2\tilde{\lambda}_1^2 - 2\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2)E_2 + \\ & \quad + 2(1 - 2\tilde{\lambda}_2^2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\lambda}_2^2)E_1)\omega_0^4) \Big) \omega_0^2 x^2 + \left((\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + \right. \\ & \quad + ((A + B)(\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2) - 2C(\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2) + 2E_1\tilde{\lambda}_2^2(2\tilde{\lambda}_1 - 1) + \\ & \quad + 2E_2\tilde{\lambda}_1^2(2\tilde{\lambda}_2 - 1))\Gamma\omega_0^2 + ((2\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B))C + \\ & \quad + 2(E_1\tilde{\lambda}_2^2(1 - \tilde{\lambda}_1) + E_2\tilde{\lambda}_1^2(1 - \tilde{\lambda}_2))C + \tilde{\lambda}_1^2(A - E_2)(B - E_2) + \\ & \quad + \tilde{\lambda}_2^2(A - E_1)(B - E_1) + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2(3AB\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + 2E_1E_2))\omega_0^4) \Big) \omega_0^4 x + \\ & \quad + \left(\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2(\Gamma - (C - A)\omega_0^2)(\Gamma - (C - B)\omega_0^2) \right) \omega_0^6 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/\omega_0$, $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2/\omega_0$.

Согласно теореме 2.10 из [4, с. 61], для того, чтобы все корни характеристического уравнения (3) лежали на мнимой оси, необходимо, чтобы $N=5$. Так как Var - величина неотрицательная, то N может быть равно лишь при равенстве первого слагаемого в (2) пяти и второго слагаемого нулю. Или же

$$\begin{aligned} |\Delta_1^1| > 0, |\Delta_3^1| > 0, |\Delta_5^1| > 0, |\Delta_7^1| > 0, |\Delta_9^1| > 0, \\ |\Delta_2^2| < 0, |\Delta_4^2| > 0, |\Delta_6^2| < 0, |\Delta_8^2| > 0, |\Delta_{10}^2| < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом $k = 5$ получим

$$|\Delta_9^1| = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Аналогично выписываются определители $|\Delta_1^1|$, $|\Delta_3^1|$, $|\Delta_5^1|$, $|\Delta_7^1|$, $|\Delta_2^2|$, $|\Delta_4^2|$, $|\Delta_6^2|$, $|\Delta_8^2|$, $|\Delta_{10}^2|$. Так, например, $|\Delta_{10}^2|$ имеет вид

$$|\Delta_{10}^2| = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Здесь

$$a_5 = (A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2),$$

$$\begin{aligned} a_4 = & (2(E_1 + E_2) - (A + B))\Gamma + \omega_0^2((C - A)(B - A) + (E_1\tilde{\lambda}_2 + E_2\tilde{\lambda}_1)^2 + 3(E_1 + E_2)^2 - \\ & - (A + B)(E_1\tilde{\lambda}_2^2 + E_2\tilde{\lambda}_1^2) + 2C(E_1(1 - \tilde{\lambda}_1) + E_2(1 - \tilde{\lambda}_2) - \\ & - 3(A + B)(E_1 + E_2) + AB(\tilde{\lambda}_1^2 + 2 + \tilde{\lambda}_2^2))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & \Gamma^2 + (2(2E_1\tilde{\lambda}_1 + 2E_2\tilde{\lambda}_2 - C) - (\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(A + B) + 2E_1\tilde{\lambda}_2^2 + \\ & + 2E_2\tilde{\lambda}_1^2)\Gamma\omega_0^2 + (((2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B)) + \\ & + 2(2(E_1 + E_2) + \tilde{\lambda}_1^2E_2(1 - \tilde{\lambda}_2) + \tilde{\lambda}_2^2E_1(1 - \tilde{\lambda}_1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(\tilde{\lambda}_2 E_2 + \tilde{\lambda}_1 E_1))C + 3((A - E_1)(B - E_1)\tilde{\lambda}_2^2 + (A - E_2)(B - E_2)\tilde{\lambda}_1^2) + \\
& + \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (AB\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + 6E_1 E_2) + 3(A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2)\omega_0^4, \\
a_2 = & \left((1 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + (2C(1 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2) + 2E_1(2\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2^2 - 1) + \right. \\
& + 2E_2(2\tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_1 - 1) + (A + B)(1 - \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2^2))\Gamma\omega_0^2 + \\
& + ((1 + 2\tilde{\lambda}_1^2 + 2\tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_2^2 \tilde{\lambda}_1^2)(C - (A + B))C + 2(1 + 2\tilde{\lambda}_1^2 - 2\tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2)E_2 + \\
& \left. + 2(1 - 2\tilde{\lambda}_2^2 \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\lambda}_2^2)E_1)\omega_0^4 \right)\omega_0^2 \\
a_1 = & \left((\tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + \right. \\
& + ((A + B)(\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2) - 2C(\tilde{\lambda}_2^2 \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2) + 2E_1 \tilde{\lambda}_2^2 (2\tilde{\lambda}_1 - 1) + \\
& + 2E_2 \tilde{\lambda}_1^2 (2\tilde{\lambda}_2 - 1))\Gamma\omega_0^2 + ((2\tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B))C + \\
& + 2(E_1 \tilde{\lambda}_2^2 (1 - \tilde{\lambda}_1) + E_2 \tilde{\lambda}_1^2 (1 - \tilde{\lambda}_2))C + \tilde{\lambda}_1^2 (A - E_2)(B - E_2) + \\
& \left. + \tilde{\lambda}_2^2 (A - E_1)(B - E_1) + \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (3AB\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + 2E_1 E_2))\omega_0^4 \right)\omega_0^4 \\
a_0 = & \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2^2 ((C - A)\omega_0^2 - \Gamma)((C - B)\omega_0^2 - \Gamma).
\end{aligned}$$

Раскрыв все определители, получим следующие неравенства:

$$|\Delta_1^1| = 5(A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2) > 0, \quad (7)$$

$$|\Delta_3^1| = G_{31}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (8)$$

$$|\Delta_5^1| = G_{51}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (9)$$

$$|\Delta_7^1| = G_{71}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (10)$$

$$|\Delta_9^1| = G_{91}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (11)$$

$$|\Delta_2^2| = -a_4 \frac{|\Delta_1^1|}{5} < 0, \quad (12)$$

$$|\Delta_4^2| = G_{42}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (13)$$

$$|\Delta_6^2| = G_{62}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) < 0, \quad (14)$$

$$|\Delta_8^2| = G_{82}(A, B, C, E_1, E_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \omega_0, \Gamma) > 0, \quad (15)$$

$$|\Delta_{10}^2| = -a_0 |\Delta_9^1| < 0. \quad (16)$$

Функции G_{31} , G_{51} , G_{71} , G_{91} , G_{42} , G_{62} , G_{82} не приведены в статье ввиду их громоздкости. Система неравенств (7)-(16) позволяет ввести новую переменную $\tilde{\Gamma} =$

$\Gamma\omega_0^2$ и относительно новой переменного функции $G_{31}, G_{51}, G_{71}, G_{91}$ являются соответственно многочленами второй, шестой, десятой и четырнадцатой степени, а функции G_{42}, G_{62}, G_{82} - соответственно многочленами четвертой, восьмой и двенадцатой степени.

В случае учета основного тона колебания жидкости ($n = 1$) из системы неравенств (7)-(16) остаются только неравенства (7)-(9) и (12)-(14), в которых следует положить $E_2 = 0$ и $\tilde{\lambda}_2 = 0$.

Таким образом, полученные неравенства (7)-(16) дают возможность уточнить влияние дополнительных тонов колебания жидкости на устойчивость равномерного вращения вокруг неподвижной точки несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость.

4. Случай цилиндрической полости. На примере цилиндрической полости с высотой $2h$ и радиусом a были исследованы неравенства (7)-(16). Следует отметить, что в случае эллипсоидальной полости из бесконечного спектра собственных частот λ_n возбуждается единственная гармоника λ_1 ($E_n = 0$ для $n \neq 1$), а в случае цилиндрической полости все собственные частоты $\lambda_n \neq 0$ ($E_n \neq 0$). Коэффициенты инерционной связи твердого тела и жидкости вычисляются по формуле

$$E_{lp} = \frac{256h^3 \rho a^4 (\kappa_{lp} + 1)}{\pi^3 (2l + 1)^4 \kappa_{lp} (\kappa_{lp} - 1) [\kappa_{lp} (k_l^2 + 1) - 1]}. \quad (17)$$

Здесь индекс $n = (l, p)$ представляет собой всевозможное сочетание порядковых номеров продольных и поперечных гармоник l и p :

$$k_l = \frac{\pi(2l + 1)}{2h}, \quad \xi_{lp} = k_l \sqrt{\kappa_{lp}^2 - 1} \quad (l = 0, 1, 2, \dots; p = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

Величина ξ_{lp} является p -м корнем уравнения

$$\xi J_0(\xi) - [1 \pm \sqrt{(\frac{\xi}{k_l})^2 + 1}] J_1(\xi) = 0. \quad (19)$$

Значения коэффициентов $A, B, C, E_1, E_2, \lambda_1$ и λ_2 для твердого тела с цилиндрической полостью с радиусом a и высотой $2h$ приведены ниже:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \pi \rho a^5 \frac{H}{6} (4H^2 + 3 + 12D^2), \\ B_0 &= A_0(1 + \epsilon), \quad B = B_0 + \pi \rho a^5 \frac{H}{6} (4H^2 + 3 + 12D^2), \\ C &= C_0 + \pi \rho a^5 H, \quad m = m_0 + 2\pi \rho a^3 H, \end{aligned}$$

где ρ – плотность жидкости; A_0, B_0 и C_0 – главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки; m_0 – масса твердого тела; d и d_1 соответственно расстояния от центра масс системы до неподвижной точки и до центра масс жидкости; $D = d/a, D_1 = d_1/a, H = h/a$.

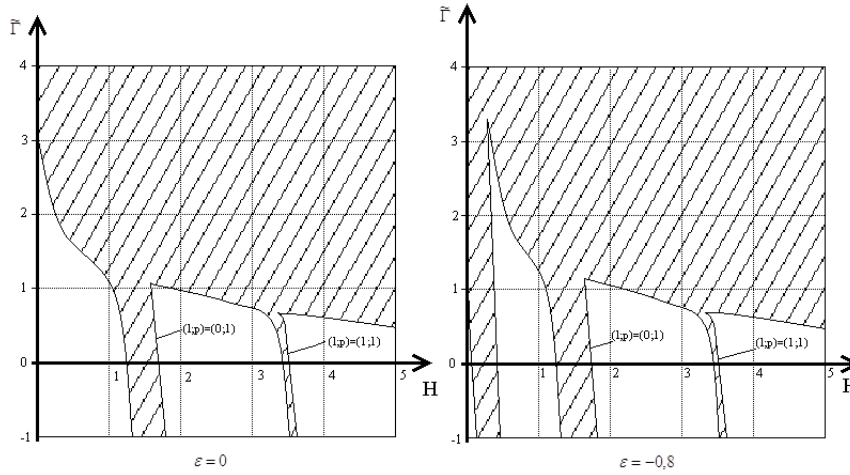


Рис. 1. $\tilde{\Gamma} = \Gamma \omega_0^2$

На рис. 1 представлены области неустойчивости в зависимости от $\tilde{\Gamma}$ и H ($\tilde{\Gamma} = \Gamma \omega_0^2$, $\Gamma = -mgd$), рассчитанные для $A_0 = 10$, $C_0 = 11$, $D = D_1 = 1$; $a = 1$; $\epsilon = 0$ – рисунок слева и $\epsilon = -0,8$ – рисунок справа. Области неустойчивости заштрихованы. При учете дополнительного (второго) тона колебаний жидкости появляется новая ветвь неустойчивости, которая приводит к незначительному количественному изменению вида области устойчивости движения несимметричного твердого тела. При появлении несимметрии в твердом теле незначительно смещаются существующие области неустойчивости, а также появляется дополнительная область неустойчивости, которая зависит от величины дебаланса ϵ и стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

В случае $\Gamma = 0$ и симметричного твердого тела влияние дополнительных тонов было исследовано в работе [2]. Так, например, было показано, что в большинстве случаев можно учитывать только первое значение $l = 0$, так как коэффициент E_{lp} обратно пропорционален четвертой степени l и при $l = 1$ на два порядка меньше, чем при $l = 0$. По индексу p сходимость более медленная, обратно пропорциональная квадрату p . Основной эффект в первом приближении можно учесть уже при одном члене ряда $l = 0$, $p = 1$. Учет дополнительных тонов приводит к появлению незначительных областей неустойчивости. В случае малой несимметрии наблюдается аналогичная закономерность: могут появляться дополнительные области неустойчивости, существующие области неустойчивости могут деформироваться, незначительно увеличиваться и смещаться [2].

На основании проведенных аналитических исследований и численных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Учет дополнительных тонов колебаний жидкости приводит к появлению новых незначительных областей неустойчивости.
2. С увеличением несимметрии в твердом теле с цилиндрической полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, происходит увеличение и смещение основных и дополнительных областей неустойчивости.

5. Заключение. В работе рассмотрена задача о необходимых условиях устойчивости вращения несимметричного твердого тела с осесимметричной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью. Данная задача является обобщением работ [1-3] с учетом дополнительных тонов колебаний жидкости. Разработан математический аппарат исследования необходимых условий устойчивости равномерного вращения твердого тела с жидкостью. В частности, при отсутствии несимметрии ($\epsilon = 0$) полученные результаты совпадают с [2].

Представляет дальнейший интерес учет влияния дополнительных тонов колебаний жидкости ($n = 1..5$) на области неустойчивости вращения несимметричного твердого тела с жидкостью, а также учет влияния диссипативного и постоянных внешних моментов.

1. Рвалов Р.В., Роговой В.М. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15-20.
2. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Там же. – 1973. – № 2. – С. 6-14.
3. Киселева Н.В. О необходимых условиях устойчивости расномерного вращения несимметричного твердого тела с жидкостью // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С.154-161.
4. Джурри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука. – 1979. – 304 с.

Yu. N. Kononov, N. V. Kiselyova

Research the effect of additional tones of fluid oscillations on stability rigid asymmetric body rotation with liquid.

With the additional tones of oscillations of ideal fluid necessary stability conditions of the uniform rotation rigid body with an arbitrary axisymmetric cavity containing fluid have been obtained. The effect of additional tones and unbalance solid on the field of stability for cylindrical cavity has been estimated.

Keywords: *asymmetric rigid body, ideal fluid, symmetric cavity, necessary conditions of stability.*

Ю. М. Кононов, Н. В. Кисельова

Дослідження впливу додаткових тонів коливань рідини на стійкість обертання несиметричного твердого тіла з рідиною.

З урахуванням додаткових тонів коливань ідеальної рідини отримано необхідні умови стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, яка містить рідину. На прикладі циліндричної порожнини оцінено вплив додаткових тонів і несиметрії твердого тіла на області стійкості.

Ключові слова: *несиметричне тверде тіло, ідеальна рідина, симетрична порожнина, необхідні умови стійкості.*

Донецкий национальный ун-т
nvkiselyova@gmail.com

Получено 03.06.13

УДК 517.5

©2013. Т. В. Ломако

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Работа посвящена исследованию локальных свойств регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на коэффициент. Получены необходимые и достаточные условия конформности по Белинскому и конформности, для частного случая, в точке для таких отображений.

Ключевые слова: уравнения Бельтрами, конформность, регулярное решение, классы Соболева.

1. Введение. Данная статья посвящена продолжению исследований локального поведения регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа, начатых в работе [1]. Отметим, что исследования в данном направлении имеют приложения к уравнениям математической физики, см., например, теорему 7.1 в [1]. В разделе 3 получены необходимые условия асимптотической однородности, раздел 4 посвящен критерию асимптотической конформности и заключительный 5 раздел посвящен необходимым и достаточным условиям конформности в точке указанных отображений. Аналоги этих результатов для квази-конформных отображений можно найти в работах [2]-[4].

2. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. Уравнениями Бельтрами называются уравнения вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \quad (1)$$

с измеримым коэффициентом $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y , соответственно. Функция $K_\mu(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$ называется *дилатационным коэффициентом* уравнения (1). *Регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется гомеоморфизм f класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ с $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$ п.в., который удовлетворяет (1) п.в. в D . Уравнение (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$. Отметим, что недавно был доказан целый ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами, см., например, монографию [5] и обзор [6]. Функцию $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$, и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$, называют *комплексной дилатацией* и $K_f = K_{\mu_f}$ – *дилатацией* отображения f .

Напомним, что отображение f называется *конформным в точке* z_0 , если f дифференцируемо в точке z_0 по Дарбу-Штольцу:

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + \overline{f_{\bar{z}}(z_0)}(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

и если $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$, где $o(|z - z_0|)/|z - z_0| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$.

Как показывает пример $w = z(1 - \ln|z|)$ Шабата Б.В., см., например, [7, с. 40], при непрерывной комплексной дилатации $\mu(z)$ отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым по Дарбу-Штольцу.

Если комплексная дилатация $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0 , то, как впервые обнаружено Белинским П.П., см. [7, с. 41], отображение $w = f(z)$ дифференцируемо в z_0 в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho) [\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z} + o(\rho)], \quad (2)$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho = |\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z}|$, $A(\rho)$ зависит только от ρ и $o(\rho)/\rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Как было выяснено позже в [8], см. также [2], [3] и [9], здесь $A(\rho)$ может не иметь предела при $\rho \rightarrow 0$, однако,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

Следуя [8], отображение f называем *дифференцируемым по Белинскому* в точке z_0 , если выполнены условия (2)–(3) с некоторым $\mu_0 \in \mathbb{D}$. При этом, при разрывной $\mu(z)$, в соотношении (2) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорят также, что f *конформно по Белинскому* в точке z_0 . Здесь и далее, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $B(0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| < r\}$.

Далее $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = (1 + |z|^2)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В дальнейшем *непрерывность* функции $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ понимается относительно топологии $\mathbb{R}^+ := [0, \infty]$. Функция $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)/t = \infty$, см. [10, с. 37].

В следующих предложениях приведено явное описание регулярных решений уравнения Бельтрами для заданного коэффициента μ с $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}$, когда $\mu(z)$ зависит только от $\arg z$ или только от $|z|$, см. предложение 6.5 и предложение 6.4 в [11], соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$\mu(re^{i\theta}) = \nu(\theta), \quad (4)$$

где $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая 2π -периодичная с $|\nu(t)| < 1$ п.в. и $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда функция $\Gamma(\theta) := (1 - \nu(\theta)e^{-2i\theta})/(1 + \nu(\theta)e^{-2i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, является интегрируемой по $[0, 2\pi]$ и для $\Phi(\theta) = \int_0^\theta \Gamma(t)dt$, $\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(t)dt$, функция

$$f(re^{i\theta}) = e^{\frac{1}{\alpha}(\log r + i\Phi(\theta))}, \quad f(0) = 0, \quad (5)$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с μ из (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$\mu(re^{i\theta}) = k(r)e^{2i\theta}, \quad (6)$$

где $k(t)$, $t \in I := (0, \infty)$ – комплекснозначная измеримая функция с $|k(t)| < 1$ п.в. и пусть $\Gamma(t) := (1 + k(t))/(1 - k(t))t \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Тогда

$$w = f\left(re^{i\theta}\right) = e^{i\theta + \int_1^r \Gamma(t)dt}$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) в $\mathbb{C}^*$ с μ из (6). Кроме того, если $\int_1^\infty \text{Re}\Gamma(t)dt < \infty$ или $\int_0^1 \text{Re}\Gamma(t)dt < \infty$, то $f(\mathbb{C})$ – собственное подмножество $\mathbb{C}$. В противном случае, $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$ и $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

3. Об асимптотической однородности. Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и $0 \in D$. Следуя работе [2], отображение $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, будем называть *асимптотически однородным в точке 0*, если

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ z \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

В работе [1], теорема 6.1, см. также аналоги данного результата для квазиконформных отображений в работах [2]–[4], был получен критерий конформности по Белинскому в 0 для более широкого класса отображений, чем квазиконформные. Отметим, что одним из необходимых условий было свойство асимптотической однородности таких отображений. Следующий результат значительно облегчает проверку условия (7) и одновременно раскрывает геометрическую природу введенного понятия.

Пусть M – произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $z = 0$ в качестве точки накопления. Полагаем

$$\varphi_M(\rho) = \frac{\inf_{|m| \geq \rho, m \in M} |m|}{\sup_{|m| \leq \rho, m \in M} |m|}.$$

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – регулярное решение уравнения Бельтрами (1), $f(0) = 0$ и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \Phi(K_\mu(z)) \, dm(z) < \infty \quad (8)$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такой, что

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \quad (9)$$

при некотором $\sigma > \Phi(0)$. Пусть M – подмножество $\mathbb{C}$, для которого

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \varphi_M(\rho) < \infty. \quad (10)$$

Если существует предел

$$\lim_{\substack{m \rightarrow 0, \\ m \in M}} \frac{f(\zeta m)}{f(m)} = \zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

то f является асимптотически однородным в нуле.

Доказательство. По условию (11) имеем, что

$$\lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ m \in M}} F(\zeta, m) = \zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

где функции $F(\zeta, z) = f(\zeta z)/f(z)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^*$, являются по переменной ζ регулярными решениями уравнения Бельтрами (1) с комплексным коэффициентом $\mu_z(\zeta) = \frac{\bar{z}}{z}\mu(z\zeta)$ и с дилатацией $K_{\mu_z}(\zeta) = K_\mu(z\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{z,r} := \int_{B(0,r)} \Phi(K_{\mu_z}(\zeta)) \, dS(\zeta) \leq \frac{1}{|z|^2} \int_{B(0,|z|r)} \Phi(K_\mu(\zeta)) \, dm(\zeta)$$

и по условию (8) $I_{z,r} \leq M_{z,r} < \infty$ для малых $z \in \mathbb{C}^*$. Заметим также, что $F(0, z) = 0$, $F(1, z) = 1$. Поэтому $F(\zeta, z)$, $z \in \mathbb{C}^*$, образуют нормальное семейство относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ по теореме 2 в [12]. Итак, $F(\zeta, z)$, $z \in \mathbb{C}^*$, – равностепенно непрерывное семейство относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ по предложению 1 в [13], и условие (12) влечет локально равномерную сходимость относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ по теореме 1 в [13].

Предположим, что условие (7) не выполнено для f . Тогда найдутся $\zeta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $z_n \rightarrow 0$, $z_n \in \mathbb{C}^*$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$|F(\zeta, z_n) - \zeta| \geq \varepsilon. \quad (13)$$

С другой стороны, по условию (10) найдется последовательность $m_n \in M$ для $n > N$ такая, что $0 < \delta \leq |\tau_n| \leq 1 < \infty$, где $\tau_n = z_n/m_n$, $\delta = 1/(\lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi_M(\rho))$. Таким образом,

$$F(\zeta, z_n) = \frac{F(\zeta \tau_n, m_n)}{F(\tau_n, m_n)}.$$

В силу равномерной сходимости в (12) относительно параметра ζ на любом компакте $F(\zeta \tau_n, m_n) \sim \zeta \tau_n$ и $F(\tau_n, m_n) \sim \tau_n$. Поскольку же $\tau_n \geq \delta > 0$, то $F(\zeta, z_n) \sim \zeta$ при $n \rightarrow \infty$. Последнее противоречит (13) и, следовательно, сделанное выше предположение неверно. $\square$

Отметим, что для выполнения заключения теоремы 1 условие (10) на степень возможной прореженности множества M является не только достаточным, но и необходимым, см., например, предложение 2.1 в [2].

4. Критерий конформности по Белинскому. Следующий результат является обобщением упомянутой выше теоремы 6.1 в [1], см. также лемму в [14].

Теорема 2. Пусть $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in J$, – регулярное решение уравнения Бельтрами (1) с коэффициентом μ_j , $f_j(0) = 0$, и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r)|} \sup_{j \in J} \int_{B(0, r)} \Phi(K_{\mu_j}(z)) \, dm(z) \leq c < \infty \quad (14)$$

где функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ является строго выпуклой и удовлетворяет условию (9), и пусть $\omega_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in J$, – семейство гомеоморфизмов таких, что $\omega_j(0) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1) Существует предел

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0, \\ \tau > 0}} \frac{f_j(\tau \zeta)}{f_j(\tau)} = \omega_j(\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

равномерный относительно параметра $j \in J$.

2) Существует предел (15), равномерный относительно $(\zeta, j) \in K \times J$ для любых компактов $K \subset \mathbb{C}$.

3) Существует предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{f_j(z')}{f_j(z)} - \frac{\omega_j(z')}{\omega_j(z)} \right\} = 0, \quad (16)$$

равномерный относительно параметра $j \in J$ при $|z'| \leq \delta|z|$, $\delta \in (0, 1)$, и $z \in \mathbb{C}^*$.

4) Все функции семейства f_j могут быть представлены в виде

$$f_j(z) = A_j(\rho)\omega_j(w)(1 + \varepsilon_j(\rho)), \quad (17)$$

где $A_j(\rho)$ зависят только от $\rho = |w|$ и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{A_j(t\rho)}{A_j(\rho)} = 1 \quad \forall t > 0, \quad (18)$$

$\varepsilon_j(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ равномерно относительно $j \in J$.

Согласно указанной теореме 6.1 из [1] конформность по Белинскому отображения f из теоремы 2 эквивалентна асимптотической однородности как относительно вещественного, так и относительно комплексного параметра. В частности,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{\min_{|z|=r} |f(z)|} = 1,$$

т.е. что характеристика Лаврентьева равна единице. В этом случае естественно говорить, что отображение f конформно в нуле в смысле Лаврентьева. Как мы видим, из обычной конформности следует конформность по Белинскому, а из последней – конформность по Лаврентьеву, означающей геометрически, что инфинитезимальный круг с центром в нуле переходит в инфинитезимальный круг. Отметим также, что характеристическими геометрическими свойствами для конформности по Белинскому отображения f являются асимптотическое сохранение углов между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек, и сохранение модулей инфинитезимальных колец.

Доказательство теоремы 2. Придерживаемся схемы $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$. Полагаем $f_{0,j}(\zeta) \equiv \omega_j(\zeta)$ в $\mathbb{C}$ и $f_{\tau,j}(\zeta) \equiv f_j(\zeta \tau)/f_j(\tau)$ при $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\tau > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Из (15) следует, что $r(f_{\tau,j}, f_{0,j}) \rightarrow 0$, $\tau > 0$, при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $j \in J$. Здесь

$$r(g, h) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{|g(z_m) - h(z_m)|}{1 + |g(z_m) - h(z_m)|},$$

где $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{C}$.

По условию $f_{\tau,j}$, $\tau > 0$, является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с коэффициентом $\mu_{\tau,j}(\zeta) = \mu_j(\tau\zeta)$ и с дилатацией $K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta) = K_{\mu_j}(\tau\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{\tau,j,R} := \int_{B(0,R)} \Phi(K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta)) dS(\zeta) \leq \frac{R^2}{\tau^2 R^2} \int_{B(0,\tau R)} \Phi(K_{\mu_j}(z)) dm(z)$$

и по условию (14) $I_{\tau,j,R} \leq \pi R^2 C < \infty$ для малых $\tau > 0$, где $C = c + 1$, величина справа в (14) не зависит от $j \in J$. Заметим также, что $f_{\tau,j}(0) = 0$, $f_{\tau,j}(1) = 1$. Поэтому $f_{\tau,j}$, $\tau > 0$, образуют нормальное семейство, см. теорему 2 в [12]. Итак, $\{f_{\tau,j}\}$, $\tau > 0$, – равностепенно непрерывное семейство по предложению 1 в [13], см. также предложение 7.1 в [15], и условие (15) влечет, что $f_{\tau,j} \rightarrow f_{0,j}$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ по теореме 1 в [13], см. также теорему 7.1 в [15]. Заметим, что $\{f_{0,j}\}$ также равностепенно непрерывно по предложению 7.2 в [15]. Отметим, что пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ можно метризовать с помощью метрики

$$\rho(g, h) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(g, h)}{1 + \rho_m(g, h)},$$

где $\rho_m(g, h) = \max_{|z| \leq m} |g(z) - h(z)|$, которая порождает локально равномерную сходимость в $\mathbb{C}$, см. [16, с. 243]. Покажем, что $\rho(f_{\tau,j}, f_{0,j}) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $j \in J$.

Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательности $\tau_n \rightarrow 0$, $\tau_n > 0$, и $j_n \in J$ такие, что $\rho(g_n, h_n) \geq \varepsilon$, где $g_n = f_{\tau_n, j_n}$, $h_n = f_{0, j_n}$, $n = 1, 2, \dots$. С другой стороны, в нормальных подклассах $\{f_{\tau,j}\}$ сходимость $r(g_n, h_n) \rightarrow 0$ влечет $\rho(g_n, h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, см., например, предложение 7.2 в [15]. Действительно, в силу равностепенной непрерывности, без ограничения общности можно считать, что $g_n \rightarrow g_0$, $h_n \rightarrow h_0$ при $n \rightarrow \infty$ локально равномерно в $\mathbb{C}$. Но тогда мы имеем, что $\rho(g_n, g_0) \rightarrow 0$ и $\rho(h_n, h_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а по неравенству треугольника: $\rho(g_n, h_n) \leq \rho(g_n, g_0) + \rho(g_0, h_0) + \rho(h_0, h_n)$. Таким образом, $\rho(g_n, h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $g_0 = h_0$. Однако, опять же по неравенству треугольника: $r(g_0, h_0) \leq r(g_0, g_n) + r(g_n, h_n) + r(h_n, h_0)$. Поэтому $r(g_n, h_n) \rightarrow 0$ влечет $\rho(g_n, h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Однако, последнее противоречит сделанному выше предположению.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует в силу того, что

$$f_{z,j}(\zeta) = \frac{f_{|z|,j}(\zeta z/|z|)}{f_{|z|,j}(z/|z|)} = \frac{f_j(z')}{f_j(z)}$$

при $\zeta = z'/z$. Отметим также, что в указанных обозначениях

$$\omega_j(\zeta z/|z|) = \omega_j(z')/\omega_j(|z|), \quad \omega_j(z/|z|) = \omega_j(z)/\omega_j(|z|),$$

поскольку отображение ω_j , $j \in J$, обладает следующим свойством:

$$\omega_j(\zeta \rho) = \omega_j(\zeta) \omega_j(\rho) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \rho > 0, \quad (19)$$

что следует непосредственно из (15).

3) $\Rightarrow$ 4). Для этого достаточно заметить, что при $z = \rho = |w|$ и $z' = w \in \mathbb{C}^*$ соотношение (16) эквивалентно (17), где $A_j(\rho) = f_j(\rho)/\omega_j(\rho)$, а при $z = \rho > 0$ и $z' = t\rho$, $t > 0$, соотношение (16) эквивалентно соотношению (18).

4) $\Rightarrow$ 1). Полагая в (17), (18) $w = t > 0$ и $w = t\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$, соответственно, получаем (15). $\square$

Замечание. Заметим, что из (19) следует, что комплексная характеристика $\nu(z)$ отображения ω должна удовлетворять соотношению $\nu(\rho\zeta) = \nu(\zeta)$ для любого $\rho > 0$. Последнее эквивалентно тому, что ν зависит только от $\arg z$. Кроме того, в силу теоремы 1 и леммы 2 в [12], отображение ω как предел последовательностей из семейства $\{f_{\tau,j}\}$, см. п. 1) $\Rightarrow$ 2) доказательства теоремы 2, является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}$. Следовательно, в качестве примера ω в теореме 2 можно взять функцию из (5).

5. О необходимых и достаточных условиях конформности отображения в точке. Пусть f некоторое отображение, заданное в единичном круге $\mathbb{D}$ и $f(0) = 0$. Будем говорить, что отображение f конформно в нуле, если

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = A \neq 0, \infty.$$

В работе [17] были получен ряд достаточных условий в терминах дилатаций по направлению. В настоящей работе получен критерий конформности широкого класса регулярных решений уравнения Бельтрами с коэффициентом вида $\mu(z) = k(|z|)z/\bar{z}$. В случае квазиконформных отображений подобный критерий был получен в работах [2] и [3].

Теорема 3. Пусть $k(t) : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция, $|k(t)| < 1$ п.в. на $[0, 1)$, $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ – регулярное решение уравнения Бельтрами (1), $f(0) = 0$, с коэффициентом $\mu(z) = k(|z|)z/\bar{z}$ таким, что

$$\int_{\mathbb{D}} \Phi(K_\mu(z)) dm(z) < \infty,$$

где функция $\Phi : [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ является строго выпуклой, удовлетворяет условию (9) для некоторого $\sigma > \Phi(1)$ и $\Phi(1) = 1$. Пусть также функция $H(t) = \ln \Phi(t)$ является гладкой возрастающей функцией и $tH'(t) \geq 5$ при больших значениях t . Тогда для конформности f в нуле необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{|z|}^1 \frac{k(t)}{1 - k(t)} \frac{dt}{t} \neq \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Положим

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k(t), & t < 1; \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Тогда из предложения 6.4 работы [11] вытекает, что функция

$$g(z) = z \exp \left\{ 2 \int_1^{|z|} \frac{\tilde{k}(t)}{1 - \tilde{k}(t)} \frac{dt}{t} \right\}$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами с коэффициентом $\tilde{\mu}(z) = \tilde{k}(|z|)z/\bar{z}$. Более того, из условия (9) и теоремы 2.4 монографии [5] следует, что $g(0) = 0$.

Легко видеть, что для конформности отображения g в нуле необходимо и достаточно выполнения условия (20).

Далее, согласно теоремам 20.5.2 и 20.5.1 из [18] найдется конформное отображение h в $g(\mathbb{D})$ такое, что $f = h \circ g$. Таким образом, отображение f конформно в нуле тогда и только тогда, когда таковым является отображение g , но последнее означает, что для конформности f в нуле как раз необходимо и достаточно выполнения условия (20). $\square$

Перейдем к рассмотрению проблемы Райха-Вальчака. В работе [19] была высказана гипотеза, что каков бы ни был модуль комплексной дилатации $q(z) = |\mu(z)| \leq q < 1$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg \mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в нуле. В той же работе было дано частичное решение этой проблемы, когда $q(z) = \psi(|z|)$ зависит только от $|z|$.

В настоящей работе, используя теорему 3, мы получим указанное частичное решение проблемы, но уже для отображений, которые являются более общими, чем квазиконформные.

Следствие 1. Пусть $q(t) : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – произвольная измеримая функция, $|q(t)| < 1$ п.в. в $[0, 1)$ и функция $Q(t) = (1 + |q(t)|)/(1 - |q(t)|)$ такова, что

$$\int_0^1 (Q(t))^p t dt < \infty \quad \text{при некотором } p > 1$$

и

$$\int_0^1 \Phi(Q(t)) t dt < \infty,$$

где Φ такая же как в теореме 3. Тогда существует регулярное решение уравнения Бельтрами (1) с $|\mu(z)| = q(|z|)$, которое конформно в 0.

Доказательство. Положим в теореме 3 $k(t) = (-1)^n q(t)$ при $t \in [1/n^\alpha, 1/(n-1)^\alpha)$,

$n = 2, 3, \dots$, где $0 < \alpha < (p-1)/2$. Тогда, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| &\leq \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} Q(t) \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \left(\int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} Q^p(t) t dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{dt}{t^{p'(1+1/p)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{C}{n^{(p-1-2\alpha)/p}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где C – некоторая константа, не зависящая от n . При этом знак интеграла в (21) совпадает с $(-1)^n$. Таким образом, мы имеем дело со знакопеременным рядом, общий член которого строго монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Такой ряд всегда сходится по признаку Лейбница. С другой стороны, пусть z некоторое фиксированное достаточно малое число, а N такое, что $|z| \in [1/N^\alpha, 1/(N-1)^\alpha)$. Тогда из (21) имеем

$$\left| \int_{|z|}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} - \int_{1/N^\alpha}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{C}{N^{(p-1-2\alpha)/p}}$$

и

$$\int_{1/N^\alpha}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} = \sum_{n=2}^N \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t},$$

то есть интеграл сходится к тому же пределу, что и указанный ряд. Таким образом, отображение g из доказательства теоремы 3 является искомым отображением. $\square$

1. Гутлянский В.Я., Ломако Т.В., Рязанов В.И. К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вест. – 2011. – Т. 8, № 4. – С. 513-536.
2. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН, сер. матем. – 1995. – Т. 59, № 3. – С. 31-58.
3. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.
4. Рязанов В.И. Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.01. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 1993. – 281 с.
5. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics. – V. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.
6. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вест. – 2010. – Т. 7, № 4. – С. 467-515.
7. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
8. Рязанов В.И. Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия // Укр. мат. ж. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 295-300.
9. Рязанов В.И. О необходимых и достаточных условиях дифференцируемости по Белинскому // Доклады АН России. – 1992. – Т. 323, № 2. – С. 241-244.
10. Рудин У. Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
11. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. Math. – 2001. – V. 11, № 2. – P. 94-130.
12. Ломако Т.В. К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. ж. – 2011. – Т. 63, № 3. – С. 341-349.
13. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Нормальные семейства пространственных отображений // Сиб. эл. мат. изв. – 2006. – Т. 3. – С. 216-231.

14. Gutlyanskii V.Ya, Ryazanov V.I. On Asymptotically Conformal Curves // Complex Variables. – 1994. – V. 25. – P. 357-366.
15. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
16. Куратовский К. Топология. – Т. 1., М.: Мир, 1966. – 594 с.
17. Brakalova M.A. Sufficient and necessary conditions for conformality. II: Analytic viewpoint // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – V. 35, №. 1. – P. 235-254.
18. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal maps in the plane. – Princeton: Princeton University Press, 2009. – 677 p.
19. Reich E., Walczak H.R. On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 117. – P. 338-351.

T. V. Lomako

The local properties of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with restrictions of the integral type.

The paper is devoted to the investigation of the local properties of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the integral type for its coefficient. The necessary and sufficient conditions of conformality by Belinskii and conformality, for a particular case, at a point for such mappings are obtained.

Keywords: *Beltrami equations, conformality, regular solution, Sobolev classes.*

Т. В. Ломако

Локальні властивості регулярних розв'язків виродних рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу.

Роботу присвячено дослідженню локальних властивостей регулярних розв'язків виродних рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на коефіцієнт. Отримано необхідні та достатні умови конформності за Белінським і конформності, в окремому випадку, у точці для таких відображень.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, конформність, регулярний розв'язок, класи Соболева.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
t.lomako@yandex.ru

Получено 26.05.13

УДК 539.3

©2013. М. М. Николишин, В. К. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян

РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ ТА УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПО ФРОНТУ ТРІЩИНИ

В роботі досліджено задачу про двовісний розтяг зусиллями на безмежності кусково-однорідної ізотропної пластини з ненаскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів. Припускаємо, що береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а по фронту на продовженні тріщини утворюються пластичні зони, для моделювання яких використовуємо умову пластичності Мізеса. Розв'язок задачі розбиваємо на задачу розтягу і згину пластини, використовуючи класичну теорію згину. З використанням комплексних потенціалів та методів теорії функцій комплексної змінної розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження. Побудовано їх розв'язок у класі функцій, обмежених у вершинах тріщини, та знайдено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів. Записано рівняння для визначення довжини пластичних зон та співвідношення для визначення напружень. Проведено числовий аналіз задачі.

Ключові слова: кусково-однорідна пластинка, ненаскрізна тріщина, розтяг, згин, комплексні потенціали, пластичні зони.

1. Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотроп-

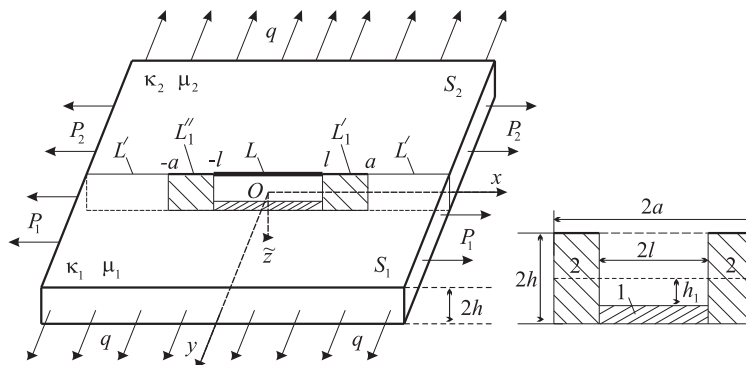


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини і пластичних зон

ну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів. Нехай пластинка знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів знаходиться ненаскрізна тріщина завглибшки $h + h_1$ і завдовжки $2l$, береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $Oxy\zeta$ з початком у центрі тріщини, причому вісь Ox направимо по лінії поділу матеріалів. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщини виникають пластичні

зони завдовжки a , крім того матеріал у перемичці $h_1 \leq \tilde{z} \leq h$ та $-l \leq x \leq l$ перейшов у пластичний стан. На межі поділу матеріалів поза тріщиною виконуються умови ідеального механічного контакту. В серединній площині пластини лінію спаю матеріалів позначимо через L' , тріщину – через L , а пластичні зони біля тріщини через $-L'_1$ і L''_1 , $\tilde{L} = L \cup L_1$, $L_1 = L'_1 \cup L''_1$, $\check{L} = \tilde{L} \cup L'$ (див. рис. 1). Для пружних сталих півплощини, для якої $y < 0$ ($y > 0$), будемо приписувати індекс 1 (2). Граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$ будемо позначати знаками “+” і “–”, а відповідні півплощини – через S_1 ($y > 0$) і S_2 ($y < 0$). За рахунок наявності ненаскрізної тріщини розв’язок задачі подано у вигляді розв’язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява. Для плоскої задачі згідно постановки маємо такі крайові умови:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L', \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_T b_1, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L, \quad (2)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = \tau_0 \text{ на } L'_1, \quad (3)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = -\tau_0 \text{ на } L''_1, \quad (4)$$

для задачі згину:

$$M_y^+ = M_y^-, H_{xy}^+ = H_{xy}^-, N_y^+ = N_y^-, w^+ = w^-, \partial_y w^+ = \partial_y w^- \text{ на } L', \quad (5)$$

$$M_y^\pm = \sigma_T b_2, H_{xy}^\pm = 0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L, \quad (6)$$

$$M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L'_1, \quad (7)$$

$$M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = -H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L''_1, \quad (8)$$

де u, v – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі Ox і Oy , відповідно; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; σ_0, τ_0 – невідоме нормальне і дотичне напруження в пластичній зоні; w – прогин точки серединної поверхні пластини; M_y, H_{xy}, N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; M_0, H_0 – невідомі згинальний і крутний моменти в пластичній зоні; $b_1 = (h - h_1)/(2h)$, $b_2 = (h^2 - h_1^2)/2$; $\sigma_T = \min(\sigma_T^{(1)}, \sigma_T^{(2)})$, $\sigma_T^{(1)}, \sigma_T^{(2)}$ – границі текучості першого та другого матеріалів; $\partial_s f$ – позначення часткової похідної функції f по s .

2. Побудова розв’язку плоскої задачі. Введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ для кожної із півплощин S_j . Тоді, згідно з [4], запишемо

$$(\sigma_y^{(j)} - i\tau_{xy}^{(j)}) = \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + z\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)}, \quad (9)$$

$$2\mu_j \partial_x(u^{(j)} + iv^{(j)}) = \kappa_j \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}, \quad (10)$$

де $z = x + iy$, $i^2 = -1$, μ_j – модуль зсуву, ν_j – коефіцієнт Пуассона, $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, тут і надалі індекс j набуває двох значень 1 і 2.

Для великих $|z|$ мають місце розвинення [4]

$$\Phi_j(z) = \Gamma_j + o(1/z^2), \Psi_j(z) = \Gamma'_j + o(1/z^2), \quad (11)$$

де

$$\Gamma_j = 0,25(P_j + q), \Gamma'_j = 0,5(q - P_j). \quad (12)$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_j(z)$ із області S_j у область S_{3-j} за формулою [4]

$$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi'_j(z)} - \overline{\Psi_j(z)}. \quad (13)$$

Тоді залежності (9) і (10) запишемо так:

$$(\sigma_y^{(j)} - i\tau_{xy}^{(j)}) = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}, \quad (14)$$

$$2\mu_j\partial_x(u^{(j)} + i\partial_x v^{(j)}) = \kappa_j\Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}. \quad (15)$$

На основі (11)-(13) аналітичне продовження функції $\Phi_j(z)$ при великих $|z|$ подамо у вигляді

$$\Phi_j(z) = -\Gamma_j - \Gamma'_j + o(1/z^2). \quad (16)$$

Беручи до уваги (14), з крайових умов (1)-(4) отримуємо таку задачу лінійного спряження

$$(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^+ - (\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^- = 0, \quad x \in \check{L}. \quad (17)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (17), матимемо

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = (P_1 + P_2 + 2q)/4 = \theta. \quad (18)$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_j(z) - \mu_j\Phi_{3-j}(z), \quad (19)$$

то, як видно з другої крайової умови (1) з урахуванням (15), вона задовольняє умову

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad x \in L'. \quad (20)$$

Звідки, беручи до уваги (11) і (16), при великих $|x|$ отримаємо

$$\mu_1(1 + \kappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)P_1 = [3(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2]q,$$

а з системи алгебраїчних рівнянь (18), (19) матимемо

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}(\mu_j\theta + \Phi(z)), & z \in S_j, \\ A_{3-j}^{-1}(\mu_j\kappa_{3-j}\theta - \Phi(z)), & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (21)$$

де $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$.

З крайових умов (2)-(4), врахувавши (14) і (21), отримуємо

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = -A\theta(x) + A_1f(x), \quad x \in \check{L}, \quad (22)$$

де

$$f(x) = \sigma_T b_1, \quad x \in L, \quad f(x) = \sigma_0 - i\tau_0, \quad x \in L'_1, \quad f(x) = \sigma_0 + i\tau_0, \quad x \in L''_1, \\ A = \mu_1\mu_2(1 - \kappa_1\kappa_2)A_2^{-1}, \quad g = -A_1A_2^{-1}.$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + A\theta/(1-g), \quad (23)$$

то вона, як випливає з (22) і (20), є розв'язком такої крайової задачі:

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = 0, \quad x \in L', \quad \Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1 f(x), \quad x \in \tilde{L}. \quad (24)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (24), отримуємо

$$\Phi_0(z) = A_1 X_0(z) [\sigma_T b_1 g(L, z) + \sigma_0 + i\tau_0 \{g(L_1'', z) - g(L_1', z)\}], \quad (25)$$

де

$$g(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)}, \quad X_0(z) = \frac{(z-a)^{0,5+i\beta}}{(z+a)^{0,5-i\beta}}, \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}. \quad (26)$$

Як видно з (23), прийнявши до уваги (11), (16), (18), (19), для функції $\Phi_0(z)$ має місце розвинення

$$\Phi_0(z) = A_1 q/(1-g) + O(1/z^2). \quad (27)$$

З другої сторони, виходячи з (25), при великих $|z|$ отримуємо

$$\Phi_0(z) = A_1(a_1 + (a_2 - 2i\beta a_1)/z + \dots). \quad (28)$$

На основі (27) і (28) запишемо

$$a_1 = q/(1-g), \quad a_2 = 2i\beta a_1 a, \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma [\sigma_T b_1 I_c^0 + \sigma_0 I_c - \tau_0 I_s], \quad a_2 = -i\gamma [\sigma_T b_1 I_{st}^0 + \sigma_0 I_{st} + \tau_0 I_{ct}], \\ I_s &= \int_l^a g_s(t) dt, \quad I_c = \int_l^a g_c(t) dt, \quad I_c^0 = \int_0^l g_c(t) dt, \\ I_{st} &= \int_l^a g_s(t) t dt, \quad I_{ct} = \int_l^a g_c(t) t dt, \quad I_{st}^0 = \int_0^l g_s(t) t dt, \\ b(t) &= \beta \ln \frac{a-t}{a+t}, \quad g_c(t) = \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad g_s(t) = \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad \gamma = \frac{e^{\beta\pi}}{\pi}. \end{aligned} \quad (30)$$

З системи алгебраїчних рівнянь (29) отримуємо

$$\sigma_0 = [-\sigma_T b_1 (I_c^0 I_{ct} + I_s I_{st}^0) + q\pi e^{-\beta\pi} (I_{ct} - 2a\beta I_s)/(1-g)] / (I_c I_{ct} + I_s I_{st}),$$

$$\tau_0 = [\sigma_T b_1 (I_c^0 I_{st} + I_c I_{st}^0) - q\pi e^{-\beta\pi} (I_{st} + 2a\beta I_c)/(1-g)] / (I_c I_{ct} + I_s I_{st}).$$

Зауважимо, що компоненти тензора напружень на осі Ox знайдемо за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm &= A_1^{-1} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)], \\ \sigma_x^+ &= A_1^{-1} Re [3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x)] + P_1 - q(3+g)/(1-g), \end{aligned}$$

$$\sigma_x^+ + \sigma_x^- - 2\sigma_y^\pm = P_1 + P_2 - 2q, \quad -\infty < x < \infty,$$

явні вирази для яких не наводимо в силу обмеженості об'єму статті.

3. Задача згину пластини. Введемо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$ для кожної із півплощин S_j та аналітичне продовження функції $\Phi_{3j}(z)$ із області S_j у область S_{3-j} . Тоді, згідно [9], можемо записати:

$$\partial_x(\partial_x w^{(j)} + i\partial_y w^{(j)}) = \Phi_{3j}(z) - \Phi_{3j}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \quad z \in S_j, \quad (31)$$

$$2\tilde{\mu}_j^{(j)}(M_y^{(j)} + i(H_{xy}^{(j)} + \int_{-a}^x N_y^{(j)} dx)) = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) + \Phi_{3j}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)} \quad z \in S_j, \quad (32)$$

де $\Psi_{3j}(z) = -\bar{\Phi}_{3j}(z) - \Phi_{3j}(z) - z\Phi'_{3j}(z)$, $\tilde{\mu}_j = -0,75(1 + \nu_j)/(E_j h^3)$ – модуль зсуву, $\tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j)/(1 - \nu_j)$, E_j – модуль Юнга.

Для комплексного потенціалу $\Phi_{3j}(z)$ має місце розвинення

$$\Phi_{3j}(z) = O(1/z^2), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Якщо ввести функцію

$$\theta_3(z) = \Phi_{31}(z) + \Phi_{32}(z), \quad z \in S_j, \quad (34)$$

то з крайових умов (5), врахувавши (31), одержуємо

$$\theta_3^+ - \theta_3^- = 0, \quad x \in L'. \quad (35)$$

Врахувавши (32), з перших трьох крайових умов (5) та (6)-(8) отримуємо

$$\tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1 \Phi_{31}^+(x) - \tilde{\mu}_1 \Phi_{32}^+(x) = \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 \Phi_{32}^-(x) - \tilde{\mu}_2 \Phi_{31}^-(x). \quad (36)$$

Введемо функцію

$$\Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_{33-j}(z), \quad z \in S_j, \quad (37)$$

тоді (36) матиме вигляд

$$\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = 0, \quad x \in \check{L}. \quad (38)$$

Запишемо розв'язок задачі лінійного спряження (38)

$$\Phi_3(x) = 0. \quad (39)$$

Врахувавши (37) і (39), одержимо взаємозв'язок між функціями $\Phi_{3j}(z)$ і $\Phi_{33-j}(z)$

$$\Phi_{3j}(z) = \tilde{\mu}_j / (\tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j) \Phi_{33-j}(z).$$

Виходячи з (34) і (37) та враховуючи (39), знайдемо вирази для функції $\Phi_{3j}(z)$ через введену функцію $\theta_3(z)$

$$\Phi_{3j}(z) = \begin{cases} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_j, \\ \tilde{A}_{3-j}^{-1} \tilde{\mu}_j \tilde{\kappa}_{3-j} \theta_3(z), & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (40)$$

де $\tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j$.

Беручи до уваги крайові умови (6), (7) та залежність (32), на основі (40) отримаємо таку задачу лінійного спряження

$$\theta_3^+(x) - \tilde{g}\theta_3^-(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x), \quad x \in \tilde{L}, \quad (41)$$

де

$$\tilde{f}(x) = \sigma_T b_2, \quad x \in L, \quad \tilde{f}(x) = M_0 + iH_0, \quad x \in L'_1, \quad \tilde{f}(x) = M_0 - iH_0, \quad x \in L''_1,$$

$$\tilde{g} = \tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1 / (\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1), \quad \tilde{A} = \tilde{\kappa}_1 / (2\tilde{A}_1).$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (35), (41) має вигляд

$$\theta_3(z) = \tilde{A}\tilde{X}_0(z)[\sigma_T b_2 \tilde{g}(L, z) + M_0 \tilde{g}(L_1, z) + iH_0\{\tilde{g}(L'_1, z) - \tilde{g}(L''_1, z)\}], \quad (42)$$

$$\text{де } \tilde{g}(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}, \quad \tilde{X}_0(z) = \frac{(z-a)^{0.5+i\tilde{\beta}}}{(z+a)^{0.5-i\tilde{\beta}}}, \quad \tilde{\beta} = -\frac{\ln|\tilde{g}|}{2\pi}.$$

Виходячи з (33), (34), знайдемо розвинення функції $\theta_3(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$

$$\theta_3(z) = O(1/z^2). \quad (43)$$

Крім того, із (42) при великих $|z|$ можемо записати такі розвинення:

$$\theta_3(z) = \tilde{A} \left(\tilde{a}_1 + (\tilde{a}_2 - 2ia\tilde{\beta}\tilde{a}_1)/z + \dots \right), \quad (44)$$

де

$$\tilde{a}_1 = \tilde{\gamma} \left[\sigma_T b_2 \tilde{I}_c^0 + M_0 \tilde{I}_c + H_0 \tilde{I}_s \right], \quad \tilde{a}_2 = -i\tilde{\gamma} \left[\sigma_T b_2 \tilde{I}_{st}^0 + M_0 \tilde{I}_{st} - H_0 \tilde{I}_{ct} \right],$$

вирази для $\tilde{\gamma}$, $\tilde{I}_c^0$, $\tilde{I}_\rho$, $\tilde{I}_{\rho t}$, $\tilde{I}_{st}^0$ отримуємо із відповідних залежностей (31) заміною $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$, наприклад $\tilde{\gamma} = e^{\tilde{\beta}\pi}/\pi$.

На основі (43) і (44)

$$\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{a}_2 = 0. \quad (45)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (45), одержимо

$$M_0 = (\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st}^0) \tilde{\Delta}, \quad H_0 = (\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{st} - \tilde{I}_c \tilde{I}_{st}^0) \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = -\sigma_T b_2 / (\tilde{I}_c \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st}).$$

Для знаходження моментів на дійсній осі маємо формули:

$$M_y^\pm + iH_{xy}^\pm = \tilde{A}^{-1} [\theta^+(x) - \tilde{g}\theta^-(x)], \quad d_j = (\tilde{\kappa}_j - 2)/\tilde{\kappa}_j,$$

$$M_x^+ = \tilde{A} \operatorname{Re} [d_1 \theta_3^+(x) + \tilde{g} \theta_3^-(x)], \quad M_x^- = -\tilde{A} \operatorname{Re} [\theta_3^+(x) + \tilde{g} d_2 \theta_3^-(x)], \quad (46)$$

а якщо врахувати (42), то на основі (46) знайдемо їх явний вираз, а за відомими формулами – напруження, обумовлені згином.

4. Числовий аналіз задачі. Для знаходження довжини a пластичної зони на продовженні тріщини використаємо умову пластичності Мізеса [1] у вигляді умови пластичності поверхневого шару [2, 3]

$$\sigma_T^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2,$$

де компоненти тензора напружень у пластині є комбінацією напруженого стану плоскої задачі і задачі згину.

Розкриття тріщини δ на верхній основі пластини у вершині $x = l$ знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} \delta = \frac{g-1}{2\pi g} \int_a^l \sqrt{a^2 - x^2} \left\{ \frac{A_1}{2\mu_1\mu_2} [(\sigma_0 - \sigma_T b_1)\{\sin b(x)I_{sl}(x) + \cos b(x)I_{cl}(x)\} + \right. \\ \left. + \tau_0(\{\sin b(x)I_{cl}(x) - \cos b(x)I_{sl}(x)\} - 2\{\cos b(x)I_{sp}(x) + \sin b(x)I_{cp}(x)\})] + \right. \\ \left. + h\tilde{A}[(M_0 - \sigma_T b_2)\{\sin b(x)I_{sl}(x) + \cos b(x)I_{cl}(x)\} - H_0(\{\sin b(x)I_{cl}(x) - \right. \\ \left. - \cos b(x)I_{sl}(x)\} + 2\{\cos b(x)I_{sp}(x) + \sin b(x)I_{cp}(x)\})] \right\} dx. \end{aligned}$$

Числовий аналіз задачі проведено для нитесилу $\sigma_T^1 = 278$ МПа, $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$ МПа та технічно чистого заліза $\sigma_T^2 = 130$ МПа, $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$ МПа. При обчисленні інтегралів використано відповідні квадратурні формули Гаусса [8]. Результати приведено для верхньої основи пластини ($z = -h$) за $P_1/\sigma_T^2 = 0,4$.

На рис. 2, 4 показано графічні залежності відносної довжини пластичної зони a/l і відносного розкриття тріщини δ^*/l ($\delta^* = \delta(l, -h)E_2/\sigma_T^2$) від безрозмірного розподіленого навантаження q/σ_T^2 . Криві 1 побудовано для $h_1/h = 1$ (випадок наскрізної тріщини), криві 2 – для $h_1/h = 0,8$, криві 3 – для $h_1/h = 0,6$. Як бачимо з цих рисунків зі збільшенням параметра розподіленого навантаження q/σ_T^2 величини a/l і δ^*/l збільшуються, а при $h_1/h \rightarrow 1$ зменшуються.

На рис. 3, 5 побудовано графічні залежності відносної довжини пластичної зони a/l і відносного розкриття тріщини δ^*/l від відносної глибини ненаскрізної тріщини h_1/h . Криві 1 побудовано для $q/\sigma_T^2 = 0,4$, криві 2 – для $q/\sigma_T^2 = 0,5$ і крива 3 – для $q/\sigma_T^2 = 0,6$. Бачимо, що зі збільшенням відношення h_1/h величини a/l і δ^*/l зменшуються, а при збільшенні параметра q/σ_T^2 їх величини зростають.

Для випадку, коли $h_1/h = 1$, отримаємо розв'язок задачі з наскрізною тріщиною, який наведено в роботі [6].

1. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності // Львів: Світ. – 1999. – Т. 1. – 531 с.
2. *Кир'ян В.І.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій // Львів: СПОЛОМ. – 2007. – 320 с.
3. *Кушнір Р.М.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами // Львів: СПОЛОМ. – 2003. – 320 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости // М.: Наука. – 1966. – 708 с.
5. *Николишин М.М.* Двоісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115-121.

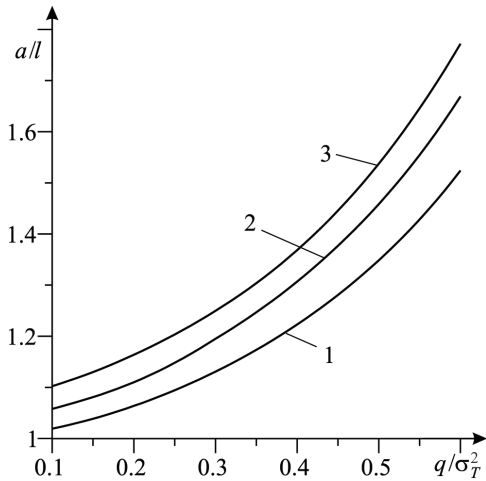


Рис. 2.

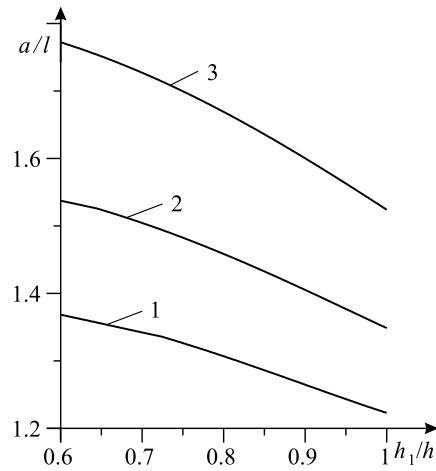


Рис. 3.

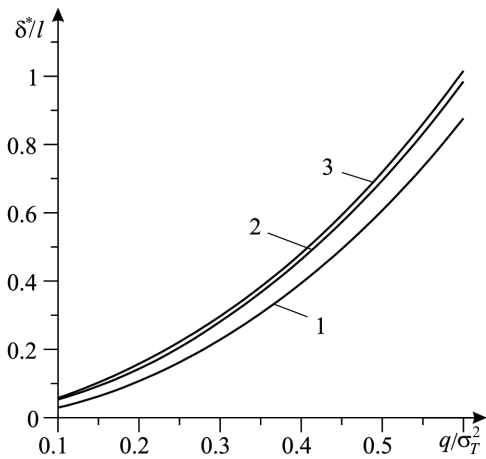


Рис. 4.

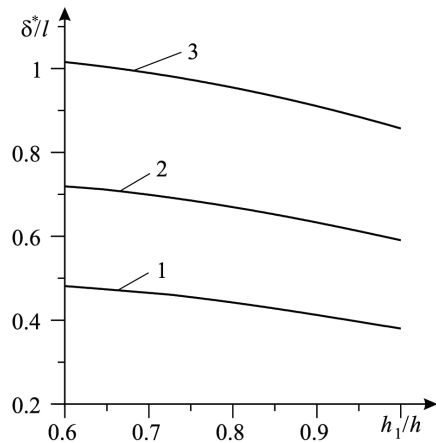


Рис. 5.

6. *Николишин М.М.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4 – С. 101-108.
7. *Николишин М.М.* Раскрытие несквозных трещин в пластине // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 1987. – № 26. – С. 29-31.
8. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках // К.: Наук. думка. – 1976. – 443 с.
9. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит // Минск: Изд-во Белорус. ун-та. – 1975. – 256 с.
10. *Castro et alii J.T.P.* Characterization of crack tip stress fields // Forni di Sopra (UD). – 2011. – P. 58-65.
11. *Dong Y. F.* Computational modeling of elastic and plastic multiple cracks by the fundamental solutions // Finite elements in analysis and design. – 1996. – 23. – P. 115-132.
12. *Jong-Min Kim* Crack interaction effects of in-plane surface cracks using elastic and elastic-plastic

M. M. Nykolyshyn, V. K. Opanasovych, L. R. Kurotchyn, M. S. Slobodyan

Extension of piecewise-homogeneous plate with a non-through crack in rectilinear interface of materials and taking into account plastic zones at front of the crack.

The problem of biaxial tension by forces at infinity of a piecewise-homogeneous isotropic plate with a non-through crack in a rectilinear interface of materials is investigated. It is assumed that the edges of the crack are free from external load, and in front on a crack prolongation plastic zones are formed, for modeling of which the Mises plasticity condition are used. On basis the classical theory of bending the solution of the problem is divided into plane extension and plate bending problems. With the use of complex potentials and methods of the theory of complex functions the problem is reduced to the solution of problems of linear conjugation. Their solution in the class of functions bounded at the crack tip is constructed, and the stress state of the plate at the interface of materials is defined. The equation for determination of the length of the plastic zones and the relations for determination of the stresses are written down. The numerical analysis of the problem is carried out.

Keywords: *piecewise-homogeneous plate, non-through crack, tension, bending, complex potentials, plastic zone.*

М. М. Николишин, В. К. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян

Растяжение кусочно-однородной пластины с несквозной трещиной на прямолинейной границе раздела материалов и с учетом пластических зон по фронту трещины.

В работе исследована задача о двухосном растяжении усилиями на бесконечности кусочно-однородной изотропной пластины с несквозной трещиной на прямолинейной границе раздела материалов. Предполагаем, что берега трещины свободны от внешней нагрузки, а по фронту на продолжении трещины образуются пластические зоны, для моделирования которых используем условие пластичности Мизеса. Задачу разбиваем на задачу растяжения и изгиба пластины на основе классической теории изгиба. С использованием комплексных потенциалов и методов теории функций комплексной переменной решение задачи сведено к задачам линейного сопряжения. Построено их решение в классе функций, ограниченных в вершинах трещины, и найдено напряженное состояние пластины на границе раздела материалов. Записано уравнение для определения длины пластических зон и соотношения для определения напряжений. Выполнен численный анализ задачи.

Ключевые слова: *кусочно-однородная пластина, несквозная трещина, растяжение, изгиб, комплексные потенциалы, пластические зоны.*

Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Львівський національний ун-т ім. Івана Франка

nyk@iapmm.lviv.ua

klesi@i.ua

kafmeh@franko.lviv.ua

Получено 01.06.12

УДК 517.5

©2013. О. А. Очаковская

АНАЛОГ ПРОБЛЕМЫ ВАТСОНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ КРУГАМ

Получены теоремы единственности для класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам фиксированного радиуса. Изучается случай, когда граничное поведение функции рассматривается вблизи единственной точки.

Ключевые слова: проблема Ватсона, теорема Карлемана.

1. Введение. Пусть $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=0}^\infty$ – последовательность положительных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ множество функций $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq c_0 c_1^q M_q |1 - z|^q$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, где постоянные $c_0 > 0$ и c_1 зависят от f , но не от z и q . Проблема, поставленная Г.Н. Ватсоном [1] в 1916 году в связи с исследованием асимптотических разложений, заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия на последовательность $\mathcal{M}$, при которых класс $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ содержит только нулевую функцию. Эта проблема оказалась тесно связанной с известной проблемой Ж. Адамара об описании квазианалитических классов функций, поставленной в 1912 году. Окончательное решение проблемы Г.Н. Ватсона и Ж. Адамара было получено Т. Карлеманом [2] в 1923 году. Им было показано, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевых функций, является условие

$$\int_1^\infty \ln \left(\sum_{q=0}^\infty \frac{r^{2q}}{M_q^2} \right) \frac{dr}{r^2} = +\infty. \quad (1)$$

В 1930 году А. Островски [3] получил новое доказательство этого результата и обнаружил, что условие (1) можно заменить следующим:

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty, \quad (2)$$

где

$$T(r) = \sup_{q \geq 0} \frac{r^q}{M_q}.$$

В настоящее время известен ряд других условий на последовательность $\mathcal{M}$, эквивалентных (1) и (2) (см., например, [4]–[6]). Одним из них является условие

$$\sum_{m=1}^\infty \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} = +\infty, \quad (3)$$

которое характеризует также квазианалитические классы функций на подмножествах вещественной оси. По поводу других результатов, связанных с проблемой Г.Н. Ватсона, см., например, [4]-[7] и библиографию в этих работах.

В данной статье рассматривается аналог проблемы Г.Н. Ватсона для функций класса $f \in L^{1,loc}(\mathbb{D})$, имеющих нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам фиксированного радиуса (см. теоремы 1-3 ниже). Одним из приложений полученных результатов является аналог теоремы Т. Карлемана для решений некоторых дифференциальных уравнений эллиптического типа (см. теорему 4). Получено также усиление теоремы Карлемана, в котором рассматривается более широкий класс функций (см. теорему 5).

2. Формулировки основных результатов. Для множества $A \subset \mathbb{C}$ символами ∂A и $\bar{A}$ обозначаются, соответственно, граница и замыкание A .

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ действует транзитивно на $\mathbb{D}$ посредством конформных отображений (см., например, [6, гл. 2, §2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$. Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|},$$

где черта означает комплексное сопряжение. Расстояние d и гиперболическая мера

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z = x + iy$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$. Гиперболическим кругом радиуса $r > 0$ с центром $w \in \mathbb{D}$ называется множество

$$K_r(w) := \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) \leq r\}.$$

Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ называется r -областью, если выполнены следующие условия:

- (i) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором гиперболическом круге радиуса r , содержащемся в $\mathcal{O}$;
- (ii) множество центров всех гиперболических кругов радиуса r , содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Для всякой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ символом $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f \in L^{1,loc}(\mathcal{O})$ таких, что

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 0$$

для любого гиперболического круга $K_r(w) \subset \mathcal{O}$ (если $\mathcal{O}$ не содержит таких кругов, то полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^{1,loc}(\mathcal{O})$).

Классы $V_r(\mathcal{O})$ и различные их обобщения изучались во многих работах (см., например, [9]-[11] и библиографию к этим работам). Из этих работ известно, что класс $V_r(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ является достаточно широким.

Перейдем к формулировкам основных результатов работы. Для $a \in (0, 1)$ положим $\mathbb{D}_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < 1 - a\}$.

Теорема 1. Пусть $f \in V_r(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ является r -областью и содержит круг $\mathbb{D}_a$ при некотором $a \in (0, 1)$. Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющая (3), для которой

$$|f(z)| \leq M_q |1 - z|^q \quad (4)$$

при почти всех (по мере Лебега) $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f = 0$.

Дальнейшие результаты показывают точность условий теоремы 1.

Теорема 2. Для любого $a \in (0, 1)$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < +\infty, \quad (5)$$

существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$, для которой выполнено неравенство (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Далее, обозначим через $V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ множество функций $f \in V_r(\mathbb{D})$, которые при любых $a \in (0, 1)$ удовлетворяют условию

$$|f(z)| \leq c_0 c_1^q M_q |1 - z|^q \quad (6)$$

для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, где постоянные c_0 и c_1 зависят от f и a , но не от z и q .

Теорема 3. Для любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей (5), существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевых функций, является условие (3).

Одним из приложений теорем 1-3 является следующий аналог теоремы Карлемана для решений уравнения

$$(1 - |a + z(1 - a)|^2) \Delta f(z) + b f(z) = 0 \quad (7)$$

в круге $\mathbb{D}$.

Теорема 4. Пусть $a \in (0, 1)$, $b > (1 - a)^2$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) Пусть $f \in C^2(\mathbb{D})$ является решением уравнения (7). Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющая (3), для которой выполнено условие (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f = 0$.

(ii) Для любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей (5), существует ненулевое решение $f \in C^2(\mathbb{D})$ уравнения (7), для которого выполнено условие (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим теперь через $U_r(\mathbb{D})$ множество функций $f \in C(\mathbb{D})$, для которых

$$\int_{\partial K_r(w)} f(z) dz = 0$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отметим, что класс $U_r(\mathbb{D})$ гораздо шире содержащегося в нем класса голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Известно, например, что подпространство радиальных функций из $U_r(\mathbb{D})$ является бесконечномерным (см. [9, Part 5, Ch.4.2]), в то время как соответствующее подпространство голоморфных в $\mathbb{D}$ функций состоит из констант. Пусть $U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ – множество функций $f \in U_r(\mathbb{D})$, которые при любом $a \in (0, 1)$ удовлетворяют условию (6) для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, с положительными постоянными c_0 и c_1 , зависящими от f и a , но не зависящими от z и q .

Следующий результат усиливает теорему Карлемана.

Теорема 5. Для того, чтобы класс $U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевую функцию, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ удовлетворяла условию (3).

Доказательства теорем 1-5 содержаться в разделе 4 данной работы. В разделе 3 приводятся необходимые обозначения и некоторые вспомогательные утверждения.

3. Вспомогательные утверждения. По поводу используемых ниже понятий и фактов см. [12].

Группа $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ изоморфна группе $SU(1, 1)$, состоящей из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

которая действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$gz = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Разложение Ивасава группы $SU(1, 1)$ имеет вид $SU(1, 1) = \mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{K}$, где

$$\mathcal{N} = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

и $\mathcal{K} = SO(2)$ – группа поворотов. Всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t 0 = \frac{\operatorname{sh} t - i s e^{-t}}{\operatorname{ch} t - i s e^{-t}},$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}^1$ определены однозначно, при этом

$$s = -\frac{\operatorname{Im} z}{|1 - z|^2}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}. \quad (8)$$

Используя (8), имеем

$$d\mu(z) = e^{-2t} ds dt. \quad (9)$$

Пусть $\mathcal{L} = 4(1 - |z|^2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ – оператор Лапласа-Бельтрами.

Лемма 1. Пусть $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ и $\{M'_q\}_{q=0}^\infty$ – последовательности положительных чисел такие, что выполнено (3) и для всех $q \in \mathbb{Z}_+$

$$M'_q \leq c_1 c_2^q (1 + M_{q+k}), \quad (10)$$

где $c_1, c_2 > 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ не зависят от q . Тогда

$$\sum_{m=1}^\infty (\inf_{q \geq m} (M'_q)^{1/q})^{-1} = +\infty. \quad (11)$$

Доказательство. Если существует бесконечно много чисел $q \in \mathbb{Z}_+$, для которых $M_{q+k} \leq 1$, то выполнение условия (11) очевидно. В противном случае существует число $q > 1$ такое, что $M_{q+k} > 1$ при всех $q > q_0$. Следовательно, при таких q выполнено неравенство

$$M'_q \leq c_3^q M_{q+k}$$

с постоянной $c_3 > 1$, не зависящей от q (см. (10)). Отсюда имеем

$$(M'_q)^{1/q} \leq c_3 (M_{q+k})^{1/q} = c_3 \left(M_{q+k}^{1/(q+k)} \right)^{1+k/q} \quad (12)$$

Пусть $m > q_0$. Из (12) следует, что

$$\inf_{q \geq m} (M'_q)^{1/q} \leq a_m^{1+k/m},$$

где $a_m = \inf_{q \geq m} (M_{q+k})^{1/(q+k)}$. Предположим, что $\sum_{m > q_0} a_m^{-1-k/m} < +\infty$, тогда $k \geq$

1. Пусть $E = \{m > q_0 : a_m^k > 2^m\}$. Тогда

$$\sum_{m > q_0} a_m^{-1} = \sum_{m \in E} a_m^{-1} + \sum_{m \notin E} a_m^{-1} \leq \sum_{m \in E} 2^{-m/k} + 2 \sum_{m \notin E} a_m^{-1-k/m} < +\infty.$$

Это противоречит (3) и лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (5). Тогда для любого $A \geq 1$ существует $B = B(A) > 0$ со следующим свойством: для любого отрезка $[\alpha, \beta]$ длины $l > B$ существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[\alpha, \beta]$ такая, что

$$\|\varphi^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} \leq M_q A^{-q}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Из [6, теорема 1.3.5] следует, что существует ненулевая неотрицательная функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем, для которой выполнены неравенства

$$\|\psi^{(q)}\|_{C(\mathbb{R}^1)} \leq M_q K^{q+1}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

с положительной постоянной K , не зависящей от q . Пусть $R > 0$ такое, что носитель ψ содержится в отрезке $[-R, R]$. Положим $B = 2AKR$. Тогда для любого отрезка $[\alpha, \beta]$ длины $l > B$ функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{K} \psi \left(\frac{x - \gamma}{KA} \right), \text{ где } \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

удовлетворяет требованиям леммы 2. $\square$

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Для $T \in \mathbb{R}^1$ положим:

$$E(T, r) = \{z = n_s a_t 0 \in \mathbb{D} : |t - T| < r\},$$

$$G_1(T, r) = \{z = n_s a_t 0 \in E(T, r) : |s| \leq 1\},$$

$$G_2(T, r) = \{z = n_s a_t 0 \in E(T, r) : |s| > 1\}.$$

Пусть также $E(T, r) \subset \mathbb{D}_\alpha$ и

$$I(T, r, q) = \int_{E(T, r)} |f(z)| \left(\frac{|Im z|}{|1 - z|^2} \right)^q d\mu(z), \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$I(T, r, q) = I_1(T, r, q) + I_2(T, r, q), \quad (13)$$

где

$$I_1(T, r, q) = \int_{G_1(T, r)} |f(z)| \left(\frac{|Im z|}{|1 - z|^2} \right)^q d\mu(z) \leq \int_{G_1(T, r)} |f(z)| d\mu(z), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_2(T, r, q) &= \int_{G_2(T, r)} |f(z)| \left(\frac{|Im z|}{|1 - z|^2} \right)^q d\mu(z) = \\ &= \int_{G_2(T, r)} \frac{1}{|s|^2} \frac{|f(z)|}{|1 - z|^{q+2}} \left(\frac{|Im z|}{|1 - z|} \right)^{q+2} d\mu(z), \end{aligned} \quad (15)$$

(см.(8)). Используя (4) при $q = 0$, из (14), (9) и определения $G_1(T, r)$ имеем

$$I_1(T, r, q) \leq M_0 \int_{G_1(T, r)} d\mu(z) = 4re^{2(r-T)} M_0, \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (16)$$

Далее, при любом $z \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $|Im z| \leq |1 - z|$. Как и выше, используя (4), (15) и (9), получаем

$$I_2(T, r, q) \leq M_{q+2} \int_{G_2(T, r)} \frac{1}{|s|^2} d\mu(z) \leq 4re^{2(r-T)} M_{q+2} \quad (17)$$

при любом $q \in \mathbb{Z}_+$. Из оценок (16), (17) и равенства (13) делаем вывод, что

$$I_2(T, r, q) \leq 4re^{2(r-T)}(M_0 + M_{q+2}) \quad (18)$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и всех $T \in \mathbb{R}^1$ таких, что $E(T, r) \subset \mathbb{D}_\alpha$. Из леммы 1 и условия (3) получаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M_0 + M_{q+2})^{1/q} \right)^{-1} = +\infty.$$

Отсюда и из (18) следует (см. [13, теорема 1]), что $f = 0$ и теорема 1 доказана.

□

Доказательство теоремы 2. Для $z \in \mathbb{C}$, $\xi > 0$, $\lambda > 0$ положим

$$g(z, \xi, \lambda) = H_{\frac{i\lambda}{2}}^{(1)} \left(\frac{i}{2} \xi e^{2t} \right) \xi^{-\frac{i\lambda}{2}} e^{t+i\xi s}, \quad (19)$$

где $H_{\frac{i\lambda}{2}}^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода (см.(8), а также [14, параграф 3]). Используя асимптотическую формулу для $H_{\frac{i\lambda}{2}}^{(1)}(\frac{i}{2}\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$ (см., например [14, формула (29.2)]), из (19) находим

$$(1+i)g(0, \xi, \lambda) \sim \sqrt{\frac{8}{\pi}} \xi^{\frac{i\lambda-1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{4}(\lambda-1) - \frac{\xi}{2}\right) \text{ при } \xi \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Из дифференциального уравнения Бесселя для функции Ганкеля имеем

$$(1-|z|^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(z, \xi, \lambda) + (1+\lambda^2)g(z, \xi, \lambda) = 0. \quad (21)$$

Пусть $r > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\int_{K_r(w)} g(z, \xi, \lambda) d\mu(z) = 0 \quad (22)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Возможность такого выбора λ следует из (21) и [13, параграф 3]. Далее, пусть последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел удовлетворяет условию (5) и пусть $A \geq 1$. Поскольку множество

$$\{\xi > 0 : \cos\left(\frac{\lambda}{2} \ln \xi\right) > 0\}$$

содержит отрезки сколь угодно большой длины, из (20) и леммы 2 следует, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset (1, +\infty)$ и ненулевая неотрицательная функция $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[\alpha, \beta]$ такие, что

$$\operatorname{Re}((1+r)g(0, \xi, \lambda)) > 0, \text{ при всех } \xi \in [\alpha, \beta] \quad (23)$$

и

$$\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} \leq M_q A^{-q} \quad \text{для любого } q \in \mathbb{Z}_+. \quad (24)$$

Положим теперь

$$f_0(z) = \int_{\alpha}^{\beta} g(z, \xi, \lambda) \varphi_A(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Из (22) получаем, что $f_0 \in V_r(\mathbb{D})$. Кроме того, из (25) и (22) имеем

$$\mathcal{L}f_0 + (\lambda^2 + 1)f_0 = 0 \text{ в } \mathbb{D}. \quad (26)$$

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ из (26) следует, что f_0 является вещественно-аналитической в $\mathbb{D}$. Покажем, что $f_0(0) \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$\int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}((1+i)g(0, \xi, \lambda)) \varphi_A(\xi) d\xi = \operatorname{Re}((1+i)f_0(0)) = 0 \quad (27)$$

(см. (25)). Поскольку $\varphi_A \geq 0$ и не является тождественным нулем, равенство (27) противоречит условию (23). Следовательно, $f_0(0) \neq 0$. Получим теперь верхнюю оценку для $|f_0(z)|$. Из интегрального представления для функции Ганкеля находим

$$g(z, \xi, \lambda) = m_{\lambda} \int_1^{\infty} (u^2 - 1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} \exp\left((1+i\lambda)t + \xi(is - \frac{u}{2}e^{2t})\right) du,$$

где

$$m_{\lambda} = \frac{(1 + e^{\pi\lambda})\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2})}{\pi^{3/2}e^{\pi\lambda/4}2^{i\lambda}},$$

(см. [14, формула (19.11)]). Отсюда и из (25) имеем

$$f_0(z) = m_{\lambda} \int_1^{\infty} (u^2 - 1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} e^{(1+i\lambda)t} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\left(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\right) d\xi dt. \quad (28)$$

Интегрирование по частям показывает, что

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\left(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\right) d\xi \right| \leq (\beta - \alpha) \left| s + \frac{iu}{2}e^{2t} \right|^{-q} \exp\left(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\right) \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}_+$.

Отсюда и из (28), (24) следует, что

$$|f_0(z)| \leq m_{\lambda}(\beta - \alpha) \left| s + \frac{i}{2}e^{2t} \right|^{-q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} e^t \int_1^{\infty} u \exp\left(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\right) du \leq$$

$$\leq \frac{2m_\lambda(\beta - \alpha)}{\alpha e^t} \left(1 + \frac{2e^{-2t}}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}e^{2t}\right) \left|s + \frac{iu}{2}e^{2t}\right|^{-q} M_q A^{-q} \quad (29)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_\alpha$. Тогда из (8) и определения $\mathbb{D}_\alpha$ имеем $tht > 2a - 1$, откуда

$$e^{-2t} < \frac{1}{a} - 1 \quad (30)$$

и

$$x > 2a - 1. \quad (31)$$

Полагая

$$c_0(a) = \frac{2m_\lambda(\beta - \alpha)}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} \left(1 + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{a} - 1\right)\right), \quad (32)$$

из (29) и (30) получаем, что

$$|f_0(z)| \leq c_0(a) \left|s + \frac{i}{2}e^{2t}\right|^{-q} \frac{M_q}{A_q}, \quad z \in \mathbb{D}_\alpha, \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$|y| < \frac{\sqrt{a}}{2}|1 - z|, \quad z \in \mathbb{D}_\alpha. \quad (34)$$

Из (34) имеем $y^2 < \frac{a}{4}|1 - z|^2 = \frac{a}{4}((1 - x)^2 + y^2)$, откуда

$$|y| < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4 - a}}(1 - x) < 1 - x. \quad (35)$$

Используя (31), (34) и (35), получаем

$$\frac{1 - |z|^2}{|1 - z|} = \frac{1 - x^2}{|1 - z|} - \frac{y^2}{|1 - z|} > 2a \frac{(1 - x)}{|1 - z|} - \frac{a}{4}|1 - z| > 2a \frac{1 - x}{1 - x + |y|} - \frac{a}{2} > \frac{a}{2}.$$

Учитывая (8), отсюда имеем

$$\begin{aligned} \left|s + \frac{i}{2}e^{2t}\right|^{-q} &\leq 2^q e^{-2qt} = 2^q \left(\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}\right)^q = \\ &= |1 - z|^q z^q \left(\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}\right)^{-q} < \left(\frac{4}{a}\right)^q |1 - z|^q. \end{aligned} \quad (36)$$

Предположим теперь, что $|y| \geq \frac{\sqrt{a}}{2}|1 - z|$, $z \in \mathbb{D}_\alpha$. Тогда из (8) получаем

$$\left|s + \frac{i}{2}e^{2t}\right|^{-q} \leq |s|^{-q} = \left(\frac{|1 - z|^2}{|y|}\right)^q \leq \left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^q |1 - z|^q < \left(\frac{4}{a}\right)^q |1 - z|^q. \quad (37)$$

Таким образом, из (36), (37) и (33) следует, что

$$|f_0(z)| \leq c_0(a) \frac{M_q}{A_q} \left(\frac{4}{a}\right)^q |1 - z|^q, \quad z \in \mathbb{D}_\alpha, \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (38)$$

Выберем теперь $A > \frac{4}{a}$ и положим $f(z) = f_0(z)/c_0(a)$. Тогда $f \in V_r(\mathbb{D})$, является вещественно-аналитической и не обращается в нуль тождественно. Кроме того, из (38) следует, что f удовлетворяет (4) при всех $z \in \mathbb{D}_\alpha$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, теорема 2 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть последовательность $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=1}^\infty$ положительных чисел удовлетворяет условию (5). Рассмотрим функцию φ_A из доказательства теоремы 2 при $A = 1$. Тогда функция f_0 , определенная (25), удовлетворяет условию

$$|f_0(z)| \leq c_0(a) \frac{M_q}{A_q} \left(\frac{4}{a}\right)^q |1-z|^q, \quad z \in \mathbb{D}_\alpha, \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (39)$$

для любого $a \in (0, 1)$ (см. (38)). Это означает, что f_0 удовлетворяет условию (6) при $c_1 = 4/a$. Кроме того, из доказательства теоремы 2 видно, что $f_0 \in V_r(\mathbb{D})$, является вещественно-аналитической и $f_0(0) \neq 0$. Таким образом, функция f_0 удовлетворяет всем требованиям теоремы 3. $\square$

Доказательство теоремы 4. Положим

$$\lambda = \sqrt{\frac{b}{(1-a)^2} - 1}.$$

Тогда, если $f \in C^2(\mathbb{D})$ является решением уравнения (7) в $\mathbb{D}$, то функция $h(z) = f\left(\frac{z-a}{1-a}\right)$ является решением уравнения

$$\mathcal{L}h + (\lambda^2 + 1)h = 0 \text{ в } \mathbb{D}_\alpha. \quad (40)$$

Тогда $h \in V_r(\mathbb{D}_\alpha)$ при некотором $r > 0$ (см. [15, параграф 4]). Кроме того,

$$\frac{|h(z)|}{|1-z|^q} = \left| f\left(\frac{z-a}{1-a}\right) \left(1 - \frac{z-a}{1-a}\right) \right| (1-a)^{-q}, \quad z \in \mathbb{D}_\alpha. \quad (41)$$

Отсюда и из теоремы 1 следует первое утверждение теоремы 4.

Докажем второе утверждение. Из доказательства теоремы 2 видно, что существует ненулевая вещественно-аналитическая функция h , удовлетворяющая (39), такая, что

$$|h(z)| \leq M_q(1-a)^q |1-z|^q$$

для всех $z \in \mathbb{D}_\alpha$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $f(z) = h(a + z(1-a))$ является решением уравнения (7) и удовлетворяет условию (4) при всех $z \in \mathbb{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым теорема 4 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Поскольку всякая голоморфная в $\mathbb{D}$ функция содержится в $U_r(\mathbb{D})$, необходимость следует из теоремы Карлемана. Для доказательства достаточности заметим, что если $f \in U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$, то $f(gz) \in U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ для любого $g \in \mathcal{NA}$ (см. (6) и (8)). Применяя гиперболическое сглаживание (см. [9, часть 5, глава 4.2]) и формулу Грина, из теоремы 1 получаем достаточность в теореме 5. $\square$

1. *Watson G.N.* The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials. – *Rend. Circ. mat.*, 1912. – Т. XXXIV.
2. *Carleman T.* Les fonctions quasianalytiques. – Paris, 1926.
3. *Ostrowski A.* Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen // *Acta Math.* – 1930. – V. 53. – P. 181.
4. *Мандельброт С.* Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: ИЛ, 1955.
5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1986.
6. *Maliavin P.* Sur quelques procedes d'extrapolation // *Acta Math.* – 1955. – V. 93. – P. 179-222.
7. *Альфорт Л.* Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве, – М.: Мир, 1986.
8. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009.
10. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Birkhäuser, 2013.
11. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987.
12. *Очаковская О.А.* Граничные теоремы единственности для функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам // *Мат. сборник.* – 2013. – Т. 204. – № 2. – С. 117-132.
13. *Коренев Б.Г.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций, – М.: Наука, 1990.
14. *Волчков В.В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // *Мат. сборник.* – 2001. – Т. 192. – № 9. – С. 17-38.

O. A. Ochakovskaya

An analog of Watson's problem for functions with zero integrals over hyperbolic disks.

Uniqueness theorems for the class of functions having zero integrals over all hyperbolic disks of fixed radius are obtained. The case of a boundary behavior of a function near a unique point is established.

Keywords: *Watson's problem, Carleman's theorem.*

О. О. Очаковська

Аналог проблеми Ватсона для функцій з нульовими інтегралами по гіперболічних кругах.

Отримано теореми єдиності для класу функцій з нульовими інтегралами по усіх гіперболічних колах фіксованого радіуса. Вивчається випадок, коли гранична поведінка функції розглядається в околі єдиної точки.

Ключові слова: *проблема Ватсона, теорема Карлемана.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovska@yandex.ua

Получено 25.05.13

УДК 515.124

©2013. Е. А. Петров

СОХРАНЯЮЩИЕ ШАРЫ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Показано, что корневые представляющие деревья T_X и T_Y конечных ультраметрических пространств изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $F: X \rightarrow Y$.

Ключевые слова: конечное ультраметрическое пространство, конечное корневое дерево, сохраняющее шары отображение, боллеан.

1. Введение. В 2001 году на семинаре Workshop on General Algebra (см. [1]) внимание специалистов по теории решёток было обращено на следующую задачу И.М. Гельфанда. *Используя теорию графов, описать с точностью до изометрии все конечные ультраметрические пространства.* В [2] была доказана теорема про изоморфизм категории ультраметрических пространств и категории полных, атомных, древовидных, градуированных действительными числами решеток. В работе [3] взвешенный оргграф определял конечное квазиультраметрическое пространство, а в симметричном случае авторы получали «каноническое представление» конечных ультраметрических пространств с использованием взвешенных корневых деревьев, причём эти деревья были изоморфны как корневые взвешенные графы тогда и только тогда, когда соответствующие им ультраметрические пространства были изометричными.

Каноническое представление из [3] можно, в определённом смысле, считать решением упомянутой выше задачи И.М. Гельфанда. Естественно возникает вопрос о применении полученного представления в исследовании ультраметрических пространств. В связи с этим заметим, что в последнее время началось изучение боллеанов (balleans) метрических и более общих пространств (см., например, [4], [5]). В метрическом случае боллеан – это просто совокупность шаров пространства и исследование боллеанов очевидным образом связано с изучением класса отображений, сохраняющих свойство «быть шаром».

В работе [6] изучался класс конечных ультраметрических пространств, являющихся «экстремалиями» фундаментального неравенства Гомори-Ху. Для пространств (X, d) , (Y, ρ) из этого класса было доказано, что их представляющие деревья T_X и T_Y изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $F: X \rightarrow Y$. Таким образом, вопрос об изоморфизме боллеанов пространств X и Y оказался эквивалентным вопросу об изоморфизме корневых деревьев, получаемых путём «забывания» заданных на них весовых функций. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай произвольных конечных ультраметрических пространств.

Напомним необходимые определения. Для конечного множества X через $|X|$ бу-

дем обозначать количество его элементов. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Если метрика d удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

для всех $x, y, z \in X$, то она называется *ультраметрикой*, а пара (X, d) называется *ультраметрическим пространством*. В дальнейшем будем рассматривать только те пространства (X, d) , для которых $|X| \neq 0$. *Диаметром* метрического пространства (X, d) называется величина

$$\text{diam}X := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Под *графом* мы понимаем пару (V, E) , состоящую из непустого множества V и (возможно пустого) множества E , элементы которого есть неупорядоченные пары различных точек из V . Для графа $G = (V, E)$ множество $V = V(G)$ называется *множеством вершин*, а $E = E(G)$ – *множеством рёбер*. Если элементами множества E являются упорядоченные пары $\langle x, y \rangle \in V \times V$, то $G = (V, E)$ – ориентированный граф (*орграф*).

Граф H является *подграфом* графа G , $H \subseteq G$, если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Граф G *конечен*, если $|V(G)| < \infty$. Если $E(G) = \emptyset$, то G – *пустой граф*. Конечный непустой граф $P \subseteq G$ называется *путём* (в G), если вершины из P можно без повторений занумеровать в последовательность $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ так, что $(\{v_i, v_j\} \in E(P)) \Leftrightarrow (|i - j| = 1)$. Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющий их путь. *Связный граф* – граф, в котором все вершины связаны.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. Выбранная вершина дерева называется *корнем дерева*. Дерево, содержащее такую вершину, называется *корневым деревом*. Вершину дерева иногда называют *узлом*. *Уровень узла* – длина пути от корня до узла, *t -й ярус* дерева – множество узлов дерева, на уровне t от корня дерева. *Потомками* данного узла будем называть все узлы последующего яруса, смежные с данным узлом. *Лист* дерева – вершина дерева инцидентная с единственным ребром. Если T – корневое дерево с единственным узлом, то мы считаем, что этот узел является листом. *Внутренний узел* – узел дерева, не являющийся листом. Два корневых дерева T_1 и T_2 называются *изоморфными*, если существует биекция $F: V(T_1) \rightarrow V(T_2)$, переводящая корень дерева T_1 в корень дерева T_2 и такая, что

$$(\{u, v\} \in E(T_1)) \Leftrightarrow (\{F(u), F(v)\} \in E(T_2))$$

для любых различных $u, v \in V(T_1)$.

Граф G называется *полным k -дольным*, если его вершины можно разбить на k непустых непересекающихся подмножества $X_1, \dots, X_k$ так, что нет рёбер, соединяющих вершины одного и того же X_i , и две любые вершины из разных X_i, X_j , $1 \leq i, j \leq k$ смежны. В этом случае пишем $G = G[X_1, \dots, X_k]$.

Пусть $(Y, \leq_Y)$ – конечное частично упорядоченное множество. Под *диаграммой Хассе* ч.у. множества $(Y, \leq_Y)$ мы понимаем орграф с множеством вершин Y и мно-

жеством дуг (ориентированных рёбер) $A_Y \subseteq Y \times Y$ таких, что пара $\langle v_1, v_2 \rangle$ принадлежит A_Y тогда и только тогда, когда $v_1 \leq_Y v_2$, $v_1 \neq v_2$ и импликация

$$(v_1 \leq_Y w \leq_Y v_2) \Rightarrow (v_1 = w \vee v_2 = w)$$

имеет место для любого $w \in Y$. Два орграфа (Y, A_Y) и (X, A_X) являются изоморфными, если существует биекция $F: X \rightarrow Y$ такая, что

$$(\langle x, y \rangle \in A_X) \Leftrightarrow (\langle F(x), F(y) \rangle \in A_Y).$$

В этом случае F – изоморфизм орграфов (Y, A_Y) и (X, A_X) . Любое корневое дерево T можно рассматривать как орграф $(V(T), A_T)$, если положить

$$(\langle u, v \rangle \in A_T) \Leftrightarrow (u - \text{потомок } v).$$

Следующие утверждения почти очевидны.

Утверждение 1. Пусть $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ – конечные ч.у. множества, (X, A_X) , (Y, A_Y) – соответствующие им диаграммы Хассе, $F: X \rightarrow Y$ – биекция. Изображение F является изоморфизмом ч.у. множеств $(X, \leq_X)$ и $(Y, \leq_Y)$ тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом орграфов (X, A_X) и (Y, A_Y) .

В этом утверждении и далее изоморфизм ч.у. множеств понимаем в стандартном смысле (см., например, [7, стр. 44]).

Утверждение 2. Пусть T_1 и T_2 – конечные корневые деревья, $X = V(T_1)$, $Y = V(T_2)$ и (X, A_X) , (Y, A_Y) – орграфы, соответствующие T_1 и T_2 , $F: X \rightarrow Y$ – биекция. Изображение F является изоморфизмом корневых деревьев T_1 и T_2 тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом орграфов (X, A_X) и (Y, A_Y) .

2. Представляющие деревья. Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство. Диаметральным графом G_d будем называть граф, для которого

$$V(G_d) = X \text{ и } (\{u, v\} \in E(G_d)) \Leftrightarrow (d(u, v) = \text{diam} X).$$

Напомним, что в метрическом пространстве (X, d) замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $t \in X$ называется множество

$$B_r(t) = \{x \in X : d(x, t) \leq r\}.$$

Для каждого $t \in X$ положим $\text{Sp}_t(X) := \{d(x, t) : x \in X\}$. Обозначим через $\mathbf{B}_X$ множество всех шаров $B_r(t)$ с $r \in \text{Sp}_t(X)$, т.е.

$$\mathbf{B}_X = \{B_r(t) : t \in X, r \in \text{Sp}_t(X)\}.$$

Нам понадобится следующая теорема из [8]

Теорема 1. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geq 2$. Тогда $G_d = G_d[X_1, \dots, X_k]$, $k \geq 2$.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим ультраметрические пространства (X_i, d) , где X_i – подмножество множества X из предыдущей теоремы с метриками, полученными сужением ультраметрики d на X_i . Пусть $d_i = \text{diam} X_i$ и $x_i \in X_i$. Очевидно,

$d(x_i, y) \leq d_i < \text{diam} X$ для всех $y \in X_i$, а при $y \in X \setminus X_i$ имеем $d(x_i, y) = \text{diam} X > d_i$. Таким образом, выполнена следующая

Лемма 1. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geq 2$ и диаметральный графом $G_d[X_1, \dots, X_k]$. Тогда имеет место принадлежность $X_i \in B_X$, $1 \leq i \leq k$.

Как это было сделано в [6], поставим каждому конечному ультраметрическому пространству (X, d) в соответствие помеченное корневое дерево T_X по следующему правилу. Если $X = \{x\}$ – одноточечное множество, то T_X – дерево, состоящее из одного узла, помеченного меткой x , которое мы считаем корневым по определению. Пусть $|X| \geq 2$. Корень v_0 дерева пометим меткой $\bar{v}_0 = \text{diam} X$. Пусть G_d – диаметральный граф пространства (X, d) . По теореме 1 $G_d = G_d[X_1, \dots, X_k]$. В этом случае будем считать, что дерево T_X имеет k узлов $v_1, v_2, \dots, v_k$, лежащих на первом ярусе с метками

$$\bar{v}_i := \begin{cases} \text{diam} X_i, & \text{если } |X_i| \geq 2, \\ x, & \text{если } X_i \text{ – одноточечное множество} \\ & \text{с единственным элементом } x, \end{cases} \quad (1)$$

$i = 1, \dots, k$. Узлы первого яруса, помеченные метками $x \in X$, будут листьями, а метками $\text{diam} X_i$ – внутренними узлами дерева T_X . Если на первом ярусе внутренних узлов нет, то дерево T_X построено. В противном случае, повторяя описанную выше процедуру с пространствами (X_i, d) , соответствующими внутренним узлам первого яруса, получаем узлы второго яруса и т.д.. Так как $|X|$ конечно, то на каком-то из ярусов все вершины будут листьями и построение дерева T_X завершается.

Построенное выше помеченное корневое дерево T_X будем называть *представляющим деревом пространства (X, d)* . Отметим, что разным листьям соответствуют разные $x \in X$ и каждый элемент $x \in X$ приписан какому-то листу, но различные внутренние узлы могут иметь совпадающие метки. В дальнейшем изложении мы будем отождествлять листья дерева T_X с их метками, если это удобно.

Замечание 1. Пусть $|X| \geq 2$ и $(v_0, v_1, \dots, v_n, x_i)$ – путь от корня v_0 дерева T_X до произвольного листа x_i , тогда $\text{diam} X = \bar{v}_0 > \bar{v}_1 > \dots > \bar{v}_n$.

Следующая лемма была сформулирована в [6] для специального класса конечных ультраметрических пространств, но её доказательство справедливо для всех таких пространств.

Лемма 2. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство и пусть x_1, x_2 – два различных листа дерева T_X . Тогда, если $(x_1, v_1, \dots, v_n, x_2)$ – путь, соединяющий листья x_1 и x_2 в T_X , то

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i.$$

Лемма 3. Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство и $Y, Z \subseteq X$. Тогда, если $Y \in B_X$ и $Z \in B_Y$, то $Z \in B_X$.

Доказательство. Выберем $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$ и $r_y, r_z \in [0, \infty)$ так, что $Y = \{x \in X : d(y_1, x) \leq r_y\}$ и $Z = \{y \in Y : d(z_1, y) \leq r_z\}$. Так как в ультраметрическом пространстве любая точка шара является его центром, то

$$Y = \{x \in X : d(z_1, x) \leq r_y\}. \quad (2)$$

Диаметры шаров из $\mathbf{B}_X$ и $\mathbf{B}_Y$ совпадают с их радиусами, значит

$$r_y = \text{diam} Y, \quad r_z = \text{diam} Z, \quad (3)$$

а так как $Z \subseteq Y$, то из (3) следует неравенство

$$r_y \geq r_z. \quad (4)$$

Принадлежность $Z \in \mathbf{B}_X$ равносильна тому, что

$$Z = \{x \in X : d(x, z_1) \leq r_z\}. \quad (5)$$

Включение $Z \subseteq \{x \in X : d(x, z_1) \leq r_z\}$ очевидно, поэтому достаточно доказать обратное включение. Пусть $x_0 \in X$ и $d(z_1, x_0) \leq r_z$. Тогда в силу (4) и (2) имеем $x_0 \in Y$. Отсюда и неравенства $d(z_1, x_0) \leq r_z$ следует, что $x_0 \in Z$. Равенство (5) доказано. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть T – конечное корневое дерево с корнем v_0 . Для каждой вершины $v \in V(T)$ определим подграф T^v следующим образом. Если $v = v_0$, то $T^v := T$. Если $v \neq v_0$, то пусть u – единственная вершина T такая, что v – потомок u . Рассмотрим $G \subseteq T$ с

$$V(G) := V(T) \text{ и } E(G) := E(T) \setminus \{u, v\}.$$

Граф G представляет собой лес, состоящий из двух деревьев. T^v – то из этих деревьев, которое содержит v .

Пусть как в определении 1 T – конечное корневое дерево с корнем v_0 . Обозначим через L_v множество листьев графа T^v . Легко показать, что $L_v \subseteq L$, где L – множество листьев графа T . Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma_T: V(T) \rightarrow 2^L$$

такое, что $\Gamma_T(v) = L_v$ для $v \in V(T)$. Заметим, что если v – лист дерева T , то $\Gamma_T(v) = \{v\}$, где $\{v\}$ – одноточечное множество, состоящее из единственного элемента v .

Исследуем отображение Γ_T в случае когда T является представляющим деревом конечного ультраметрического пространства X .

Лемма 4. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с представляющим деревом T_X , $|X| \geq 2$. Тогда

(i) отображение $\Gamma_{T_X}: V(T_X) \rightarrow 2^X$ является инъективным,

(ii) для любого $v \in V(T_X)$ имеет место принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \mathbf{B}_X$,

(iii) для любого $\tilde{B} \in \mathbf{B}_X$ существует узел $\tilde{v}$ такой, что $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$.

Доказательство. Инъективность Γ_{T_X} и принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \mathbf{B}_X$ следуют из леммы 3, леммы 1 и приведённого выше построения представляющего дерева T_X . Покажем, что для любого $\tilde{B} = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathbf{B}_X$ найдётся узел $\tilde{v} \in V(T_X)$ такой, что $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$. При $k = 1$ это очевидно, поэтому считаем $k \geq 2$. Положим $b := \max\{d(x, y), x, y \in \tilde{B}\}$ и пусть $b = d(x_i, x_j)$. Т.к. $\tilde{B}$ – это шар в ультраметрическом пространстве, то он совпадает с множеством $\{x \in X : d(x, x_i) \leq b\}$. Пусть $(x_i, v_1, \dots, v_n, x_j)$ – путь, соединяющий листья x_i и x_j в T_X . По лемме 2 $b = d(x_i, x_j) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i$. В силу замечания 1, узел $\tilde{v}$, помеченный меткой b , будет узлом наименьшего яруса среди узлов v_i . Рассмотрим корневое поддерево $T_X^{\tilde{v}}$ дерева T_X . Покажем, что множество листьев $L_{\tilde{v}}$ поддерева $T_X^{\tilde{v}}$ совпадает с множеством $\tilde{B}$. Пусть $x \in L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, \dots, v_n, x_i)$. Очевидно, что $d(x, x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i \leq b$. Следовательно, $x \in \tilde{B}$. Обратно, пусть $x \in \tilde{B}$ и предположим, что $x \notin L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, \dots, v_n, x_i)$ в T_X , соединяющий x и x_i . Тогда вершина $\tilde{v}$ является потомком одной из вершин v_i этого пути, что даёт неравенство $b < \bar{v}_i$. Следовательно, $d(x, x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{v}_i > b$, что противоречит принадлежности $x \in \tilde{B}$. $\square$

Корневое дерево с корнем v_0 (см. (1)), получающееся из T_X путём «стирания меток» будем обозначать через $\bar{T}_X$.

Лемма 5. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство, $u, v \in V(\bar{T}_X)$, $u \neq v$. Узел u является потомком узла v тогда и только тогда, когда

$$\Gamma_{\bar{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(v)$$

и импликация

$$(\Gamma_{\bar{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(w) \subseteq \Gamma_{\bar{T}_X}(v)) \Rightarrow (\Gamma_{\bar{T}_X}(u) = \Gamma_{\bar{T}_X}(w)) \vee (\Gamma_{\bar{T}_X}(w) = \Gamma_{\bar{T}_X}(v))$$

выполняется для любого $w \in V(\bar{T}_X)$.

Доказательство этой леммы достаточно просто и мы его опускаем.

Из лемм 4 и 5 выводится

Следствие 1. Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство. Если на $\mathbf{B}_X$ задать частичный порядок, индуцированный из частично упорядоченного множества $(2^X, \subseteq)$, то диаграмма Хассе ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ изоморфна орграфу $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$.

3. Отображение, сохраняющее шары. Сформулируем центральное для этой работы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $F: X \rightarrow Y$ сохраняет шары, если для любых $Z \in \mathbf{B}_X$ и $W \in \mathbf{B}_Y$ выполнены соотношения

$$F(Z) \in \mathbf{B}_Y \text{ и } F^{-1}(W) \in \mathbf{B}_X,$$

где $F(Z)$ – образ множества Z при отображении F и $F^{-1}(W)$ – прообраз множества W при этом отображении.

Отметим, что для любого биективного отображения $F: X \rightarrow Y$ и любых подмножеств X_1, X_2 множества X включение $X_1 \subseteq X_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(X_1) \subseteq F(X_2)$. Следовательно справедлива следующая

Лемма 6. Пусть X, Y – метрические пространства и $F: X \rightarrow Y$ – сохраняющее шары биективное отображение. Тогда для любых $B_1, B_2 \in \mathbf{B}_X$ имеет место эквивалентность

$$(B_1 \subseteq B_2) \Leftrightarrow (F(B_1) \subseteq F(B_2)).$$

Следствие 2. Пусть X, Y – метрические пространства и $F: X \rightarrow Y$ – сохраняющее шары биективное отображение. Тогда отображение

$$(\mathbf{B}_X, \subseteq) \ni B \mapsto F(B) \in (\mathbf{B}_Y, \subseteq)$$

есть изоморфизм ч.у. множеств $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$.

Теорема 2. Пусть X, Y – конечные ультраметрические пространства. $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $\Phi: X \rightarrow Y$.

Доказательство. Теорема тривиальна при $|X| = 1$, поэтому будем считать, что $|X| \geq 2$. Пусть $V_X = V(\bar{T}_X)$ и $V_Y = V(\bar{T}_Y)$ – множества вершин графов $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$ соответственно. Предположим, что существует биективное отображение $\Psi: V_X \rightarrow V_Y$, сохраняющее отношение смежности между вершинами и переводящее корень дерева $\bar{T}_X$ в корень дерева $\bar{T}_Y$. Биекция Ψ отображает множество листьев графа $\bar{T}_X$ – множество X на множество листьев графа $\bar{T}_Y$ – множество Y , так как листья – это в точности вершины степени 1. Обозначим через Φ сужение Ψ на X , $\Phi = \Psi|_X$, и покажем, что биективное отображение $\Phi: X \rightarrow Y$, рассматриваемое как отображение между ультраметрическими пространствами (X, d) и (Y, ρ) , сохраняет шары.

Пусть $B \in \mathbf{B}_X$. Покажем, что

$$\Phi(B) \in \mathbf{B}_Y \quad (6).$$

В силу леммы 4 существует узел v дерева $\bar{T}_X$, для которого B совпадает с множеством листьев L_v графа $\bar{T}_X^v$, где $\bar{T}_X^v$ – поддереву дерева $\bar{T}_X$ задаваемое определением 1. Так как Ψ – изоморфизм, то образом дерева $\bar{T}_X^v$ является какое-то поддерево T' дерева $\bar{T}_Y$. Пусть $u = \Psi(v)$ и $\bar{T}_Y^u$ – поддерево дерева $\bar{T}_Y$, построенное для u в соответствии с определением 1. Так как при изоморфизме Ψ корень дерева $\bar{T}_X$ переходит в корень дерева $\bar{T}_Y$, то используя определение 1, легко установить равенство $T' = \bar{T}_Y^u$. Сужение Ψ на $V(\bar{T}_X^v)$ является изоморфизмом деревьев $\bar{T}_X^v$ и $\bar{T}_Y^u$. При изоморфизме множество листьев переходит в множество листьев. Пусть L_u – множество листьев дерева $\bar{T}_Y^u$. Тогда

$$L_u = \Psi|_{V(\bar{T}_X^v)}(L_v) = \Psi(L_v). \quad (7)$$

Так как $L_v \subseteq X$, а $\Phi = \Psi|_X$, то из (7) получаем

$$L_u = \Phi(L_v) = \Phi(B). \quad (8)$$

По лемме 4 имеем $L_u \in \mathbf{B}_Y$. Отсюда и из (8) следует (6). Аналогично устанавливается, что

$$\Phi^{-1}(Z) \in \mathbf{B}_X$$

для любого $Z \in \mathbf{B}_Y$. Таким образом, из того, что $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья следует, что Φ – сохраняющая шары биекция.

Пусть теперь $\Phi: X \rightarrow Y$ сохраняющая шары биекция. Нужно доказать, что $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья. Пусть (Y, A_Y) , (X, A_X) – диаграммы Хассе ч.у. множеств $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$, $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и пусть $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$, $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ – орграфы, соответствующие $\bar{T}_Y$, $\bar{T}_X$. В соответствии со следствием 1 (X, A_X) и $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ изоморфны как ориентированные графы, аналогично, орграфы (Y, A_Y) и $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$ тоже изоморфны. Используя утверждение 1 и следствие 2, убеждаемся в изоморфизме орграфов (Y, A_Y) и (X, A_X) . Следовательно, орграфы $(V(\bar{T}_X), A_{\bar{T}_X})$ и $(V(\bar{T}_Y), A_{\bar{T}_Y})$ тоже изоморфны. Последнее по утверждению 2 равносильно изоморфности корневых деревьев $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$. $\square$

Рассуждения, аналогичные проведённым во второй части доказательства теоремы 2, показывают, что $\bar{T}_X$ и $\bar{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда изоморфны ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$. Таким образом, имеет место

Следствие 3. Пусть X и Y – конечные ультраметрические пространства. Ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $\Phi: X \rightarrow Y$.

1. Lemin A.J. On Gelfand's Problem concerning graphs, lattices, and ultrametric spaces. Workshop on General Algebra, Johannes Kepler University Linz, Department of Algebra, Stochastics, and Knowledge Based Mathematical Systems, Linz, Austria, June 14-17, 2001.
2. Lemin A.J. The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like, and real graduated lattices LAT* // Algebra Universalis. – 2003. – V. 50 (1). – P. 35–49.
3. Gurvich V., Vyalyi M. Characterizing (quasi-)ultrametric finite spaces in terms of (directed) graphs // Discrete Appl. Math. – 2012. – V. 160 (12). – P. 1742–1756.
4. Protasov I., Banakh T. Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups. – VNTL Publishers, Math. Stud. Monogr. Ser, Lviv, 2003. – V. 11. – 147 pp.
5. Protasov I., Zarichnyi M. General asymptology. – VNTL Publishers, Math. Stud. Monogr. Ser, Lviv, 2007. – V. 12. – 219 pp.
6. Петров Е.А., Довгошей А.А. О неравенстве Гомори-Ху // <http://arxiv.org/abs/1211.2389>.
7. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П. Общая алгебра. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
8. Dordovskyi D., Dovgoshey O., Petrov E. Diameter and diametrical pairs of points in ultrametric spaces // P-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2011. – V. 3 (4). – P. 253–262.

E. Petrov

Ball-preserving mappings of finite ultrametric spaces.

It is shown that the rooted trees T_X and T_Y representing finite ultrametric spaces X and Y are isomorphic if and only if there exists a ball-preserving bijection $F: X \rightarrow Y$.

Keywords: finite ultrametric space, finite rooted tree, ball-preserving mapping, ballean.

Є. О. Петров

Відображення, що зберігають кулі, скінченних ультраметричних просторів.

Показано, що кореневі дерева T_X і T_Y , які представляють скінченні ультраметричні простори X і Y є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли існує бієкція $F: X \rightarrow Y$, що зберігає кулі.

Ключові слова: скінченний ультраметричний простір, скінченне кореневе дерево, відображення, що зберігає кулі, болеан.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
eugeny.petrov@gmail.com

Получено 01.03.13

УДК 517.51+519.21

©2013. М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко

РОЗПОДІЛИ ЙМОВІРНОСТЕЙ НА ГРАФІКАХ ОДНОГО КЛАСУ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Будується нескінченно-параметрична сім'я неперервних ніде не монотонних і, в загальнішому, недиференційовних функцій, які є узагальненням класичної ніде не диференційовної функції Серпінського. Вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) та тополого-метричні властивості розподілу значень функції з побудованою сім'єю, а також двовимірних випадкових величин з носіями на їх графіках.

Ключові слова: неперервна ніде не диференційовна функція, ніде не монотонна функція, множина рівнів функції, Q^* -представлення (зображення) дійсних чисел, лебегівська структура розподілу, дискретність розподілу, сингулярність розподілу.

Вступ. Неперервні ніде не диференційовні функції в останній час все частіше зустрічаються у різних теоретичних та прикладних дослідженнях, різноманітних застосуваннях як в математиці, так і за її межами. Їх графіки природним чином виникають в теорії динамічних систем в якості аттракторів, а в теорії ймовірнісних мір – в якості носіїв міри. Взагалі кажучи, графіки, володіючи фрактальними властивостями в цілому, цікаві для теорії фракталів як однозв'язні самоафінні або "квазісамоафінні" множини простору R_2 . Іншим аспектом їх нетривіальних локальних метричних властивостей є нуль-мірність або додатність міри Лебега множин рівнів. Розподіли ймовірностей, зосереджені на графіках недиференційовних функцій, мають ряд своїх непростих тополого-метричних властивостей, для дослідження яких можуть бути використані засоби теорії міри і розмірностей дробових порядків (типу Хаусдорфа та Хаусдорфа-Безиковича тощо). У даній роботі ми, використовуючи Q^* -зображення дійсних чисел [3], будемо нескінченнопараметричну сім'ю функцій, що є узагальненням відомої недиференційовної функції Серпінського [1], [9] і моделюємо випадкові елементи простору R_2 з носіями на графіках цих функцій. Для останніх ми вивчаємо лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) відносно двовимірної міри Лебега, а також тополого-метричні і фрактальні властивості спектра розподілу (мінімального замкненого носія).

1. Q^* -зображення (представлення) дійсних чисел. Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -кової системи числення, $Q^* = \{q_{ij}\}$ – матриця з властивостями

$$q_{ij} > 0, \quad q_{0j} + q_{1j} + \dots + q_{[s-1]j} = 1, \quad \prod_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, \dots, q_{[s-1]j}\} = 0,$$

$$\beta_{0j} = 0, \quad \beta_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{kj}, \quad i \in A_s \setminus \{0\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. [3] Для довільного $x \in [0, 1]$ існує послідовність (α_k) така, що:

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q^*}, \quad \alpha_k \in A_s. \quad (1)$$

Подання числа x у вигляді (1) називають його Q^* -представленням, а його символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q^*}$ називають Q^* -зображенням. При цьому α_j називається j -им Q^* -символом (знаком) зображення (1) даного числа x . Якщо Q^* -зображення є періодичним, то його період записуватимемо у круглих дужках.

Взагалі кажучи, поняття j -го Q^* -символом числа x не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q^* -зображення. Це числа виду

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k (0)}^{Q^*} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k - 1] (s-1)}^{Q^*}.$$

Їх називають Q^* -раціональними. Всі інші числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q^* -зображення і їх називають Q^* -ірраціональними. Для подальших міркувань важливим є поняття циліндра. Нагадаємо його означення.

Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ – фіксований набір символів з алфавіту A_s . Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називають множину чисел $x \in [0, 1]$, які мають Q^* -зображення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots}^{Q^*}$ таке, що $\alpha_j(x) = c_j$, $j = \overline{1, m}$.

Лема 1.[3] Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q^*}$ є відрізком з кінцями

$$a = \beta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^m (\beta_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}), \quad b = a + \prod_{i=1}^m q_{c_i i}.$$

Лема 2.[3] Циліндри мають наступні властивості: 1) $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q^*} = \bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta_{c_1 \dots c_m i}^{Q^*}$;

2) $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q^*}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i i}$; 3) $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q^*} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [i+1]}^{Q^*}$, $i = \overline{0, s-2}$;

4) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q^*} = x \equiv \Delta_{c_1 \dots c_m \dots}^{Q^*}$ – точка (число).

Якщо для всіх $i \in A_s$ і $j \in \mathbb{N}$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q^* -зображення називається Q -зображенням, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$, то Q -зображення є звичайним s -ковим зображенням.

Q^* -зображення дійсних чисел допомагає формально просто задавати широкі класи множин, функцій, ймовірнісних мір зі складними локальними властивостями. Воно є зручним апаратом для задання та дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

2. Функція $y = f(x)$ та її неперервність. Нехай $A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Q_5^* і Q_3^* – задані два Q^* -зображення, причому матрицю, яка визначає останнє зображення позначимо через $G_3^* = \|g_{ij}\|$.

Визначимо на A_5 дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha \in A_5 \setminus \{0, 4\}, \\ 2, & \text{якщо } \alpha = 4. \end{cases} \quad (2)$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_5^\infty = A_5 \times A_5 \times \dots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_{k-1} \in A_5 \setminus \{2\}, \\ 1 - c_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_{k-1} = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Розглянемо на $[0, 1]$ функцію, аргумент якої подається у формі Q_5^* -розкладу

$$x = \varphi_{\alpha_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\varphi_{\alpha_i i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_5^*}, \quad (4)$$

де $\alpha_k \in A_5$, $Q_5^* = \|q_{ij}\|$, $\varphi_{0j} = 0$, $\varphi_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in A_5$, $j \in \mathbb{N}$, а значення функції має форму G_3^* -розкладу

$$f(x) = \psi_{\beta_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\psi_{\beta_i i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j j} \right) \equiv \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^{G_3^*}, \quad (5)$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, $G_3^* = \|g_{ik}\|$, $\psi_{0j} = 0$, $\psi_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} g_{kj}$, $i \in A_3$, $j \in \mathbb{N}$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \quad \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Формулам (6), можна надати інший (еквівалентний) вигляд

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \begin{cases} \alpha_k = 0 \text{ і } c_k = 0, \\ \alpha_k = 4 \text{ і } c_k = 1, \end{cases} \\ 1, & \text{якщо } \alpha_k \in \{1, 2, 3\}, \\ 2, & \text{якщо } \begin{cases} \alpha_k = 0 \text{ і } c_k = 1, \\ \alpha_k = 4 \text{ і } c_k = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Легко бачити, що β_k , взагалі кажучи, залежить від цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$, але може залежити лише від α_k , якщо всі $\alpha_i \in \{1, 2, 3\}$, $i = 1, k-1$.

Очевидно, що функція f означена коректно в Q_5^* -іраціональній точці. Покажемо, що вона означена коректно і в Q_5^* -раціональній точці. Для цього розглянемо два різних Q_5^* -зображення Q_5^* -раціонального значення аргумента x

$$x \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^{Q_5^*} (0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k - 1]}^{Q_5^*} (4) \equiv x^*.$$

Тоді $f(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_{k+n} \dots}^{G_3^*}$, $f(x^*) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k^* \beta_{k+1}^* \dots \beta_{k+n}^* \dots}^{G_3^*}$. Таким чином,

$$f(x) - f(x^*) = \prod_{i=1}^{k-1} g_{\beta_i i} (\psi_{\beta_k k} - \psi_{\beta_k^* k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} (\psi_{\beta_n n} \prod_{j=k}^{n-1} g_{\beta_j j}) - \sum_{n=k+1}^{\infty} (\psi_{\beta_n^* n} \prod_{j=k}^{n-1} g_{\beta_j^* j})).$$

Очевидно, що $c_i(x) \equiv c_i(x^*)$ для $i \leq k$. Для $i > k$ розглянемо можливі випадки

1) якщо $c_{k+1}(x) = c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) \in A_5 \setminus \{2\}$, і при $c_k = 0$, маємо

$$f(x) - f(x^*) = \prod_{i=1}^{k-1} g_{\beta_i i} (\psi_{\beta_k k} - \psi_{\beta_k^* k} - g_{\beta_k k} \sum_{n=k+1}^{\infty} (\psi_{2n} \prod_{j=k+1}^{n-1} g_{2j})) = 0,$$

Аналогічно можна показати, що $f(x) - f(x^*) = 0$ при $c_k = 1$.

2) якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) = 2$ або $\alpha_k(x^*) = 2$. Звідки, використовуючи формулу (7), маємо $\beta_n = \beta_n^*$ для всіх $n = k, k+1, k+2, \dots$. Тому $f(x) - f(x^*) = 0$. Аналогічні міркування можна провести для випадка, коли $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$.

Отже, коректність означення функції в Q_5^* -раціональній точці обґрунтовано.

Лема 3. Функція f є неперервною в кожній точці відрізка $[0, 1]$.

Доведення. Для доведення неперервності функції f в довільній точці x_0 відрізка $[0, 1]$, досить показати, що $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Спочатку розглянемо випадок, коли $x_0 - Q_5^*$ -іраціональна точка. Тоді для довільного $x \in [0, 1]$ існує $m = m(x)$ таке, що $\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$, $j = \overline{1, m-1}$ і $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$, причому умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна умові $m \rightarrow \infty$. Тоді,

$$f(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1} \beta_m \dots \beta_{m+k} \dots}^{G_3^*}, \quad f(x_0) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1} \beta'_m \dots \beta'_{m+k} \dots}^{G_3^*}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{i=m}^{\infty} (\psi_{\beta_i i} \prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j j}) - \sum_{i=m}^{\infty} (\psi_{\beta'_i i} \prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta'_j j}) \right| \leq \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i i} \cdot \sum_{i=m}^{\infty} (\psi_{2i} \prod_{j=m}^{i-1} g_{2j}) = \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i i} \leq \prod_{i=1}^{m-1} \max \{g_{0i}, g_{1i}, g_{2i}\} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, функція f є неперервною в кожній Q_5^* -іраціональній точці.

Для доведення неперервності функції f в Q_5^* -раціональній точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}^{Q_5^*} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_k-1](4)}^{Q_5^*}$, досить довести окремо неперервність її зліва і справа у цій точці. Для цього, достатньо повторити попередні міркування, але для доведення першого використати Q_5^* -зображення точки x_0 з періодом (4), а другого – з періодом (0). $\square$

3. Ніде не монотонність функції f та її диференціальні властивості.

Означення 1. Приростом функції f на циліндрі $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*}$, який будемо позначати $\mu_f(\cdot)$, називається різниця $f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(4)}^{Q_5^*}) - f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(0)}^{Q_5^*}) \equiv \mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*})$.

Означення 2. Неперервна функція називається *ніде не монотонною*, якщо вона не має жодного, як завгодно малого, проміжку монотонності.

Лема 4. Функція f є ніде не монотонною на $[0, 1]$.

Доведення. Для доведення ніде не монотонності функції f достатньо показати, що для довільного циліндра $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*}$ знайдеться циліндр $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m j}^{Q_5^*}$ такий, що прирости $\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*})$ і $\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m j}^{Q_5^*})$ набувають різних знаків.

Можливі випадки: 1) $c_m = 0$, 2) $c_m = 1$.

1) Якщо $c_m = 0$, то

$$\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m(2)}^{G_3^*} - \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m(0)}^{G_3^*} = \prod_{i=1}^m g_{\beta_i i},$$

$$\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 2}^{Q_5^*}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m 1(0)}^{G_3^*} - \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m 1(2)}^{G_3^*} = - \prod_{i=1}^{m+1} g_{\beta_i i}.$$

2) Якщо $c_m = 1$, то

$$\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_5^*}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m(0)}^{G_3^*} - \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m(2)}^{G_3^*} = - \prod_{i=1}^m g_{\beta_i i},$$

$$\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 2}^{Q_5^*}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m 1(2)}^{G_3^*} - \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m 1(0)}^{G_3^*} = \prod_{i=1}^{m+1} g_{\beta_i i}. \square$$

Множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$.

Лема 5. Якщо $y_0 = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_m(1)}^{G_3^*}$ ($m \in \mathbb{N}_0$), то для множини рівня y_0 має місце рівність: $f^{-1}(y_0) = C[Q_5^*, V] \equiv \{x : \alpha_i(x) \in V = A_5 \setminus \{0, 4\}, i \in \mathbb{N}\}$, отже, вона має властивості [5]: 1) є континуальною; 2) ніде не щільною множиною; 3) міра Лебега якої обчислюється за формулою: $\lambda(C[Q^*, V]) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - W_j)$,

де $W_j = q_{0j} + q_{4j}$.

Доведення. Спочатку доведемо твердження для $m = 0$, тобто для $y_0 = \Delta_{(1)}^{Q_5^*}$.

Очевидно, що для довільної точки $x \in C[Q_5^*, V]$ має місце рівність $f(x) = y_0$, тобто $f^{-1}(y_0) \supset C[Q_5^*, V]$. Більше того, $\beta_n(y_0) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n(f^{-1}(y_0)) \in V$, незалежно від n . Отже, $f^{-1}(y_0) = C[Q_5^*, V]$.

Нехай тепер $m \neq 0$, тобто $y_0 = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_m(1)}^{G_3^*}$. Тоді

$$H = \cup_{i_1=0}^4 \cup_{i_2=0}^4 \dots \cup_{i_m=0}^4 \left[\Delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{Q_5^*} \cap f^{-1}(y_0) \right]. \quad (8)$$

Довільне x , яке належить множині $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{Q_5^*} \cap f^{-1}(y_0)$, у випадку, коли вона непо-

рожня, має вигляд $x = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots}^{Q_5^*}$, $\alpha_{m+j} \in V$ ($j \in \mathbb{N}$).

Множина $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{Q_5^*} \cap f^{-1}(y_0)$ може бути порожньою або непорожньою, причому непорожньою, якщо існує впорядкований набір $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ такий, що

$$\beta_1 = \beta_1(i_1) = d_1, \beta_2 = \beta_2(i_1, i_2) = d_2, \dots, \beta_m = \beta_m(i_1, i_2, \dots, i_m) = d_m.$$

В цьому випадку множина $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_m}^{Q_5^*} \cap f^{-1}(y_0) \in \prod_{j=1}^m q_{i_j j}$ разів зменшеною "копією"

множини $f^{-1}(\Delta_{(1)}^{Q_5^*})$, оскільки має місце $f^{-1}(\Delta_{(1)}^{Q_5^*}) \stackrel{\prod_{j=1}^m q_{i_j j}}{\sim} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{Q_5^*} \cap f^{-1}(y_0)$.

Тоді $f^{-1}(y_0) = C[Q_5^*, V_k]$, де $V_k = \{i_k\}$ ($k = \overline{1, m}$), $V_{m+j} = V$.

Оскільки мінімальні відрізки, які містять множини, що входять до об'єднання (8), попарно не перекриваються, то $f^{-1}(y_0)$ має вказані в лемі властивості.

А, як відомо [5], $C[Q_5^*, V]$ має зазначені в лемі властивості. $\square$

Лема 6. Якщо в G_3^* -зображенні точки $y_0 = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}^{G_3^*}$

1) всі цифри $i_k \in A_3 \setminus \{1\}$ ($k = \overline{1, \infty}$), то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку;

2) міститься рівно n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.

3) міститься нескінченна кількість цифр "1", тобто для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\beta_{i_n}(y_0) = 1 \text{ і } \beta_j(y_0) \neq 1 \text{ при } j \notin \{i_n\}, \quad (9)$$

то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, причому в ній не існує пари точок x_1 і x_2 таких, що

$$\alpha_{i_n}(x_1) = \alpha'_{i_n}(x_2) \text{ і } \alpha_j(x_1) \neq \alpha'_j(x_2) \text{ при } j \notin \{i_n\}. \quad (10)$$

Доведення. Для доведення першого твердження скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що множина $f^{-1}(y_0)$ містить принаймні дві різні точки $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_5^*} \neq \Delta_{\alpha_1^* \alpha_2^* \dots \alpha_k^* \dots}^{Q_5^*} = x^*$. Тоді, існує таке m , що $\alpha_m \neq \alpha_m^*$, але $\alpha_i = \alpha_i^*$ (для $i < m$).

З того, що $\alpha_i = \alpha_i^*$ (для $i < m$) випливає, що $\beta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) = \beta(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{m-1}^*)$. Оскільки $\beta_m(f(x)) = i_m(y_0) = \beta_m(f(x^*))$ і при цьому $\alpha_m(x) \neq \alpha_m^*(x^*)$, то з (7) випливає $N_2(x, m-1) \neq N_2(x^*, m-1)$ або $i_m(y_0) = 1$.

З умови $N_2(x, m-1) \neq N_2(x^*, m-1)$ слідує, що $\exists \alpha_j$ ($j < m$): $\alpha_j \neq \alpha_j^*$, а це суперечить припущенню. А умова $i_m(y_0) = 1$ суперечить умові леми. Отримали протиріччя, що і доводить твердження.

Твердження 2) є очевидним, оскільки з формул (7) випливає, що на кожному з місць, де $\beta_j(y_0) = 1$ можливі 3 альтернативи, а всі решта цифр залишаються фіксованими.

Для доведення твердження 3) припустимо, що для точки $y_0 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^{G_3^*}$ мають місце формули (9)-(10) і при цьому $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2\}$, де $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_5^*}$, $x_2 =$

$\Delta_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_k}^{Q_5^*}$, для яких $f(x_1) = y_0$ і $f(x_2) = y_0$. Тоді $\exists k \in \mathbb{N} : \alpha_i(x_1) = \alpha'_i(x_2)$ для $i = 1, k-1$, а для $i = k$ виконується $\alpha_k(x_1) \neq \alpha'_k(x_2)$. Тоді з формул (7) і (9) випливає, що $\alpha_k, \alpha'_k \in \{0, 4\}$, а отже $\beta_k(f(x)) \neq \beta_k(f(x'))$, тобто $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$. А це суперечить умові леми. Отримали протиріччя, що і доводить твердження. $\square$

Теорема 2. Функція f , за умов коли для елементів стохастичних матриць $\|q_{ji}\|$ і $\|g_{ki}\|$ попарно виконується: а) $g_{0i} \geq q_{0i}$, $g_{0i} \geq q_{4i}$ і б) $g_{2i} \geq q_{4i}$, $g_{2i} \geq q_{0i}$ ($i = k+1, k+2, \dots$), не має ні скінченної ні нескінченної похідної в жодній Q_5^* -раціональній точці.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^{Q_5^*}(0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k-1]}^{Q_5^*}(4) = x'_0$ — довільна Q_5^* -раціональна точка. Розглянемо дві послідовності

$$x_m = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^{Q_5^*}(\underbrace{0 \dots 0}_m(4)), \quad x'_m = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k-1]}^{Q_5^*}(\underbrace{4 \dots 4}_m(0)),$$

тобто $x_m \rightarrow x_0 + 0$, $x'_m \rightarrow x'_0 - 0$. Тоді

$$x_m - x_0 = \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \right) \cdot q_{\alpha_k k} \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{k+m} q_{0i} \right), \quad x'_m - x'_0 = - \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \right) \cdot q_{[\alpha_k-1]k} \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{k+m} q_{4i} \right).$$

Якщо похідна функції f в точці x_0 існує, то

$$f'(x_0) = \lim_{x_m \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \lim_{x'_m \rightarrow x'_0 - 0} \frac{f(x'_m) - f(x'_0)}{x'_m - x'_0}, \quad \text{де}$$

$$f(x_m) - f(x_0) = \mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_5^*}(\underbrace{0 \dots 0}_m)), \quad f(x'_m) - f(x'_0) = -\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_k-1]}^{Q_5^*}(\underbrace{4 \dots 4}_m)).$$

Тому

$$\lim_{x_m \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \frac{g_{\beta_k k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \prod_{j=k+1}^{k+m} \frac{g_{0j}}{q_{0j}} & \text{при } N_2(x_0, k) = 2n, \\ - \prod_{i=1}^{k-1} \frac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \frac{g_{\beta_k k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \prod_{j=k+1}^{k+m} \frac{g_{2j}}{q_{0j}} & \text{при } N_2(x_0, k) = 2n - 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x'_m \rightarrow x'_0 - 0} \frac{f(x'_m) - f(x'_0)}{x'_m - x'_0} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \frac{g_{\beta'_k k}}{q_{[\alpha_k-1]k}} \cdot \prod_{j=k+1}^{k+m} \frac{g_{2j}}{q_{4j}} & \text{при } N_2(x'_0, k) = 2n, \\ - \prod_{i=1}^{k-1} \frac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \frac{g_{\beta'_k k}}{q_{[\alpha_k-1]k}} \cdot \prod_{j=k+1}^{k+m} \frac{g_{0j}}{q_{4j}} & \text{при } N_2(x'_0, k) = 2n - 1, \end{cases}$$

де $\beta'_k = \beta_k$, якщо $\alpha_k \in \{2, 3\}$, $\beta'_k = |1 - \beta_k|$, якщо $\alpha_k \in A_5 \setminus \{2, 3\}$. Тому за умов коли для всіх номерів $i = k+1, k+2, \dots$ елементів стохастичних матриць $\|g_{ji}\|$ і $\|g_{ki}\|$

попарно виконується а) $g_{0i} \geq q_{0i}$, $g_{0i} \geq q_{4i}$ і б) $g_{2i} \geq q_{4i}$, $g_{2i} \geq q_{0i}$, похідна функції f в точці x_0 не існує. $\square$

Теорема 3. Якщо Q_5^* -зображення є Q_5 -зображенням, а G_3^* -зображення є G_3 -зображенням, то функція f , за умов коли $\max_i \{q_i\} \leq \max_j \{g_j\}$, де $i \in A_5$, $j \in A_3$, є нідиференційовною.

Доведення. Недиференційовність функції f в Q_5 -раціональній точці x_0 впливає з теореми 2. Нехай тепер x_0 - довільне Q_5 -іраціональне число. Тоді існує нескінченна послідовність (m_k) місць цифр числа x_0 , для яких $\alpha_{m_k}(x_0) \neq 2$. Розглянемо послідовність (x_k) таку, що $\alpha_i(x_k) = \alpha_i(x_0)$ при $i < m_k$, а при $i = m_k$,

$$\alpha_{m_k}(x_k) = \left| \alpha_{m_k}(x_0) - (-1)^{\left\lfloor \frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2} \right\rfloor} \right|, \text{ де } \left\lfloor \frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2} \right\rfloor - \text{ціла частина від } \frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2}.$$

Очевидно, що $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді

$$x_0 - x_k = \prod_{i=1}^{m_k-1} q_{\alpha_i} \left(\varphi_{\alpha_{m_k}(x_0)} - \varphi_{\alpha_{m_k}(x_k)} \right) = \pm \prod_{i=1}^{m_k} q_{\alpha_i},$$

$$f(x_0) - f(x_k) = \prod_{i=1}^{m_k-1} g_{\beta_i} \left(\psi_{\beta_{m_k}(f(x_0))} - \psi_{\beta_{m_k}(f(x_k))} \right) = \pm \prod_{i=1}^{m_k} g_{\beta_i}.$$

А отже, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0) - f(x_k)}{x_0 - x_k}$, коли $\max_i \{q_i\} \leq \max_j \{g_j\}$ ($i \in A_5$, $j \in A_3$) або не існує, або дорівнює $\pm \infty$. $\square$

4. Розподіл ймовірностей на графіку функції. Нагадаємо, що *точковим спектром* розподілу випадкового елемента $\xi \in R_n$ називається множина $D_\xi = \{u : \mu_\xi(\{u\}) > 0, u \in R_n\}$, де μ_ξ - ймовірнісна міра, що відповідає розподілу ξ , а *спектром* розподілу ξ називається мінімальний замкнений носій міри μ_ξ , тобто множина $S_\xi = \{u : \mu_\xi(O_\epsilon(u)) > 0 \forall \epsilon > 0\}$, де $O_\epsilon(u)$ - відкрита куля в R_n радіуса ϵ з центром в точці u .

Якщо існує скінченна або зліченна множина E така, що $\mu_\xi(E) = 1$, то розподіл ξ називається *чисто дискретним*, якщо ж $\mu_\xi(\{u\}) = 0$ для довільного $u \in R_n$, то - *неперервним*. Якщо $0 < \mu_\xi(D_\xi) < 1$, то розподіл ξ називається *сумішшю* дискретного і неперервного. Міра μ називається *абсолютно неперервною* відносно міри ν (позначається $\mu \ll \nu$), якщо $\mu(E) = 0$ для всіх E , для яких $\nu(E) = 0$. Міри ν і μ називаються *взаємно ортогональними* (позначається: $\mu \perp \nu$), якщо існує борелівська множина $A \in R_n$ така, що $\mu(A) = 0$ і $\nu(X \setminus A) = 0$. Міра μ називається *сингулярною* відносно ν , якщо вона ортогональна мірі Лебега.

Розглядається випадкова величина $X = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots}^{Q_5^*}$ з незалежними символами η_k свого Q_5^* -зображення, де $P\{\eta_k = i\} = p_{ik}$, $i \in A_5$, $k \in \mathbb{N}$.

Властивості розподілу випадкової величини X вивчалися в роботах [5] та ін., де було доведено, що розподіл X має чистий лебегівський тип, а саме: є чисто дискретним, чисто абсолютно неперервним або чисто сингулярно неперервним.

Далі нас цікавитимуть розподіли:

1) двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$,

2) випадкової величини $Y = f(X)$, де f – функція з попередніх пунктів.

Лема 7. Двовимірною випадковою величиною $Z = (X, Y)$ матиме чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли $d = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0$, причому у випадку дискретності її точковий спектр D_Z складається з точки $M_0(x_0, f(x_0))$, де $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{Q_5^*}$, $p_{c_i i} = \max\{p_{0i}, p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i}\}$, $i = \overline{1, n}$, і всіх точок x таких, що $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n c_{n+1} c_{n+2} \dots}^{Q_5^*}$, де $p_{\alpha_j j} > 0$, $j \in \mathbb{N}$, а у випадку, коли серед елементів матриці $\|p_{ik}\|$ нулів немає, спектр S_Z співпадає з графіком Γ_f функції f .

Доведення. Зрозуміло, що розподіл Z буде чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли чисто дискретним буде розподіл X .

Розглядаючи відрізок $[0, 1]$ як модифікований [6], а саме з роздвоєними Q_5^* -раціональними точками, зауважимо, що $P\{X = \Delta_{c_1 \dots c_m [i-1](4)}^{Q_5^*}\} = 0$ або

$P\{X = \Delta_{c_1 \dots c_m i(0)}^{Q_5^*}\} = 0$ для довільного $x = \Delta_{c_1 \dots c_m [i-1](4)}^{Q_5^*} = \Delta_{c_1 \dots c_m i(0)}^{Q_5^*}$, $i \in A_5 \setminus \{0\}$.

Якщо розподіл X є дискретним, то існує $x' \in [0, 1]$ таке, що $P\{X = x'\} > 0$ і тоді $d \equiv P\{X = x_0\} \geq P\{X = x'\} > 0$.

Нехай тепер $d > 0$, тобто $P\{X = x_0\} > 0$. Означимо множини рівностями:

$$H_n = \left\{ x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n c_{n+1} c_{n+2} \dots}^{Q_5^*}, \text{ де } p_{\alpha_i i} > 0 \right\}, \quad H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Тоді $\{x_0\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \dots$ і

$$\begin{aligned} P\{X \in H_n\} &= \sum_{\alpha_1=0}^4 \dots \sum_{\alpha_n=0}^4 \left(\prod_{j=1}^n p_{\alpha_j j} \right) \left(\prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j} \right) = \\ &= \prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j} \sum_{\alpha_1=0}^4 \dots \sum_{\alpha_n=0}^4 \left(\prod_{j=1}^n p_{\alpha_j j} \right) = \prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j} = \frac{d}{\prod_{j=1}^n p_{c_j j}}. \end{aligned}$$

Оскільки ж $P\{X \in H_n\} = d \cdot \left(\prod_{j=1}^n p_{c_j j} \right)^{-1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), то $P\{X \in H\} = 1$. Отже,

$D_X = H$ і розподіл X , а отже, і Z є чисто дискретним. $\square$

Теорема 4. 1) Двовимірною випадковою величиною Z має чистий розподіл, причому Z має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли розподіл X є дискретним, причому його точковий спектр D_Z співпадає з множиною $\{M(x, f(x)) : x \in D_X\}$;

2) якщо Z має неперервний розподіл, то йому відповідна ймовірнісна міра є ортогональною двовимірній мірі Лебега, тобто існує множина E така, що $\lambda_2(E) = 0$ і $\mu_Z(E) = 1$;

3) спектр розподілу випадкової величини Z є:

– зв'язною множиною (співпадає з графіком функції f), якщо матриця $\|p_{ij}\|$ не містить нулів;

- кусково-зв’язною, якщо в матриці $\|p_{ij}\|$ елементи $p_{ik} > 0$ для $k > k_0, j \in \mathbb{N}$;
- зовсім незв’язною, якщо в матриці $\|p_{ij}\|$ міститься нескінченна кількість нулів.

Доведення. Твердження 1) є очевидним.

2) Оскільки спектр розподілу Z належить графіку Γ_f функції f , а $\lambda_2(\Gamma_f) = 0$ і $\mu_Z(\Gamma_f) = 1$, то розподіл Z є сингулярним відносно λ_2 (ортогональним λ_2).

3) Топологічні властивості спектра S_Z визначаються властивостями спектра S_X і впливають з леми 7. $\square$

Лема 8. *Спектр розподілу випадкової величини Z :*

- 1) співпадає з графіком Γ_f функції f , якщо матриця $\|p_{ik}\|$ не містить нулів;
- 2) є об’єднанням скінченної кількості зв’язних частин графіка, якщо матриця $\|p_{ij}\|$ містить скінченну кількість нулів;
- 3) є ніде не щільною множиною на графіку, якщо матриця $\|p_{ij}\|$ містить нескінченну кількість нулів.

Доведення. Якщо матриця $\|p_{ij}\|$ не містить нулів, то спектр розподілу випадкової величини X співпадає з відрізком $[0, 1]$, а отже, спектр S_Z розподілу випадкової величини Z співпадає з графіком Γ_f функції f із-за неперервності функції $y = f(x)$.

Якщо матриця $\|p_{ij}\|$ містить скінченну кількість нулів, причому m – номер останнього стовпця, в якому міститься нуль, то циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_5^*} \subset S_X$ при $p_{c_i i} > 0$ і більше того, $S_X = \bigcup_{c_i: p_{c_i i} > 0} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_5^*}$. Тоді $S_Z = \bigcup_{X \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_5^*}, Y=f(X)} (X, Y)$. $\square$

Теорема 5. *У випадку неперервності випадкової величини $\zeta = f(\xi)$ її розподіл*

- 1) є сингулярним розподілом канторівського типу, причому спектр співпадатиме з графіком функції, якщо матриця p_{ij} не міститиме нулів;
- 2) буде об’єднанням скінченної кількості зв’язних частин, якщо матриця p_{ij} міститиме скінченну кількість нулів;
- 3) ніде не щільною множиною на графіку.

Доведення. Оскільки спектр є підмножиною графіка функції, двовимірною мірою Лебега рівна нулю, то розподіл є сингулярним розподілом канторівського типу.

Якщо матриця не містить нулів, то спектр розподілу випадкової величини ξ співпадає з відрізком $[0, 1]$, а отже спектр S_ζ співпадає з Γ_f із-за неперервності $y = f(x)$. Якщо матриця p_{ij} містить скінченну кількість нулів, причому m – номер останнього стовпця, в якому міститься нуль, то на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_5^*}$ такі, що $p_{c_i i} > 0$ повністю належить випадковій величині ζ , тобто $S_\zeta = \bigcup_{c_i: p_{c_i i} > 0} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_5^*}$. Тоді $S_\zeta = \bigcup_{c_i: p_{c_i i} > 0} f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_5^*})$. $\square$

5. Розподіли значення функції $Y = f(X)$. У цьому пункті ми лише фрагментарно зупинимося на розподілі випадкової величини Y , детальному вивченню властивостей якої буде присвячена інша робота.

Дослідимо структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, де f – функція з попередніх пунктів.

Лема 9. *Якщо $p_{2k} = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то G_3^* -символи τ_k випадкової величини*

$Y = f(X) = \Delta_{\tau_1 \dots \tau_k \dots}^{G_3^*}$ є незалежними, причому
 $P\{\tau_k = 0\} = p_{0k}$, $P\{\tau_k = 2\} = p_{4k}$, $P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}$.

Доведення. Оскільки $p_{2k} = 0$, то носієм розподілу випадкової величини X є множина $C[Q_5^*, V]$, де $V = \{0, 1, 3, 4\}$. G_3^* -символ β_k числа $y = f(x)$, коли $\alpha_k \in V$ залежить лише від Q_5^* -символа α_k числа x , і тому $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$. Оскільки,

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 = 0\} &= P\{\eta_1 = 0\} = p_{01}, \quad P\{\tau_1 = 2\} = P\{\eta_1 = 4\} = p_{41}, \\ P\{\tau_1 = 1\} &= P\{\eta_1 = 1 \vee \eta_1 = 3\} = P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\} = p_{11} + p_{31}. \end{aligned}$$

Нехай $i \in \{0, 2\}$, $j \in \{0, 1\}$, тоді

$$P\{\tau_1 = 0 \wedge \tau_2 = 2j\} = P\{\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 2i\} = P\{\eta_1 = 0\} \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = p_{01}p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_1 = 2 \wedge \tau_2 = 2j\} = P\{\eta_1 = 4 \wedge \eta_2 = 2i\} = P\{\eta_1 = 4\} \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = p_{41}p_{[2i]2},$$

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 = 2j \wedge \tau_2 = 1\} &= P\{\eta_1 = 2i \wedge \eta_2 \in \{1, 3\}\} = P\{\eta_1 = 2i\} \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + \\ &+ P\{\eta_2 = 3\}) = p_{[2i]1} \cdot (p_{12} + p_{32}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 2j\} &= P\{\eta_1 \in \{1, 3\} \wedge \eta_2 = 2i\} = (P\{\eta_1 = 1\} + \\ &+ P\{\eta_1 = 3\}) \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = (p_{11} + p_{31})p_{[2i]2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 1\} &= P\{\eta_1 \in \{1, 3\} \wedge \eta_2 \in \{1, 3\}\} = (P\{\eta_1 = 1\} + \\ &+ P\{\eta_1 = 3\}) \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}) = (p_{11} + p_{31}) \cdot (p_{12} + p_{32}), \end{aligned}$$

$$P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 0\} = \frac{p_{01}p_{[2i]2}}{p_{01}} = p_{[2i]2}, \quad P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 2\} = \frac{p_{[2i]2}p_{41}}{p_{41}} = p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 1\} = \frac{p_{[2i]2}(p_{11} + p_{31})}{p_{11} + p_{31}} = p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_2 = 1/\tau_1 = 1\} = \frac{(p_{12} + p_{32})(p_{11} + p_{31})}{p_{11} + p_{31}} = p_{12} + p_{32},$$

$$P\{\tau_2 = 0/\tau_1 = 2j\} = \frac{p_{02}p_{[2i]1}}{p_{[2i]1}} = p_{02}, \quad P\{\tau_2 = 2/\tau_1 = 2j\} = \frac{p_{22}p_{[2i]1}}{p_{[2i]1}} = p_{22}.$$

Аналогічно можна показати, що для довільного $k \in \mathbb{N}$, мають місце

$$P\{\tau_k = 0\} = p_{0k}, \quad P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}, \quad P\{\tau_k = 2\} = p_{4k}. \quad \square$$

Наслідок 1. Якщо $p_{2k} = 0 = p_{jk}$, де $j \in \{1, 3\}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$, то випадкова величина Y є випадковою величиною з незалежними G_3^* -символами, причому $P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\}$ і $P\{\tau_k = 4\} = P\{\eta_k = 2\}$.

Теорема 6. Якщо $p_{2k} = 0$, то розподіл випадкової величини $Y = f(X) = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \dots}^{G_3^*}$ є чистим, тобто є або чисто дискретним, або чисто абсолютно неперервним, або чисто сингулярним.

Доведення. Нехай $\delta = (\delta_1 \dots \delta_m)$, де $m \in \mathbb{N}$, $(\delta_1 \dots \delta_m)$ – певна комбінація символів (знаків) з множини A_3 . Нагадаємо, що T_δ^m -перетворенням точки $y = \Delta_{\tau_1 \dots \tau_k \dots}^{G_3^*}$

називається точка $T_\delta^m(y) = \Delta_{\delta_1 \dots \delta_m \tau_1 \dots \tau_k}^{G_3^*}$; T_δ^m -перетворенням множини E називається множина T_δ^m -образів всіх $y \in E$, тобто

$$T_\delta^m(E) = \left\{ y : \Delta_{\delta_1 \dots \delta_m \tau_1 \dots \tau_k}^{G_3^*}, \text{ де } \Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{G_3^*} \in E \right\}.$$

Розглянемо довільний оператор $T^m(y)$, який даній точці y ставить у відповідність множину всіх образів y під дією T_m^δ -перетворення.

Нехай $E \subset S_y$ – деяка борелівська множина з $[0, 1]$, $T^0(y) \equiv y$, T – множина всеможливих перетворень T^m для всіх скінченних значень m . Розглянемо подію $A = \{y \in T(E)\}$. Подія A не залежить від довільної кількості перших символів G_3^* -представлення точки y , а тому є залишковою відносно кожної з σ -алгебр $\mathcal{B}_k$, породжених першими $\eta_1 \dots \eta_k$ символами. В наслідок цього, за законом 0 та 1 Колмогорова випливає, що $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Якщо знайдеться таке число a , що існує $P\{Y = a\} > 0$, то розглянувши в якості E множину $\{a\}$, матимемо $P(A) = 1$ і $\lambda(A) = 0$, тобто ймовірність P зосереджена на не більш ніж зчисленній множині A і розподіл Y є чисто дискретним.

Якщо ж такого числа a не існує, то можливі випадки: 1) існує множина E міри Лебега нуль така, що $P\{Y \in E\} > 0$; 2) такої множини E не має, тобто для кожної множини E з $\lambda(E) = 0$ випливає $P\{Y \in E\} = 0$. Тоді, згідно з означенням, у випадку 1, $P\{Y \in T(E)\} = 1$ і $\lambda(E) = 0$, тобто Y має чисто сингулярний розподіл, а у випадку 2 – чисто абсолютно неперервний.

Таким чином, розподіл випадкової величини Y є чистим. $\square$

Наслідок 2. Якщо Q_5^* -зображення є Q_5 -зображенням, а G_3^* -зображення є G_3 -зображенням і $\|p_{ik}\|$ має властивості: $p_{2k} = 0$, $p_{0k}p_{4k} \neq 0$, $p_{1k} = p_{3k}$, для довільного $k \in \mathbb{N}$ причому $\prod_{k=1}^{\infty} (p_{1k} + p_{3k}) > 0$, то розподіл Y є дискретним і точка $y_0 = \Delta_{(1)}^{G_3}$ є атомом розподілу.

1. Sierpiński W. Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej // Wektor. – 1914. – N 8. – P. 337-343.
2. Лукач Е. Характеристические функции. – М: Наука, 1979. – 424 с.
3. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. Працьовитий М.В. Структура досконалих множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2009. – Р. 179-189.
5. Працьовитий М. В., Торбин Г.М. Случайные величины с независимыми Q^* -знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 95-104.
6. Голубов В.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. – М: Наука, 1987. – 344 с.
7. Турбин А.Ф., Працьовитий Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.
8. Alberverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G. On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in R^2 // Random Operators and Stochastic Equations, 2008. – 16, N 2. – P. 181-211.

9. Василенко Н.А. Функція Серпінського. Самоафінні властивості // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2009. – № 10. – С. 121-131.

M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko

Probability distributions on graphs one class nowhere differentiable functions.

We construct an infinite-parameter family of continuous nowhere monotonic and, in general, non-differentiable functions which are generalizations of classical nowhere differentiable Sierpiński function. We study Lebesgue structure (content of discrete, absolutely continuous and singular components), topological and metric properties of the distribution of values of functions belonging to constructed family and two-dimensional random variables with supports on their graphs.

Keywords: continuous nowhere differentiable function, nowhere monotonic function, levels sets of function, Q -representation of real numbers, Lebesgue structure of distribution, discrete distribution, singular distribution.

Н. В. Працевитый, Н. А. Василенко

Распределения вероятностей на графиках одного класса нигде не дифференцируемых функций.

Строится бесконечно параметрическое семейство непрерывных нигде не монотонных и, вообще говоря, недифференцируемых функций, которые являются обобщением классической нигде не дифференцируемой функции Серпинского. Изучается лебеговская структура (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент) и тополого-метрические свойства распределения значений функций построенной семьи и двумерных случайных величин с носителями на их графиках.

Ключевые слова: непрерывная нигде не дифференцируемая функция, нигде не монотонная функция, множество уровней функции, Q^* -представление (изображение) действительных чисел, лебеговская структура распределения, дискретность распределения, сингулярность распределения.

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова, Київ
prats4@yandex.ru
nata_va@inbox.ru

Получено 01.04.13

UDK 517.9

©2013. O. A. Rudakova

ON THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF THE VARIATIONAL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS AND DEGENERATION IN VARIABLE DOMAINS

In this article we deal with a sequence of integral functionals defined on weighted Sobolev spaces associated with a sequence of n -dimensional domains. For the given functionals we consider variational problems with sets of constraints of an integral kind. We establish sufficient conditions of convergence of minimizers and minimum values of the variational problems under consideration.

Keywords: *varying weighted Sobolev spaces, variational problem, integral functional, degeneration, integral constraint, Γ -convergence.*

1. Introduction. In this article for a sequence of integral functionals defined on varying weighted Sobolev spaces we consider variational problems with sets of constraints of an integral kind. The strong connectedness of the given weighted Sobolev spaces with a "limit" weighted Sobolev space and the Γ -convergence of the involved integral functionals are the main conditions under which we establish the convergence of the minimizers and minimum values of the given variational problems.

The role of the strong connectedness of the corresponding spaces in the study of the homogenization of boundary value problems and variational problems in variable domains (particularly, in strongly perforated domains) is well known (see for instance [7-12]). The notion of the strong connectedness used in the present work was introduced and studied in [11].

The Γ -convergence is a special kind of the convergence introduced by E. De Giorgi in the seventies of last century to propose a framework for the study of the asymptotic behaviour of families of minimum problems. Its first definition as well as the main properties were presented in [5]. There are many works devoted to the Γ -convergence of functionals including integral functionals with degenerate integrands and variable domains of definitions (see for instance [1-6], [8], [9] and [11-13] and the bibliography in [1], [2]). We note that the effectiveness of the Γ -convergence in the study of the homogenization of variational problems is connected with the possibility of obtaining converging subsequences from sequences of minimizers of minimum problems.

2. Preliminaries. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, and let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in (1, n)$, and let ν be a nonnegative function on Ω with the properties: $\nu > 0$ almost everywhere in Ω and

$$\nu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega). \quad (1)$$

We denote by $L^p(\nu, \Omega)$ the set of all measurable functions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that the

function $\nu|u|^p$ is summable in Ω . $L^p(\nu, \Omega)$ is a Banach space with the norm

$$\|u\|_{L^p(\nu, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} \nu|u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Note that by virtue of Young's inequality and the second inclusion of (1) we have $L^p(\nu, \Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

We denote by $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ the set of all functions $u \in L^p(\nu, \Omega)$ such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$ there exists the weak derivative $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu, \Omega)$. $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ is a reflexive Banach space with the norm

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int_{\Omega} \nu|u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nu|D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Due to the first inclusion of (1) we have $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega)$. We denote by $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ the closure of the set $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\nu, \Omega)$.

Next, let $\{\Omega_s\}$ be a sequence of domains of $\mathbb{R}^n$ which are contained in Ω .

By analogy with the spaces introduced above we define the functional spaces corresponding to the domains Ω_s .

Let $s \in \mathbb{N}$. We denote by $L^p(\nu, \Omega_s)$ the set of all measurable functions $u : \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$ such that the function $\nu|u|^p$ is summable in Ω_s . $L^p(\nu, \Omega_s)$ is a Banach space with the norm

$$\|u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p dx \right)^{1/p}.$$

By virtue of Young's inequality and the second inclusion of (1) we have $L^p(\nu, \Omega_s) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega_s)$.

We denote by $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ the set of all functions $u \in L^p(\nu, \Omega_s)$ such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$ there exists the weak derivative $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu, \Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ is a Banach space with the norm

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_s} \nu|D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

We denote by $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ the set of all restrictions on Ω_s of functions from $C_0^\infty(\Omega)$. Due to the first inclusion of (1) we have $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. We denote by $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ the closure of the set $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ in $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

We observe that if $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ and $s \in \mathbb{N}$, then $u|_{\Omega_s} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

DEFINITION 1. If $s \in \mathbb{N}$, then $q_s : \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ is the mapping such that for every function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

DEFINITION 2. We say that the sequence of the spaces $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ is strongly connected with the space $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ if there exists a sequence of linear continuous operators $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ such that:

- (i) the sequence of the norms $\|l_s\|$ is bounded;
- (ii) for every $s \in \mathbb{N}$ and for every $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ we have $q_s(l_s u) = u$ a. e. in Ω_s .

PROPOSITION 1. Suppose that the embedding of $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ into $L^p(\nu, \Omega)$ is compact, and the sequence of the spaces $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ is strongly connected with the space $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Let for every $s \in \mathbb{N}$, $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, and let the sequence of the norms $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ be bounded. Then there exist an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ and a function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ such that $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0$.

The proof of the proposition is simple (see [11]).

DEFINITION 3. Let for every $s \in \mathbb{N}$, I_s be a functional on $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, and let I be a functional on $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. We say that the sequence $\{I_s\}$ Γ -converges to the functional I if the following conditions are satisfied:

- (i) for every function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ there exists a sequence $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ such that $\lim_{s \rightarrow \infty} \|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0$ and $\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(w_s) = I(u)$;
- (ii) for every function $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ and for every sequence $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ such that $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0$ we have $\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) \geq I(u)$.

3. Main result. Let $c_1, c_2 > 0$, and let for every $s \in \mathbb{N}$, $\psi_s \in L^1(\Omega_s)$ and $\psi_s \geq 0$ in Ω_s . We shall assume that

$$\text{the sequence of the norms } \|\psi_s\|_{L^1(\Omega_s)} \text{ is bounded.} \quad (2)$$

Let $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, be a sequence of functions such that:

$$\text{for every } s \in \mathbb{N} \text{ and for every } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ the function } f_s(\cdot, \xi) \text{ is measurable in } \Omega_s; \quad (3)$$

$$\text{for every } s \in \mathbb{N} \text{ and for almost every } x \in \Omega_s \text{ the function } f_s(x, \cdot) \text{ is convex in } \mathbb{R}^n; \quad (4)$$

$$\begin{cases} \text{for every } s \in \mathbb{N}, \text{ for almost every } x \in \Omega_s \text{ and for every } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ c_1 \nu(x) |\xi|^p - \psi_s(x) \leq f_s(x, \xi) \leq c_2 \nu(x) |\xi|^p + \psi_s(x). \end{cases} \quad (5)$$

From (3)-(5) it follows that for every $s \in \mathbb{N}$, f_s is a Carathéodory function and if $s \in \mathbb{N}$ and $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, the function $f_s(x, \nabla u)$ is summable in Ω_s .

For every $s \in \mathbb{N}$ we define the functional $J_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$J_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla u) dx, \quad u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s).$$

Next, let $c_3, c_4 > 0$, and let ψ be a function in $L^1(\Omega)$ such that $\psi \geq 0$ in Ω .

Let $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that:

$$\text{for every } \eta \in \mathbb{R} \text{ the function } g(\cdot, \eta) \text{ is measurable in } \Omega; \quad (6)$$

for almost every $x \in \Omega$ the function $g(x, \cdot)$ is strictly convex in $\mathbb{R}$; (7)

$$\begin{cases} \text{for almost every } x \in \Omega \text{ and for every } \eta \in \mathbb{R}, \\ c_3\nu(x)|\eta|^p - \psi(x) \leq g(x, \eta) \leq c_4\nu(x)|\eta|^p + \psi(x). \end{cases} \quad (8)$$

From (6)-(8) it follows that g is a Carathéodory function and if $s \in \mathbb{N}$ and $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, the function $g(x, u)$ is summable in Ω_s . Moreover, for every $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, the function $g(x, u)$ is summable in Ω .

For every $s \in \mathbb{N}$ we define the functional $G_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$G_s(u) = \int_{\Omega_s} g(x, u) dx, \quad u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s).$$

We observe that by virtue of (2), (4), (5) and (7), (8) for every $s \in \mathbb{N}$ the functional $J_s + G_s$ is weakly lower semicontinuous on $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, strictly convex and there exist $c', c'', c''' > 0$ such that for every $s \in \mathbb{N}$ and $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$,

$$c'\|u\|_{1,p,\nu,s}^p - c''' \leq (J_s + G_s)(u) \leq c''\|u\|_{1,p,\nu,s}^p + c'''. \quad (9)$$

In view of known results on the existence of the minimizers of functionals (see for instance [14]), these properties of the functionals $J_s + G_s$ imply that the next assertion holds true:

$$\begin{cases} \text{if } s \in \mathbb{N} \text{ and } U \text{ is a nonempty convex and closed set in } \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s), \\ \text{there exists a unique function } u \in U \text{ minimizing the functional } J_s + G_s \text{ on } U. \end{cases} \quad (10)$$

Further, let $c > 0$, $b \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ in Ω , and let $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a Carathéodory function such that:

$$\text{for almost every } x \in \Omega \text{ the function } \varphi(x, \cdot) \text{ is convex in } \mathbb{R}; \quad (11)$$

$$\text{for almost every } x \in \Omega \quad \varphi(x, 0) = 0; \quad (12)$$

$$\begin{cases} \text{for almost every } x \in \Omega \text{ and for every } \eta \in \mathbb{R}, \\ |\varphi(x, \eta)| \leq c\nu(x)|\eta|^p + b(x). \end{cases} \quad (13)$$

For every $s \in \mathbb{N}$ we define the functional $\Phi_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\Phi_s(u) = \int_{\Omega_s} \varphi(x, u) dx, \quad u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s).$$

Using (8) and (13) along with Egoroff's theorem, we establish the following fact:

$$\begin{cases} \text{for every } v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \text{ and for every sequence } v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \text{ such that} \\ \|\nu_s - q_s v\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} \rightarrow 0 \text{ we have } G_s(v_s) - G_s(q_s v) \rightarrow 0 \text{ and } \Phi_s(v_s) - \Phi_s(q_s v) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (14)$$

For every $s \in \mathbb{N}$ we define

$$V_s = \{u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) : \Phi_s(u) \leq 1\}.$$

Due to (12) for every $s \in \mathbb{N}$ the set V_s is nonempty.

For every function $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ we define the functionals $G^\sigma, \Phi^\sigma : \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$G^\sigma(u) = \int_{\Omega} \sigma g(x, u) dx, \quad \Phi^\sigma(u) = \int_{\Omega} \sigma \varphi(x, u) dx, \quad u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega),$$

and we set

$$V^\sigma = \{u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) : \Phi^\sigma(u) \leq 1\}.$$

In view of (11) for every $s \in \mathbb{N}$ the set V_s is convex. This fact and (10) imply that for every $s \in \mathbb{N}$ there exists a unique function $u_s \in V_s$ minimizing the functional $J_s + G_s$ on V_s .

Theorem 1. *Suppose that the following conditions are satisfied:*

- ($*_1$) *the embedding of $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ into $L^p(\nu, \Omega)$ is compact;*
- ($*_2$) *the sequence of the spaces $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ is strongly connected with $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$;*
- ($*_3$) *there exists a positive bounded measurable function σ on Ω such that for every open cube $Q \subset \Omega$,*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{meas}(Q \cap \Omega_s) = \int_Q \sigma dx;$$

- ($*_4$) *the sequence $\{J_s\}$ Γ -converges to a functional $J : \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.*

Assume that for every $s \in \mathbb{N}$, u_s is the function in V_s minimizing the functional $J_s + G_s$ on V_s .

Then there exists a function $u \in V^\sigma$ such that the following assertions hold true:

$$\text{the function } u \text{ is a unique minimizer of the functional } J + G^\sigma \text{ on } V^\sigma; \quad (15)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0; \quad (16)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (J_s + G_s)(u_s) = (J + G^\sigma)(u). \quad (17)$$

Proof. We observe that in view of condition ($*_3$) for every function $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ $G_s(q_s v) \rightarrow G^\sigma(v)$ and $\Phi_s(q_s v) \rightarrow \Phi^\sigma(v)$. This and (14) imply that

$$\begin{cases} \text{for every } v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \text{ and for every sequence } v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \text{ such that} \\ \|\|v_s - q_s v\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} \rightarrow 0 \text{ we have } G_s(v_s) \rightarrow G^\sigma(v) \text{ and } \Phi_s(v_s) \rightarrow \Phi^\sigma(v). \end{cases} \quad (18)$$

For every $s \in \mathbb{N}$ we set $I_s = J_s + G_s$ and $I = J + G^\sigma$. From condition ($*_4$) and assertion of (18) it follows that

$$\text{the sequence } \{I_s\} \text{ } \Gamma\text{-converges to the functional } I. \quad (19)$$

Moreover, taking into account that for every $s \in \mathbb{N}$ the function u_s minimizes the functional $J_s + G_s$ on V_s and using (9) we obtain that

$$\text{the sequence of the norms } \|u_s\|_{1,p,\nu,s} \text{ is bounded.} \quad (20)$$

This fact along with conditions $(*_1)$, $(*_2)$ and Proposition 1 implies that there exist an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ and a function $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega)$ such that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0. \quad (21)$$

Now we define the sequence $\{\bar{u}_s\}$ by

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s & \text{if } s = s_j \text{ for some } j \in \mathbb{N}, \\ q_s u & \text{if } s \neq s_j \text{ for every } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

It is evident that for every $s \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Due to (21) we have

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\bar{u}_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0.$$

Then by virtue of assertions (18) and (19),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_s(\bar{u}_s) = \Phi^\sigma(u), \quad (22)$$

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(\bar{u}_s) \geq I(u). \quad (23)$$

Due to (22)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{s_j}(u_{s_j}) = \Phi^\sigma(u).$$

Taking into account that for every $s \in \mathbb{N}$, $\Phi_s(u_s) \leq 1$, from the latter equality we derive that $\Phi^\sigma(u) \leq 1$. Consequently, $u \in V^\sigma$. Moreover, from (23) we obtain

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \geq I(u). \quad (24)$$

Further, we fix $v \in V^\sigma$. Let us show that

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) \leq I(v). \quad (25)$$

From (19) it follows that there exists a sequence $v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ such that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|v_s - q_s v\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0, \quad (26)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(v_s) = I(v). \quad (27)$$

For every $s \in \mathbb{N}$ we set $\tau_s = (1 + |\Phi_s(v_s) - \Phi^\sigma(v)|)^{-1}$. From (18) and (26) it follows that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tau_s = 1. \quad (28)$$

For every $s \in \mathbb{N}$ we define $w_s = \tau_s v_s$. Clearly, $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, $s \in \mathbb{N}$. Moreover, using (11) and (12), and the inclusion $v \in V^\sigma$, we establish that for every $s \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_s(w_s) \leq \tau_s \Phi_s(v_s) \leq \tau_s(1 + |\Phi_s(v_s) - \Phi^\sigma(v)|) \leq 1.$$

This implies that for every $s \in \mathbb{N}$, $w_s \in V_s$. Then, taking into account that for every $s \in \mathbb{N}$ the function u_s minimizes the functional I_s on V_s , we get

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad I_s(u_s) \leq I_s(w_s). \quad (29)$$

Using (4), (5), (7) and (8), we obtain that for every $s \in \mathbb{N}$,

$$I_s(w_s) \leq \tau_s I_s(v_s) + (1 - \tau_s)(\|\psi_s\|_{L^1(\Omega_s)} + \|\psi\|_{L^1(\Omega)}).$$

This along with (2) and (27)-(29) implies that inequality (25) is valid. From this inequality and inequality (24) we infer that the function u minimizes the functional I on V^σ .

We observe that, due to (4), (7), condition $(*_4)$ and the fact that the function σ is positive, the functional I is strictly convex. Therefore, since the set V^σ is convex, the function u is the unique minimizer of the functional I on V^σ . Thus, assertion (15) holds true.

Next, let us show that assertion (16) holds true. For every $s \in \mathbb{N}$ we define $\alpha_s = \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)}$. Suppose that the sequence $\{\alpha_s\}$ does not converge to zero. Then there exist $\varepsilon > 0$ and an increasing sequence $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ such that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{\bar{s}_k} \geq \varepsilon. \quad (30)$$

Taking into account (20) and conditions $(*_1)$ and $(*_2)$, we establish that there exist an increasing sequence $\{\tilde{s}_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ and a function $w \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega)$ such that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{\tilde{s}_j} - q_{\tilde{s}_j} w\|_{L^p(\nu, \Omega_{\tilde{s}_j})} = 0. \quad (31)$$

Thus, by analogy with the above result for the function u , we obtain that $w \in V^\sigma$ and w minimizes the functional I on V^σ . This fact along with the uniqueness of the minimizer of the functional I on V^σ allows us to deduce that $w = u$ a. e. in Ω . Hence, by (31), $\alpha_{\tilde{s}_j} \rightarrow 0$. However, this contradicts (30). The contradiction obtained proves that $\alpha_s \rightarrow 0$. Thus, assertion (16) holds true.

Now, from (19) and (16) we get

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) \geq I(u).$$

This and (25), with $v = u$, imply that assertion (17) holds true. The theorem is proved.

We note that the convergence of minimizers and minimum values of variational problems with certain pointwise constraints for a sequence of functionals like $J_s + G_s$ was studied in [12]. Moreover, in [12] a rather extensive review of the works related to the topic is contained.

In the nondegenerate case, the questions concerning convergence of minimizers of variational problems with general sets of constraints, and in particular sets of constraints of an integral kind, for integral functionals defined on varying Sobolev spaces were studied in [8]. In this connection see also Subsections 1.4 and 2.5 of [10] where convergence of solutions of variational inequalities with different kinds of sets of constraints was investigated.

1. *Braides A., Defranceschi A.* Homogenization of multiple integrals // Oxford Lect. Ser. Math. and Appl. – New York: Clarendon Press, 1998. – **12**. – 298 p.
2. *Dal Maso G.* An introduction to Γ -convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337 p.
3. *De Arcangelis R., Donato P.* Homogenization in weighted Sobolev spaces // Ricerche Mat. – 1985. – **34**. – P. 289-308.
4. *De Arcangelis R.* Compactness and convergence of minimum points for a class of nonlinear nonequicoercive functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 1990. – **15**, № 4. – P. 363-380.
5. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). – 1975. – **58**, № 6. – P. 842-850.
6. *Carbone L., Sbordone C.* Some properties of Γ -limits of integral functionals // Ann. Mat. Pura Appl. (4). – 1979. – **122**. – P. 1-60.
7. *Khruslov E.Ya.* Asymptotic behavior of the solutions of the second boundary value problem in the case of the refinement of the boundary of the domain // Mat. Sb. – 1978. – **106**, № 4. – P. 604-621.
8. *Kovalevskii A.A.* On the connectedness of subsets of Sobolev spaces and the Γ -convergence of functionals with varying domain of definition // Nelinejnye granichnye zadachi. – 1989. – **1**. – P. 48-54. (in Russian)
9. *Kovalevskii A.A.* Some problems connected with the problem of averaging variational problems for functionals with a variable domain // Current Analysis and its Applications, Naukova Dumka, Kiev. – 1989. – P. 62-70. (in Russian)
10. *Kovalevsky A.A.* G -convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain // Russian Acad. Sci. Izv. Math. – 1995. – **44**, № 3. – P. 431-460.
11. *Kovalevskii A.A., Rudakova O.A.* On the strong connectedness of weighted Sobolev spaces and the compactness of sequences of their elements // Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. Nats. Akad. Nauk Ukrainy. – 2006. – **12**. – P. 85-99. (in Russian)
12. *Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.* Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Eqns. Appl. – 2009. – **1**, № 4. – P. 517-559.
13. *Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.* Γ -convergence of integral functionals with degenerate integrands in periodically perforated domains // Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. Nats. Akad. Nauk Ukrainy. – 2009. – **19**. – P. 101-109.
14. *Vainberg M.M.* Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations. – Halsted Press, New York-Toronto, 1973. – 356 p.

О. А. Рудакова

О сходимости решений вариационных задач с интегральными ограничениями и вырождением в переменных областях.

В настоящей статье для последовательности интегральных функционалов, определенных на весовых пространствах Соболева, связанных с последовательностью n -мерных областей, рассмотрены вариационные задачи с множествами ограничений интегрального вида. Установлены достаточные условия сходимости минимизантов и минимальных значений рассматриваемых вариационных задач.

Ключевые слова: переменные весовые пространства Соболева, вариационная задача, инте-

гральный функционал, вырождение, интегральное ограничение, Γ -сходимость.

О. А. Рудакова

Про збіжність розв'язків варіаційних задач з інтегральними обмеженнями і виродженням в змінних областях.

Для послідовності інтегральних функціоналів, визначених на вагових просторах Соболева, пов'язаних з послідовністю n -вимірних областей, розглянуто варіаційні задачі з множинами обмежень інтегрального вигляду. Встановлено достатні умови збіжності мінімізаторів і мінімальних значень розглянутих варіаційних задач.

Ключові слова: змінні вагові простори Соболева, варіаційна задача, інтегральний функціонал, виродження, інтегральне обмеження, Γ -збіжність.

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
rudakova@iamm.ac.donetsk.ua*

Received 03.06.13

UDK 517.5

©2013. R. Salimov, O. Afanas'eva

ABOUT SOME MAPPINGS IN $\lambda(r)$ -REGULAR METRIC SPACES

It is formulated conditions on functions $Q(x)$ and boundaries of domains under which every Q -homeomorphism admits continuous or homeomorphic extension to the boundary in metric spaces with measures.

Keywords: *modulus, Q -homeomorphisms.*

1. Introduction. Mapping theory started in the 18th century. Beltrami, Caratheodory, Christoffel, Gauss, Hilbert, Liouville, Poincaré, Riemann, Schwarz, and so on all left their marks in this theory. Conformal mappings and their applications to potential theory, mathematical physics, Riemann surfaces, and technology played a key role in this development.

During the late 1920s and early 1930s, Grötzsch, Lavrentiev, and Morrey introduced a more general and less rigid class of mappings that were later named quasiconformal. The concept of Q -homeomorphism is a natural extension of the geometric definition of quasiconformality; see, e.g., [2]. The subject of Q -homeomorphisms is interesting on its own right and has applications to many classes of mappings. In particular, the theory of Q -homeomorphisms can be applied to mappings in local Sobolev classes (see, e.g., Sections 6.3 and 6.10 in [2]) to the mappings with finite length distortion (see Sections 8.6 and 8.7 in [2]) and to the finitely bi-Lipschitz mappings; see Section 10.6 in [2]. The main goal of the theory of Q -homeomorphisms is to clear up various interconnections between properties of the majorant $Q(x)$ and the corresponding properties of the mappings themselves.

2. Preliminaries. Given a set S in (X, d) and $\alpha \in [0, \infty)$, H^α denotes the α -dimensional Hausdorff measure of S in (X, d) , i.e.,

$$H^\alpha(S) = \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon^\alpha(S), \quad (1)$$

$$H_\varepsilon^\alpha(S) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^\alpha, \quad (2)$$

where the infimum is taken over all countable collections of numbers $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ such that some sets S_i in (X, d) with diameters δ_i cover S . Note that H^α is nonincreasing in the parameter α . The Hausdorff dimension of S is the only number $\alpha \in [0, \infty]$ such that $H^{\alpha'}(S) = 0$ for all $\alpha' > \alpha$ and $H^{\alpha''}(S) = \infty$ for all $\alpha'' < \alpha$.

Recall, for a given continuous path $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ in a metric space (X, d) , that its length is the supremum of the sums

$$\sum_{i=1}^k d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$$

over all partitions $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ of the interval $[a, b]$. The path γ is called *rectifiable* if its length is finite.

In what follows, (X, d, μ) denotes a space X with a metric d and a locally finite Borel measure μ . Given a family of paths Γ in X , a Borel function $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ , abbr. $\varrho \in \text{adm } \Gamma$, if

$$\int_{\gamma} \varrho ds \geq 1 \quad (3)$$

for all $\gamma \in \Gamma$.

An open set in X whose points can all be connected pairwise by continuous paths is called a *domain* in X .

The *modulus* of the path family Γ in D is given by the equality

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \varrho^\alpha(x) d\mu(x). \quad (4)$$

In the case of the path family $\Gamma' = f\Gamma$, we take the Hausdorff dimension α' of the domain D' .

Let D and D' be domains with finite Hausdorff dimensions α and $\alpha' \geq 1$ in spaces (X, d, μ) and (X', d', μ') , and let $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ be a measurable function. We say that a homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ is a *Q-homeomorphism* if

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \varrho^\alpha(x) d\mu(x) \quad (5)$$

for every family Γ of paths in D and every admissible function ϱ for Γ .

A space (X, d, μ) is called (*Ahlfors*) α -*regular* if there is a constant $C \geq 1$ such that

$$C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq Cr^\alpha \quad (6)$$

for all balls B_r in X with the radius $r < \text{diam } X$. A space (X, d, μ) is (*Ahlfors*) *regular* if it is (*Ahlfors*) α -regular for some $\alpha \in (1, \infty)$.

A space (X, d, μ) is *upper α -regular at a point* $x_0 \in X$ if there is a constant $C > 0$ such that

$$\mu(B(x_0, r)) \leq Cr^\alpha \quad (7)$$

for the balls $B(x_0, r)$ centered at $x_0 \in X$ with all radii $r < r_0$ for some $r_0 > 0$. A space (X, d, μ) is *upper α -regular* if condition (7) holds at every point $x_0 \in X$, see [2], p. 258.

Recall that a topological space is *connected space* if it is impossible to split it into two non-empty open sets. Compact connected spaces are called *continua*. A topological space T is said to be *path connected* if any two points x_1 and x_2 in T can be joined by a path $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$, $\gamma(0) = x_1$ and $\gamma(1) = x_2$. A *domain* in T is an open path connected set in T . A domain D in a topological space T is called *locally connected at a point* $x_0 \in \partial D$ if, for every neighborhood U of the point x_0 , there is its neighborhood $V \subseteq U$ such that

$V \cap D$ is connected, [1], c. 232. Similarly, we say that a domain D is *locally path connected at a point* $x_0 \in \partial D$ if, for every neighborhood U of the point x_0 , there is its neighborhood $V \subseteq U$ such that $V \cap D$ is path connected.

The boundary of D is *weakly flat at a point* $x_0 \in \partial D$ if, for every number $P > 0$ and every neighborhood U of the point x_0 , there is its neighborhood $V \subset U$ such that

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq P \quad (8)$$

for all continua E and F in D intersecting ∂U and ∂V .

We also say that the boundary of the domain G is *strongly accessible at a point* $x_0 \in \partial G$, if, for every neighborhood U of the point x_0 , there are a compact set $E \subset G$, a neighborhood $V \subset U$ of the point x_0 , and a number $\delta > 0$ such that

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq \delta$$

for every continuum F in G intersecting ∂U and ∂V .

Finally, we say that the boundary ∂D is *weakly flat* and *strongly accessible* if the corresponding properties hold at every point of the boundary, see [2].

We start first from the following general statement, see Lemma 13.3 and Theorem 13.3 in [2], (cf. also Lemma 3 in [3]).

Lemma 1. *Let a domain D be locally path connected at a point $x_0 \in \partial D$, let $\overline{D'}$ be compact, and let $f : D \rightarrow D'$ be a Q -homeomorphism such that $\partial D'$ is strongly accessible at least at one point of the cluster set*

$$C(x_0, f) = \{y \in X' : y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k), x_k \rightarrow x_0, x_k \in D\}, \quad (9)$$

$Q : X \rightarrow (0, \infty)$ is a measurable function satisfying the condition

$$\int_{D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi_{x_0, \varepsilon}^\alpha(d(x, x_0)) d\mu(x) = o(I_{x_0}^\alpha(\varepsilon)) \quad (10)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, where

$$D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon(x_0)\},$$

$\varepsilon(x_0) \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$, and $\psi_{x_0, \varepsilon}(t)$ is a family of nonnegative measurable (by Lebesgue) functions on $(0, \infty)$ such that

$$I_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0, \varepsilon}(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (11)$$

Then f can be extended to the point x_0 by continuity in (X', d') .

Theorem 1. *Let D be locally path connected at all its boundary points and $\overline{D}$ compact, D' with a weakly flat boundary, and let $f : D \rightarrow D'$ be a Q -homeomorphism with $Q \in L_\mu^1(D)$. Then the inverse homeomorphism $g = f^{-1} : D' \rightarrow D$ admits a continuous extension $\bar{g} : \overline{D'} \rightarrow \overline{D}$.*

3. Basic results. Let $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ be an increasing function, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. We will say that a space (X, d, μ) is *upper $\lambda(r)$ -regular at a point $x_0 \in X$* if there is a constant $C > 0$ such that

$$\mu(B(x_0, r)) \leq C\lambda(r) \quad (12)$$

for the balls $B(x_0, r)$ centered at $x_0 \in X$ with all radii $r < r_0$ for some $r_0 > 0$. We will also say that a space (X, d, μ) is *upper $\lambda(r)$ -regular* if condition (12) holds at every point $x_0 \in X$.

Lemma 2. *Let D be a domain in a space (X, d, μ) that is upper $\lambda(r)$ -regular at the point $x_0 \in \overline{D}$ and λ is increasing function. If, for every nonnegative function $Q : D \rightarrow \mathbb{R}^+$, condition*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon) \cap D)} \int_{B(x_0, \varepsilon) \cap D} Q(x) d\mu(x) < \infty \quad (13)$$

holds, then

$$\int_{D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (14)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ and some $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, where $\delta_0 = \min(e^{-1}, d_0)$, $d_0 = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$, $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, $B_r = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.

Proof. Choose $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ such that the function Q is integrable in $D_0 = D \cap B_0$ with respect to the measure μ , where $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$, and

$$s_0 = \sup_{r \in (0, \varepsilon_0)} \frac{1}{\mu(D_r)} \int_{D_r} Q(x) d\mu(x) < \infty,$$

$D_r = D \cap B(x_0, r)$. Further, let $\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in X : \varepsilon_{k+1} \leq d(x, x_0) < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(x_0, \varepsilon_k)$. Choose a natural number N such that $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$. Then $D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \subset \Delta(\varepsilon) := \bigcup_{k=0}^N \Delta_k$, where $\Delta_k = D \cap A_k$ and

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon) &= \int_{\Delta(\varepsilon)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} \leq \sum_{k=0}^N \int_{\Delta_k} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{\lambda(\varepsilon_{k+1})} \int_{B(\varepsilon_k) \cap D} Q(x) d\mu(x) \leq s_0 \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\mu(B_k \cap D)}{\lambda(\varepsilon_{k+1})}. \end{aligned}$$

In pursuance of upper $\lambda(r)$ -regularity we obtain that $\mu(B_k) \leq C \cdot \lambda(\varepsilon_k)$ and

$$\eta(\varepsilon) \leq C \cdot s_0 \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\lambda(\varepsilon_k)}{\lambda(\varepsilon_{k+1})} \leq C \cdot s_0 \cdot N.$$

Since $N < \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} < \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$, then

$$\int_{D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} \leq \frac{C \cdot s_0}{\log 2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

So, we complete the proof.

As before, here (X, d, μ) and (X', d', μ') are spaces with metrics d and d' and locally finite Borel measures μ and μ' , and D and D' are domains in X and X' with finite Hausdorff dimensions α and $\alpha' > 1$, respectively.

Theorem 2. *Let X be upper $\lambda(r)$ -regular with*

$$\lambda(\varepsilon) = o\left(\varepsilon^\alpha \log^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (15)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, D is locally path connected, $\overline{D'}$ be compact and $\partial D'$ strongly accessible. If

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon) \cap D)} \int_{B(x_0, \varepsilon) \cap D} Q(x) d\mu(x) < \infty, \quad (16)$$

then any Q -homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ admits a continuous extension in (X', d') .

Proof. By elementary argument, we see that condition (15) implies that

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t)} = \infty. \quad (17)$$

Choosing in Lemma 1 $\psi(t) = \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}(t)}$ and combining conclusion Lemma 2, we show, by L'Hospital rule, that

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} / \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)} \right)^\alpha &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c \log \frac{1}{\varepsilon} / \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)} \right)^\alpha = \\ &= \gamma \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \log^{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

where $\gamma = \frac{c}{\alpha^\alpha}$. According to (15)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x, x_0))} / \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)} \right)^\alpha = 0.$$

Since conditions of Lemma 1 are hold then exist extending to x_0 by continuity.

Combining the theorems 1 and 2, we obtain the following theorem.

Theorem 3. *Let X be upper $\lambda(r)$ -regular at a point $x_0 \in \partial D$ where D and D' have weakly flat boundaries, let $\overline{D}$ and $\overline{D'}$ be compact, and let $Q : X \rightarrow (0, \infty)$ be a function of the class $L_\mu^1(D)$ with condition (16). If*

$$\lambda(\varepsilon) = o\left(\varepsilon^\alpha \log^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (18)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ then any Q -homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ is extended to a homeomorphism $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

1. Kuratowski K. Topology. v. 2. – New York: Academic Press, 1968.
2. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009. – 367 pp.
3. Ryazanov V., Salimov R. Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory // Ukr. Mat. Vis. – 2007. – V. 4, N 2. – P. 199-234 [in Russian]; translation in Ukrain. Math. Bull. – 2007. – V. 4, N 2. – P. 199-233.

Р. Р. Салимов, Е. С. Афанасьева

О некоторых отображениях в $\lambda(r)$ -регулярных метрических пространствах.

Сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых любой Q -гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу в метрических пространствах с мерами.

Ключевые слова: модули, Q -гомеоморфизмы

Р. Р. Салімов, О. С. Афанасьєва

Про деякі відображення у $\lambda(r)$ -регулярних метричних просторах.

Сформульовано умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, за якими будь-який Q -гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу у метричних просторах із мірами.

Ключові слова: модулі, Q -гомеоморфізми

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru
salimov07@rambler.ru

Received 15.05.13

УДК 517.5

©2013. Е. А. Севостьянов

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРИ $n \geq 3$

Для некоторого класса отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением по Ю.Г. Решетняку, удовлетворяющих оценкам искажения модулей семейств кривых (ёмкостей конденсаторов) в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, доказан аналог теоремы о радиусе инъективности локальных гомеоморфизмов. Основной результат сформулирован в терминах среднего значения от характеристики квазиконформности.

Ключевые слова: отображения с ограниченным и конечным искажением, модули семейств кривых, ёмкости конденсаторов.

1. Введение. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$, (x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\text{diam } A$ – евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$,

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. Как обычно, мы пишем $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, локально интегрируемыми в D в степени n . Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если каждая точка $x_0 \in D$ имеет окрестность $B(x_0, \delta)$ такую, что сужение $f|_{B(x_0, \delta)}$ является гомеоморфизмом. Напомним, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия: 1) $f \in W_{loc}^{1,n}$, 2) якобиан $J(x, f) := \det f'(x)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак почти всюду в D , 3) $\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$ и некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n : |h|=1} |f'(x)h|$, см., напр., [1; § 3, гл. I], либо [2; определение 2.1, разд. 2, гл. I]. В этом случае, величину K будем называть *коэффициентом квазиконформности*. Следующий результат доказан в работе [3; теорема 2.3], см. также [2; теорема 3.4, гл. III] и работу [4].

Предложение 1. Пусть $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – локально гомеоморфное отображение с ограниченным искажением с коэффициентом квазиконформности K . Тогда отображение f является инъективным в некотором шаре $B(0, \psi(n, K))$, где ψ – положительная величина, зависящая только от n и K .

Основной целью настоящей заметки является распространение предложения 1 на некоторый класс отображений, более общий, чем отображения с ограниченным искажением. Для этого рассмотрим следующие определения, см., напр., [5] и [6].

Кривой γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого интервала (a, b) , либо полуоткрытого интервала вида $[a, b)$ или $(a, b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию: $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$. В этом случае мы пишем $\rho \in \text{adm} \Gamma$. Модулем семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm} \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x)$. Свойства модуля M в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$, где роль измеримых множеств играют семейства кривых, а роль точек – отдельные кривые (см. [5; теорема 6.2]). Пусть $x_0 \in D$, $A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i)$, а для произвольных множеств $E, F \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ означает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Отображение $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ условимся называть *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (1)$$

выполнено в кольце $A = A(x_0, r_1, r_2)$ для произвольных r_1, r_2 , указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (2)$$

При этом, если f предполагается гомеоморфизмом, говорят, что f – *кольцевой Q -гомеоморфизм* в точке x_0 (см. [6; гл. 7]; см. также [7]). Не лишним будет заметить, что в силу известного результата Е.А. Полецкого произвольное отображение f с ограниченным искажением удовлетворяет соотношениям (1)–(2) при $Q \equiv \text{const}$ (см. [8; теорема 1, § 4]). Отметим, что результаты настоящей заметки содержательны только в случае неограниченных функций Q . Полагаем $q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) dS$, где dS – элемент площади поверхности S . Основной результат данной статьи заключается в себе следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ – локальный кольцевой Q -гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$, такой, что $Q \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{B}^n)$ и

$$\int_0^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty. \quad (3)$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B(0, \delta(n, Q))$, где δ – положительное число, зависящее только от n и функции Q .

Кроме того, условие (3) является точным в следующем смысле: для каждого $\delta > 0$ и функции $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$ такой, что $Q(x) \geq 1$ п.в. и

$$\int_0^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty \quad (4)$$

найдётся локальный кольцевой Q -гомеоморфизм $f = f_Q : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 = 0$, не являющийся инъективным в шаре $B(0, \delta)$.

2. Основная лемма. Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно локально связно, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U \cap E$ связны. Следующие утверждения могут быть найдены в монографии [2; леммы 3.1-3.3, гл. III].

Предложение 2. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, Q – односвязное и локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P – компонента связности множества $f^{-1}(Q)$, $\overline{P} \subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если Q – относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$.

Предложение 3. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, F – компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f также инъективно и в некоторой окрестности множества F .

Предложение 4. Пусть $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, $A, B \subset G$, при этом, f гомеоморфно в A и B . Если $A \cap B \neq \emptyset$ и множество $f(A) \cap f(B)$ является связным, то f гомеоморфно в $A \cup B$.

Нам также необходимо следующее утверждение, см. [4; лемма 3.1].

Предложение 5. Пусть $n \geq 1$, $r > 0$, $a \neq b$, $a, b \in S(0, r)$. Тогда найдётся точка $p = p(a, b) \in B(0, r)$ такая, что для каждого $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ либо $0, b \in B(p, t)$ и $a \notin B(p, t)$, либо $a, b \in B(p, t)$ и $0 \notin B(p, t)$.

Приведём ещё один вспомогательный результат, принадлежащий Ю. Вайсяля, см. [5; теорема 10.2]. Пусть $S = S(x_0, r)$, $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Сферической шапочкой условимся называть множество вида $H \cap S$, где H – открытое полупространство в $\mathbb{R}^n$. Модулем $M^S(\Gamma)$ семейства кривых Γ относительно S будем называть величину $M^S(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) \, dm(x)$. Имеет место следующее заключение ([5; теорема 10.2]).

Предложение 6. Пусть K – произвольная сферическая шапочка сферы S , а E и F – непустые непересекающиеся подмножества K . Пусть $\Gamma = \Gamma(E, F, K)$, тогда $M^S(\Gamma) \geq b_n/r$, где постоянная b_n зависит только от размерности пространства n .

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Предположим, что $n \geq 3$, $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция и $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локальный кольцевой Q -гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$. Предположим, что найдётся измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, 1) \rightarrow [0, \infty]$ и

постоянная $C = C(n, Q, \psi)$ такие, что

$$0 < I(r_1, r_2) := \int_{r_1}^{r_2} \psi(t) dt < \infty \quad \forall r_1, r_2 \in (0, 1) \quad (5)$$

и при некотором $\alpha > 0$

$$\int_{r_1 < |x| < r_2} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) \leq C \cdot I^{n-\alpha}(r_1, r_2). \quad (6)$$

Если

$$I(0, 1) := \int_0^1 \psi(t) dt = \infty, \quad (7)$$

то отображение f инъективно в некотором шаре $B(0, \delta(n, Q, \psi))$, где δ – положительное число, зависящее только от n и функций Q и ψ .

Доказательство. 1 шаг. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $f(0) = 0$. Пусть $r_0 = \sup\{r \in \mathbb{R} : r > 0, \overline{U(0, r)} \subset \mathbb{B}^n\}$, где $U(0, r)$ означает компоненту связности множества $f^{-1}(B(0, r))$, содержащую точку 0. Очевидно, что $r_0 > 0$. Зафиксируем число $r < r_0$ и положим $U = U(0, r)$, $l^* = l^*(0, f, r) = \inf\{|z| : z \in \partial U\}$, $L^* = L^*(0, f, r) = \sup\{|z| : z \in \partial U\}$. По предложению 2 f отображает множество $\overline{U}$ на $\overline{B(0, r)}$ гомеоморфно. Следовательно, f инъективно в шаре $B(0, l^*)$ и, значит, достаточно найти нижнюю границу для величины l^* .

2 шаг. Заметим, что $L^* \rightarrow 1$ при $r \rightarrow r_0$. Действительно, пусть $L^* \not\rightarrow 1$ при $r \rightarrow r_0$.

а) Заметим, что $U(0, r_1) \subset U(0, r_2)$ при $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Действительно, если бы нашёлся элемент $x \in U(0, r_1) \setminus U(0, r_2)$, то, поскольку $f(U(0, r_i)) = B(0, r_i)$, $i = 1, 2$, мы бы имели $f(x) = y \in B(0, r_1)$ и $f(z) = y \in B(0, r_1)$, $z \neq x$. Однако, это противоречит предложению 4, поскольку по этому предложению f должно гомеоморфно отображать объединение множеств $U(0, r_1) \cup U(0, r_2)$.

б) Из пункта а) вытекает, что функция L^* возрастает по r и, следовательно, существует предел величины L^* при $r \rightarrow r_0$. Тогда $L^* \rightarrow \varepsilon_0$ при $r \rightarrow r_0$, где $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. В таком случае, все множества $U(0, r)$, $0 < r < r_0$ лежат в фиксированном шаре $B(0, \varepsilon_0)$.

с) Заметим, что $B(0, r_0) \subset f(B(0, \varepsilon_0))$. Действительно, пусть $y \in B(0, r_0)$, тогда также $y \in B(0, r_1)$ при некотором $r_1 \in (0, r_0)$, откуда следует, что найдётся $x \in U(0, r_1)$ такой, что $f(x) = y$, следовательно, $y \in f(B(0, \varepsilon_0))$, т.е., $B(0, r_0) \subset f(B(0, \varepsilon_0))$.

д) Заметим, что $\overline{B(0, r_0)} \subset f(\overline{B(0, \varepsilon_0)})$ и, значит, ввиду локальной гомеоморфности отображения f , при произвольном $\varepsilon_1 \in (\varepsilon_0, 1)$ множество $f(B(0, \varepsilon_1))$ содержит некоторую окрестность множества $\overline{B(0, r_0)}$. Значит, компонента связности $U(0, r_0)$ лежит внутри замкнутого шара $\overline{B(0, \varepsilon_0)}$, что противоречит определению величины

r_0 . Противоречие, полученное выше, означает, что $L^* \rightarrow 1$ при $r \rightarrow r_0$, что и требовалось установить.

3 шаг. Выберем x и $y \in \partial U$ такими, что $|x| = L^*$ и $|y| = l^*$. По определению множества U , имеем: $f(x), f(y) \in S(0, r)$. По предложению 5 найдётся точка $p \in B(0, r)$ такая, что для каждого $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$, элемент $f(x) \in B(p, t)$ и либо $0 \in B(p, t)$ и $f(y) \notin B(p, t)$, либо $0 \notin B(p, t)$ и $f(y) \in B(p, t)$. Зафиксируем какое-либо такое t . Заметим, что 0 и $f(y) \in \overline{f(B(0, l^*))}$ и, следовательно, $f(B(0, l^*)) \cap B(p, t) \neq \emptyset \neq f(B(0, l^*)) \setminus B(p, t)$. Поскольку множество $f(B(0, l^*))$ связно, найдётся точка $z_t \in S(p, t) \cap f(B(0, l^*))$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]).

Пусть z_t^* – единственная точка множества $f^{-1}(z_t) \cap B(0, l^*)$, $C_t(\varphi) \subset S(p, t)$ – сферическая шалочка с центром в точке z_t и раствором угла φ , определённая равенством $C_t(\varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - p| = t, (z_t - p, y - p) > t^2 \cos \varphi\}$. Обозначим символом φ_t точную верхнюю грань тех углов φ , для которых компонента связности множества $f^{-1}(C_t(\varphi))$, содержащая точку z_t^* , отображается гомеоморфно на множество $C_t(\varphi)$. Обозначим $C_t = C_t(\varphi_t)$ и через C_t^* – компоненту связности множества $f^{-1}(C_t)$, содержащую точку z_t^* .

4 шаг. Покажем, что множества C_t^* и $S(0, L^*)$ имеют общую точку. Предположим противное.

а) Поскольку множество C_t^* связно и $C_t^* \cap B(0, L^*) \neq \emptyset$, отсюда вытекает, что $C_t^* \subset B(0, L^*)$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]). Заметим, что, в таком случае, множество C_t^* является компактным подмножеством U . По предложению 2 отображение f переводит $\overline{C_t^*}$ на $\overline{C_t}$ гомеоморфно (что не является верным при $n = 2$, поскольку множество $C_t(\pi)$ не является относительно локально связным в этом случае). По предложению 3 f инъективно в некоторой окрестности множества $\overline{C_t^*}$. Следовательно, $\varphi_t = \pi$, $\overline{C_t} = S(p, t)$ и $\overline{C_t^*}$ топологически эквивалентно $(n - 1)$ -мерной сфере в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что ограниченная компонента связности D множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{C_t^*}$ содержится в $B(0, L^*)$. Тогда $f(D)$ – компактное подмножество $f(\mathbb{R}^n)$ и, поскольку f – открытое отображение, $\partial f(D) \subset f(\partial D)$.

б) Покажем, что $f(D) \subset B(p, t)$. Предположим противное, тогда найдётся $y \in f(D) \setminus \overline{B(p, t)}$. В таком случае, $\left(f(\mathbb{R}^n) \setminus \overline{B(p, t)}\right) \cap f(D) \neq \emptyset$. Поскольку $f(D)$ – компактная подобласть $f(\mathbb{R}^n)$, имеем $\left(f(\mathbb{R}^n) \setminus \overline{B(p, t)}\right) \setminus f(D) \neq \emptyset$. Так как $f(\mathbb{R}^n) \setminus \overline{B(p, t)}$ связно, отсюда вытекает, что найдётся $z \in \partial f(D) \cap \left(f(\mathbb{R}^n) \setminus \overline{B(p, t)}\right)$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]), что противоречит включению $\partial f(D) \subset B(p, t)$. Таким образом, включение $f(D) \subset B(p, t)$ установлено.

с) Заметим, что $B(p, t) \subset f(D)$. Действительно, пусть найдётся $a \in B(p, t) \setminus f(D)$. Поскольку множество $B(p, t)$ связно и $B(p, t) \cap f(D) \neq \emptyset$, отсюда следует, что $\partial f(D) \cap B(p, t) \neq \emptyset$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]). Последнее противоречит включению $\partial f(D) \subset S(p, t)$.

д) Таким образом, из включений $f(D) \subset B(p, t)$ и $B(p, t) \subset f(D)$, установленных выше в пунктах б) и с), вытекает, что $f(D) = B(p, t)$. По определению, область D является компонентой связности множества $f^{-1}(B(p, t))$. В силу предложения 2

отображение f переводит $\overline{D}$ на $\overline{B(p, t)}$ гомеоморфно.

е) Поскольку $z_t^* \in \overline{C_t^*} \cap U$, имеем $\overline{D} \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Так как f гомеоморфно отображает $\overline{U}$ на $\overline{B(0, r)}$, отображение f инъективно в $\overline{U} \cup \overline{D}$ по предложению 4. Последнее невозможно, поскольку из равенства $f(D) = B(p, t)$ и того, что $f(x) \in B(p, t)$, вытекает существование точки $x_1 \neq x$, $x_1 \in D$, такой что $f(x_1) = f(x)$. Следовательно, множества C_t^* и $S(0, L^*)$ имеют непустое пересечение, что и требовалось установить.

5 шаг. Пусть $k_t^* \in C_t^* \cap S(0, L^*)$ и $k_t = f(k_t^*)$. Обозначим через Γ_t' семейство всех кривых, соединяющих точки k_t и z_t в C_t . Пусть Γ' – объединение семейств кривых Γ_t' , $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$. Обозначим через f_t сужение отображения f на множество C_t^* . Тогда f_t гомеоморфно отображает C_t^* на C_t . Обозначим $\Gamma = \bigcup_{t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)} \{f_t^{-1} \circ \gamma : \gamma \in \Gamma_t'\}$.

Заметим, что при каждом $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$, выполнено $z_t^* \in B(0, l^*)$ и $k_t \in S(0, L^*)$. Тогда по определению кольцевого Q -отображения в точке 0, для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta : (l^*, L^*) \rightarrow [0, \infty]$, такой что

$$\int_{l^*}^{L^*} \eta(r) dr \geq 1, \quad (8)$$

будет выполнено неравенство

$$M(f(\Gamma(S(0, l^*), S(0, L^*), A(0, l^*, L^*)))) \leq \int_{A(0, l^*, L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|) dm(x). \quad (9)$$

Полагаем $\eta(t) = \psi(t)/I(l^*, L^*)$, где ψ – функция из условия леммы. Заметим, что выбранная таким образом функция η удовлетворяет соотношению (8). Тогда из условий (6) и (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} M(\Gamma') &= M(f(\Gamma(S(0, l^*), S(0, L^*), A(0, l^*, L^*)))) \leq \\ &\leq \int_{A(0, l^*, L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|) dm(x) \leq C/I^\alpha(l^*, L^*). \end{aligned} \quad (10)$$

По предложению 6

$$\int_{S(p, t)} \rho^n(x) dS \geq \frac{C'_n}{t} \quad (11)$$

для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma_t'$ и некоторой положительной постоянной C'_n . Интегрирование неравенства (11) по всем указанным выше значениям t и применение теоремы Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) приводит к неравенству

$$M(\Gamma') \geq C_n, \quad (12)$$

где постоянная C_n зависит только от n . Из (10) и (12) вытекает, что

$$C_n \leq C/I^\alpha(l^*, L^*) \leq C/I^\alpha(l^*(0, f, r_0), L^*(0, f, r)) \quad (13)$$

поскольку $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > I(\varepsilon_3, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Переходя к пределу в (13) при $r \rightarrow r_0$, мы получаем, что

$$C_n \leq C/I^\alpha(l^*(0, f, r_0), 1). \quad (14)$$

Заметим, что из (14) вытекает неравенство $I(\varepsilon, 1) < \infty$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть $l^*(0, f, r_0) \rightarrow 0$, тогда из (7) следует, что правая часть соотношения (14) стремится к нулю, что противоречит (14). Следовательно, $l^*(0, f, r_0) \geq \delta$ для всех рассматриваемых f . Доказательство завершено. $\square$

3. Доказательство основного результата. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество A . Ёмкостью конденсатора E называется следующая величина: $\text{cap } E = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm(x)$, где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A , таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую ёмкость*, пишут $\text{cap } C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A , такое что $C \subset A$ и $\text{cap } (A, C) = 0$. Следующее утверждение может быть найдено в работе [11; теорема 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$, $Q \in L_{loc}^1(D)$, тогда и только тогда, когда для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ и произвольного конденсатора $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$ ёмкость конденсатора $f(E)$ удовлетворяет условию $\text{cap } f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}$, где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задаётся соотношением $I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{n-1}{n-1}}(r)}$.*

Доказательство теоремы 1. Как обычно, мы придерживаемся соотношений: $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см. [10; с. 18, §3, гл. II]). Для произвольных $0 < r_1 < r_2 < r_0 = 1$ рассмотрим функцию $\psi(t) = \begin{cases} 1/[t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$ Заметим, что функция ψ удовлетворяет всем условиям

леммы 1, в частности, ввиду предложения 7 имеем неравенство $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty$.

Действительно, если бы $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty$, то по этому предложению множество $f(\overline{B(0, r_1)})$ имело бы ёмкость нуль, но тогда $\text{Int } f(\overline{B(0, r_1)}) = \emptyset$ (см. [2; следствие 2.5,

гл. III]), что невозможно ввиду локальной гомеоморфности (открытости) отображения f . По теореме Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) имеем $\int_{r_1 < |x| < r_2} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) = \omega_{n-1} \cdot I(r_1, r_2)$. Таким образом, первая часть заключения теоремы 1 следует из леммы 1.

Для доказательства второй части теоремы выберем $\delta > 0$ и произвольную функцию $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, $Q \geq 1$ п.в., для которой выполнено соотношение (4). Полагая $f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|)$, где $\rho(r) = \exp \left\{ - \int_r^1 \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}$, $\tilde{q}_0(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x|=r} \tilde{Q}(x) dS$,

$$\tilde{Q}(x) = \begin{cases} Q(x), & |x| > \delta, \\ 1/K, & |x| \leq \delta, \end{cases} \quad \text{где постоянная величина } K \geq 1 \text{ будет выбрана ниже.}$$

Заметим, что отображение f является кольцевым $\tilde{Q}$ -гомеоморфизмом в точке $x_0 = 0$. Действительно, непосредственные вычисления приводят к равенству $f(S(0, r)) = S(0, R)$, где $R := \exp \left\{ - \int_r^1 \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}$. В таком случае,

$$f(\Gamma(S(0, r_1), S(0, r_2), A(0, r_1, r_2))) = \Gamma(S(0, R_1), S(0, R_2), A(0, R_1, R_2)), \quad \text{где } R_i := \exp \left\{ - \int_{r_i}^1 \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}, \quad i = 1, 2, \text{ а } A(0, r_1, r_2) \text{ обозначает сферическое кольцо с центром}$$

в нуле и радиусов $0 < r_1 < r_2 < 1$. Ввиду [5; раздел 7.5],

$$M(f(\Gamma(S(0, r_1), S(0, r_2), A(0, r_1, r_2)))) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)} \right)^{n-1}}. \quad \text{В таком случае, } f -$$

кольцевой $\tilde{Q}$ -гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$ ввиду предложения 7 и, значит, кольцевой Q -гомеоморфизм в нуле, поскольку $\tilde{Q}(x) \leq Q(x)$ почти всюду. Заметим, что при $\delta \rightarrow 0$ образ $f(B(0, \delta))$ шара $B(0, \delta)$ при отображении f содержит шар $B(0, \sigma)$, где σ может быть выбрано не зависящим от δ . Отобразим теперь шар $B(0, \sigma)$ при помощи некоторого отображения g , которое преднамеренно выберем отображением с ограниченным искажением с постоянной квазиконформности $K \geq 1$, являющимся локальным гомеоморфизмом и не являющимся инъективным в шаре $B(0, \sigma)$; например, в качестве g можно выбрать так называемое закручивание вокруг оси, ось вращения которого не содержится в шаре $\mathbb{B}^n = f(B(0, 1))$ (см. [1; разд. 5.2, гл. I]). Заметим, что постоянная квазиконформности K не зависит от δ . Таким образом, нами построен локальный кольцевой $K \cdot Q(x)$ -гомеоморфизм f_2 в нуле, $f_2 = g \circ f$, не являющийся инъективным в шаре $B(0, \delta)$. Поскольку Q – произвольная локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям $Q \geq 1$ и (4), мы можем заменить Q на Q/K в первой части доказательства. Таким образом, мы получили локальный кольцевой $Q(x)$ -гомеоморфизм в нуле с требуемыми свойствами. $\square$

Простым следствием из первой части теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – локальный кольцевой Q -гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$, такой что при некоторой постоянной $C > 0$ и $r \rightarrow 0$

$$q_0(r) \leq C \cdot \log^{n-1} \frac{1}{r}. \quad (15)$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B(0, \delta(n, Q))$, где δ – положительное число, зависящее только от n и функции Q .

Доказательство. Необходимое заключение следует из теоремы 1, поскольку из условия (15) в силу теоремы Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) вытекает, что $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, кроме того, из (15) вытекает также справедливость соотношения (3). $\square$

Ниже изложен ещё один важный частный случай, когда локальный гомеоморфизм f имеет окрестность, зависящую только от размерности пространства n и мажоранты Q , в которой отображение f гомеоморфно.

Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty$,

где $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x)$. Функции с конечным средним колебанием вве-

дены А. Игнатьевым и В. Рязановым в работе [12], см. также в [6; разд. 11.2], и представляют собой обобщение функций BMO , ограниченного среднего колебания по Ф. Джонсу-Л. Ниренбергу. Отличие BMO от FMO заключается, прежде всего, в том, что, в отличие от BMO , свойство FMO является локальным и выполнено лишь в окрестности фиксированной точки. Заметим также, что имеет место включение $BMO \subset FMO(x_0) \quad \forall x_0 \in D$, и что условие $\varphi \in FMO(x_0) \quad \forall x_0 \in D$ не влечёт условие $\varphi \in BMO_{loc}(D)$, см., напр., в [6; разд. 11.2]. Следующее утверждение также может быть найдено в [6; лемма 6.1].

Предложение 8. Предположим, что $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $x_0 = 0$. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое что $\int_{B(0, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(x) \, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} < \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $g : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – локальный кольцевой Q -гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$, такой что $Q \in FMO(0)$. Тогда отображение g инъективно в некотором шаре $B(0, \delta(n, Q))$, где δ – некоторое положительное число, зависящее только от n и функции Q .

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – число из формулировки предложения 8. Рассмотрим отображение $f := g(x\varepsilon_0)$, $x \in \mathbb{B}^n$. Заметим, что g является локальным кольцевым $Q(\varepsilon_0 x)$ -гомеоморфизмом в нуле. Применим лемму 1 для отображения g и функции $\psi = \frac{1}{\varepsilon_0 t \log \frac{1}{\varepsilon_0 t}}$. Согласно предложению 8 для указанной выше функции выполнено соотношение (6) при $\alpha = n$, кроме того, выполнены также соотношения (5) и (7). Необходимое заключение вытекает из леммы 1. $\square$

1. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
2. Rickman S. Quasiregular mappings. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993. – 213 p.
3. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – V. 488. – P. 1-31.
4. Koskela P., Onninen J. and Rajala K., Mappings of finite distortion: Injectivity radius of a local

- homeomorphism, pp. 169-174 in "Future Trends in Geometric Function Theory RNC Workshop Jyväskylä 2003", Report 92, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, 2003.
5. Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., **229**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – 144 p.
 6. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
 7. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P. 1397-1420.
 8. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261-272.
 9. Куратовский К. Топология. Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
 10. Сакс С. Теория интеграла. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 495 с.
 11. Севостьянов Е.А. Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. – 2009. – Т. **61**, № 10. – С. 1367-1380.
 12. Игнатъев А., Рязанов В. Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395-417.

Е. А. Sevost'yanov

On injectivity of local ring Q -homeomorphisms at $n \geq 3$.

For some class of the mappings satisfying the estimates of distortion of modulus of families of curves in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, more general than mappings with bounded distortion by Yu.G. Reshetnyak, it is obtained the analog of the theorem on local injectivity of local homeomorphisms. The main result is given in the terms of the integral average of quasiconformality coefficient.

Keywords: mappings with finite and bounded distortion, moduli of curve's families, capacities of condensers.

Є. О. Севостьянов

Про ін'єктивність локальних кільцевих Q -гомеоморфізмів при $n \geq 3$.

Для деякого класу відображень, більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням за Ю.Г. Решетняком, що задовольняють оцінки спотворення модулів сімей кривих (ємностей конденсаторів) в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, доведено аналог теореми про радіус ін'єктивності щодо локальних гомеоморфізмів. Основний результат наведено в термінах середнього значення від характеристики квазиконформності.

Ключові слова: відображення зі скінченним і обмеженим спотворенням, модулі сімей кривих, ємності конденсаторів.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
brusin2006@rambler.ru

Получено 07.04.13

УДК 004.655

©2013. А. С. Сенченко

О ДИСТРИБУТИВНОСТИ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ ОПЕРАЦИИ НАСЫЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИЙ ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых в табличных алгебрах операция насыщения дистрибутивна относительно операций объединения и пересечения таблиц. Приведены примеры, иллюстрирующие данные критерии.

Ключевые слова: табличная алгебра, насыщение, база данных.

1. Введение. В настоящее время системы управления базами данных широко используются практически во всех сферах деятельности человека. Наиболее распространённой является реляционная модель данных, впервые предложенная Э. Коддом в 1970 году. С математической точки зрения реляционная база данных является конечным набором конечных отношений различной размерности между заранее определёнными множествами элементарных данных.

Табличные алгебры, введённые В.Н. Редько и Д.Б. Бум, построены на основе реляционных алгебр Э. Кодда и существенно их уточняют. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и языке SQL.

В ставшей уже классической монографии по табличным алгебрам [1] найдено и доказано много различных свойств операций табличных алгебр. В настоящей работе найдены и доказаны необходимые и достаточные условия, при которых некоторые включения, доказанные в [1], превращаются в равенства.

2. Основные определения. Зафиксируем некоторое непустое множество $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, элементы которого называются атрибутами. Произвольное конечное подмножество $R = \{A'_1, \dots, A'_k\} \subseteq A$ назовем схемой, причем схема может являться пустым множеством. Строкой s схемы R называется множество пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R . Таблицей схемы R называется конечное множество строк схемы R . Далее в работе рассматриваем таблицы схемы R с количеством атрибутов k . На множестве всех таких таблиц введены такие операции:

- 1) объединение $\cup$ двух таблиц – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат хотя одной из исходных таблиц;
- 2) пересечение $\cap$ двух таблиц – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат одновременно обоим исходным таблицам;

Автор благодарит Дмитрия Борисовича Буя за постановку задачи и полезные замечания.

3) разность $T_1 - T_2$ двух таблиц – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат таблице T_1 и не принадлежат таблице T_2 .

Для введения операции насыщения нам необходимо дать определение понятия, используемого в работе в дальнейшем. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d | \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, состоящее из всевозможных значений атрибута A в таблице T . Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod_{A \in R} D_{A,T}$, где $\prod$ – оператор прямого (декартового) произведения всех атрибутов схемы T . Другими словами, мы можем понимать насыщение как аналог декартового произведения активных доменов всех атрибутов таблицы в применении к именным множествам. Активным дополнением таблицы T называется таблица $\tilde{T} = C(T) - T$.

Кроме этих операций на множестве всех таблиц введены операции проекции, селекции, соединения (в некоторых источниках, например в [2], эта операция называется эквисоединением), деления таблиц и операция переименования атрибутов; эти операции не будут использованы в настоящей работе, поэтому их определения не приводим. Табличной алгеброй называют частичную алгебру с носителем – множеством всех таблиц произвольной схемы и приведенными выше девятью операциями (насыщение рассматривается как вспомогательная операция). В табличной алгебре выделяют две пустые таблицы: таблицу T_ε , схема которой является пустым множеством и таблицу $T_\emptyset$ – пустое множество строк произвольной (в том числе и непустой) схемы.

3. Основные результаты. В монографии [1] в подразделе о свойствах насыщения и активного дополнения сформулирован и доказан ряд свойств этих операций, большая часть которых являются включениями. Автором были найдены необходимые и достаточные условия (в виде двух теорем), при которых эти включения превращаются в равенства для непустых таблиц, для пустых таблиц эти равенства тоже выполняются, но в этом случае могут не выполняться критерии. Кроме формулировки и доказательства к каждой теореме будут приведены примеры, в которых будет показано, что выполнение/невыполнение критериев приводит к выполнению/невыполнению равенства.

Теорема 1 (о дистрибутивности насыщения по объединению). *Для непустых таблиц T_1 и T_2 равенство $C(T_1 \cup T_2) = C(T_1) \cup C(T_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя одно из двух условий:*

а) *хотя бы для $k - 1$ атрибута значения их активных доменов относительно таблиц T_1 и T_2 попарно совпадают, то есть, существует не более одного атрибута, для которого значения активного домена относительно таблиц T_1 и T_2 различаются;*

б) *значение активного домена каждого атрибута относительно одной таблицы является подмножеством значения активного домена соответствующего атрибута относительно другой таблицы, то есть выполняются включения $\forall i D_{A_i, T_1} \subseteq D_{A_i, T_2}$ или $\forall i D_{A_i, T_2} \subseteq D_{A_i, T_1}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $C(T_1 \cup T_2) = C(T_1) \cup C(T_2)$. Допустим, что условие (а) не выполняется, то есть значение актив-

ного домена минимум двух атрибутов попарно различны. Пусть $D_{A_q, T_1} \neq D_{A_q, T_2}$ и $D_{A_w, T_1} \neq D_{A_w, T_2}$. Покажем, что в этом случае обязательно должно выполняться условие (б), то есть должны одновременно выполняться включения $D_{A_q, T_1} \subset D_{A_q, T_2}$ и $D_{A_w, T_1} \subset D_{A_w, T_2}$ (или $D_{A_q, T_1} \supset D_{A_q, T_2}$ и $D_{A_w, T_1} \supset D_{A_w, T_2}$).

Из $D_{A_q, T_1} \neq D_{A_q, T_2}$ следует, что существует хотя один элемент x одного активного домена, который не принадлежит другому, то есть $x \in D_{A_q, T_1} - D_{A_q, T_2} \vee x \in D_{A_q, T_2} - D_{A_q, T_1}$. Пусть $x \in D_{A_q, T_1} - D_{A_q, T_2}$. Докажем, что в таком случае выполняются включения $D_{A_q, T_2} \subset D_{A_q, T_1}$ и $D_{A_w, T_2} \subset D_{A_w, T_1}$. Допустим, что не выполняется второе включение, то есть $D_{A_w, T_2} \not\subset D_{A_w, T_1}$. Следовательно, существует такой $y \in D_{A_w, T_2}$, что $y \notin D_{A_w, T_1}$. Включения $x \in D_{A_q, T_1}$ и $y \in D_{A_w, T_2}$ по определениям объединения таблиц и активного домена влекут включения $x \in D_{A_q, T_1 \cup T_2}$ и $y \in D_{A_w, T_1 \cup T_2}$, поэтому по определению активного домена существуют такие строки $s', s'' \in T_1 \cup T_2$, что $(A_q, x) \in s'$ и $(A_w, y) \in s''$. Тогда по определению насыщения в $C(T_1 \cup T_2)$ входит строка $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, x), (A_{q+1}, d_{q+1}), \dots, (A_{w-1}, d_{w-1}), (A_w, y), (A_{w+1}, d_{w+1}), \dots, (A_k, d_k)\}$, где $d_1, \dots, d_{q-1}, d_{q+1}, \dots, d_{w-1}, d_{w+1}, \dots, d_k$ — некоторые элементы активных доменов соответствующих атрибутов $A_1, \dots, A_{q-1}, A_{q+1}, \dots, A_{w-1}, A_{w+1}, \dots, A_k$ относительно таблицы $T_1 \cup T_2$. Поскольку $x \notin D_{A_q, T_2}$, то $s \notin C(T_2)$, а поскольку $y \notin D_{A_w, T_1}$, то $s \notin C(T_1)$, следовательно $s \notin C(T_1) \cup C(T_2)$, и значит $C(T_1 \cup T_2) \neq C(T_1) \cup C(T_2)$, что неверно по допущению. Поэтому включение $D_{A_w, T_2} \subset D_{A_w, T_1}$ выполняется. Далее, исходя из доказанности включения $D_{A_w, T_2} \subset D_{A_w, T_1}$, полностью аналогично доказывается и выполнимость включения $D_{A_q, T_2} \subset D_{A_q, T_1}$. Затем точно таким же способом можно доказать выполнимость включений $D_{A_i, T_2} \subseteq D_{A_i, T_1}$ и по всем остальным атрибутам A_i (заметим, что по условию (б) строгость этих включений не требуется).

Случай, когда $x \in D_{A_q, T_2} - D_{A_q, T_1}$, влечет выполнение включений $D_{A_q, T_1} \subset D_{A_q, T_2}$ и $D_{A_w, T_1} \subset D_{A_w, T_2}$, а следовательно, и включений $D_{A_i, T_1} \subseteq D_{A_i, T_2}$ для всех $i \neq q \wedge i \neq w$ доказывается аналогично путем замены индексов таблицы T_1 на T_2 и наоборот. Таким образом мы показали, что при выполнении равенства $C(T_1 \cup T_2) = C(T_1) \cup C(T_2)$ и не выполнении условия (а) обязательно выполняется условие (б), что доказывает необходимость теоремы.

Достаточность. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть выполняется принадлежность $z \in D_{A, T_1 \cup T_2}$. Тогда:

- а) равенство $D_{A, T_1} = D_{A, T_2}$ влечет $z \in D_{A, T_1} \wedge z \in D_{A, T_2}$;
- б) включение $D_{A, T_1} \subseteq D_{A, T_2}$ влечет $z \in D_{A, T_2}$.

Доказательство леммы 1. Пусть $z \in D_{A, T_1 \cup T_2}$ и $D_{A, T_1} = D_{A, T_2}$. Принадлежность $z \in D_{A, T_1 \cup T_2}$ возможна только в том случае, когда существует такая строка $s \in T_1 \cup T_2$, что $(A, z) \in s$. По определению объединения таблиц при этом выполняется хотя одна из принадлежностей $s \in T_1$ или $s \in T_2$. Тогда $s \in T_1$ влечет $z \in D_{A, T_1}$ и из равенства $D_{A, T_1} = D_{A, T_2}$ следует принадлежность $z \in D_{A, T_2}$. Тот факт, что $s \in T_2$ влечет $z \in D_{A, T_1}$ доказывается аналогично; случай (а) доказан.

Пусть теперь $z \in D_{A, T_1 \cup T_2}$ и $D_{A, T_1} \subseteq D_{A, T_2}$. Так же как и в пункте (а) леммы в этом случае существует такая строка $s \in T_1 \cup T_2$, что $(A, z) \in s$, следовательно выполняется $s \in T_1$ или $s \in T_2$. Тогда $s \in T_1$ влечет $z \in D_{A, T_1}$, и из включения

$D_{A,T_1} \subseteq D_{A,T_2}$ следует принадлежность $z \in D_{A,T_2}$, а $s \in T_2$ влечет принадлежность $z \in D_{A,T_2}$ по определению активного домена. $\square$

Докажем теперь достаточность условия (а). Пусть у таблиц T_1 и T_2 значения активных доменов по $k-1$ атрибуту попарно совпадают: для всех $i \neq q$ выполняются равенства $D_{A_i,T_1} = D_{A_i,T_2}$. Докажем, что в этом случае выполняется равенство $C(T_1 \cup T_2) = C(T_1) \cup C(T_2)$.

В монографии [1] (лемма 2.2.1, пункт 7) доказано включение $C(T_1) \cup C(T_2) \subseteq C(T_1 \cup T_2)$. Для доказательства искомого равенства нужно доказать включение $C(T_1 \cup T_2) \subseteq C(T_1) \cup C(T_2)$. От противного, допустим, что включение не выполняется, то есть существует строка $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, x), (A_{q+1}, d_{q+1}), \dots, (A_k, d_k)\}$, которая принадлежит $C(T_1 \cup T_2)$ и не принадлежит $C(T_1) \cup C(T_2)$. По определениям активного домена и насыщения выполняются принадлежности $d_1 \in D_{A_1,T_1 \cup T_2}, \dots, d_{q-1} \in D_{A_{q-1},T_1 \cup T_2}, x \in D_{A_q,T_1 \cup T_2}, d_{q+1} \in D_{A_{q+1},T_1 \cup T_2}, \dots, d_k \in D_{A_k,T_1 \cup T_2}$. С учётом условий $D_{A_i,T_1} = D_{A_i,T_2}$ для всех $i \neq q$ и пункта (а) леммы 1 получаем, что $d_1 \in D_{A_1,T_1}$ и $d_1 \in D_{A_1,T_2}, \dots, d_{q-1} \in D_{A_{q-1},T_1}$ и $d_{q-1} \in D_{A_{q-1},T_2}, d_{q+1} \in D_{A_{q+1},T_1}$ и $d_{q+1} \in D_{A_{q+1},T_2}, \dots, d_k \in D_{A_k,T_1}$ и $d_k \in D_{A_k,T_2}$. Факт принадлежности $x \in D_{A_q,T_1 \cup T_2}$ влечет существование в таблице $T_1 \cup T_2$ такой строки s' , что $(A_q, x) \in s'$. По определению объединения таблиц в этом случае выполняется хотя одна из принадлежностей $s' \in T_1$ или $s' \in T_2$, то есть выполняется хотя бы одно из условий: $x \in D_{A_q,T_1}$ или $x \in D_{A_q,T_2}$. Если выполняется $x \in D_{A_q,T_1}$, то $s' \in C(T_1)$, а если выполняется $x \in D_{A_q,T_2}$, то $s' \in C(T_2)$. В любом случае выполняется $s' \in C(T_1) \cup C(T_2)$, что противоречит допущению. Достаточность условия (а) доказана.

Докажем теперь достаточность условия (б). Пусть выполняются включения $\forall i D_{A_i,T_1} \subseteq D_{A_i,T_2}$. От противного, допустим, что $C(T_1 \cup T_2) \neq C(T_1) \cup C(T_2)$. Как уже было показано в доказательстве достаточности условия (а), это неравенство возможно только в том случае, когда существует такая строка $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_k, d_k)\}$, что $s \in C(T_1 \cup T_2)$ и $s \notin C(T_1) \cup C(T_2)$. Тот факт, что $s \in C(T_1 \cup T_2)$ влечет выполнение принадлежностей $d_i \in D_{A_i,T_1 \cup T_2}$ для всех i . Из условия $\forall i D_{A_i,T_1} \subseteq D_{A_i,T_2}$ ввиду пункта (б) леммы 1 следует, что $\forall i d_i \in D_{A_i,T_2}$, поэтому по определению насыщения $s \in C(T_2)$, и значит, $s \in C(T_1) \cup C(T_2)$. Таким образом, допущение $s \notin C(T_1) \cup C(T_2)$ неверно; достаточность условия (б) доказана. $\square$

Проиллюстрируем критерии теоремы 1 на следующих примерах

ПРИМЕР 1.1.

	А	В	С		А	В	С
Пусть $T_1 =$	1	2	3	и $T_2 =$	2	2	1
	2	2	3		2	3	1
	2	3	3		3	3	1

Значения активных доменов $D_{A,T_1} = \{1, 2\}$, $D_{B,T_1} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_1} = \{3\}$ и $D_{A,T_2} = \{2, 3\}$, $D_{B,T_2} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_2} = \{1\}$ не удовлетворяют ни одному из условий, равенство не должно выполняться. Действительно,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 1 \\
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 3 & 1 \\
 1 & 3 & 3 \\
 2 & 2 & 1 \\
 2 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 1 \\
 2 & 3 & 3 \\
 3 & 2 & 1 \\
 3 & 2 & 3 \\
 3 & 3 & 1 \\
 3 & 3 & 3
 \end{array} \\
 C(T_1 \cup T_2) =
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 3 & 3 \\
 2 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 3
 \end{array} \\
 C(T_1) =
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 2 & 2 & 1 \\
 2 & 3 & 1 \\
 3 & 2 & 1 \\
 3 & 3 & 1
 \end{array} \\
 C(T_2) =
 \end{array}
 , \quad \text{то есть}$$

$C(T_1 \cup T_2) \neq C(T_1) \cup C(T_2)$.

ПРИМЕР 1.2.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 3 \\
 2 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 3
 \end{array} \\
 \text{Пусть } T_1 =
 \end{array}
 \text{ и }
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 4 \\
 2 & 2 & 4 \\
 2 & 3 & 4
 \end{array} \\
 T_2 =
 \end{array}
 .$$

Значения активных доменов $D_{A,T_1} = \{1, 2\}$, $D_{B,T_1} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_1} = \{3\}$ и $D_{A,T_2} = \{1, 2\}$, $D_{B,T_2} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_2} = \{4\}$ удовлетворяют условию (а), равенство должно выполняться. Действительно,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 2 & 4 \\
 1 & 3 & 3 \\
 1 & 3 & 4 \\
 2 & 2 & 3 \\
 2 & 2 & 4 \\
 2 & 3 & 3 \\
 2 & 3 & 4
 \end{array} \\
 C(T_1 \cup T_2) =
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 3 & 3 \\
 2 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 3
 \end{array} \\
 C(T_1) =
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 4 \\
 1 & 3 & 4 \\
 2 & 2 & 4 \\
 2 & 3 & 4
 \end{array} \\
 C(T_2) =
 \end{array}
 , \quad \text{то есть}$$

$C(T_1 \cup T_2) = C(T_1) \cup C(T_2)$.

ПРИМЕР 1.3.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 1 & 2 & 3 \\
 2 & 2 & 1 \\
 2 & 3 & 3
 \end{array} \\
 \text{Пусть } T_1 =
 \end{array}
 \text{ и }
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\
 2 & 2 & 1 \\
 2 & 3 & 1
 \end{array} \\
 T_2 =
 \end{array}
 .$$

Значения активных доменов $D_{A,T_1} = \{1, 2\}$, $D_{B,T_1} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_1} = \{1, 3\}$ и $D_{A,T_2} = \{2\}$, $D_{B,T_2} = \{2, 3\}$, $D_{C,T_2} = \{1\}$ удовлетворяют условию (б), равенство должно выполняться. Действительно,

$$C(T_1 \cup T_2) = \begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}, C(T_1) = \begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}, C(T_2) = \begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}, \text{ то есть}$$

Теорема 2 (о дистрибутивности насыщения по пересечению). При $C(T_1) \cap C(T_2) \neq T_\emptyset$ эквивалентны утверждения:

- 1) выполняется равенство $C(T_1 \cap T_2) = C(T_1) \cap C(T_2)$;
- 2) выполняются равенства $\forall i \ D_{A_i, T_1 \cap T_2} = D_{A_i, T_1} \cap D_{A_i, T_2}$;
- 3) для любого индекса i и каждого элемента x из множества $D_{A_i, T_1} \cap D_{A_i, T_2}$ существует такая строка $s \in T_1 \cap T_2$, что $(A_i, x) \in s$.

Доказательство. Покажем сначала эквивалентность утверждений (1) и (2). Пусть выполняется равенство (1). От противного, допустим, что не выполняется равенство (2), то есть $D_{A_q, T_1} \cap T_2 \neq D_{A_q, T_1} \cap D_{A_q, T_2}$ для некоторого индекса q . При этом возможны два случая:

а) $\exists x \in A_{q,T_1} \cap T_2$ и $x \notin D_{A_q,T_1} \cap D_{A_q,T_2}$. Тогда по определению активного домена, существует такая строка $s \in T_1 \cap T_2$, что $(A_q, x) \in s$. Включение $s \in T_1 \cap T_2$ влечёт $s \in T_1$ и $s \in T_2$, следовательно $x \in D_{A_q,T_1}$ и $x \in D_{A_q,T_2}$, то есть $x \in D_{A_q,T_1} \cap D_{A_q,T_2}$. Получившееся противоречие доказывает невозможность этого случая.

б) $\exists y \in D_{A_q, T_1} \cap D_{A_q, T_2}$ и $y \notin D_{A_q, T_1} \cap T_2$. Тогда $y \in D_{A_q, T_1}$ и $y \in D_{A_q, T_2}$. По условию таблица $C(T_1) \cap C(T_2)$ непустая, следовательно, в ней существует хотя бы одна строка. Пусть $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_k, d_k)\} \in C(T_1) \cap C(T_2)$. Тогда по определению активного домена $d_1 \in D_{A_1, T_1}$ и $d_1 \in D_{A_1, T_2}, \dots, d_k \in D_{A_k, T_1}$ и $d_k \in D_{A_k, T_2}$. По определению насыщения получаем, что $s' = \{(A_1, d_1), \dots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, y), (A_{q+1}, d_{q+1}), \dots, (A_k, d_k)\} \in C(T_1)$ и $s' \in C(T_2)$, то есть $s' \in C(T_1) \cap C(T_2)$. Из равенства (1) следует, что $s' \in C(T_1 \cap T_2)$, поэтому $y \in D_{A_q, T_1} \cap T_2$, что доказывает невозможность этого случая; импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Пусть теперь выполняется равенство (2). От противного, допустим, что не выполняется равенство (1). В монографии [1] доказано включение $C(T_1 \cap T_2) \subseteq C(T_1) \cap C(T_2)$, поэтому равенство (1) может не выполняться только в случае, когда существует такая строка $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_k, d_k)\} \in C(T_1) \cap C(T_2)$, что $s \notin C(T_1 \cap T_2)$. Рассмотрим этот случай. Из $s \in C(T_1) \cap C(T_2)$ следует, что $s \in C(T_1)$ и $s \in C(T_2)$. Из равенства (2) и определения активного домена получаем, что $d_1 \in D_{A_1, T_1} \cap T_2, \dots, d_k \in D_{A_k, T_1} \cap T_2$. Тогда по определению насыщения выполняется $\{(A_1, d_1), \dots, (A_k, d_k)\} \in C(T_1 \cap T_2)$, что противоречит допущению, импликация (2) $\Rightarrow$ (1) доказана, поэтому утверждения (1) и (2) равносильны.

Докажем теперь, что эквивалентны утверждения (1) и (3). Пусть выполняется равенство (1). От противного, допустим, что не выполняется утверждение (3), то

есть $\exists x \in D_{A_q, T_1} \cap D_{A_q, T_2} \mid \forall s \in T_1 \cap T_2 (A_q, x) \notin s$ для некоторого индекса q . По доказанному выше равенство (1) эквивалентно равенству (2). Из равенства (2) следует, что $x \in D_{A_q, T_1} \cap T_2$, значит по определению активного домена для некоторой строки $s' \in T_1 \cap T_2$ выполняется принадлежность $(A_q, x) \in s'$, что противоречит допущению. Импликация $(1) \Rightarrow (3)$ доказана.

Пусть теперь выполняется утверждение (3). От противного, допустим, что не выполняется равенство (1), что может быть только в том случае, когда $\exists s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_k, d_k)\} \in C(T_1) \cap C(T_2)$ и $s \notin C(T_1 \cap T_2)$. Рассмотрим этот случай. $s \notin C(T_1 \cap T_2)$ влечет $d_q \notin D_{A_q, T_1} \cap T_2$ для некоторого индекса q . Поскольку $s \in C(T_1) \cap C(T_2)$, и, значит $s \in C(T_1)$ и $s \in C(T_2)$, то по определениям активного домена и насыщения выполняются включения $d_q \in D_{A_q, T_1}$ и $d_q \in D_{A_q, T_2}$, поэтому $d_q \in D_{A_q, T_1} \cap D_{A_q, T_2}$. По условию (3) в этом случае должна существовать такая строка $s' \in T_1 \cap T_2$, что $(A_q, d_q) \in s'$. По определению активного домена $d_q \in D_{A_q, T_1} \cap T_2$, противоречие доказывает неверность допущения, импликация $(3) \Rightarrow (1)$ доказана. $\square$

Проиллюстрируем критерий теоремы 2 на примерах.

ПРИМЕР 2.1.

	A	B	C		A	B	C
Пусть $T_1 =$	1	2	1	и $T_2 =$	1	1	1
	1	3	3		1	2	1
	2	3	1		3	1	3
	4	2	1		3	2	4
	4	2	3		4	2	3

Значения активных доменов $D_{A, T_1} = \{1, 2, 4\}$, $D_{B, T_1} = \{2, 3\}$, $D_{C, T_1} = \{1, 3\}$ и $D_{A, T_2} = \{1, 3, 4\}$, $D_{B, T_2} = \{1, 2\}$, $D_{C, T_2} = \{1, 3, 4\}$; общие значения активных доменов $(A, 1)$, $(A, 4)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$, $(C, 3)$. Общие строки T_1 и T_2 $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$ и $\{(A, 4), (B, 2), (C, 3)\}$ покрывают все общие значения доменов, выполняется утверждение (3), равенство (1) должно выполняться. Действительно,

	A	B	C		A	B	C
	1	2	1		1	2	1
$C(T_1 \cap T_2) =$	1	2	3	, $C(T_1) \cap C(T_2) =$	1	2	3
	4	2	1		4	2	1
	4	2	3		4	2	3
, то есть $C(T_1 \cap T_2) =$							
$C(T_1) \cap C(T_2).$							

ПРИМЕР 2.2.

	A	B	C		A	B	C
Пусть $T_1 =$	1	1	3	и $T_2 =$	1	1	3
	1	2	2		1	2	1
	1	4	2		2	1	3
	4	1	3		2	2	1
	4	4	2		4	1	3

Значения активных доменов $D_{A, T_1} = \{1, 4\}$, $D_{B, T_1} = \{1, 2, 4\}$, $D_{C, T_1} = \{2, 3\}$ и $D_{A, T_2} = \{1, 2, 4\}$, $D_{B, T_2} = \{1, 2\}$, $D_{C, T_2} = \{1, 3\}$; общие значения активных доменов $(A, 1)$, $(A, 4)$, $(B, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$. Общие строки $\{(A, 1), (B, 1), (C, 3)\}$ и $\{(A, 4),$

$(B, 1), (C, 3)$ не покрывают все общие значения доменов (не покрыто значение $(B, 2)$), утверждение (3) не выполняется, равенство (1) не должно выполняться. Действительно,

$$C(T_1 \cap T_2) = \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}, C(T_1) \cap C(T_2) = \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{array}, \text{ то есть } C(T_1 \cap T_2) \neq$$

$C(T_1) \cap C(T_2)$.

4. Выводы. В работе исследованы свойства операций насыщения и активного дополнения табличных алгебр. Найдены критерии, при которых некоторые включения из [1] превращаются в равенства. Результаты работы могут быть использованы в теории обобщенных табличных алгебр и, на наш взгляд, для оптимизации запросов в реляционных базах данных.

1. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков]. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
2. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.

A. S. Senchenko

On a distributivity of a saturation to join and intersection in table algebra.

In this paper there is found the necessary and sufficient conditions due to which a saturation operation is distributive to operations join and intersection. This conditions are illustrated in examples.

Keywords: table algebra, saturation, database.

О. С. Сенченко

Про дистрибутивність в табличних алгебрах операції насичення відносно операцій об'єднання та перетину.

В роботі знайдено необхідні та достатні умови, за яких у табличних алгебрах операція насичення є дистрибутивною відносно операцій об'єднання та перетину таблиць. Наведені приклади, що ілюструють знайдені критерії.

Ключові слова: таблична алгебра, насичення, бази даних.

Донбасский государственный педагогический ун-т
senchenko@pisem.net

Получено 05.04.13

УДК 512.552+519.95

©2013. В. В. Скобелев

ПРОБЛЕМА ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНИМОСТИ ФОРМУЛ РАЗРЕШИМЫХ ТЕОРИЙ (ОБЗОР)

Данная работа посвящена анализу современного состояния исследований проблемы проверки выполнимости формул разрешимых теорий 1-го порядка на основе «ленивого подхода», т.е. на интеграции SAT-решателей с T -решателями. Охарактеризована структура SAT-решателя, построенного на основе управляющей конфликтами DPLL-процедуре. Рассмотрены основные понятия и принципы, используемые в процессе построения современных T -решателей. Изложение иллюстрируется на примере решателя, предназначенного для анализа выполнимости формул линейной целочисленной арифметики. Охарактеризованы методы организации взаимодействия SAT-решателей и T -решателей.

Ключевые слова: теории 1-го порядка, выполнимость формул, решатели.

1. Введение. Применение информационных технологий практически во всех сферах деятельности человечества привело к необходимости автоматизации процессов управления, проектирования и сопровождения реальных (в том числе, информационных) систем с критической областью применения. Широкий класс реальных задач (организация потоков информации в компьютерных сетях, формальная верификация систем, представление и обработка знаний, планирование, исследование операций, тестирование дискретных устройств и т.д.), а также задач дискретной математики (основанных на использовании теоретико-множественных, теоретико-числовых, логических, графовых и сетевых моделей) имеет следующее общее свойство: решение задачи естественно сводится к *проверке выполнимости* некоторой *формулы* (см., напр., [1-10]). Именно это свойство и лежит в основе разработки средств автоматизированного решения (т.е. *решателей*) всех таких задач.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выполнимость формулы математической логики означает существование интерпретации (говорят также, модели), в которой она истинна (см., напр., [11, 12]).

Проверку выполнимости формулы F исчисления высказываний можно осуществить с помощью следующей рекурсивной схемы. Рассмотрим двоичное размеченное ориентированное ранжированное дерево $\mathfrak{D}_F$, построенное в соответствии со следующими правилами:

1. Корень дерева $\mathfrak{D}_F$ отмечен формулой F .
2. Осуществляется выбор висячей вершины v дерева $\mathfrak{D}_F$ и переменной x , входящей в формулу F_v , являющуюся меткой вершины v .
3. Из вершины v выходят две дуги, ведущие в вершины v_l и v_r следующего уровня. Дуга, ведущая в вершину v_l (соответственно, в вершину v_r), имеет метку $x \mapsto \top$ (соответственно, $x \mapsto \perp$). Метка вершины v_l (соответственно, вершины v_r) – формула, полученная из F_v подстановкой $x \mapsto \top$ (соответственно, $x \mapsto \perp$), и упрощенная на основе тождеств исчисления высказываний (символы $\top$ и $\perp$ означают, соответственно, логические значения **true** и **false**).

Построение дерева $\mathfrak{D}_F$ осуществляется до тех пор, пока либо не появится вершина с меткой $\top$, либо каждая висячая вершина имеет метку $\perp$ (такое поддерево дерева $\mathfrak{D}_F$

называется *семантическим деревом* формулы F). В 1-м случае формула F – выполнимая, а во 2-м случае – невыполнимая (т.е. тождественно ложная во всех интерпретациях). Подчеркнем, что семантическое дерево (в отличие от таблиц истинности) осуществляет (вообще говоря, частичное) присвоение истинностных значений булевым переменным с целью поиска одной (безразлично, какой именно) интерпретации, в которой исследуемая формула исчисления высказываний является выполнимой.

Приведенная выше схема представляет класс рекурсивных алгоритмов, каждый из которых определяется правилами выбора раскрываемой вершины v и переменной x , входящей в формулу F_v . Известно, что (см., напр., [13]) проверка выполнимости формул исчисления высказываний – NP-полная задача.

Значительные усилия были затрачены на разработку методов, позволяющих упростить решение этой задачи на практике. Один из классов таких методов основан на применении *правила резолюции*: следствием дизъюнктов $A \vee B$ и $\bar{A} \vee C$ является дизъюнкт $B \vee C$ (этот дизъюнкт называется *резольвентой*). Известно, что формула невыполнима тогда и только тогда, когда конечным числом применений правила резолюции из нее выводится значение $\perp$. Комбинация построения семантического дерева и применения правила резолюции и лежит в основе DPLL-процедуры [14, 15] (DPLL – сокращение от Davis-Putnam-Logemann-Loveland).

Для исчисления предикатов ситуация иная. Известно, что не существует алгоритм проверки выполнимости формул исчисления предикатов. Однако существуют алгоритмы, которые для любой выполнимой формулы исчисления предикатов за конечное число шагов устанавливает ее выполнимость. Идея их построения состоит в следующем.

Замкнутая (т.е. не содержащая свободных переменных) формула F_1 преобразуется в эквивалентную формулу F_2 , не содержащую логические связки, отличные от $\vee$, $\wedge$ и $\neg$. Формула F_2 приводится к *предваренной нормальной форме* $F_4 = (Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)F_3$, где $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы, а F_3 – бескванторная формула. Элиминацией кванторов существования формула F_4 приводится к *сколемовской нормальной форме* $F_6 = (\forall y_1)\dots(\forall y_m)F_5$, где F_5 – бескванторная формула. В силу теоремы Эрбрана невыполнимость формулы F_6 (т.е. используется метод доказательства «от противного») эквивалентна существованию конечного невыполнимого подмножества множества формул, полученных подстановкой в F_5 всевозможных термов, которые можно построить при помощи предметных констант и функциональных символов, встречающихся в F_5 . Таким образом, проверка невыполнимости формулы F_6 , по своей сути, сводится к проверке невыполнимости конечного множества формул исчисления высказываний.

Задача, представленная формулой математической логики, может быть решена применением SAT-решателя (т.е. программной системы, предназначенной для проверки выполнимости формул математической логики). Если задача представлена формулой разрешимой теории 1-го порядка $\mathcal{T}$, то говорят о выполнимости по модулю этой теории. В этом случае используется обозначение $SMT(\mathcal{T})$ (SMT – сокращение фразы «Satisfiability Modulo Theory»). Для решения таких задач применяется $\mathcal{T}$ -решатель (т.е. программная система, осуществляющая анализ совместности ограничений, представленных атомами теории $\mathcal{T}$). Основы построения $\mathcal{T}$ -решателей заложены в работах [4, 16–22].

В течение последнего десятилетия значительные усилия были направлены на исследование методов интеграции SAT-решателей и $\mathcal{T}$ -решателей, что дает возмож-

ность «кодировать» задачу формулой математической логики и применить для анализа выполнимости последней SAT-решатель. При этом $\mathcal{T}$ -решатели применяются только для проверки совместности (в теории $\mathcal{T}$) множеств литералов, кодирующих ограничения, представленные атомами теории $\mathcal{T}$. Такой подход (он получил имя «ленивый подход» – lazy approach) дает возможность существенно расширить класс решаемых задач. В настоящее время этот подход считается наиболее перспективным при разработке средств автоматизированного решения задач (см., напр., [23-32]).

Цель данного обзора – анализ современного состояния исследования проблемы $SMT(\mathcal{T})$ на основе «ленивого подхода». В п. 2 охарактеризованы SAT-решатели, основанные на использовании DPLL-процедуры. В п. 3 представлены основные понятия и принципы, лежащие в основе построения $\mathcal{T}$ -решателей. В п. 4 рассмотрены методы организации взаимодействия SAT-решателей и $\mathcal{T}$ -решателей. Заключение содержит ряд выводов.

2. SAT-решатели. Успехи в разработке методов повышения эффективности анализа выполнимости формул исчисления высказываний [33-37] привели к появлению ряда достаточно мощных SAT-решателей, основанных на использовании DPLL-процедуры (см., напр., [38-42]). Такие SAT-решатели, для краткости, называют DPLL. Существующие DPLL можно разбить на следующие два класса:

1. DPLL, основанные на методе ветвей и границ [43] (look-ahead DPLL [33]). В этих DPLL с каждой вершиной v дерева ассоциируется множество S_v литералов, которым еще не присвоено истинностное значение (напомним, что *литералом* называют переменную или ее отрицание). Каждый раз раскрывается вершина v , для которой множество S_v содержит наиболее перспективный литерал l . Раскрытие вершины состоит в присвоении истинностного значения $l \mapsto \top$, т.е. в построении вершины v' следующего уровня, в которую из v идет дуга с отметкой $l \mapsto \top$, и в ассоциировании с вершиной v' множества $S_{v'} = S_v \setminus \{l, \bar{l}\}$.

2. DPLL, управляющие конфликтами (conflict driven DPLL [36,37]). В этих DPLL реализован поиск с возвратом [43], основанный на анализе и устранении конфликтов, возникающих при каждом раскрытии вершины дерева, приводящем к невыполнимости анализируемой формулы.

Отметим, что в настоящее время не известны успешные применения DPLL, основанных на методе ветвей и границ, при исследовании проблемы $SMT(\mathcal{T})$ на основе «ленивого подхода».

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для проверки выполнимости формул исчисления высказываний DPLL, основанные на методе ветвей и границ, более эффективны (по затрачиваемому времени), чем DPLL, управляющие конфликтами. Таким образом, затраты, связанные с управлением конфликтами, являются, по-видимому, той ценой, которую приходится платить за возможность применения «ленивого подхода» к исследованию проблемы $SMT(\mathcal{T})$.

Охарактеризуем структуру DPLL, управляющих конфликтами.

С анализируемой формулой исчисления высказываний, представленной в виде КНФ, ассоциируется упорядоченная пара (φ, μ) , где φ – множество дизъюнктов, входящих в КНФ, а μ – множество значений истинности, присвоенных переменным (первоначально, $\mu = \emptyset$). DPLL, управляющая конфликтами состоит из следующих

трех процедур.

1. *Препроцессорная обработка данных.* Эта процедура предназначена для упрощения анализируемого множества дизъюнктов φ . Основана на комбинации следующих методов [44-46]:

а) для каждой переменной x , встречающейся в множестве φ либо только без отрицания, либо только с отрицанием из множества φ удаляются все дизъюнкты, содержащие эту переменную (так как эти дизъюнкты являются выполнимыми), а в множество μ добавляется соответствующее истинностное значение этой переменной (а именно, $x \mapsto \top$, если переменная x входит в φ без отрицания, и $x \mapsto \perp$, если переменная x входит в φ с отрицанием);

б) для каждого дизъюнкта, принадлежащего множеству φ , удаляются все дизъюнкты, частью которых является этот дизъюнкт;

в) пары дизъюнктов, принадлежащих множеству φ , к которым применимо правило резолюции, заменяются их резольвентами, а истинностные значения переменных, по которым осуществляется свертка, добавляются в множество μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. После препроцессорной обработки данных исходная пара (φ, μ) преобразуется в экви-выполнимую пару (φ', μ') , т.е. формула $\varphi \wedge \mu$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\varphi' \wedge \mu'$.

2. *Ветвление.* Эта процедура реализует *прямой ход* поиска с возвращением и предназначена для присвоения истинностных значений литералам, встречающимся в обрабатываемом множестве дизъюнктов. Основана на использовании того или иного *эвристического метода* (или их комбинации). На практике используются следующие эвристические методы:

а) выбор литерала, наиболее часто встречающегося в дизъюнктах минимальной длины, и присвоение ему истинностного значения [3, 35];

б) выбор литерала, приводящего к минимальному (по мощности) анализируемому множеству дизъюнктов, и присвоение ему истинностного значения [47];

в) выбор литерала, в соответствии со списком приоритетов переменных, и присвоение ему истинностного значения [7, 48];

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Список приоритетов переменных составляется (с участием пользователя) при кодировании реальной задачи формулой математической логики, исходя из значения этих переменных для решаемой задачи.

г) выбор литерала из списка литералов, входящих в дизъюнкты, рассмотренные на предыдущем шаге, в соответствии со значением той или иной меры, оценивающей вклад литерала в построение решения задачи, и присвоение ему истинностного значения [38-40];

д) выбор литералов на основе дедукции [40, 46, 49], т.е. итеративном анализе, направленном на выделение множества ψ эквивалентных (для выполнимости анализируемой формулы) под-дизъюнктов, подстановке в обрабатываемое множество дизъюнктов новой пропозициональной переменной вместо элементов множества ψ , и присвоение этой переменной истинностного значения $\top$.

3. *Анализ конфликтов.* Эта процедура реализует *обратный ход* (backtracking) поиска с возвращением, предназначена для модификации множества значений ис-

тинности, присвоенных переменным, и состоит в следующем [34, 36, 42, 50].

Представим текущее состояние поиска с возвращением (см., напр., [43]) в виде пути

$$\emptyset \xrightarrow{v_0} (l_1, D_1) \xrightarrow{v_1} (l_2, D_2) \xrightarrow{v_2} \cdots \xrightarrow{v_n} (l_n, D_n), \quad (1)$$

идущего из корня v_0 дерева поиска в вершину v_n , где l_i ($i = 1, \dots, n$) – такой литерал, что присвоение значения истинности $l_i \mapsto \top$ порождает вершину v_i , а D_i – дизъюнкт, на основе которого присвоено это значение.

Анализ вершины v_n состоит в следующем. Проверяется, существует ли среди дизъюнктов, которые предстоит обработать, дизъюнкт, имеющий значение $\perp$.

Если такого дизъюнкта нет, то из вершины v_n продолжается прямой ход.

Если же существует такой дизъюнкт D , то следующим образом реализуется обратный ход (через $Res(D', D'')$ обозначена резольвента дизъюнктов D' и D''). Последовательно вычисляются резольвенты $R_1, R_2, \dots$, где

$$R_i = \begin{cases} Res(D, D_n), & \text{если } i = 1 \\ Res(R_{i-1}, D_{n-i+1}), & \text{если } i \geq 2 \end{cases}.$$

Эти вычисления осуществляются до тех пор, пока не будет получена резольвента $R_j = \bar{l}_r \vee D'$, где $r \in \{j+1, \dots, n\}$, а $D' = \bigvee_{j=1}^h \bar{l}_{i_j}$ ($1 \leq i_1 \cdots < i_h \leq n-j$).

Обратный ход состоит в том, что текущее состояние (1) поиска с возвращением заменяется текущим состоянием

$$\emptyset \xrightarrow{v_0} (l_1, D_1) \xrightarrow{v_1} (l_2, D_2) \xrightarrow{v_2} \cdots \xrightarrow{v_h} (l_h, D_h) \xrightarrow{v_{h+1}} (\bar{l}_r, D).$$

После этого осуществляется анализ вершины v_{h+1} .

Выше охарактеризована структура DPLL, управляющих конфликтами. Отметим, что в соответствующих программных реализациях для сокращения временных и емкостных затрат используются также дополнительные приемы, в том числе и псевдослучайный выбор объектов (см., напр., [51]).

В последнее десятилетие значительные усилия были направлены на разработку формальных моделей DPLL и SMT-систем, построенных на основе «ленивого подхода». Такие модели определяются системой продукций (rule-based systems) (см., напр., [26, 52-54]), а их значение определяется следующими двумя факторами.

Во-первых, они являются частью математического аппарата, предназначенного для унифицированного построения решателей, построенных на основе «ленивого подхода».

Во вторых, появляется возможность доказать для разрабатываемых решателей такие основные, с позиции теории алгоритмов, свойства, как *корректность* (soundness), *полнота* и *остановка*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По-видимому, одной из первых таких формальных моделей является (построенная на основе модели, разработанной В. Аккерманом в середине XX века) *теория*

равенства и неинтерпретируемых функций $\mathcal{EUF}$ (equality and uninterpreted functions) [2, 55-57]. Эта теория является бескванторной теорией 1-го порядка, определяемой обычными аксиомами равенства

$$x = x, \quad (x = y) \rightarrow (y = x), \quad (x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$$

и аксиомами конгруэнтности (f – функциональный, а P – предикатный символы)

$$\bigwedge_{i=1}^n (x_i = y_i) \rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\bigwedge_{i=1}^n (x_i = y_i) \rightarrow (P(x_1, \dots, x_n) = P(y_1, \dots, y_n)).$$

Существующие $\mathcal{EUF}$ -решатели имеют полиномиальную сложность. Их внедрение на верхний уровень обработки замкнутых относительно конгруэнции структур данных является мощным средством выявления конфликтов.

3. $\mathcal{T}$ -решатели. Построение современных $\mathcal{T}$ -решателей осуществляется на основе следующего подхода, получившего имя *наслоение* (layering) [58, 59].

Выделяется такая последовательность подтеорий

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \dots \subset \mathcal{T}_n = \mathcal{T},$$

что проверка совместности ограничений для теории $\mathcal{T}_i$ ($i = 1, \dots, n-1$), проще, чем соответствующая проверка для теории $\mathcal{T}_{i+1}$. Конструируется последовательность $S_1, \dots, S_n$ решателей возрастающей выразительности (и, как следствие, сложности), где S_i ($i = 1, \dots, n$) – $\mathcal{T}_i$ -решатель. Если $\mathcal{T}_i$ -решатель S_i установил, что исследуемое множество ограничений несовместно, то $\mathcal{T}$ -решатель выдает **unsat** без обращения к решателям $S_{i+1}, \dots, S_n$.

Кроме ответа **sat** (множество ограничений совместно) или **unknown** (вывод о совместности множества ограничений не сделан) предусмотрена возможность выдачи $\mathcal{T}$ -решателем следствий, установленных в процессе анализа исследуемого множества ограничений, представленных атомами теории $\mathcal{T}$. В случае ответа **sat** эти следствия называются *леммами* теории $\mathcal{T}$. Аналогичным образом, кроме ответа **unsat** предусмотрена возможность выдачи $\mathcal{T}$ -решателем *конфликтных множеств*, т.е. тех или иных подмножеств ограничений, наличие которых приводит к невыполнимости исследуемого множества ограничений.

Проиллюстрируем особенности построения $\mathcal{T}$ -решателей на примере задачи проверки выполнимости формул линейной арифметики $\mathcal{LA}$, т.е. атомы этой теории – это формулы вида

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \diamond b \quad (\diamond \in \{\leq, <, \neq, =, \geq, >\}).$$

Отметим, что эта задача наиболее полно проработана на текущий момент.

ПРИМЕР. Для проверки выполнимости бескванторных формул линейной рациональной арифметики $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ разработан ряд эффективных на практике $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решателей, основанных на использовании симплекс-метода (см., напр., [2, 60-62]). Иная ситуация имеет место

в случае проверки выполнимости бескванторных формул линейной целочисленной арифметики $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$. Известно, что эта задача – NP-полная, а $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатели, аналогичные предложенным в [63,64], далеко не всегда справляются с решением реальных задач. В [65] предложен следующий достаточно эффективный на практике $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель в предположении, что атомы имеют вид

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \diamond b \quad (\diamond \in \{=, \leq\}).$$

Вначале применяется $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решатель. Если он выдает **unsat**, то $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель также выдает **unsat** и прекращает работу. Если же $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решатель выдает **sat** (т.е. конфликты не обнаружены), то осуществляется проверка целочисленности значений переменных. В случае положительного ответа $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **sat** и прекращает работу. В случае отрицательного ответа активируется модуль, предназначенный для анализа системы линейных диофантовых уравнений.

Первая процедура проверяет, есть ли среди анализируемых уравнений такое уравнение $\sum_i a_{hi} x_i + b_h = 0$, что НОД чисел a_{hi} не является делителем числа b_h . В случае положительного ответа $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **unsat** (так как анализируемая система линейных диофантовых уравнений несовместна) и прекращает работу. В случае отрицательного ответа активируется процедура, которая следующим образом последовательно преобразует каждое из анализируемых уравнений.

В уравнении

$$\sum_i a_{hi} x_i + b_h = 0 \tag{2}$$

выбирается наименьший по модулю ненулевой коэффициент a_{hk} . Возможны следующие два случая:

1. Пусть $|a_{hk}| = 1$. Тогда уравнение (2) приводится к виду $x_k = - \sum_{i \neq k} \alpha_{kh} a_{hi} x_i - \alpha_{kh} b_h$,

где $\alpha_{kh} = a_{hk} |a_{hk}|^{-1}$. Эта подстановка осуществляется во все остальные уравнения.

2. Пусть $|a_{hk}| > 1$. Тогда уравнение (2) приводится к виду

$$a_{hk}(x_k + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(q)} x_i + b_h^{(q)}) + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(r)} x_i + b_h^{(r)} = 0,$$

где $a_{hi}^{(q)}$ и $a_{hi}^{(r)}$ (соответственно, $b_h^{(q)}$ и $b_h^{(r)}$) – частное и остаток от деления a_{hi} на a_{hk} (соответственно, b_h на a_{hk}). Вводится новая переменная $x_t = x_k + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(q)} x_i + b_h^{(q)}$. Эта подстановка осуществляется во все уравнения. Такое преобразование применяется к анализируемому уравнению (2) до тех пор, пока не возникнет 1-й случай (что всегда происходит через конечное число шагов).

Если при выполнении рассмотренной процедуры обнаружены конфликты, то $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **unsat** и прекращает работу. Если же конфликты не обнаружены, то полученная система $x_j = \sum_{i \neq j} a_{ji} x_i + c_j$ линейных диофантовых уравнений используется в качестве подстановки в анализируемую систему неравенств и активируется модуль, предназначенный для анализа системы линейных неравенств.

Вначале каждое такое неравенство $\sum_i a_i x_i + b \leq 0$, что НОД g чисел a_i не является делителем числа b преобразуется в неравенство $\sum_i a_i g^{-1} x_i + \lceil b g^{-1} \rceil \leq 0$.

Затем активируется $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решатель. Если выдает **sat**, то осуществляется проверка целочисленности значений переменных. В случае положительного ответа $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **sat** и прекращает работу. В случае отрицательного ответа активируется модуль, реализующий метод ветвей и границ.

Этот модуль следующим образом рекурсивно разбивает анализируемую задачу на две подзадачи добавлением дополнительных ограничений в исследуемую формулу.

Пусть $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решатель ассоциировал с переменной x_k нецелочисленное значение α_k . Дополнительное ограничение для 1-й подзадачи – неравенство $x_k - \lfloor \alpha_k \rfloor \leq 0$, а для 2-й подзадачи – неравенство $-x_k + \lceil \alpha_k \rceil \leq 0$. После этого к каждой из подзадач применяется $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ -решатель. Эти вычисления осуществляются до тех пор, пока либо $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **sat**, либо будет установлено, что все подзадачи невыполнимы. В последнем случае $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решатель выдает **unsat**.

Исследования, связанные с разработкой процедур анализа формул $\mathcal{LA}$ естественно привели к выделению следующих двух подтеорий.

1. *Разностная логика $\mathcal{DL}$* (difference logic) [52,66-68]. Атомы этой теории – формулы вида $x - y \diamond a$, где $\diamond \in \{\leq, <, \neq, =, \geq, >\}$. Существующие решатели для $\mathcal{DL}(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{DL}(\mathbb{Z})$ имеют полиномиальную сложность. Большинство из них основано на сведении проверки выполнимости множества неравенств к проверке отсутствия отрицательных циклов в графе ограничений (constraint graph) [69]. Последний определяется следующим образом. Вершины отмечены переменными. Из вершины с меткой « x » идет дуга в вершину с меткой « y » тогда и только тогда, когда анализируемое множество неравенств содержит неравенство $x - y \leq a$. Эта дуга имеет метку « a ».

2. *Теория двух целых переменных на неравенство $\mathcal{UTVPI}$* (unit-two-variable-per-inequality) [70,71]. Эта теория является подтеорией теории $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$, а ее атомы имеют вид $\pm x \pm y \leq a$. Существующие $\mathcal{UTVPI}$ -решатели имеют полиномиальную сложность. Большинство из них основано на итеративном построении транзитивного замыкания: при добавлении нового ограничения выводятся всевозможные следствия до тех пор, пока либо будет получено противоречие, либо будет достигнута неподвижная точка.

Анализ $\mathcal{EUF}$ и $\mathcal{LA}$ показал, что сложность решателей, во-многом, характеризуется такими свойствами теории $\mathcal{T}$, как «быть выпуклой» (convex) и «быть бесконечно устойчивой» (stably-infinite) [19]. Эти свойства определяются следующим образом.

Теория $\mathcal{T}$ *выпукла*, если для любой конъюнкции K ее литералов и для любой дизъюнкции $\bigvee_{i=1}^n (x_i = y_i)$ (где x_i и y_i – переменные теории $\mathcal{T}$)

$$\left(K \models_{\mathcal{T}} \bigvee_{i=1}^n (x_i = y_i) \right) \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N}_n) (K \models_{\mathcal{T}} (x_i = y_i)).$$

Теория $\mathcal{T}$ *бесконечно устойчива*, если для любой $\mathcal{T}$ -выполнимой формулы φ существует модель с бесконечной областью, в которой формула φ выполнима.

Отметим, что $\mathcal{EUF}$, $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{DL}(\mathbb{Q})$ – бесконечно устойчивые и выпуклые теории, а $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{DL}(\mathbb{Z})$ и $\mathcal{UTVPI}$ – бесконечно устойчивые и не выпуклые теории.

Значительные усилия исследователей были направлены на построение решателей для работы с основными структурами данных. Рассмотрим их кратко.

Теория битовых векторов $\mathcal{BV}$ [55, 72-79] является теорией 1-го порядка с равенством. Она предназначена для анализа дискретных устройств, представленных на языке регистровых передач, а также для верификации программ. Ее основные операции – конкатенация, выбор подслова, сложение и умножение по заданному модулю, а также побитовые логические операции над векторами одной и той же длины. Эта теория не является ни выпуклой, ни бесконечно устойчивой. Известно, что проверка выполнимости безкванторных формул теории $\mathcal{BV}$ – NP-полная задача. Большинство существующих $\mathcal{BV}$ -решателей, используя препроцессорные вычисления, кодируют исследуемую задачу в виде данных либо для SAT-решателя, либо для $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ -решателя.

Отметим, что выбор приемлемых на практике алгоритмов для $\mathcal{BV}$ -решателя является одной из наиболее актуальных проблем в настоящее время.

Теория массивов $\mathcal{AR}$ [5, 8, 17, 55] является теорией 1-го порядка с равенством. Она предназначена для анализа поведения на уровне «массив/память» (что, в частности, актуально как при верификации программ, так и при организации тестирования программных систем). Сигнатура $\mathcal{AR}$ содержит два интерпретированных функциональных символа: $read$ и $write$ ($read(a, i)$ представляет элемент, записанный в массив a по адресу i , а $write(a, i, e)$ – результат записи элемента e в массив a по адресу i). Аксиомы $\mathcal{AR}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &(\forall a)(\forall i)(\forall e)(read(write(a, i, e), i) = e), \\ &(\forall a)(\forall i, j)(\forall e)((i \neq j) \rightarrow read(write(a, i, e), j) = read(a, j)), \\ &(\forall a, b)((\forall i)(read(a, i) = read(b, i)) \rightarrow (a = b)). \end{aligned}$$

Известно, что проверка выполнимости безкванторных формул теории $\mathcal{AR}$ – NP-полная задача.

Отметим, что существующие $\mathcal{AR}$ -решатели применяются, как правило, в комбинации с решателями, предназначенными для других теорий.

Теория списков $\mathcal{LI}$ [55] представляет собой теорию 1-го порядка с равенством и является подтеорией теории рекурсивных типов данных $\mathcal{RDT}$ [5]. Сигнатура $\mathcal{LI}$ содержит три интерпретированных функциональных символа, представляющих основные операторы языка LISP: функцию $cons$, конструирующую в памяти объект, содержащий два значения или указатели на эти значения, и функции car и cdr , осуществляющие выбор, соответственно, 1-го и 2-го элементов объекта. Аксиомы $\mathcal{LI}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &(\forall x)(cons(cad(x), cdr(x)) = x), \\ &(\forall x, y)(car(cons(x, y)) = x), \quad (\forall x, y)(cdr(cons(x, y)) = y), \\ &(\forall x)(f^n(x) \neq x) \quad (f \in \{car, cdr\}, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Аксиомы (3) обеспечивают отсутствие «зацикливания» при формировании списков.

Известно, что проверка выполнимости бескванторных формул $\mathcal{LI}$ осуществима за линейное время. Это обосновывает целесообразность применения существующих $\mathcal{LI}$ -решателей при решении задач проверки корректности любых алгоритмов, использующих списки в качестве основных структур данных (в частности, при верификации программ и анализе алгоритмов обработки моделей с сетевой структурой).

4. Интеграция DPLL и $\mathcal{T}$ -решателей. Обозначим через $\mathcal{T}$ -DPLL систему, состоящую из взаимодействующих DPLL и $\mathcal{T}$ -решателя, предназначенную для решения задачи $SMT(\mathcal{T})$ на основе «ленивого подхода». Входными данными для $\mathcal{T}$ -DPLL системы является исследуемая $\mathcal{T}$ -формула φ . Система автоматически конструирует (посредством кодировки атомов теории $\mathcal{T}$ пропозициональными переменными) пропозициональное представление $\varphi^{(p)}$ формулы φ . Все многообразие взаимодействий DPLL и $\mathcal{T}$ -решателя в системе $\mathcal{T}$ -DPLL естественно разбивается на следующие два класса.

1. *Off-line взаимодействие.* Функционирование $\mathcal{T}$ -DPLL системы, основанной на off-line взаимодействии, осуществляется следующим образом.

Формула $\varphi^{(p)}$ подается на вход DPLL. Если установлено, что $\varphi^{(p)}$ – невыполнимая формула, то система $\mathcal{T}$ -DPLL выдает **unsat** и останавливается. Если же построена модель $\mu^{(p)}$ формулы $\varphi^{(p)}$, то множество η атомов теории $\mathcal{T}$, построенных в соответствии с литералами, входящими в $\mu^{(p)}$, подается на вход $\mathcal{T}$ -решателя. Если $\mathcal{T}$ -решатель устанавливает, что множество атомов η выполнимо, то система $\mathcal{T}$ -DPLL выдает **sat** и останавливается. Если же $\mathcal{T}$ -решатель устанавливает, что множество атомов η невыполнимо, то выбирается конфликтное подмножество η_0 множества η . Множество $\bar{\eta}_0$, состоящее из отрицаний атомов, принадлежащих множеству η_0 кодируется дизъюнкцией D литералов, и формула $\varphi^{(p)} \wedge D$ подается на вход DPLL.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Переход от пропозициональной формулы $\varphi^{(p)}$ к формуле $\varphi^{(p)} \wedge D$ называется построением *лемм по требованию* (lemmas on demand) [80].

Таким образом, DPLL рассматривается как «черный ящик» при off-line взаимодействии в системе $\mathcal{T}$ -DPLL.

2. *On-line взаимодействие.* Такая $\mathcal{T}$ -DPLL система представляет собой вариант DPLL, функционирующий как *перечислитель* (enumerator) моделей пропозициональной формулы, выполнимость интерпретаций в теории $\mathcal{T}$ которых проверяется $\mathcal{T}$ -решателем. С исследуемой формулой φ такая $\mathcal{T}$ -DPLL система ассоциирует множество $\mathcal{T}$ -литералов μ , которым присвоены значения (первоначально, $\mu = \emptyset$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. $\mathcal{T}$ -литералом называется атом теории $\mathcal{T}$ или его отрицание.

Структура $\mathcal{T}$ -DPLL системы, основанной на on-line взаимодействии, во многом, аналогична структуре DPLL, управляющей конфликтами. Основными являются следующие три процедуры.

1. *$\mathcal{T}$ -препроцессорная обработка данных.* Эта процедура предназначена для упрощения формулы φ , а также для преобразования (если возникает необходимость) множества μ , сохраняющего $\mathcal{T}$ -выполнимость формулы $\varphi \wedge \mu$. Большинство ее шагов является комбинацией шагов соответствующей процедуры для DPLL с определяемыми теорией $\mathcal{T}$ правилами вывода, применяемыми к $\mathcal{T}$ -литералам формулы φ . Среди методов упрощения формулы φ выделяют *нормализацию $\mathcal{T}$ -атомов* и *ста-*

тическое изучение (static learning) [58, 81-84].

Под *нормализацией* $\mathcal{T}$ -атомов понимают их приведение к стандартному виду.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В зависимости от теории $\mathcal{T}$ при *нормализации* могут применяться замена некоторых операций и отношений на двойственные, свойства ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, поглощения, та или иная сортировка, и т.д.

Статическое изучение состоит в проверке совместности рассматриваемого множества $\mathcal{T}$ -атомов посредством анализа ограничений, определяемых простейшими эквивалентностями и конгруэнциями.

Если при выполнении $\mathcal{T}$ -препроцессорной обработки данных обнаруживается конфликт, то $\mathcal{T}$ -DPLL система выдает **unsat** и останавливается.

2. *$\mathcal{T}$ -ветвление*. Эта процедура реализует *прямой ход* поиска с возвращением. Большинство ее шагов является комбинацией шагов соответствующей процедуры для DPLL с основанными на учете семантики теории $\mathcal{T}$ методами *раннего отсечения* (early pruning) и *$\mathcal{T}$ -продвижения* ($\mathcal{T}$ -propagating) [52, 54, 58, 81, 82, 85, 86].

Раннее отсечение предназначено для сужения пространства поиска при выборе литералов, которым присваиваются значения. Его суть состоит в том, что при обнаружении $\mathcal{T}$ -несовместности множества $\mathcal{T}$ -литералов μ нет необходимости рассматривать никакое расширение множества μ . Реализация этого метода основана на том обстоятельстве, что построение современных $\mathcal{T}$ -решателей на основе техники наслоения дает возможность эффективно использовать последовательность соответствующих $\mathcal{T}_i$ -решателей. Кроме того, могут применяться такие эвристические методы, как отсечение множества μ при отсутствии его расширения на протяжении заданного числа шагов, или при присвоении в течение данного числа шагов значений только чисто пропозициональным литералам.

$\mathcal{T}$ -продвижение состоит в следующем. При текущем вызове $\mathcal{T}$ -решателя осуществляется попытка выводов вида $\eta \models_{\mathcal{T}} l$, где $\eta \subseteq \mu$, а l – $\mathcal{T}$ -литерал, значение которому еще не присвоено. Если такие $\mathcal{T}$ -литералы найдены, то они добавляются в множество μ .

3. *$\mathcal{T}$ -анализ конфликтов*. Эта процедура реализует *обратный ход* поиска с возвращением. Большинство ее шагов является комбинацией шагов соответствующей процедуры для DPLL с основанными на учете семантики теории $\mathcal{T}$ методами *$\mathcal{T}$ -возврата* ($\mathcal{T}$ -backjumping) и *$\mathcal{T}$ -изучения* ($\mathcal{T}$ -learning) [25, 34, 59, 86-91].

$\mathcal{T}$ -возврат основан на предположении о том, что если $\mathcal{T}$ -решатель активируется на множестве $\mathcal{T}$ -литералов μ , то при установлении $\mathcal{T}$ -несовместности множества μ он строит конфликтное подмножество $\eta \subset \mu$. В этом случае система $\mathcal{T}$ -DPLL использует пропозициональное представление $\eta^{(p)}$ в качестве источника конфликта. При этом активируется режим возврата DPLL (т.е. $\varphi^{(p)} := \varphi^{(p)} \wedge D$, где D – дизъюнкция отрицаний пропозициональных литералов, принадлежащих $\eta^{(p)}$ и осуществляется возврат в вершину дерева поиска (какую именно, зависит от выбранной стратегии), в которой не присвоены значения ни одному из литералов, принадлежащих множеству $\eta^{(p)}$).

$\mathcal{T}$ -изучение предназначено для выделения суб-минимальных по мощности конфликтных множеств $\mathcal{T}$ -литералов, объединение которых содержит как можно боль-

ше $\mathcal{T}$ -литералов, значения которым не присвоены на текущий момент. Именно такие системы множеств $\mathcal{T}$ -литералов, а также аналогичные системы множеств чисто пропозициональных литералов используются при построении стратегии ветвления и возврата $\mathcal{T}$ -DPLL системы в вершины дерева поиска, расположенные в как можно ранее построенных уровнях, что, в конечном итоге, обеспечивают наиболее существенное сужение пространства поиска.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Наиболее простой такой стратегией ветвления и возврата $\mathcal{T}$ -DPLL системы является следующая (см. процедуру анализа конфликтов для DPLL). Пусть S – множество $\mathcal{T}$ -литералов, которым на текущий момент присвоены значения $\top$. Для каждого множества η , принадлежащего построенной на текущий момент системе суб-минимальных по мощности конфликтных множеств $\mathcal{T}$ -литералов проверяется условие $|S \cap \eta| = |\eta| - 1$. Если это условие выполнено, то $\mathcal{T}$ -литералу $l \in \eta \setminus S$ автоматически присваивается значение $\perp$. После окончания этого процесса происходит активация процедуры $\mathcal{T}$ -анализа конфликтов.

5. Заключение. В работе рассмотрены модели и методы, предназначенные для исследования проблемы $SMT(\mathcal{T})$ на основе «ленивого подхода».

В настоящее время достаточно хорошо проработаны теоретические основы построения $\mathcal{T}$ -DPLL систем в терминах разрешимых теорий 1-го порядка. При этом созданы общие методы синтеза $\mathcal{T}$ -DPLL систем на основе сведения предназначенных для различных теорий решателей в единый решатель с последующей его интеграцией с DPLL [2, 17, 21, 39, 92].

Построение приемлемых на практике $\mathcal{T}$ -решателей дает возможность конструировать на основе наслоения такие программные системы с достаточно широкой областью применения, как MathSAT [58], представляющий собой взаимодействующую с DPLL иерархию решателей, предназначенных, для проверки выполнимости формул, соответственно, теорий $\mathcal{EUF}$, $\mathcal{DL}$, $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$. Возможности таких программных систем могут быть существенно расширены за счет включения в иерархию решателей, предназначенных для проверки выполнимости формул других теорий. Например, предложенного в [93] решателя, основанного на интервальной арифметике и предназначенного для проверки выполнимости системы нелинейных ограничений (в том числе построенных с помощью трансцендентных функций).

Анализ ситуации, связанной с построением решателей, предназначенных для работы с основными структурами данных, приводит к следующим выводам.

Во-первых, возможность построения эффективных $\mathcal{LI}$ -решателей делает привлекательным их использование в автоматизированных средствах анализа сетевых моделей, а также в автоматизированных средствах верификации программных систем.

Во-вторых, актуальность построения приемлемого на практике $\mathcal{BV}$ -решателя обусловлена не только прикладными задачами, но и задачей проверки выполнимости формул в кольцах вычетов. Значимость последней задачи обусловлена многочисленными применениями колец вычетов в задачах преобразования и защиты информации.

Из сказанного естественно вытекает необходимость исследования задачи проверки выполнимости формул в конечных кольцах. В [94] разработана общая схема

решателя, предназначенного для проверки выполнимости формул $\mathcal{LA}$ над конечным ассоциативным кольцом с ненулевым умножением. Существенным отличием от $\mathcal{LA}(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{LA}(\mathbb{Z})$ является необходимость отдельного рассмотрения шести классов колец, определяемых наличием либо отсутствием коммутативности умножения, а также наличием либо отсутствием единицы или (в некоммутативных кольцах) левых либо правых единиц. Детальная проработка этой схемы для колец вычетов и матричных колец над конечным полем определяет возможное направление исследований. Другое направление связано с разработкой математического аппарата, предназначенного для проверки выполнимости формул нелинейной арифметики над конечными кольцами.

1. *Castellini C., Guinchiglia E., Tacchella A.* SAT-based planning in complex domains: concurrency, constraints and nondeterminism // Artificial Intelligence. – 2003. – N 1-2. – P. 85-117.
2. *Detlefs D., Nelson G., Saxe J.* Simplify: a theorem prover for program-checking // Journal of the ACM. – 2005. – N 3. – P. 365-473.
3. *Jeroslow R.G., Wang J.* Solving propositional satisfiability problems // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. – 1990. – 1 (1-4). – P. 167-187.
4. *Lin F., Zhao Y.* ASSAT: computing answer sets of logic program by SAT solvers // Artificial Intelligence. – 2004. – N 1-2. – P. 115-137.
5. *Oppen D.C.* Reasoning about recursively defined data structures // Journal of the ACM. – 1980. – N 3. – P. 403-411.
6. *Stephan P., Brayton R., Sangiovanni-Vincentelli A.* Combinational test generation using satisfiability // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 1996. – N 12. – P. 1167-1176.
7. *Strichman O.* Tuning SAT checkers for bounded model checking // LNCS. – 2000. – Vol. 1885. – P. 480-494.
8. *Stump A., Dill D.L., Barret C.W. et al.* A decision procedure for an extensional theory of arrays // Proc. of LICS'01. – 2001. – P. 29-37.
9. *Velev M.N., Bryant R.E.* Exploiting positive equality and partial non-consistency in the formal verification of pipelined microprocessors // Proc. of DAC'99. – 1999. – P. 397-401.
10. *Velev M.N., Bryant R.E.* Effective use of Boolean satisfiability procedures in the formal verification of superscalar and VLIW microprocessors // Journal of Symbolic Computation. – 2003. – N 2. – P. 73-106.
11. *Кудрявцев В.Б., Гассанов Э.Э., Подколзин А.С.* Введение в теорию интеллектуальных систем. – М.: МАКС Пресс, 2006. – 208 с.
12. *Bradley A.R., Manna Z.* The calculus of computation. Decision procedures with applications to verification. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 366 p.
13. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
14. *Davis M., Putnam H.* A computing procedure for quantification theory // Journal of the ACM. – 1960. – N 3. – P. 201-215.
15. *Davis M., Logemann G., Loveland D.* A machine program for theorem proving // Journal of the ACM. – 1962. – N 7. – P. 394-397.
16. *Armando A., Giunchiglia E.* Embedding complex decision problems inside an interactive theorem prover // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. – 1993. – N 3-4. – P. 475-502.
17. *Nelson G., Oppen D.C.* Simplification by cooperating decision procedures // ACM Transactions on Programming Languages and Systems. – 1979. – N 2. – P. 245-257.
18. *Nelson G., Oppen D.C.* Fast decision procedures based on congruence closure // Journal of the ACM. – 1980. – N 2. – P. 356-364.
19. *Oppen D.C.* Complexity, convexity and combinations of theories // Theoretical Computer Science. – 1980. – N 12. – P. 291-302.

20. *Shostak R.* An algorithm for reasoning about equality // Com. ACM. – 1978. – N 3. – 583-585.
21. *Shostak R.* A practical decision procedure for arithmetic with function symbols // Journal of the ACM. – 1979. – N 2. – P. 351-360.
22. *Shostak R.* Deciding combinations of theories // Journal of the ACM. – 1984. – N 1. – P. 1-12.
23. *de Moura L., Ruass H., Sorea M.* Lazy theorem proving for bounded model checking over infinite domains // LNCS. – 2002. – Vol. 2392. – P. 438-455.
24. *de Moura L., Duterte B., Shankar N.* A tutorial on satisfiability modulo theories // LNCS. – 2007. – Vol. 4590. – P. 20-36.
25. *Flanagan C., Joshi R., Ou X., et al.* Theorem proving using lazy proof explication // LNCS. – 2003. – Vol. 2725. – P. 438-455.
26. *Nieuwenhuis R., Oliveras A., Tinelli C.* Solving SAT and SAT Modulo theories: from an abstract Davis-Putnam-Logemann-Loveland procedure to DPLL($\mathcal{T}$) // Journal of the ACM. – 2006. – N 6. – P. 937-977.
27. *Nieuwenhuis R., Oliveras A.* On SAT Modulo theories and optimisation problems // LNCS. – 2006. – Vol. 4121. – P. 156-169.
28. *Ranise S., Tinelli C.* Satisfiability modulo theories // IEEE Intelligent Systems Magazine. – 2006. – N 6. – P. 71-81.
29. *Ranise S., Tinelli C.* Satisfiability modulo theories library (SMT-LIB). – 2006. – <http://www.SMT-LIB.org>.
30. *Ranise S., Tinelli C.* The SMT-LIB Standard: Version 1.2. Technical Report, Department of Computer Science, The Univ. of Iowa, 2006. – <http://www.SMT-LIB.org>.
31. *Sebastiani R.* Integrating SAT solvers with Math reasoners: Foundations and basic algorithms. // Technical Report 0111-22, ITC-IRST, Trento, Italy, 2001. – <http://sra.itc.it/tr/Seb01.pdf>.
32. *Sebastiani R.* Lazy satisfiability modulo theories // Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2007. – N 3. – P. 141-224.
33. *Chu M.L., Anbulagan.* Look-ahead versus look-back for satisfiability problems // LNCS. – 1997. – Vol. 1330. – P. 341-355.
34. *Bajardo R.J., Schrag R.C.* Using CSP look-back techniques to solve real-world SAT instances // Proc. of AAAI'97. – 1997. – P. 203-208.
35. *Hooker J.N., Vinay V.* Branching rules for satisfiability // Journal of Automated Reasoning. – 1995. – N 3. – P. 359-383.
36. *Marques-Silva J., Sakallah K.* GRASP: a search algorithm for satisfiability // Proc. of ICCAD'96. – 1996. – P. 220-227.
37. *Marques-Silva J., Sakallah K.* GRASP: a search algorithm for propositional satisfiability // IEEE Transactions on Computers. – 1999. – N 5. – P. 506-521.
38. *Een N., Sorenson N.* An extensible SAT-solver // LNCS. – 2004. – Vol. 2919. – P. 502-518.
39. *Goldberg E., Novikov Y.* BerkMin: a fast and robust SAT-solver // Proc. of DATE'02. – 2002. – P. 142.
40. *Moskewich M., W., Madigan C.F., Zhang Y.Z. et al.* Chaff: engineering an efficient SAT solver // Proc. of DAC'01. – 2001. – P. 530-535.
41. *Zhang H.* SATO: an efficient propositional prover // Proc. of DAC'97. – 1997. – P. 272-275.
42. *Zhang L., Malic S.* The quest for efficient boolean satisfiability solvers // LNCS. – 2002. – Vol. 2404. – P. 17-36.
43. *Рейнгольд Э., Нувергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
44. *Bacchus F., Winter J.* Effective preprocessing with hyper-resolution and equality reduction // Proc. of the 6th International Symposium on Theory and Applications of Satisfiability Testing. – 2003. – <http://www.cs.toronto.edu/~fbacchus/Papers/BSAT2003.pdf>
45. *Brafman R.* A simplifier for propositional formulae with many binary clauses // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 2004. – N 1. – P. 52-59.
46. *Een N., Biere A.* Effective preprocessing in SAT through variable and clause elimination // Proc. of SAT'05. – 2005. – <http://mimisat.se/downloads/SatELite.pdf>
47. *Chu M.L., Anbulagan.* Heuristics based on unit propagation for satisfiability problems // Proc. of

- IJCAI'97. – 1997. – P. 366-371.
48. *Guinchiglia E., Massarotto A., Sebastiani R.* Act, and the rest will follow: exploiting determinism in planning of satisfiability // Proc. of AAAI'98. – 1998. – P. 948-953.
49. *Chu M.L.* Integrating equivalency reasoning into davis-putnam procedure // Proc. of AAAI'00. – 2000. – P. 291-296.
50. *Zhang L., Madigan C.F., Moskewicz M.W., al all.* Efficient conflict-driven learning in boolean satisfiability // Proc. of ICCAD'01. – 2001. – P. 279-285.
51. *Gomes C.P., Selman B., Kautz H.* Boosting combinational search through randomization. // Proc. of AAAI'98. – 1998. – P. 431-437.
52. *Nieuwenhuis R., Oliveras A.* DPLL(T) with exhaustive theory propagation and its application to difference logic // LNCS. – 2005. – Vol. 3576. – P. 321-334.
53. *Nieuwenhuis R., Oliveras A., Tinelli C.* Abstract DPLL and abstract DPLL modulo theories // LNCS. – 2005. – Vol. 3452. – P. 36-50.
54. *Tinelli C.* A DPLL-based calculus for ground satisfiability modulo theories // LNAI. – 2002. – Vol. 2424. – P. 308-319.
55. *Mamma Z., Zarba C.* Combining decision procerures // LNCS. – 2003. – Vol. 2787. – P. 453-468.
56. *Nieuwenhuis R., Oliveras A., Tinelli C.* Congruence closure with integer offsets // LNAI. – 2003. – Vol. 2850. – P. 381-422.
57. *Nieuwenhuis R., Oliveras A.* Proof-producing congruence closure // LNCS. – 2005. – Vol. 3467. – P. 453-468.
58. *Bozzano M., Bruttomesso R., Cimatti A., at all.* MathSAT: A tight integration of SAT and mathematical decision procedures // Journal of Automated Reasoning. – 2005. – N 1-3. – P. 265-293.
59. *Bozzano M., Bruttomesso R., Cimatti A., at all.* An icremental and layered procedure for the satisfiability of linear arithmetic logic // LNCS. – 2005. – Vol. 3440. – P. 317-333.
60. *Borning A., Marriott K., Stuckey P.* Solving linear arithmetic constraints for user interface applications // Proc. of UIST'97. – 1997. – P. 87-96.
61. *Berezin S., Ganesh V., Dill D.L.* An online proof-producing decision procedure for mixed-integer linear arithmetic // LNCS. – 2003. – Vol. 2619. – P. 521-536.
62. *Duterte B., de Moura L.* A fast linear-arithmetic solver for DPLL(T) // LNCS. – 2006. – Vol. 4144. – P. 81-94.
63. *Faure G., Nieuwenhuis R., Oliveras A., at all.* SAT modulo the theory of linear arithmetic: exact, inexact and commercial solvers // LNCS. – 2008. – Vol. 4996. – P. 77-90.
64. *Pugh W.* The omega test: a fast and practical integer programming algorithm for dependence analysis //Proc. of ACM/IEEE Conference on Supercomputing. – 1991. – P. 4-13.
65. *Griggio A.* A practical approach to satisfiability modulo linear arithmetic // Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2012. – N 8. – P. 1-27.
66. *Cotton S., Maler O.* Fast and flexible difference constraint propagation for DPLL(T) // LNCS. – 2006. – Vol. – 4121. – P. 170-183.
67. *Mahfoudh M., Miebert P., Asarin E, at all.* A satisfiability checker for difference logic // Proc. of SAT'02. – 2002. – P. 222-230.
68. *Wang C., Ivancic F., Canai M.K., at all.* Deciding separation logic formulae by SAT and incremental negative cycle elimination // LNCS. – 2005. – Vol. 3835. – P. 322-336.
69. *Cherkassky B.V., Goldgerg A.V.* Negative cycle detection algorithms // Mathematical Programming. – 1999. – N 2. – P. 277-311.
70. *Harvey W., Stuckey P.* A unit two variable per inequality integer constraint solver for constraint logic programming // Proc. of ICAPS'05. – 2005. – P. 71-80.
71. *Lahiri S.K., Musuvathi M.* An efficient decision prosedure for UTVPI constraints // LNCS. – 2005. – Vol. 3717. – P. 168-183.
72. *Barret C. W., Dill D.L., Levitt J.R.* A decision procedure for bit-vector arithmetic // Proc. of The 35th Design Automation Conference. – 1998. – P. 522-527.
73. *Bjorner N., Pichora M.C.* Deciding fixed and non-fixed size bit vectors // LNCS. – 1998. – Vol. 1384. – P. 376-392.
74. *Bozzano M., Bruttomesso R., Cimatti A., at all.* Encoding RTL Constructs for MathSAT // Electr.

- Notes Theor. Comput. Sci. – 2006. – N 2. – P. 3-14.
75. *Brinkmann R., Drechsler R.* RTL-datapath verification using integer linear programming // Proc. of DAC'02. – 2002. – P. 741-746.
 76. *Cyrluk D., Moller M.O., Ruess H.* An efficient decision procedure for the theory of fixed-sized bit-vectors // LNCS. – 1997. – Vol. 1254. – P. 60-71.
 77. *Ganesh V., Dill D.L.* A decision procedure for bit-vectors and arrays // LNCS. – 2007. – Vol. 4590. – P. 519-531.
 78. *Fallah F., Devadas S., Keutzer K.* Functional vector generation for HDL models using linear programming and 3-satisfiability // Proc. of DAC'98. – 1998. – P. 355-367.
 79. *Kovasznaı G., Frohlich A., Biere A.* On the complexity of fixed-size bit-vectors logics with binary encoded bit-width // Proc. of SMT'12. – P. 44-55.
 80. *Barret C., Nieuwenhuis R., Oliveras A., et al.* Splitting on demand in SAT modulo theories // LNCS. – 2006. – Vol. 4246. – P. 512-526.
 81. *Armando A., Castellini C., Guinchiglia E.* SAT-based procedures for temporal reasoning // LNCS. – 2000. – Vol. 1809. – P. 97-108.
 82. *Audermann G., Bertolli P., Cimatti A., et al.* A SAT based approach for solving formulae over Boolean and linear mathematical propositions // 2002. – LNCS. – Vol. 2392. – P. 195-210.
 83. *Seshia S., Lahiri S., Bryant R.* A hybrid SAT-based decision procedure for separation logic with uninterpreted functions // Proc. of DAC'03. – 2003. – P. 425-430.
 84. *Strichman O., Seshia S.A., Bryant R.E.* Deciding separation formulae with SAT // LNCS. – 2004. – Vol. 2404. – P. 209-222.
 85. *Barret C., Dill D., Stump A.* Checking satisfiability of first-order formulae by incremental translation to SAT // LNCS. – 2002. – Vol. 2404. – P. 236-249.
 86. *Ganzinger H., Hagen G., Nieuwenhuis R., et al.* DPLL(T): Fast decision procedures // LNCS. – 2004. – Vol. 3114. – P. 175-188.
 87. *Bozzano M., Bruttomesso R., Cimatti A., et al.* Efficient satisfiability modulo theories via delayed theory combination // LNCS. – 2005. – Vol. 3576. – P. 335-349.
 88. *de Moura L., Ruess H.* Lemmas on demand for satisfiability solvers // Proc. of SAT'02. – 2002. – P. 244-251.
 89. *Horrocks I., Patel-Schneider P.F.* Optimizing propositional modal satisfiability for description logic subsumption // LNAI. – 1998. – Vol. 1476. – P. 234-246.
 90. *Stump A., Barret C.W., Dill D.L.* CVC: a cooperative validity checker // LNCS. – 2002. – Vol. 2404. – P. 500-504.
 91. *Wang C., Gupta A., Ganai M.* Predicate learning and selective theory deduction for a difference logic solver // Proc. of DAC'06. – 2006. – P. 235-240.
 92. *de Moura L., Bjorner N.* Model based theory combination // Proc. of the 5th Workshop on SMT (SMT'07). – 2007. – <http://www.lsi.upc.edu/oliveras/smt07/>.
 93. *Franzle M., Herde C., Tiege T., et al.* Efficient solving of large non-linear arithmetic constraint systems with complex Boolean structure // Journal of Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2007. – N 1. – P. 209-236.
 94. *Skobelev V.V.* Satisfiability modulo linear arithmetic over a finite ring // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 95-106.

V. V. Skobelev

Problem of checking for satisfiability of formulae of decidable theories (survey).

Given paper is devoted to analysis of the state of the art for investigations of the problem of checking for satisfiability of formulae in decidable first-order theories on the base of the lazy approach, i.e. on integration of SAT-solvers with $\mathcal{T}$ -solvers. The structure of SAT-solver designed on the base of conflict driven DPLL procedure is characterized. Basic notions and principles applied in the process of elaboration of modern $\mathcal{T}$ -solvers are considered. They are presented in detail for example of a solver intended for

checking of satisfiability for formulae of linear integer arithmetic. Methods of integration of SAT-solvers with T -solvers are characterized.

Keywords: *first order theories, formulae satisfiability, solvers.*

В. В. Скобелев

Проблема перевірки здійсненості формул розв'язних теорій (огляд).

Дану статтю присвячено аналізу сучасного стану досліджень проблеми перевірки здійсненості формул теорій 1-го порядку на основі «ледащого підходу», тобто на інтеграції SAT-вирішувачів з T -вирішувачами. Охарактеризовано структуру SAT-вирішувача, який побудовано на основі керуючою конфліктами DPLL-процедури. Розглянуто основні поняття та принципи, які використовуються при побудові сучасних T -вирішувачів. Викладення ілюструється на прикладі вирішувача, який призначено для перевірки здійсненості формул лінійної арифметики цілих чисел. Охарактеризовано методи інтеграції SAT-вирішувачів з T -вирішувачами.

Ключові слова: *теорії 1-го порядку, здійсненість формул, вирішувачі.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.05.13

УДК 531.38

©2013. С. Н. Судаков

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО ЭЛЛИПСОИДА И СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена задача о движении гравитирующей эллипсоидальной массы идеальной несжимаемой жидкости и сферически симметричного твердого тела. Предполагается, что центр масс жидкого эллипсоида и твердого тела совершают плоское движение. Движение жидкости предполагается однородным вихревым. Вектор вихря скорости жидкости все время направлен ортогонально плоскости движения центров масс жидкого эллипсоида и твердого тела. Получены уравнения движения в форме Гамильтона.

Ключові слова: *эллипсоид, жидкость, вихрь, гравитация, задача Роша.*

В работах В.Е. Петкевича [3, 4] дана постановка задачи о движении двух жидких тел и получены уравнения их движения. Решение этой задачи достаточно сложно. Поэтому, прежде чем приступить к ее решению, желательно решить ряд более простых задач, подводящих к ней. Первым шагом на этом пути можно считать задачу Роша [1, 6, 8].

Целью настоящей работы является вывод уравнений Гамильтона плоского движения системы, состоящей из эллипсоидальной массы гравитирующей идеальной несжимаемой жидкости и притягивающегося к ней по закону Ньютона сферически симметричного твердого тела (ССТТ).

Плоским движением жидкого эллипсоида и ССТТ будем называть движение, при котором центры масс обоих тел движутся в одной и той же плоскости, а вектор вихря скорости жидкости и одна из главных осей жидкого эллипсоида направлены ортогонально к этой плоскости.

1. Описание рассматриваемой системы. Пусть $O_c \xi_1 \xi_2 \xi_3$ – неподвижная декартова система координат. Плоскость $O_c \xi_1 \xi_2$ является плоскостью, в которой движется центр масс O_1 жидкого гравитирующего эллипсоида и центр масс ССТТ O_2 .

Обозначим через $O_1 x_1 x_2 x_3$ – прямоугольную декартову систему координат, оси которой совпадают с главными осями границы эллипсоидальной массы жидкости. Плоскость $O_1 x_1 x_2$ лежит в плоскости движения центров масс. Жидкость считается идеальной несжимаемой с плотностью ρ . Граница жидкости в осях $O_1 x_1 x_2 x_3$ задается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \quad (1.1)$$

где c_1, c_2, c_3 – непрерывные достаточно гладкие функции времени t , удовлетворяющие условию $c_1 c_2 c_3 = R^3 = \text{const}$. Масса жидкости определяется выражением $m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho c_1 c_2 c_3$. Массу ССТТ обозначим через m_2 . Будем считать, что центр масс всей системы неподвижен и совпадает с точкой O_c .

Вращение свободной поверхности (1.1) происходит вокруг оси O_1x_3 . Вектор вихря скорости жидкости направлен по оси O_1x_3 .

Введем еще декартову систему координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, оси которой направим параллельно соответствующим осям $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$.

Точки O_c , O_1 , O_2 будут все время находиться на одной прямой. Обозначим расстояние O_cO_1 через r_1R , а расстояние O_cO_2 через r_2R , где r_1 и r_2 – безразмерные величины. Тогда

$$m_1r_1 = m_2r_2. \quad (1.2)$$

Расстояние между точками O_1 и O_2 обозначим rR , где $r = r_1 + r_2$. Используя соотношения (1.2), выразим r через r_1

$$r = \frac{r_1}{m}, \quad m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.3)$$

2. Кинетическая энергия. Кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс жидкости O_1 , кинетической энергии центра масс ССТТ O_2 и кинетической энергии движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$.

Точка O_1 в осях $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет координаты

$$Rr_1 \cos \varphi, \quad Rr_1 \sin \varphi, \quad 0, \quad (2.1)$$

где φ – угол между полуосью $O_c\xi_1$ и радиусом-вектором O_cO_1 . Дифференцируя (2.1) по t , находим проекции скорости точки O_1 на оси $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$

$$v_{11} = R(\dot{r}_1 \cos \varphi - \dot{\varphi} r_1 \sin \varphi), \quad v_{12} = R(\dot{r}_1 \sin \varphi + \dot{\varphi} r_1 \cos \varphi), \quad v_{13} = 0.$$

Тогда кинетическая энергия движения центра масс жидкости будет равна

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{13}^2)$$

или

$$T_1 = \frac{R^2}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + \dot{\varphi}^2 r_1^2). \quad (2.2)$$

Точка O_2 в осях $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет координаты

$$-Rr_2 \cos \varphi, \quad -Rr_2 \sin \varphi, \quad 0. \quad (2.3)$$

Дифференцируя (2.3) по t , находим проекции скорости точки O_2 на оси $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$

$$v_{21} = -R(\dot{r}_2 \cos \varphi - \dot{\varphi} r_2 \sin \varphi), \quad v_{22} = -R(\dot{r}_2 \sin \varphi + \dot{\varphi} r_2 \cos \varphi), \quad v_{23} = 0.$$

Тогда кинетическая энергия материальной точки O_2 запишется в виде

$$T_2 = \frac{R^2}{2}m_2(\dot{r}_2^2 + \dot{\varphi}^2 r_2^2).$$

Используя равенство (1.2), перепишем T_2 в виде

$$T_2 = \frac{m_1^2 R^2}{2m_2} (\dot{r}_1^2 + \dot{\varphi}^2 r_1^2). \quad (2.4)$$

Запишем выражение для кинетической энергии движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$. Для этого введем обобщенные координаты, описывающие движение частиц жидкости относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$. За первые три из них примем введенные ранее величины c_1, c_2 и угол ψ между продолжением радиуса-вектора $O_c O_1$ и полусью $O_1 x_1$. Еще одна обобщенная координата α , описывающая поворот всей массы жидкости относительно осей $O_1 x_1 x_2 x_3$, вводится следующим образом [7].

Пусть x_{10}, x_{20}, x_{30} – координаты частицы жидкости в начальный момент движения, а c_{10}, c_{20}, c_{30} – начальные значения величин c_1, c_2, c_3 . Выясним, куда перейдет эта частица после трех линейных преобразований их координат:

1) линейное преобразование эллипсоидальной массы жидкости в шар

$$x'_i = R x_{i0} / c_{i0}, \quad R = \sqrt[3]{c_{10} c_{20} c_{30}};$$

2) Поворот шара вокруг оси $O_1 x_3$ на угол α

$$x''_1 = x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha, \quad x''_2 = x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha, \quad x''_3 = x'_3,$$

3) линейное преобразование шара в объем, ограниченный эллипсоидом

$$x_i = x''_i c_i / R.$$

Матрица трех последовательных линейных преобразований имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} c_1/R & 0 & 0 \\ 0 & c_2/R & 0 \\ 0 & 0 & c_3/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R/c_{10} & 0 & 0 \\ 0 & R/c_{20} & 0 \\ 0 & 0 & R/c_{30} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} (c_1/c_{10}) \cos \alpha & (c_1/c_{20}) \sin \alpha & 0 \\ (c_2/c_{10}) \sin \alpha & (c_2/c_{20}) \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & c_3/c_{30} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\zeta_1/\zeta_{10}) \cos \alpha & (\zeta_1/\zeta_{20}) \sin \alpha & 0 \\ (\zeta_2/\zeta_{10}) \sin \alpha & (\zeta_2/\zeta_{20}) \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{10}\zeta_{20}/\zeta_1\zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $\zeta_i = c_i/R$, $\zeta_{i0} = c_{i0}/R$.

Дифференцируя (2.5) по t , находим компоненты скорости частицы жидкости относительно осей $O_1 x_1 x_2 x_3$

$$v'_1 = (\dot{\zeta}_1 \cos \alpha - \zeta_1 \dot{\alpha} \sin \alpha) \frac{x_{10}}{\zeta_{10}} - (\dot{\zeta}_1 \sin \alpha + \zeta_1 \dot{\alpha} \cos \alpha) \frac{x_{20}}{\zeta_{20}},$$

$$v'_2 = (\dot{\zeta}_2 \sin \alpha + \zeta_2 \dot{\alpha} \cos \alpha) \frac{x_{10}}{\zeta_{10}} + (\dot{\zeta}_2 \cos \alpha - \zeta_2 \dot{\alpha} \sin \alpha) \frac{x_{20}}{\zeta_{20}}, \quad (2.6)$$

$$v'_3 = -\left(\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} + \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2}\right) \frac{\zeta_{10}\zeta_{20}}{\zeta_1\zeta_2} x_{30}.$$

Переносная скорость, обусловленная вращением осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, определена выражением

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi} + \dot{\psi})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. В проекциях на оси $O_1x_1x_2x_3$ выражение (2.7) принимает вид

$$u_1 = -(\dot{\varphi} + \dot{\psi})x_2, \quad u_2 = (\dot{\varphi} + \dot{\psi})x_1, \quad u_3 = 0.$$

Используя формулы (2.5), выразим u_1, u_2, u_3 через x_{10}, x_{20}, x_{30}

$$u_1 = -(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_2 \left(\frac{x_{10}}{\zeta_{10}} \sin \alpha + \frac{x_{20}}{\zeta_{20}} \cos \alpha \right),$$

$$u_2 = (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_1 \left(\frac{x_{10}}{\zeta_{10}} \cos \alpha - \frac{x_{20}}{\zeta_{20}} \sin \alpha \right), \quad u_3 = 0. \quad (2.8)$$

Складывая (2.6) и (2.8), находим проекции на оси $O_1x_1x_2x_3$ скорости частицы жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$

$$v_1 = [\dot{\zeta}_1 \cos \alpha - \zeta_1 \dot{\alpha} \sin \alpha - (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_2 \sin \alpha]x_{10}/\zeta_{10} -$$

$$-[\dot{\zeta}_1 \sin \alpha + \zeta_1 \dot{\alpha} \cos \alpha + (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_2 \cos \alpha]x_{20}/\zeta_{20},$$

$$v_2 = [\dot{\zeta}_2 \sin \alpha + \zeta_2 \dot{\alpha} \cos \alpha + (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_1 \cos \alpha]x_{10}/\zeta_{10} +$$

$$+[\dot{\zeta}_2 \cos \alpha - \zeta_2 \dot{\alpha} \sin \alpha - (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_1 \sin \alpha]x_{20}/\zeta_{20}, \quad (2.9)$$

$$v_3 = -(\dot{\zeta}_1/\zeta_1 + \dot{\zeta}_2/\zeta_2) \frac{\zeta_{10}\zeta_{20}}{\zeta_1\zeta_2} x_{30}.$$

Кинетическая энергия движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ имеет вид

$$T_3 = \frac{\rho}{2} \int \int \int_{Q_0} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) dx_{10} dx_{20} dx_{30},$$

где Q_0 область в осях $O_1x_1x_2x_3$, занимаемая жидкостью в начальный момент движения. Используя формулы (2.9) и

$$\frac{\rho}{2} \int \int \int_{Q_0} x_{i0}^2 dx_{10} dx_{20} dx_{30} = \frac{m_1 c_{i0}^2}{10},$$

представим T_3 в виде

$$T_3 = \frac{m_1 R^2}{10} \{ [\dot{\zeta}_1 \cos \alpha - \zeta_1 \dot{\alpha} \sin \alpha - (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_2 \sin \alpha]^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & +[\dot{\zeta}_1 \sin \alpha + \zeta_1 \dot{\alpha} \cos \alpha + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \zeta_2 \cos \alpha]^2 + \\
 & +[\dot{\zeta}_2 \sin \alpha + \zeta_2 \dot{\alpha} \cos \alpha + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \zeta_1 \cos \alpha]^2 + \\
 & +[\dot{\zeta}_2 \cos \alpha - \zeta_2 \dot{\alpha} \sin \alpha - (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \zeta_1 \sin \alpha]^2 + \\
 & +[(\dot{\zeta}_1/\zeta_1 + \dot{\zeta}_2/\zeta_2)/(\zeta_1 \zeta_2)]^2 \},
 \end{aligned}$$

где $m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho c_1 c_2 c_3$ – масса жидкого эллипсоида.

Кинетическая энергия всей системы равна $T = T_1 + T_2 + T_3$. Окончательно T принимает вид

$$\begin{aligned}
 T = \frac{m_1 R^2}{2} \left\{ \frac{1}{5} \left[\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2 + \dot{\alpha}^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \right. \right. \\
 \left. \left. + 4\dot{\alpha}(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_1 \zeta_2 + \frac{\dot{\zeta}_1^2}{\zeta_1^4 \zeta_2^2} + \frac{\dot{\zeta}_2^2}{\zeta_1^2 \zeta_2^4} + \frac{2\dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2}{\zeta_1^3 \zeta_2^3} \right] + \frac{1}{m} (r_1^2 + \dot{\varphi}^2 r_1^2) \right\}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

3. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия всей системы имеет вид

$$\Pi(\zeta_1, \zeta_2, r_1, \psi) = \Pi_1(\zeta_1, \zeta_2) + \Pi_2(\zeta_1, \zeta_2, r_1, \psi),$$

где

$$\Pi_1 = -\frac{3m_1^2 \gamma}{5R} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\zeta_1^2 + \lambda)(\zeta_2^2 + \lambda)(\zeta_1^{-2} \zeta_2^{-2} + \lambda)}} - 1 \right),$$

γ – гравитационная постоянная [2, с. 884 - 885]. Следуя [5], выражение для Π_2 запишем так:

$$\Pi_2 = -\gamma m_2 \left[\frac{m_1}{r_*} + \frac{A_2 + A_3 - 2A_1}{2r_*^3} + \frac{3(A_1 - A_2)X_2^2 - 3(A_3 - A_1)X_3^2}{2r_*^5} \right],$$

где

$$r_* = Rr_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right), \quad A_1 = \rho \int_Q (x_2^2 + x_3^2) dQ = \frac{m_1 R^2}{5} \left(\zeta_2^2 + \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right),$$

$$A_2 = \rho \int_Q (x_3^2 + x_1^2) dQ = \frac{m_1 R^2}{5} \left(\zeta_1^2 + \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right), \quad A_3 = \rho \int_Q (x_1^2 + x_2^2) dQ = \frac{m_1 R^2}{5} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2),$$

Q – объем, занятый жидкостью, X_1, X_2, X_3 – координаты материальной точки O_2 в осях $O_1 x_1 x_2 x_3$. Они определяются формулами $X_1 = -r_* \sin \psi$, $X_2 = -r_* \cos \psi$, $X_3 = 0$. Тогда

$$\Pi_2 = -\gamma m_2 \left[\frac{m_1}{r_*} + \frac{A_2 + A_3 - 2A_1}{2r_*^3} + \frac{3(A_1 - A_2) \cos^2 \psi}{2r_*^3} \right].$$

После несложных преобразований получаем

$$\Pi_2 = -\gamma m_1 m_2 \left\{ \frac{1}{r_*} + \frac{R^2}{10r_*^3} \left[(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin^2 \psi + (2\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \cos^2 \psi - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right] \right\}.$$

Используя (1.3), представим Π_2 в виде

$$\Pi_2 = -\frac{\gamma m_1 m_2 m}{R} \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{m^2}{10r_1^3} \left[(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin^2 \psi + (2\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \cos^2 \psi - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right] \right\}.$$

4. Уравнения Гамильтона. За обобщенные координаты принимаем $\zeta_1, \zeta_2, \alpha, \varphi, \psi, r_1$. Соответствующие им обобщенные импульсы обозначим $p_1, p_2, p_\alpha, p_\varphi, p_\psi, p_{r_1}$. Дифференцируя T по обобщенным скоростям, находим выражения для обобщенных импульсов

$$\begin{aligned} p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_1} &= \frac{m_1 R^2}{5} \left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1^4 \zeta_2^2} \right) \dot{\zeta}_1 + \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_1^3 \zeta_2^3} \right], \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_2} = \frac{m_1 R^2}{5} \left[\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1^3 \zeta_2^3} + \left(1 + \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^4} \right) \dot{\zeta}_2 \right], \\ p_\alpha &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{m_1 R^2}{5} [\dot{\alpha}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\zeta_1 \zeta_2], \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 R^2}{5} \left[(\dot{\varphi} + \dot{\psi})(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + 2\dot{\alpha}\zeta_1 \zeta_2 + \frac{5}{m} \dot{\varphi} r_1^2 \right], \\ p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{m_1 R^2}{5} [(\dot{\varphi} + \dot{\psi})(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + 2\dot{\alpha}\zeta_1 \zeta_2], \quad p_{r_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_1} = \frac{m_1 R^2}{m} \dot{r}_1. \end{aligned}$$

Выразим обобщенные скорости через обобщенные импульсы и координаты

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2) p_1 - \zeta_1 \zeta_2 p_2}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_2^2) p_2 - \zeta_1 \zeta_2 p_1}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \\ \dot{\alpha} &= \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\alpha - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{m}{m_1 R^2 r_1^2} (p_\varphi - p_\psi), \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} &= \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\psi - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\alpha}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2}, \quad \dot{r}_1 = \frac{m}{m_1 R^2} p_{r_1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в выражение для кинетической энергии (2.10), запишем функцию Гамильтона $H = T + \Pi$ в виде

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{2m_1 R^2} \left[\frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2) p_1^2 + (\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_2^2) p_2^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 p_1 p_2}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(p_\alpha^2 + p_\psi^2) - 4\zeta_1 \zeta_2 p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2} \right] + \frac{m}{2m_1 R^2} \left[p_{r_1}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{r_1^2} \right] + \Pi(\zeta_1, \zeta_2, \psi, r_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \quad i = 1, 2, \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} \quad (\alpha \varphi \psi r_1)$$

в развернутом виде выглядят так

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2) p_1 - \zeta_1 \zeta_2 p_2}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_2^2) p_2 - \zeta_1 \zeta_2 p_1}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2},$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\alpha - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{5}{m_1 R^2} \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\psi - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\alpha}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2} - \\
 &\quad - \frac{m}{m_1 R^2} \frac{p_\varphi - p_\psi}{r_1^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{m}{m_1 R^2} \frac{(p_\varphi - p_\psi)}{r_1^2}, \quad \dot{r}_1 = \frac{m}{m_1 R^2} p_{r_1}, \quad (4.3) \\
 \dot{p}_1 &= -\frac{5}{m_1 R^2} \left[\frac{\zeta_1 \zeta_2^2 (2\zeta_1^2 \zeta_2^4 + 1) p_1^2 + \zeta_1 \zeta_2^2 (\zeta_1^4 \zeta_2^2 - 1) p_2^2 + \zeta_2 (3\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 - \zeta_2^2) p_1 p_2}{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\zeta_1 (\zeta_1^2 + 3\zeta_2^2) (p_\alpha^2 + p_\psi^2) - 2\zeta_2 (3\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^3} \right] - \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1}, \\
 \dot{p}_2 &= -\frac{5}{m_1 R^2} \left[\frac{\zeta_1^2 \zeta_2 (\zeta_1^2 \zeta_2^4 - 1) p_1^2 + \zeta_1^2 \zeta_2 (2\zeta_1^4 \zeta_2^2 + 1) p_2^2 + \zeta_1 (3\zeta_1^4 \zeta_2^4 - \zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_1 p_2}{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta_2 (3\zeta_1^2 + \zeta_2^2) (p_\alpha^2 + p_\psi^2) - 2\zeta_1 (\zeta_1^2 + 3\zeta_2^2) p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^3} \right] - \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2}, \\
 \dot{p}_\alpha &= 0, \quad \dot{p}_\psi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}, \quad \dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{p}_{r_1} = \frac{m}{m_1 R^2} \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{r_1^3} - \frac{\partial \Pi}{\partial r_1},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} &= \frac{3\gamma m_1^2}{10R} \left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1^3 \zeta_2^2} \right) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_1^2 + \lambda) F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda)} - \\
 &\quad - \frac{\gamma m_1 m_2}{5R} \frac{m^3}{r_1^3} \left(2\zeta_1 \sin^2 \psi - \zeta_1 \cos^2 \psi + \frac{1}{\zeta_1^3 \zeta_2^2} \right), \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2} &= \frac{3\gamma m_1^2}{10R} \left(\zeta_2 - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^3} \right) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_2^2 + \lambda) F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda)} - \\
 &\quad - \frac{\gamma m_1 m_2}{5R} \frac{m^3}{r_1^3} \left(-\zeta_2 \sin^2 \psi + 2\zeta_2 \cos^2 \psi + \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^3} \right), \\
 F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda) &= \left(\frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} + \lambda \right) \sqrt{(\zeta_1^2 + \lambda)(\zeta_2^2 + \lambda) \left(\frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} + \lambda \right)}, \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} &= -\frac{3\gamma m_1 m_2}{5R} \frac{m^3}{r_1^2} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin \psi \cos \psi, \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial r_1} &= \frac{\gamma m_1 m_2 m}{R} \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{3m^2}{10r_1^4} \left[(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin^2 \psi + (2\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \cos^2 \psi - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

5. Уравнения движения в безразмерных переменных. Введем характерный размер времени T и безразмерное время $\tau = T^{-1}t$. Безразмерные обобщенные импульсы запишем в виде

$$\hat{p}_1 = \frac{T}{m_1 R^2} p_1, \quad \dots, \quad \hat{p}_{r_1} = \frac{T}{m_1 R^2} p_{r_1}.$$

Тогда, отбрасывая для упрощения записи шляпки над безразмерными обобщенными импульсами, запишем уравнения движения в безразмерной форме

$$\begin{aligned}
 \frac{d\zeta_1}{d\tau} &= 5 \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2) p_1 - \zeta_1 \zeta_2 p_2}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = 5 \frac{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_2^2) p_2 - \zeta_1 \zeta_2 p_1}{\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \\
 \frac{d\alpha}{d\tau} &= 5 \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\alpha - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2}, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = 5 \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\psi - 2\zeta_1 \zeta_2 p_\alpha}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2} - m \frac{p_\varphi - p_\psi}{r_1^2}, \\
 \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{m}{r_1^2} (p_\varphi - p_\psi), \quad \frac{dr_1}{d\tau} = m p_{r_1}, \\
 \frac{dp_1}{d\tau} &= -5 \left[\frac{\zeta_1 \zeta_2^2 (2\zeta_1^2 \zeta_2^4 + 1) p_1^2 + \zeta_1 \zeta_2^2 (\zeta_1^4 \zeta_2^2 - 1) p_2^2 + \zeta_2 (3\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 - \zeta_2^2) p_1 p_2}{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\zeta_1 (\zeta_1^2 + 3\zeta_2^2) (p_\alpha^2 + p_\psi^2) - 2\zeta_2 (3\zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^3} \right] - \\
 &\quad - \frac{3}{10} K_1 \left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1^3 \zeta_2^2} \right) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_1^2 + \lambda) F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda)} + \frac{K_2 m^3}{5r_1^3} \left(2\zeta_1 \sin^2 \psi - \zeta_1 \cos^2 \psi + \frac{1}{\zeta_1^3 \zeta_2^2} \right), \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= -5 \left[\frac{\zeta_1^2 \zeta_2 (\zeta_1^2 \zeta_2^4 - 1) p_1^2 + \zeta_1^2 \zeta_2 (2\zeta_1^4 \zeta_2^2 + 1) p_2^2 + \zeta_1 (3\zeta_1^4 \zeta_2^4 - \zeta_1^2 + \zeta_2^2) p_1 p_2}{(\zeta_1^4 \zeta_2^4 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta_2 (3\zeta_1^2 + \zeta_2^2) (p_\alpha^2 + p_\psi^2) - 2\zeta_1 (\zeta_1^2 + 3\zeta_2^2) p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^3} \right] - \\
 &\quad - \frac{3}{10} K_1 \left(\zeta_2 - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^3} \right) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_2^2 + \lambda) F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda)} + \frac{K_2 m^3}{5r_1^3} \left(-\zeta_2 \sin^2 \psi + 2\zeta_2 \cos^2 \psi + \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^3} \right), \\
 \frac{dp_\alpha}{d\tau} &= 0, \quad \frac{dp_\psi}{d\tau} = \frac{3K_2 m^3}{5r_1^3} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin \psi \cos \psi, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = 0, \\
 \frac{dp_{r_1}}{d\tau} &= m \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{r_1^3} - K_2 m \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{3m^2}{10r_1^4} \left[(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin^2 \psi + (2\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \cos^2 \psi - \frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \lambda) = \left(\frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} + \lambda \right) \sqrt{(\zeta_1^2 + \lambda)(\zeta_2^2 + \lambda) \left(\frac{1}{\zeta_1^2 \zeta_2^2} + \lambda \right)}, \quad K_i = \frac{\gamma m_i T^2}{R^3}, \quad i = 1, 2.$$

6. Приведение эллиптических интегралов к виду, удобному для вычислений на компьютере. Эллиптические интегралы, входящие в уравнения (5.1), в развернутом виде записываются так:

$$\alpha_i = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_i^2 + \lambda)(\zeta_3^2 + \lambda) \sqrt{(\zeta_1^2 + \lambda)(\zeta_2^2 + \lambda)(\zeta_3^2 + \lambda)}}, \quad i = 1, 2,$$

где $\zeta_3^2 = 1/(\zeta_1^2 \zeta_2^2)$. Заменой переменной $t^2 = \zeta_3^2 + \lambda$, $\lambda = t^2 - \zeta_3^2$, $d\lambda = 2t dt$ приводим интегралы к виду

$$\alpha_i = \frac{2\zeta_i^2}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2} \int_{\zeta_3}^{\infty} \frac{dt}{(\zeta_i^2 - \zeta_3^2 + t^2) \sqrt{(\zeta_1^2 - \zeta_3^2 + t^2)(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + t^2)}} - \\ - \frac{2\zeta_3^2}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2} \int_{\zeta_3}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{(\zeta_1^2 - \zeta_3^2 + t^2)(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + t^2)}}, \quad i = 1, 2.$$

Вводя параметры

$$h_i^2 = \frac{1}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2}, \quad i = 1, 2, \quad (6.1)$$

представим α_i , $i = 1, 2$ в виде $\alpha_i = 2\zeta_i^2 h_i^3 h_1 h_2 \beta_i - 2\zeta_3^2 h_i^2 h_1 \beta_3$, $i = 1, 2$, где

$$\beta_i = \int_{\zeta_3}^{\infty} \frac{h_i dt}{(1 + h_i^2 t^2) \sqrt{(1 + h_1^2 t^2)(1 + h_2^2 t^2)}}, \quad i = 1, 2, \\ \beta_3 = \int_{\zeta_3}^{\infty} \frac{h_1 dt}{h_1^2 t^2 \sqrt{(1 + h_1^2 t^2)(1 + h_2^2 t^2)}}. \quad (6.2)$$

В интегралах (6.2) введем новую переменную z по формулам

$$h_1 t = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad h_2 t = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (6.3)$$

Первую формулу (6.3) будем использовать для β_1 и β_3 , а вторую для β_2 . В результате интегралы (6.2) примут вид $\beta_1 = I_0 - I_1$, $\beta_2 = I_0^* - I_1^*$, $\beta_3 = I_{-1} - I_0$, где

$$I_i = \int_{\zeta_3/\zeta_1}^1 \frac{z^{2i} dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_1^2 z^2)}}, \quad i = -1, 0, 1, \\ I_i^* = \int_{\zeta_3/\zeta_2}^1 \frac{z^{2i} dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_2^2 z^2)}}, \quad i = 0, 1, \\ k_1^2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2}, \quad k_2^2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2^2}.$$

Используя (6.1), выразим k_1^2 и k_2^2 через $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$:

$$k_1^2 = \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_3^2}, \quad k_2^2 = \frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{\zeta_1^2 - \zeta_3^2}.$$

1. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А. Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.-Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2010. – С. 304-363.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – **3**. – № 9. – С. 424-428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Там же. – 1977. – **3**. – № 11. – С. 522-525.
5. Сمارт У.М. Небесная механика. – М.: Мир, 1965. – 504 с.
6. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
7. Судаков С.Н. Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 67-71.
8. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.

S. N. Sudakov

The Hamilton equations of the plane motion of the liquid ellipsoid and the spherically symmetric rigid body.

The problem of motion of the ellipsoidal mass of liquid and spherically symmetric rigid body was investigated at this paper. The center of mass of liquid and center of mass of the rigid body perform the plane motion. The motion of liquid is homogeneous rotational. The direction of vector of vortex is orthogonal to the plane of motion of the center mass of liquid and center mass of the rigid body. The equations of motion was derived in the form of Hamilton.

Keywords: *ellipsoid, liquid, vortex, rotation, gravitation, the problem of Roshe .*

С. М. Судаков

Рівняння Гамільну плоского руху рідинного еліпсоїду і сферично симетричного твердого тіла.

Розглянуто задачу про рух гравітуючої еліпсоїдальної маси ідеальної нестислої рідини і сферично симетричного твердого тіла. Вважається, що центри мас рідинного еліпсоїда і твердого тіла здійснюють рух у одній площині. Рух рідини вважається однорідним вихровим. Вектор вихру швидкості рідини направлено ортогонально площині руху центрів мас рідини та твердого тіла. Отримано рівняння руху у гамільтоновій формі.

Ключові слова: *еліпсоїд, рідина, вихор, гравітація, проблема Роша.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sudakov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.05.13

УДК 531.3

©2013. Б. В. Успенский, К. В. Аврамов

К НЕЛИНЕЙНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ФОРМАМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой статье предлагается модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Использование подхода, предложенного в этой статье, позволяет в два раза сократить размерность системы нелинейных алгебраических уравнений, из которой определяются нелинейные нормальные формы. Рассматриваются механические системы с двумя степенями свободы, описывающие колебания элементов двигателей внутреннего сгорания. Исследованы различные свойства нелинейных нормальных форм в этих системах.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы Шоу-Пьера, свободные колебания, кусочно-линейные системы.

1. Введение. Системы с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейными упругими характеристиками описывают широкий класс технических систем. Поэтому много было предпринято усилий для исследования кусочно-линейных систем [1-5]. Нелинейные нормальные формы (ННФ) в кусочно-линейных системах рассматриваются в работах [6, 7]. Общая теория нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера описана в работах [8, 9]. ННФ Каудерера-Розенберга подробно рассмотрены в монографии [10]. Обзор теоретических исследований по нелинейным формам представлен в статье [11], а обзор по прикладным исследованиям содержится в [12].

В этой статье предлагается новый вариант метода ННФ Шоу-Пьера для исследования кусочно-линейных систем. Основой для разработки этого алгоритма была статья [7]. В результате подхода, предложенного в настоящей статье, разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений для определения ННФ в два раза меньше по сравнению с системой, предложенной в [7].

2. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы и трilinearной упругой характеристикой:

$$M\ddot{z} + F(z) = 0; \quad (1)$$

$$F(z) = \begin{cases} K_1 z & \Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3; \\ K_2 z - b_2 & h^T z < \Delta_2; \\ K_3 z - b_3 & \Delta_3 < h^T z, \end{cases} \quad (2)$$

где z – вектор обобщенных координат системы размерности N ; $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$; h – вектор-столбец размерности N ; K_1, K_2, K_3 – положительно-определённые матрицы размерности $N \times N$; b_2, b_3 – вектора-столбцы, обеспечивающие непрерывность трilinearной упругой характеристики; $\Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$.

Теперь, следуя [6, 7], перейдем к главным координатам, соответствующим линейному участку системы $\Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{z} \leq \Delta_3$. Для этого введем замену переменных:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \quad (3)$$

где $\mathbf{Q}$ – матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_1$. Для простоты будем считать, что все собственные частоты системы, соответствующей матрице $\mathbf{K}_1$, различны. Относительно координат $\boldsymbol{\eta}$ система (1) приобретает следующий вид:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{Q} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ – диагональная матрица, состоящая из квадратов собственных частот. Кусочно-линейная вектор-функция $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}) = (f_1, \dots, f_N)$ принимает следующий вид:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \mathbf{Z}^{(2)}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_2 & \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \mathbf{Z}^{(3)}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_3 & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{Z}^{(2)} = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_2\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}^{(3)} = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_3\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}^{(2)} = \{z_{ij}^{(2)}\}$, $\mathbf{Z}^{(3)} = \{z_{ij}^{(3)}\}$.

3. Построение ННФ Шоу-Пьера. В соответствии с представлением об ННФ как инвариантных многообразиях [9], ННФ представляет собой семейство режимов движения системы, которые лежат на двумерном инвариантном многообразии в фазовом пространстве системы. В такой формулировке одна из пар фазовых координат системы выбирается в качестве ведущей, определяя специфический режим движения на многообразии. Остальные степени свободы считаются ведомыми координатами, зависящими от ведущих. Динамика поведения ведущих координат определяет движение ведомых через эти зависимости.

Следуя работам [8, 9], введем ведущие координаты $(\eta_i, \dot{\eta}_i)$. Для этих координат воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\eta_i(t) = a(t)\cos\phi(t); \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t)\sin\phi(t). \quad (6)$$

Тогда ведомые координаты выражаются через уравнения, описывающие нелинейную нормальную форму:

$$\begin{aligned} \eta_j(a, \phi) &= P_j(a, \phi); \\ \dot{\eta}_j(a, \phi) &= R_j(a, \phi); j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Движения на ННФ описываются следующей динамической системой:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{f_i}{\omega_i} \sin\phi; \\ \dot{\phi} &= \omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos\phi. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $P_j(a, \phi)$ из (7) разложим по ортонормированной системе базисных функций:

$$P_j(a, \phi) = \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} T_{l,m}(a, \phi), \quad (9)$$

где $T_{l,m}(a, \phi) = A_l(a) \cos(m-1)\phi$; $A_l(a), l = 1, \dots, N_a$ – система ортогональных на интервале $[a_{1,0}; a_{2,0}]$ базисных функций; $C_j^{(l,m)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подчеркнем, что в работах [7-9] производилось разложение функции $R_j(a, \phi)$ по системе ортонормированных функций. В предлагаемом здесь подходе это разложение не используется, что сокращает в два раза размерность разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений. В этом состоит основное преимущество предлагаемого здесь метода.

Используя соотношения (7, 9) и правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} (A_l' \cos[(m-1)\phi] \cdot \dot{a} - A_l(m-1) \sin[(m-1)\phi] \cdot \dot{\phi}); \\ \ddot{\eta}_j &= \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} (\cos[(m-1)\phi] [A_l'' \dot{a}^2 + \\ &+ A_l' \ddot{a} - A_l(m-1)^2 \dot{\phi}^2] - \sin[(m-1)\phi] [2(m-1) A_l' \dot{a} \dot{\phi} + A_l \ddot{\phi}]). \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения первых производных, входящих в соотношения (10), использовались уравнения (8). Для расчета вторых производных использовались следующие соотношения:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{f_i}{\omega_i} \sin \phi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\phi} \frac{\partial f_i}{\partial \phi} \right] \sin \phi + f_i \cos \phi \right); \quad (11)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{dt} \left(\omega_i - \frac{f_i}{a \omega_i} \cos \phi \right) = -\frac{1}{a \omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\phi} \frac{\partial f_i}{\partial \phi} - f_i \frac{\dot{a}}{a} \right] \cos \phi - f_i \sin \phi \cdot \dot{\phi} \right). \quad (12)$$

Отметим, что частные производные от функции f_i из (11, 12) определяются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial a} &= \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}; \end{cases} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \phi} &= \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} &= \begin{cases} \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} A_l' \cos(m-1)\phi & k \neq i; \\ \cos \phi & k = i; \end{cases} \\ \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} &= \begin{cases} \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} (m-1) A_l \sin(m-1)\phi & k \neq i; \\ -a \omega_i \sin \phi & k = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Основными неизвестными ННФ (9) являются коэффициенты $C_j^{(l,m)}$. Для их расчета к динамической системе (4) применим метод Галеркина, который выражается так:

$$\int_{a_{1,0}}^{a_{2,0}} \int_0^{2\pi} \{\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\boldsymbol{\eta})\} T_{l,m} d\alpha d\phi = 0$$

$$j = 1, \dots, N; j \neq i;$$

$$l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\phi.$$
(14)

В уравнении (14) вместо вторых производных вводят соотношения (10, 11, 12).

Система (14) представляет собой систему $(N-1)N_a N_\phi$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $(N-1)N_a N_\phi$ коэффициентов $C_j^{l,m}$. Если эти коэффициенты рассчитаны, то ННФ (9) приближенно определена. После определения ННФ, исследуется динамика на ней. Динамика на форме описывается системой (8).

Для численного решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона. Интегрирование в (14) осуществляется по области $a \in [a; a_0], \phi \in [0; 2\pi]$. Область интегрирования $a \in [0; a_0]$ разбивается на N_s участков $[a_j; a_{j+1}]$; $j = 1, \dots, N_s$; $a_1 = 0$; $a_{N_s+1} = a_0$. На каждом участке строится своя система ортогональных базисных функций $A_l, l = 1, \dots, N_a$. Следуя [7-9], на каждом участке воспользуемся линейными базисными функциями:

$$A_1(a) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j}; A_2(a) = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j}.$$

Таким образом, в результате выполнения вышеописанной процедуры на каждой из полос $[a_j; a_{j+1}]$ может быть найдена ННФ в виде (6)-(10). ННФ системы на интервале $a \in [0; a_0]$ представляет собой объединение ННФ для всех участков $[a_j; a_{j+1}]$.

Для того, чтобы найти выражение исходных координат $\mathbf{z}$ через параметры a, ϕ , следует применить линейное преобразование координат (3) к найденной форме.

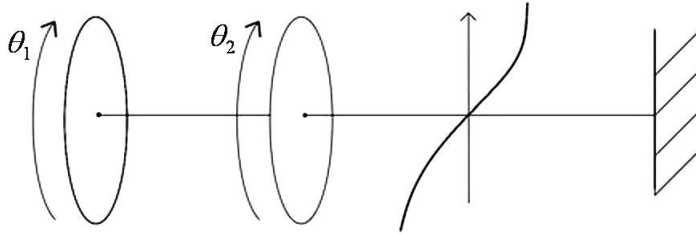


Рис. 1. Механическая система

4. Численный анализ механических систем с конечным числом степеней свободы. С помощью нелинейных нормальных форм исследуем крутильные колебания силовых передач двигателей внутреннего сгорания с противоположно движущимися поршнями. Модели таких систем рассмотрены в работах [13-15]. Крутильные колебания опишем системой с кусочно-линейной упругой характеристикой,

представленной на рис. 1. Эта система описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_1(\theta_2 - \theta_1) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - c_1(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1 \theta_2 & \theta_2 < \Delta; \\ c_2 \theta_2 - \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \quad (16)$$

где θ_1, θ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебания двух коленчатых валов двигателя; c_1 – жесткость зубчатой передачи между коленчатыми валами. Билинейная упругая характеристика $f(\theta_2)$ описывает нелинейную упругую муфту.

Численный анализ проводился для следующих значений параметров системы:

$$c_1 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}; \Delta = 1.04 \text{ rad}; I_1 = 0.3 \text{ kg/m}^2; I_2 = 0.45 \text{ kg/m}^2. \quad (17)$$

Собственные частоты линейных колебаний системы с малыми амплитудами таковы:

$$\omega_1 = 18.25 \text{ rad/s}; \omega_2 = 44.72 \text{ rad/s}.$$

Проводились расчеты ННФ с помощью подхода представленного выше. Результаты

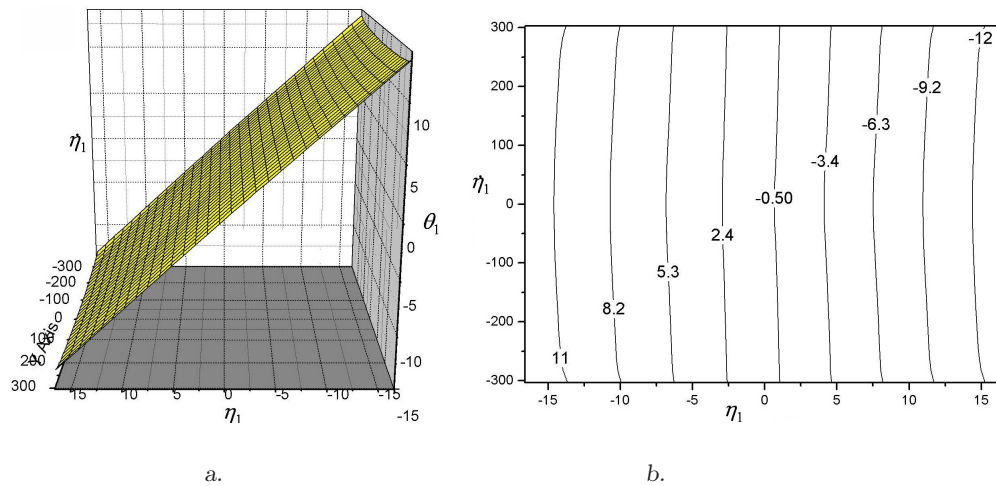


Рис. 2. Нелинейная нормальная форма для случая $c_2 = 0.5c_1$; на рисунке а представлена поверхность в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$, а на рисунке б показаны линии уровня этой поверхности

расчетов для $c_2 = 0.5c_1$ приводится на рис. 2. На рис. 2а представлена ННФ в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Из этого рисунка следует, что ННФ достаточно близка к плоскости. Напомним, что плоскостью является нормальная форма линейной системы. Для исследования отличия нелинейной нормальной формы (рис. 2а) от плоскости строились линии уровня. Они представлены на рис. 2б. Как видно из этого рисунка, линии уровня отличаются от прямых, что свидетельствует о влиянии нелинейности

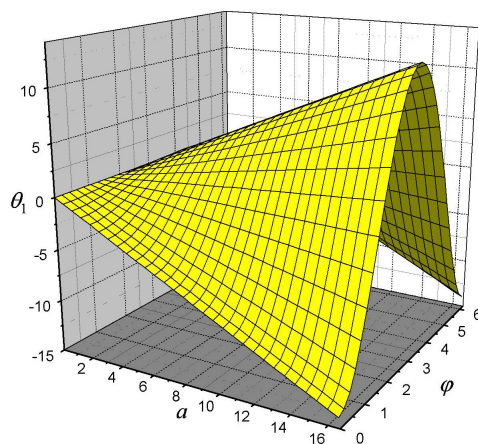


Рис. 3. ННФ в пространстве a, ϕ, θ_1

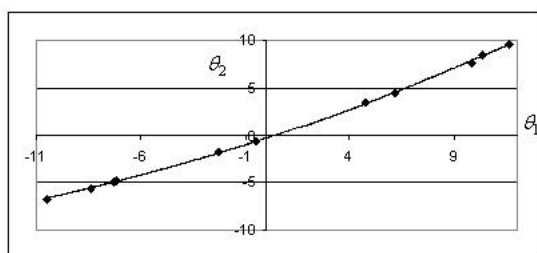


Рис. 4. ННФ в конфигурационном пространстве

на вид ННФ. Следуя работам [7-9], ННФ (рис. 2а) построим в системе координат a, ϕ, θ_1 . Результаты расчета представлены на рис. 3.

Полученная ННФ перестраивается в конфигурационном пространстве [11] обобщенных координат системы (15). Результаты расчетов представляются сплошной линией на рис. 4. Итак, исследуемая ННФ также является формой Каудерера-Розенберга, так как ее можно представить в виде однозначной функции $\theta_2(\theta_1)$. Отметим некоторые свойства нормальной формы Каудерера-Розенберга. Во-первых, эта нормальная форма не проходит через точку $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Во-вторых, эта нормальная форма удовлетворяет соотношению: $|\max \theta_1| \neq |\min \theta_1|$. Оба эти свойства объясняются несимметричностью билинейной упругой характеристики рассматриваемой динамической системы.

Для подтверждения правильности расчетов нелинейной нормальной формы проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме. Результаты расчетов представлены на рис. 4 точками. Близость результатов, полученных различными методами, свидетельствует, что нелинейная нормальная форма получена правильно. На рис. 5 сплошной линией представлены движения системы $\theta_1(t)$ на нелинейной нормальной форме, а точками показаны результаты прямого численного интегрирования систе-

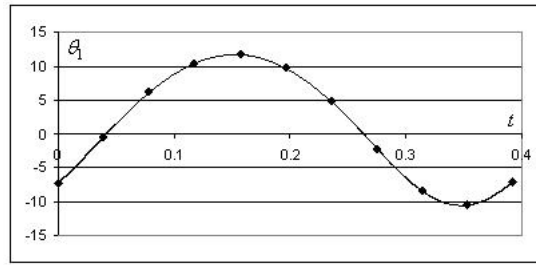


Рис. 5. Колебания системы с течением времени

мы (14) из начальных условий, соответствующих ННФ. Колебания, полученные из ННФ, и результаты прямого численного интегрирования системы (14) близки.

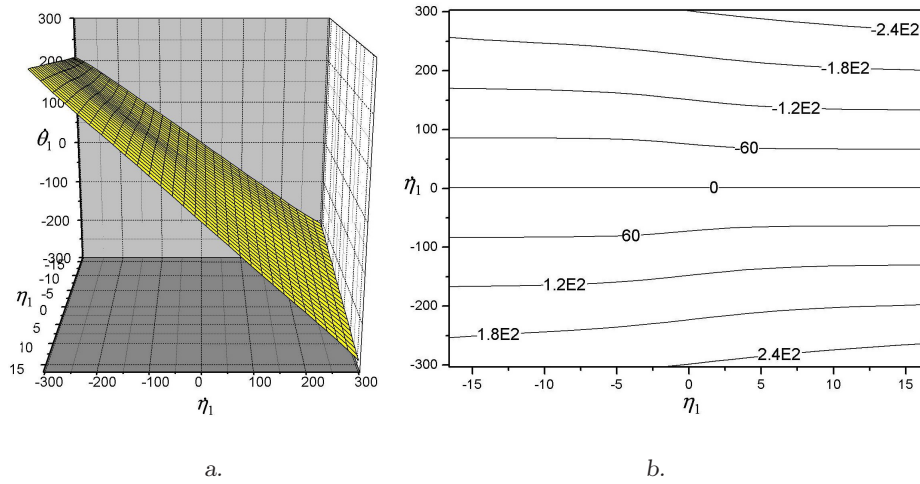


Рис. 6. ННФ в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$

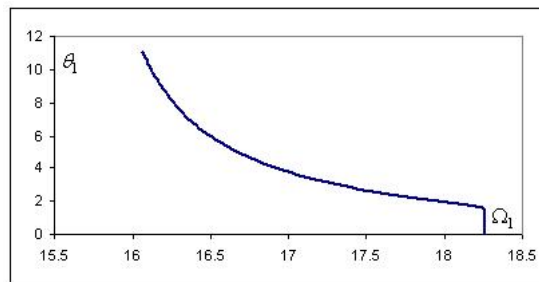


Рис. 7. Скелетная кривая колебаний θ_1

Как следует из рис. 2, ННФ билинейной системы близка к плоскости в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Подчеркнем, что эта ННФ значительно больше отклоняется от плоскости, если ее изобразить в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$. Эта поверхность изобража-

жена на рис. 6а. На рис. 6б показаны линии уровня. В этом случае они значительно отличаются от прямых.

ННФ рассчитывались для разных значений амплитуд колебаний a_0 . Для каждой амплитуды определялась частота движений на ННФ Ω_1 . Результаты такого расчета представлены на скелетной кривой (рис. 7). Теперь рассмотрим ННФ крутильных

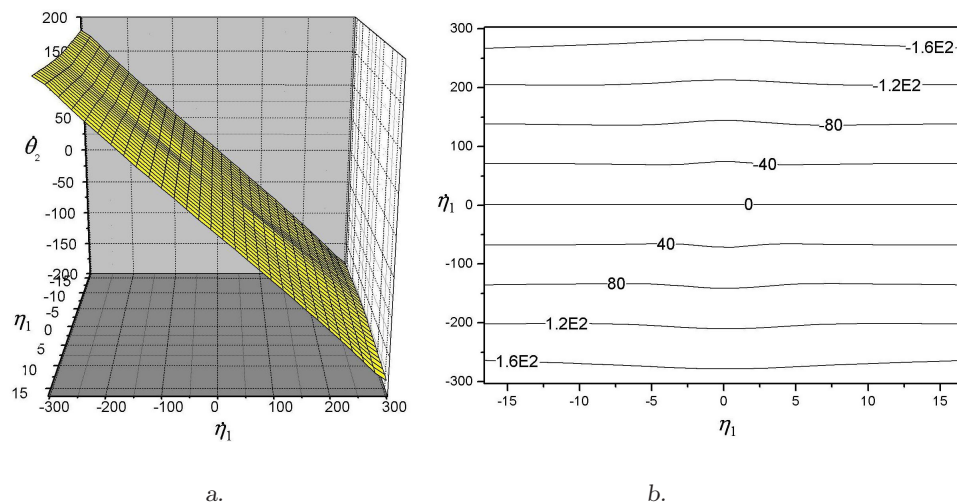


Рис. 8. ННФ системы с трилинейной упругой характеристикой

колебаний механической системы (15) с трилинейной упругой характеристикой, которая имеет следующий вид:

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_2\theta_2 + \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \leq -\Delta; \\ c_1\theta_2 & -\Delta < \theta_2 < \Delta; \\ c_2\theta_2 - \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим ННФ системы с нелинейностью (18) для параметров (17) при $c_2 = 0.7c_1$.

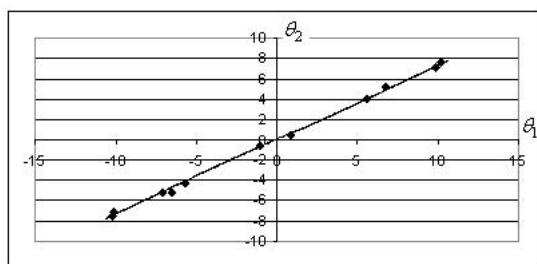


Рис. 9. Нелинейная нормальная форма Каудерера–Розенберга

ННФ этой системы в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_2)$ представлена на рис. 8а. На рис. 8б показаны линии уровня этой поверхности. Полученная ННФ близка к плоскости.

На рис. 9 показана эта же ННФ в конфигурационном пространстве θ_1, θ_2 . Итак, ННФ Каудерера-Розенберга $\theta_2(\theta_1)$ проходит через начало координат. Более того, она является симметричной относительно начала координат. Все эти свойства ННФ являются следствием симметричности трилинейной упругой характеристики. Для проверки правильности расчета ННФ (рис. 9) проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, которые находятся на ННФ. Результаты прямого численного интегрирования представлены точками на рис. 9. Близость результатов, полученных двумя методами, свидетельствует о правильности проведенных расчетов.

5. Заключение. В этой статье предложен альтернативный работам [6, 8] подход к расчету нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера в кусочно-линейной системе. В предлагаемом подходе разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений в два раза меньше аналогичной системы, рассмотренной в статье [7]. Показано, что в модальных координатах одного из линейных участков ННФ близка к плоскости. Она может существенно отличаться от плоскости, если ее перестроить в пространстве, в которое будут входить как модальные координаты одного линейного участка, так и обобщенные скорости исходной механической системы. Из результатов численного интегрирования следует, что ННФ в кусочно-линейных системах могут быть представлены в виде модальных линий в конфигурационном пространстве. Эти ННФ являются формами Каудерера-Розенберга.

1. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator // Journal of Sound and Vibration. – 1983. – 1. – P. 129-155.
2. Natsiavas Stability and Bifurcation Analysis for Oscillator with Motion Limiting Constraints // Journal of Sound and Vibration, – 1990. – 1. – P. 97-102.
3. Li G.H., Rand R.H., Moon F.C. Bifurcation and Chaos in a forced zero-stiffness impact oscillator // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 1990. – 4. – P. 417-432.
4. Bishop R.S. Impact oscillators // Phil. Trans. R. Soc. – 1994. – A347. – P. 347-351.
5. Ostrovsky L.A., Starobinets I.M. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator // Chaos. – 1995. – 5(3). – P. 496-500.
6. Chen S.L., Shaw S.W. Normal modes for piecewise linear vibratory systems // Nonlinear Dynamics, – 1996. – 10. – P. 135-164.
7. Jiang D., Pierre C., Shaw S.W. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – 272. – P. 869-891.
8. Shaw S.W., Pierre C. Normal modes for non-linear vibratory systems. // Journal of Sound and Vibration, – 1993. – 164. – P. 85-124.
9. Pesheck E., Pierre C., Shaw S.W. A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – 249. – P. 971-993.
10. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V. and Zevin A. Normal modes and localization in nonlinear systems. – New-York: Wiley. – 1996.
11. Mikhlin Yu., Avramov K.V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // Appl. Mech. Review. – 2010. – 63. – P. 4-20.
12. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Review (in press).
13. Avramov K.V., Karaban V.N. Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics // International Applied Mechanics. – 1997. – 33(7). – P. 548-588.
14. Avramov K.V. Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces

// International Applied Mechanics. – 2002. – 38(9). – P. 1151-1156.

15. Avramov K. V., Belomyttsev A. S., Karaban V. N. Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics // International Applied Mechanics. – 1994. – 30(5). – P. 396-402.

B. V. Uspensky, K. V. Avramov

On Nonlinear Normal Modes of Piecewise-Linear Systems' Free Vibrations.

The paper is devoted to a modification of nonlinear normal modes technique by Shaw and Pierre for analysis of mechanical systems with piecewise-linear elastic response behavior. The approach that is introduced in the paper results in reducing of the dimensionality of the nonlinear system for determination nonlinear modes twice. Effectiveness of introduced technique is demonstrated at 2-DOF mechanical systems that simulate vibrations of elements of internal combusting engines. Properties of nonlinear normal modes are investigated in such systems.

Keywords: *Shaw-Pierre nonlinear normal modes, free vibrations, piecewise-linear systems.*

Б. В. Успенський, К. В. Аврамов

До нелінійних нормальних форм вільних коливань кусково-лінійних систем.

У статті запропоновано модифікацію методу нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра для дослідження механічних систем з кусково-лінійними пружними характеристиками. Використання викладеного у статті підходу дозволяє вдвічі скоротити розмірність системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення нелінійних нормальних форм. Розглядаються механічні системи з двома ступенями свободи, які описують коливання елементів двигунів внутрішнього згоряння. Досліджено властивості нелінійних нормальних форм у цих системах.

Ключові слова: *Нелінійні нормальні форми Шоу-П'єра, вільні коливання, кусково-лінійні системи.*

Национальный технический ун-т „Харьковский политехнический институт“

Получено 16.11.12

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Uspensky.kubes@gmail.com