УДК 517.9

В. А. Солонников, Е. В. Фролова

ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПЛОСКОМ УГЛЕ

Построена и оценена в весовых соболевских пространствах гармоническая функция в бесконечном угле на плоскости, удовлетворяющая на одной стороне угла условию Дирихле или Неймана, а на другой — условию

$$\frac{\partial u}{\partial n}+h\frac{\partial u}{\partial r}+\sigma u=g,\quad \mathrm{Re}\,\sigma\geqslant 0.$$

Полученный результат оказывается полезным при изучении контактной задачи Стефана.

Пусть d_θ — угол раствора θ на плоскости $\mathbb{R}^2$; $d_\theta=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: r>0,\ 0<\varphi<\theta\}$ (здесь (r,φ) — полярные координаты точки (x_1,x_2), $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\varphi=\mathrm{tg}\,\frac{x_2}{x_1}$, $\varphi\in[0,2\pi))$; $\gamma_0=\{r>0,\varphi=0\}$ и $\gamma_\theta=\{r>0,\varphi=\theta\}$ — стороны угла.

В данной работе рассматриваются задачи

$$\Delta u=0\quad(x\in d_\theta),$$
$$u|_{\gamma_\theta}=0,\quad -\frac{\partial u}{\partial x_2}+h\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sigma u|_{\gamma_0}=f \tag{1}$$

и

$$\Delta v=0\quad(x\in d_\theta),$$
$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\gamma_\theta}=0,\quad -\frac{\partial v}{\partial x_2}+h\frac{\partial v}{\partial x_1}+\sigma u|_{\gamma_0}=g, \tag{2}$$

в которых h — вещественный параметр, σ — комплексное число с неотрицательной вещественной частью. Устанавливаются теоремы о разрешимости этих задач в пространствах $H^k_\mu(d_\theta)$ и $L^k_\mu(d_\theta)$. ($\mu\in\mathbb{R}$, $k\geqslant 0$, целое). $H^k_\mu(d_\theta)$ является гильбертовым пространством функций, заданных в d_θ, норма в котором определяется формулой

$$\|u\|^2_{H^k_\mu(d_\theta)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{d_\theta}|\mathcal{D}^\alpha u|^2\cdot|x|^{2\mu+2|\alpha|-2k}dx.$$

В $H^k_\mu(d_\theta)$ плотно множество гладких финитных функций, исчезающих в окрестности начала координат. Пространство $L^k_\mu(d_\theta)$ мы определим как замыкание множества гладких финитных функций в норме

$$\|u\|^2_{L^k_\mu(d_\theta)}=\sum_{|\alpha|=k}\int_{d_\theta}|\mathcal{D}^\alpha u|^2|x|^{2\mu}dx.$$

Пространствами следов функций из $H^{k+1}_\mu(d_\theta)$ и $L^{k+1}_\mu(d_\theta)$ на γ_0 являются пространства $H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ и $L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ с нормами

$$\|u\|^2_{L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)}=\int_0^\infty r^{2\mu}dr\int_0^\infty\left|\frac{d^k u(r+\rho)}{dr^k}-\frac{d^k u(r)}{dr^k}\right|^2\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\|u\|^2_{H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)} = \|u\|^2_{L^{k-1/2}_\mu(\gamma_0)} + \sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty \left|\frac{d^{k-j}u}{dr^j}\right|^2 r^{2\mu-2j-1}dr.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Пусть в задаче (1) $h=\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\in(0,\pi)$, $\operatorname{Re}\sigma\geqslant 0$. Если μ и k удовлетворяют условию

$$-\frac{(\pi-\alpha)}{\theta} < \mu - k - 1 < \frac{\alpha}{\theta}, \tag{3}$$

то при любой $f\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ задача (1) имеет единственное решение $u\in \in H^{k+2}_\mu(d_\theta)$, такое, что $u|_{\gamma_0}\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ и выполняется оценка

$$\|u\|_{H^{k+2}_\mu(d_\theta)} + |\sigma|\,\|u\|_{H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)} \leqslant c_1\|f\|_{H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)}. \tag{4}$$

Если $f\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap H^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0)$, причем (μ,k) и (μ_1,k_1) удовлетворяют (3), то $u\in H^{k+2}_\mu(d_\theta)\cap H^{k_1+2}_{\mu_1}(d_\theta)$,

$$u|_{\gamma_0}\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap H^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0).$$

Теорема 2. Пусть в задаче (2) $h=\operatorname{tg}\beta$, $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\sigma\geqslant 0$.

1) Если число μ нецелое и

$$-\frac{\pi}{2\theta} < \mu - k - 1 < -\frac{\beta}{\theta}, \tag{5}$$

то при любой $g\in L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ задача (2) имеет единственное решение $v\in \in L^{k+2}_\mu(d_\theta)$ такое, что $v|_{\gamma_0}\in L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ и выполняется оценка

$$\|v\|_{L^{k+2}_\mu(d_\theta)} + |\sigma|\,\|v\|_{L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)} \leqslant c_2\|g\|_{L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)}. \tag{6}$$

Если $g\in L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap L^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0)$, причем (μ,k) и (μ_1,k_1) удовлетворяют (5), μ и μ_1 — нецелые, то $v\in L^{k+2}_\mu(d_\theta)\cap L^{k_1+2}_{\mu_1}(d_\theta)$, $v|_{\gamma_0}\in L^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap L^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0)$.

2) Если $\beta>0$ и

$$-\frac{\beta}{\theta} < \mu - k - 1 < 0, \tag{7}$$

то при любой $g\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$ задача (2) имеет единственное решение $v\in \in H^{k+2}_\mu(d_\theta)$, такое, что $v|_{\gamma_0}\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)$, выполнена оценка

$$\|v\|_{H^{k+2}_\mu(d_\theta)} + |\sigma|\,\|v\|_{H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)} \leqslant c_3\|g\|_{H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)} \tag{8}$$

и при $g\in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap H^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0)$ имеем $v\in H^{k+2}_\mu(d_\theta)\cap H^{k_1+2}_{\mu_1}(d_\theta)$, $v|_{\gamma_0}\in \in H^{k+1/2}_\mu(\gamma_0)\cap H^{k_1+1/2}_{\mu_1}(\gamma_0)$.

При $\sigma=0$ вопрос о разрешимости задач (1) и (2) решается известной теоремой В. А. Кондратьева [1]. Кроме того, с помощью этой теоремы можно легко распространить результаты теорем 1 и 2 на случай неоднородного уравнения и неоднородного граничного условия на γ_θ.

Теоремы 1 и 2 оказываются полезными при исследовании начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в двухгранном угле $D_\theta = = d_\theta\times\mathbb{R}^{n-2}\subset\mathbb{R}^n$, на одной грани которого задано классическое условие Дирихле или Неймана, а на другой — условие $a\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{b}\cdot\nabla u = f$ (см. по этому поводу работы Е. В. Радкевича [2—4]). После преобразования Лапласа по t оно переходит в $as\tilde{u}+\vec{b}\cdot\nabla\tilde{u}=\tilde{f}$ (т. е. в условие такого же типа, как в (1) и (2), причем параметр σ оказывается пропорциональным s). Теорема 1, в частности, позволяет ослабить ограничение, налагаемое на угол θ в работе [4].

Теоремы 1 и 2 доказываются явным решением задач (1) и (2). Для этого используется преобразование Меллина по переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, определяемое формулой

$$\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty r^{p-1} f(r)\, dr, \quad p = p_1 + ip_2. \tag{9}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_1 - i\infty}^{p_1 + i\infty} r^{-p} \widetilde{f}(p)\, dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^{-(p_1 + ip_2)} \widetilde{f}(p_1 + ip_2)\, dp_2.$$

Мы пользуемся следующими свойствами преобразования Меллина:

а) Теорема Планшереля

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2\mu - 1} dr = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = \mu} |\hat{f}(p)|^2 dp;$$

б) Норме $\|f\|_{H_\mu^{k+1/2}(R_+)}$ эквивалентна норма

$$\left(\int_{\operatorname{Re} p = \mu - k} |\hat{f}(p)|^2 (1 + |p|)^{2k+1} \frac{dp}{i} \right)^{1/2};$$

в) Для любой финитной функции $f \in C^m(R_+)$, как и для ее производных, определено преобразование Меллина (9) при $\operatorname{Re} p > 0$. Оно является аналитической функцией p в области $\operatorname{Re} p > 0$ и аналитически продолжается в область $\operatorname{Re} p > -m$ с исключенными точками $p = 0, -1, -2, \dots$ $\dots, -m + 1$, где имеет простые полюса с вычетами $\operatorname{Res}_{p=-j} \widetilde{f}(p) = f^{(j)}(0) \frac{1}{j!}$. При этом, если $p_i \in (-i, -i + 1)$, то

$$f(r) - P_{i-1}[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = p_i} \widetilde{f}(p)\, r^{-p} dp,$$

где $P_i[f] = f(0) + rf'(0) + \dots + \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, r^i$.

г) Если μ — нецелое число, то норме $\|f\|_{L_\mu^{k+1/2}(R_+)}$ эквивалентна норма $\left(\int_{\operatorname{Re} p = \mu - k} |\widetilde{f}(p)|^2 (1 + |p|)^{2k+1} dp \right)^{1/2}$, где в случае $\mu - k < 0$

$$\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty [f(r) - P_{[k-\mu]}[f]]\, r^{p-1} dr.$$

Опишем схему доказательства теорем 1 и 2. Применяя формально преобразование Меллина (9), можно свести задачи (1) и (2) к

$$\begin{gathered} \widetilde{u}_{\varphi\varphi}(p, \varphi) + p^2 \widetilde{u}(p, \varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \theta, \\ \widetilde{u}(p, \theta) = 0, \quad -\widetilde{u}_\varphi(p-1, 0) - h(p-1)\, \widetilde{u}(p-1, 0) + \sigma \widetilde{u}(p, 0) = \widetilde{f}(p); \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{v}_{\varphi\varphi}(p, \varphi) + p^2 \widetilde{v}(p, \varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \theta, \\ \widetilde{v}_\varphi(p, \theta) = 0, \quad -\widetilde{v}_\varphi(p-1, 0) - h(p-1)\, \widetilde{v}(p-1, 0) + \sigma \widetilde{v}(p, 0) = \widetilde{g}(p). \end{gathered} \tag{11}$$

Решения задач (10), (11) имеют вид

$$\widetilde{u}(p, \varphi) = d(p) \frac{\sin[p(\theta - \varphi)]}{\sin p\theta}, \quad \widetilde{v}(p, \varphi) = e(p) \frac{\cos[p(\theta - \varphi)]}{\cos p\theta},$$

причем $d(p)$ и $e(p)$ должны удовлетворять разностным уравнениям

$$\omega_1(p-1)\,d(p-1)+\sigma d(p)=\tilde{f}(p), \tag{12_1}$$

$$\omega_2(p-1)\,e(p-1)-\sigma e(p)=-\tilde{g}(p), \tag{12_2}$$

где

$$\omega_1(p)=p(\operatorname{ctg}p\theta-h)=-p\frac{\sin(p\theta-\alpha)}{\sin p\theta\cdot\sin\alpha},$$

$$\omega_2(p)=p(\operatorname{tg}p\theta+h)=p\frac{\sin(p\theta+\beta)}{\cos p\theta\cos\beta}.$$

Исследуем в классе аналитических функций уравнения (12) и соответствующие однородные уравнения

$$\omega_1(p-1)\,d_0(p-1)+\sigma d_0(p)=0, \tag{13_1}$$

$$\omega_2(p-1)\,e_0(p-1)-\sigma e_0(p)=0. \tag{13_2}$$

Разлагая $\omega_1(p)$ и $\omega_2(p)$ в бесконечные произведения с помощью известных формул $\sin z=z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$, $\cos z=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$, можно выразить в виде бесконечных произведений частные решения однородных уравнений (13)

$$d_0(p)=e^{i\pi p}\sigma^{-p}\mathcal{K}(p),\quad e_0(p)=\sigma^{-p}L(p),$$

здесь $\sigma^{-p}=e^{-p\ln\sigma}$, $\ln\sigma=\ln|\sigma|+i\arg\sigma$, $|\arg\sigma|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$$\mathcal{K}(p)=\frac{1}{\theta^{p-1/2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p+d_n)\,\Gamma(1+a_n-p)}{\Gamma(1+b_n-p)\,\Gamma(p+a_n)}\left(\frac{a_n^2}{b_nd_n}\right)^{p-\frac{1}{2}}e^{R_n}, \tag{14}$$

$$L(p)=\left(\theta\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}\right)^{p-\frac{1}{2}}\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{\beta}{\theta}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha_n-p)\,\Gamma(p+\gamma_n)}{\Gamma(p+\alpha_n)\,\Gamma(1+\rho_n-p)}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_n^2}{\rho_n\gamma_n}\right)^{p-\frac{1}{2}}e^{W_n}, \tag{15}$$

$$a_n=\frac{n\pi}{\theta},\quad b_n=\frac{(n-1)\pi+\alpha}{\theta},\quad d_n=\frac{n\pi-\alpha}{\theta},$$

$$R_n=-d_n\ln d_n+d_n+b_n\ln b_n-b_n;$$

$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2\theta},\quad \rho_n=\frac{n\pi-\beta}{\theta},\quad \gamma_n=\frac{n\pi+\beta}{\theta},$$

$$W_n=\rho_n\ln\rho_n-\rho_n-\gamma_n\ln\gamma_n+\gamma_n.$$

Бесконечные произведения (14) и (15) сходятся при любом p, отличном от полюсов, входящих в произведения Г-функций ($\Gamma(1+a_n-p)$, $\Gamma(p+d_n)$ или $\Gamma(1+\alpha_n-p)$, $\Gamma(p+\gamma_n)$ соответственно) и при $|p_2|\to\infty$ для них устанавливаются асимптотические формулы

$$\ln\mathcal{K}(p)=\left(p-\frac{1}{2}\right)\ln\omega_1(p)+c_4p+c_5\ln\left(p-\frac{\alpha}{\theta}\right)+O(1), \tag{16_1}$$

$$-\frac{(\pi-\alpha)}{\theta}<\operatorname{Re}p<1+\frac{\pi}{\theta},$$

$$\ln L(p)=\left(p-\frac{1}{2}\right)\ln p+\left(p-\frac{1}{2}\right)\ln\left[\operatorname{tg}p\theta+h\right]+c_6p+$$

$$+c_7\ln\left(p+\frac{\beta}{\theta}\right)]+O(1), \tag{16_2}$$

$$-\frac{\pi}{2\theta} < \operatorname{Re} p < \max\left(1, -\frac{\beta}{\theta}+1\right).$$

Общие решения однородных уравнений (13) имеют вид

$$\mathcal{D}_0(p) = d_0(p)\, E_1(p), \quad \mathcal{E}_0(p) = e_0(p)\, E_2(p), \tag{17}$$

где $E_1(p)$, $E_2(p)$ — аналитические, периодические с единичным периодом функции.

Метод построения решений разностных уравнений в виде бесконечных произведений ведет свое начало от работы Барнса [5] и был использован в работах [6—8] при исследовании однородных разностных уравнений, аналогичных (13).

Решения уравнений (12) мы будем искать в виде

$$d(p) = \mathcal{D}_0(p)\, y_1(p), \quad e(p) = \mathcal{E}_0(p)\, y_2(p),$$

где $\mathcal{D}_0(p)$ и $\mathcal{E}_0(p)$ — решения соответствующих однородных уравнений с подходящим образом выбранными $E_1(p)$ и $E_2(p)$. Тогда $y_1(p)$ и $y_2(p)$ — решения уравнений

$$y_1(p) - y_1(p-1) = \frac{\widetilde{f}(p)}{\sigma D_0(p)}, \tag{18$_1$}$$

$$y_2(p) - y_2(p-1) = \frac{\widetilde{g}(p)}{\sigma \mathcal{E}_0(p)}. \tag{18$_2$}$$

Видоизменяя формулу из монографии Милна — Томпсона [9, с. 222—226], записываем решение уравнения $y(p) - y(p-1) = F(p)$ в виде

$$y(p) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_0} F(p+\xi)(\operatorname{ctg}\pi\xi + i)\, d\xi, \tag{19}$$

где Γ_0 — контур, идущий вдоль прямой $\operatorname{Re}\zeta = 0$ и обходящий точку $\xi = 0$ (полюс функции $\operatorname{ctg}\pi\xi$) по полуокружности малого радиуса справа от этой точки. Проверим (формально), что функция $y(p)$, заданная формулой (19), является решением указанного уравнения. Имеем

$$y(p) - y(p-1) = \frac{1}{2i}\left(\int\limits_{\Gamma_0} F(p+\xi)(\operatorname{ctg}\pi\xi + i)\, d\xi - \int\limits_{\Gamma_0} F(p-1+\xi) \times\right.$$

$$\left.\times (\operatorname{ctg}\pi\xi + i)\, d\xi\right) = \frac{1}{2i}\left(\int\limits_{\Gamma_0} F(p+\xi)(\operatorname{ctg}\pi\xi + i)\, d\xi -\right.$$

$$\left.- \int\limits_{\Gamma_{-1}} F(p+\xi')(\operatorname{ctg}\pi\xi' + i)\, d\xi'\right).$$

Если подынтегральное выражение убывает при $|\operatorname{Im}\xi| \to \infty$, а $F(q)$ аналитична в полосе $\operatorname{Re} p - 1 \leqslant \operatorname{Re} q \leqslant \operatorname{Re} p$, то правая часть равна

$$\pi F(p)\operatorname{Res}_{\xi=0}(\operatorname{ctg}\pi\xi + i) = \pi\frac{1}{\pi}E(p) = F(p).$$

Таким образом, для того чтобы формула (19) могла быть использована для решения уравнений (18), необходимо, чтобы полоса $\operatorname{Re} p - 1 \leqslant \leqslant \operatorname{Re} q \leqslant \operatorname{Re} p$ не содержала нулей $\mathcal{D}_0(q)$ или $\mathcal{E}_0(q)$. Полагая $E_1(p) = 1$, получаем следующую окончательную формулу для решения (12_1):

$$d(p) = \frac{1}{2i}\, d_0(p)\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\widetilde{f}(p+\xi)}{\sigma d_0(p+\xi)}(\operatorname{ctg}\pi\xi + i)\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_0}\frac{\mathscr{K}(p)}{\sigma K(p+\xi)} \times$$

$$\times \widetilde{f}(p+\xi)\, \sigma^{\xi}\, \frac{d\xi}{(e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi})}. \tag{20}$$

С помощью формулы (16) нетрудно убедиться в том, что при $|\operatorname{Im}\xi| \to \infty$ выражение $\frac{\mathscr{K}(p)}{\mathscr{K}(p+\xi)} \sigma^{\xi} \frac{1}{(e^{i\pi\xi}-e^{-i\pi\xi})}$ убывает экспоненциально, если $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$.

Решение задачи (1) мы определим теперь как обратное преобразование Меллина

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1} r^{-p} d(p) \frac{\sin p(\theta-\varphi)}{\sin p\theta}\, dp. \tag{21}$$

Уравнение $\Delta u = 0$ и условие $u|_{\varphi=\theta} = 0$ проверяются непосредственно. Кроме того,

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + h\frac{\partial u}{\partial r} + \sigma u|_{\varphi=0} = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\operatorname{Re} p = p_2} \omega_1(p)\, d(p)\, r^{-p-1} dp +$$

$$+ \int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1} \sigma d(p)\, r^{-p} dp\Big) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1 + 1} \omega_1(p-1)\, d(p-1)\, r^{-p} dp +$$

$$+ \int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1} \sigma d(p)\, r^{-p} dp\Big) = \frac{\sigma}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1} d(p)\, r^{-p} dp - \int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1+1} d(p)\, r^{-p} dp\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1+1} \widetilde{f}(p)\, r^{-p} dp. \tag{22}$$

Если положить $p_1 = \mu - k - 1$ и предположить, что выполнено условие (3), то $d(p)$ аналитична в полосе $p_1 \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant p_1 + 1$ и убывает при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$. Тогда правая часть (22) равна $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p = p_1+1} \widetilde{f}(p)\, r^{-p} dp$. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(r)$ финитна и обращается в нуль при малых r, тогда из (22) имеем $-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + h\frac{\partial u}{\partial r}\, \sigma u|_{\varphi=0} = f(r)$ и (21) действительно является решением задачи (1). Исходя из формулы (20), можно получить для функции $\widetilde{u}(p, 0) = d(p)$ оценку

$$|\sigma|^2 \int\limits_{\operatorname{Re} p = \mu - k} (1+|p|)^{2k+1} |d(p)|^2 \frac{dp}{i} \leqslant c_8 \int\limits_{\operatorname{Re} p = \mu - k} (1+|p|)^{2k+1} |\widetilde{f}(p)|^2 \times$$

$$\times \frac{dp}{i} \leqslant c_9 \|f\|^2_{H_\mu^{k+1/2}(\gamma_0)},$$

а затем, с помощью (12_1) доказать, что

$$\int\limits_{\operatorname{Re} p = \mu - k - 1} (1+|p|)^{2k+3} |d(p)| \frac{dp}{i} \leqslant c_{10} \|f\|^2_{H_\mu^{k+1/2}(\gamma_0)}.$$

В силу свойства б) преобразования Меллина это влечет за собой оценку

$$|\sigma| \|u\|_{H_\mu^{k+1/2}(\gamma_0)} + \|u\|_{H_\mu^{k+3/2}(\gamma_0)} \leqslant c_{11} \|f\|_{H_\mu^{k+1/2}(\gamma_0)},$$

а отсюда уже легко следует (4).

Ограничимся этой формальной схемой построения решения задачи (1) (строгое изложение доказательств приведено в работе [10]) и перейдем к рассмотрению задачи (2).

Будем считать (без ограничения общности) $g(r)$ гладкой финитной функцией, а в случае 2) теоремы 2, обращающейся в нуль при малых r. В этом последнем случае полагаем в (17) $E_2(p) = \sin p\pi e^{i p\pi}$ и, так как полоса $-\frac{\beta}{\theta} < \operatorname{Re} q < 1$ свободна от нулей и полюсов функции $L(q)\sin q\pi$, можно построить решение уравнения (12_2):

$$e(p) = \int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{\sigma} \frac{\sin p\pi L(p)}{\sin(p+\zeta)\pi L(p+\zeta)}\, \widetilde{g}(p+\zeta)\, \sigma^{\zeta} \frac{d\zeta}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}}$$

и затем определить $v(r, \varphi)$ как обратное преобразование Меллина от функции $e(p)\dfrac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}$. Точно так, как это сделано выше для задачи (1), можно показать, что $v(r, \varphi)$ является решением задачи 2 и имеет место оценка (8), если выполнено условие (7).

Обратимся к случаю 1) теоремы 2 и положим $E_2(p)=\sin\left(p+\dfrac{\beta}{\theta}\right)\times$ $\times\pi e^{ip\pi}$. Это приведет нас к другому решению уравнения (12_2), а именно

$$e'(p)=\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{\sigma}\frac{\sin\left(p+\dfrac{\beta}{\theta}\right)\pi L(p)}{\sin\left(p+\dfrac{\beta}{\theta}+\zeta\right)\pi L(p+\zeta)}\tilde{g}(p+\zeta)\,\sigma^{\zeta}\frac{d\zeta}{e^{i\pi\zeta}-e^{-i\pi\zeta}},$$

которое имеет смысл рассматривать при $-\dfrac{\pi}{2\theta}<\operatorname{Re}p<-\dfrac{\beta}{\theta}$, поскольку полоса $-\dfrac{\pi}{2\theta}<\operatorname{Re}q<-\dfrac{\beta}{\theta}+1$ свободна от нулей функции $\sin\left(q+\right.$ $\left.+\dfrac{\beta}{\theta}\right)\pi L(q)$. Предположим сначала, что $-\dfrac{\beta}{\theta}>-1$, и определим решение задачи (2) по формуле

$$v'(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_0}r^{-p}e'(p)\frac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp, \tag{23}$$

$$p_0\in\left(0, -\frac{\beta}{\theta}+1\right).$$

Сдвигая контур и принимая во внимание то, что в точках $p=-j$, $j=0, 1, 2, 3, \ldots$ функция $e'(p)$ имеет простые полюса, можем записать это решение в виде

$$v'(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_i}r^{-p}e'(p)\frac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp+\sum_{j=0}^{i-1}r^{j}\frac{\cos j(\theta-\varphi)}{\cos j\theta}\operatorname*{Res}_{p=-j}e'(p),$$

где $p_i\in\left(\max\left(-i, -\dfrac{\pi}{2\theta}\right), \min\left(1-\dfrac{\beta}{\theta}, -i+1\right)\right)$ и проверить выполнение краевого условия на γ_0.

Предположим теперь, что $-\dfrac{\beta}{\theta}<-1$. В этом случае $e'(p)$ может быть построено в полосе $-\dfrac{\pi}{2\theta}<\operatorname{Re}p<-\dfrac{\beta}{\theta}+1$. Пусть $m>0$ — такое целое число, что $-m<-\dfrac{\beta}{\theta}+1\leqslant -m+1$. Определим решение задачи (2) формулой

$$v'(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_m}r^{-p}e'(p)\frac{\cos p(\theta\varphi)}{\cos p\theta}\,dp-\sum_{j=0}^{m-1}t_j r^{j}\frac{\cos j(\theta-\varphi)}{\cos j\theta},$$

где t_j — постоянные, выбираемые так, чтобы выполнялось краевое условие. Число $p_m<1-\dfrac{\beta}{\theta}$ можно выбрать таким, что $p_{m+1}=p_m-1>$ $>-\dfrac{\pi}{2\theta}$, тогда

$$v'(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_{m+1}}r^{-p}e'(p)\frac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp+$$

$$+\operatorname*{Res}_{p=-m}e'(p)\,r^{m}\frac{\cos m(\theta-\varphi)}{\cos m\theta}-\sum_{j=0}^{m-1}t^{j}r^{j}\frac{\cos j(\theta-\varphi)}{\cos j\theta}$$

и
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial\varphi}+h\frac{\partial v'}{\partial r}+\sigma v'|_{\varphi=0}=\frac{1}{2\pi i}\Big(-\sigma\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_m}e'(p)\,r^{-p}dp+$$
$$+\sigma\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_{m+1}}e'(p)\,r^{-p}dp\Big)+m\operatorname*{Res}_{p=-m}e'(p)\,r^{m-1}(h-\operatorname{tg}m\theta)+\sigma\operatorname*{Res}_{p=-m}e'(p)\,r^{m}+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}[jr^{j-1}(\operatorname{tg}j\theta-h)-\sigma r^{j}]\,t_j+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=p_m}\tilde{g}(p)\,r^{-p}dp=g(r)+$$
$$+\Big\{m\operatorname*{Res}_{p=-m}e'(p)\,r^{m-1}(h-\operatorname{tg}m\theta)+\sum_{j=0}^{m-1}[jr^{j-1}(\operatorname{tg}j\theta-h)-$$
$$-\sigma r^{j}]\,t_j-\sum_{j=0}^{m-1}g^{(j)}(0)\frac{r^j}{j!}\Big\}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях r (чтобы выражение в фигурных скобках исчезло), мы последовательно, начиная с t_{m-1}, определяем постоянные t_j.

Что касается оценки (6), то она делается по той же схеме, что и в теореме 1; при этом нужно принять во внимание упомянутое выше свойство г) преобразования Меллина.

Замечание. При $0<\frac{\beta}{\theta}<1$ оба построенных выше решения задачи 2 как с помощью функции $e(p)$, так и $e'(p)$ могут при надлежащих ограничениях на $g(r)$ иметь конечный интеграл Дирихле в d_0. Так как $e(p)$ не имеет полюса в точке $p=0$, то первое из этих решений записывается в виде
$$v(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=0}r^{-p}e(p)\frac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp$$
и можно показать с помощью равенства Парсеваля, что
$$\|\nabla v\|_{L_2(d_\theta)}\leqslant c_{12}\Big(\int\limits_{\operatorname{Re}p=0}\frac{|p|^2}{1+|p|}\,|e(p)|^2\frac{dp}{i}\Big)^{1/2}<\infty.$$

В формуле (23) нельзя сдвинуть контур на мнимую ось, но это можно сделать после дифференцирования:
$$\frac{\partial v'}{\partial r}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=0}pe'(p)\,r^{-p-1}\frac{\cos p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial\varphi}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=0}pe'(p)\,r^{-p-1}\frac{\sin p(\theta-\varphi)}{\cos p\theta}\,dp,$$
поскольку функция $pe'(p)$ полюса на мнимой оси не имеет. Поэтому снова
$$\|\nabla v'\|_{L_2(d_\theta)}\leqslant c_{13}\Big(\int\limits_{\operatorname{Re}p=0}\frac{|p|^2}{1+|p|}\,|e'(p)|^2\frac{dp}{i}\Big)^{1/2}<\infty.$$

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1967.— 16.— С. 209—292.
2. *Радкевич Е. В.* Об операторных пучках контактных задач со свободной границей // Динамика сплошной среды.— 1988.— Вып. 86.— С. 79—87.
3. *Радкевич Е. В.* Условия дополнительности для контактных эллиптико-параболических краевых задач со свободной границей // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск, 1988.— С. 101—126.
4. *Радкевич Е. В.* Операторные пучки задачи Стефана // Мат. заметки.— 1990.— № 1.— С. 81—85.

5. *Barnes E. W.* The linear difference equation of the first order // Proc. London Math. Soc. Ser. 2.— 1904.— **2**.— P. 438—469.
6. *Васильев Б. А.* Решение стационарной задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии 3-го рода // Дифференц. уравнения.— 1970.— **6**, № 3.— С. 531—537.
7. *Васильев Б. А.* Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Там же.— 1984.— 20, № 3.— С. 530—533.
8. *Григорьев П. Л., Копилевич Ю. И.* Внутренние волны в двухслойной жидкости, заполняющей клиновидную область // ЖТФ. —1984. — **54**, № 3.— С. 425—433.
9. *Milne-Thomson L. M.* The calculus of finite differences—London, MacMillan, 1951.—551 p.
10. *Солонников В. А., Фролова Е. В.* О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее приложении к параболическим задачам // Алгебра и анализ.— 1990.— **2**.— С. 124—127.

Ленингр. отд-ние Мат.
ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР

Получено 14.11.89